Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2010, №2, с. 97–100 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421000123\0017*

Э.Г. КИРЬЯЦКИЙ

К ВОПРОСУ О ПРИБЛИЖЕНИИ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ

Аннотация. Пусть B — множество, обладающее следующими свойствами: если $z \in B$, то $z \pm 2\pi \in B$ и пересечение B с вертикальной полосой $0 \leq \mathrm{Re}\, x \leq \pi$ есть замкнутое ограниченное множество.

В данном сообщении рассматриваем вопрос о приближении непрерывной на B 2π-периодической функции $f(z)$ тригонометрическими многочленами $T_n(z)$. Установлено необходимое и достаточное условие для того, чтобы функция $f(z)$ была целой, и указана формула для вычисления ее порядка. Кроме того, представлены некоторые метрические свойства периодических множеств на плоскости.

Ключевые слова: тригонометрические многочлены, целая функция, порядок целой функции, числа Фекете.

УДК: 517.518

Abstract. Let a set B have the following properties: if $z \in B$, then $z \pm 2\pi \in B$ and the intersection of B and the strip $0 \leq \mathrm{Re}\, x \leq \pi$ is a closed and bounded set.

In this paper we study the approximation of a continuous on B and 2π-periodic function $f(z)$ by trigonometric polynomials $T_n(z)$. We establish the necessary and sufficient conditions for the function $f(z)$ to be entire and specify a formula for calculating its order. In addition, we describe some metric properties of periodic sets in a plane.

Keywords: trigonometric polynomials, entire function, order of entire function, Fekete numbers.

Введение.Пусть A — замкнутое ограниченное множество точек комплексной плоскости и $f(z)$ — непрерывная на множестве A функция. Обозначим через E_n^* наилучшее приближение функции $f(z)$ на множестве A, т. е.

$$\mathrm{E}_n^* = \min_{P_n(z)} \max_{z \in A} |f(z) - P_n(z)|,$$

где $P_n(z)$ — алгебраический многочлен степени не выше n. Дж. Уолшем была доказана

Теорема ([1]). *Пусть A — замкнутое ограниченное множество точек, имеющее положительную емкость и связное дополнение. Для того чтобы функция $f(z)$ была целой, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\mathrm{E}_n^*} = 0. \tag{1}$$

Эта теорема является обобщением результата С.Н. Бернштейна, который считал множество A отрезком. А.Г. Нафталевич обобщил результат Дж. Уолша, отбросив предположение

Поступили: полный текст 25.07.2008, краткое сообщение 05.04.2009.

о положительной емкости множества A. Следуя Фекете [2], рассмотрим функцию

$$V\left(z_0, \ldots, z_n\right) = \prod_{0 \leq k < l \leq n} |z_k - z_l|, \quad \text{где} \quad z_0, z_1, \ldots, z_n \in B.$$

При фиксированном n обозначим через V_n наибольшее значение этой функции, т. е.

$$V_n = \max_{z_0, \ldots, z_n \in \mathrm{A}} V_n\left(z_0, z_1, \ldots, z_n\right).$$

Числа $\alpha_n = V_{n+1}/V_n$ назовем числами Фекете множества A. Как показал М. Фекете [2], последовательность чисел $\sqrt[n]{\alpha_n}$, $n = 1, 2 \ldots,$ имеет конечный предел, равный емкости множества A. Имеет место установленная А.Г. Нафталевичем

Теорема ([3], с. 578)**.** *Пусть A — замкнутое ограниченное множество, и α_n, $n = 1, 2 \ldots,$ — его числа Фекете. Пусть также $f(z)$ — непрерывная на A функция, и E_n^* — наилучшее приближение функции $f(z)$ на множестве A алгебраическим многочленом $P_n(z)$ степени не выше n. Для того чтобы функция $f(z)$ была целой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{\mathrm{E}_n^*}{\alpha_n}} = 0. \tag{2}$$

Если (2) выполнено, то порядок ρ целой функции $f(z)$ можно вычислить по формуле

$$\rho = \overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\ln n}{\ln \sqrt[n]{\frac{\alpha_n}{\mathrm{E}_n^*}}}.$$

Если множество A имеет положительную емкость α, то $\sqrt[n]{\alpha_n} \to \alpha$, и поэтому (1) можно заменить равенством (2). Таким образом, теорема Нафталевича обобщает теорему Дж. Уолша в том смысле, что в ней не предполагается положительность емкости множества A.

Пусть теперь B — множество, обладающее следующими свойствами: если $z \in B$, то $z \pm 2\pi \in B$ и пересечение B с вертикальной полосой $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 2\pi$ есть замкнутое ограниченное множество. Через E_n обозначим наилучшее приближение непрерывной на B 2π-периодической функции $f(z)$ тригонометрическим многочленом

$$T_n\left(z\right) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos kz + b_k \sin kz\right)$$

степени не выше n, т. е.

$$\mathrm{E}_n = \min_{T_n(z)} \max_{z \in B} \left|f\left(z\right) - T_n\left(z\right)\right|.$$

Введем функцию

$$W\left(z_0, \ldots, z_n\right) = \prod_{0 \leq k < l \leq n} \sin \frac{z_k - z_l}{2}, \tag{3}$$

где $z_0, \ldots, z_n \in B$. Пусть

$$W_n = \max_{z_0, \ldots, z_n \in B} \left|W\left(z_0, \ldots, z_n\right)\right|.$$

В силу свойств множества B можем считать, что точки $z_0, \ldots, z_n$ лежат в вертикальной полосе $0 \leq \operatorname{Re} z \leq \pi$. Числа

$$\beta_n = \frac{W_{n+1}}{W_n}$$

назовем числами Фекете 2π-периодического множества B.

В данном сообщении приводятся некоторые простейшие метрические свойства периодических множеств на плоскости и рассматривается вопрос о приближении непрерывной на B 2π-периодической функции $f(z)$ тригонометрическим многочленом $T_n(z)$.

Рассмотрим функции от $z \in B$, имеющие вид

$$U_n\left(z; z_1, \ldots, z_n\right) = \prod_{s=1}^{n} \sin \frac{z - z_s}{2}. \tag{4}$$

Среди функций (4) с фиксированным n существует функция

$$U_n^*(z) = \prod_{s=1}^{n} \sin \frac{z - z_s^*}{2}, \quad z_s^* \in B,$$

с наименьшим максимумом модуля m_n на множестве B.

Положим $\tau_n = \sqrt[n]{m_{n+1}}$. Тогда последовательность чисел τ_n, $n = 1, 2 \ldots$, сходится к конечному пределу τ.

Теорема 1. *При любом натуральном n имеют место неравенства*

$$\tau_n = \sqrt[n]{m_{n+1}} \le \sqrt[n]{\beta_n} \le \sqrt[n]{n+2}\, e^{(1+\frac{1}{n})h} \sqrt[n]{m_{n+1}},$$

где $2h$ — диаметр проекции множества B на мнимую ось.

Следствие 1. Пусть $\tau = 0$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\beta_n} = 0.$$

Пусть $\tau > 0$. Тогда

$$\varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{\beta_n} \ge \tau > 0, \quad \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\beta_n} \le e^h \tau < \infty.$$

Свяжем аналитичность периодической функции $f(z)$ с поведением наилучшего приближения E_n функции $f(z)$ на множестве B тригонометрическими многочленами.

Теорема 2. *Для того чтобы непрерывная на множестве B 2π-периодическая функция $f(z)$ была целой, необходимо, чтобы выполнялось условие*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\mathrm{E}_n}{\beta_{2n}}} = 0, \tag{5}$$

и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{\mathrm{E}_n}{\beta_{2n+1}}} = 0. \tag{6}$$

Если оба условия (5), (6) выполнены, то порядок ρ, $\rho > 1$, целой функции $f(z)$ удовлетворяет соотношениям

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln\left(-\ln\left(\frac{\mathrm{E}_n}{\beta_{2n}}\right)\right)}{\ln n} \ge \frac{\rho}{\rho - 1} \ge \varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln\left(-\ln \frac{\mathrm{E}_n}{\beta_{2n+1}}\right)}{\ln n}.$$

Следствие 2. Если множество B таково, что $\tau > 0$, то для того чтобы непрерывная на B 2π-периодическая функция $f(z)$ была целой, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mathrm{E}_n} = 0.$$

Если это условие выполнено, то порядок ρ, $\rho > 1$, целой функции $f(z)$ можно вычислить по формуле

$$\frac{\rho}{\rho-1} = \varliminf_{n\to\infty} \frac{\ln(-\ln \mathrm{E}_n)}{\ln n}.$$

Литература

[1] Уолш Дж.Л. *Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области.* – М.: Ин. лит., 1961. – 508 с.

[2] Fekete M. *Über die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten* // Math. Zeitschrift. – 1923. – Bd. 17. – S. 228–249.

[3] Нафталевич А.Г. *О приближении аналитических функций алгебраическими многочленами* // Литовский матем. сб. – 1969. – Т. 9. – № 3. – С. 577–588.

Э.Г. Кирьяцкий

профессор, кафедра математического моделирования,
Вильнюсский технический университет,
Литовская республика, LT-10223, г. Вильнюс, ул. Саулетекио, д. 11,

`e-mail:` Eduard.Kiriyatzkii@takas.lt

E.G. Kir'yatskii

Professor, Chair of Mathematical Modelling,
Vilnius Technical University,
11 Sauletekio str, Vilnuis, LT-10223 Lithuania,

`e-mail:` Eduard.Kiriyatzkii@takas.lt