

УДК 514.16

ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНОЕ АФФИННОЕ
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВА $(T_2^0(M_n), \nabla^H)$
НАД МАКСИМАЛЬНО ПОДВИЖНЫМ
НЕПРОЕКТИВНОПЛОСКИМ ПРОСТРАНСТВОМ
 (M_n, ∇)

O.A. Монахова

Аннотация

В статье получено разложение произвольного инфинитезимального аффинного преобразования расслоения дважды ковариантных тензоров со связностью горизонтального лифта над максимально подвижным непроективноплоским пространством аффинной связности. Вычислена размерность алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований этого пространства.

1. Основные определения и факты

Рассмотрим гладкое класса C^∞ многообразие M_n и расслоенное пространство $T_2^0(M_n)$ дважды ковариантных тензоров над ним. Задание линейной связности на базе этого расслоения позволяет построить связность ∇^H – горизонтальный лифт связности ∇ на $T_2^0(M_n)$ [2]. ∇^H однозначно определяется условиями, аналогичными для горизонтального лифта связности в касательном и кокасательном расслоении [3]:

$$\nabla_{Q^V}^H W^V = 0, \quad \nabla_{X^H}^H Y^H = (\nabla_X Y)^H, \quad \nabla_{Q^V}^H X^H = 0, \quad \nabla_{X^H}^H Q^V = (\nabla_X Q)^V,$$

где Q , W – тензорные поля типа $(0, 2)$ на базе расслоенного пространства, X , Y – векторные поля на базе, X^H – горизонтальный лифт векторного поля X , Q^V – вертикальный лифт тензорного поля Q .

Известно, что для того чтобы произвольное векторное поле являлось инфинитезимальным аффинным преобразованием пространства аффинной связности необходимо и достаточно, чтобы производная Ли от объекта связности вдоль этого векторного поля обращалась в 0. Таким образом, произвольное векторное поле \tilde{X} является инфинитезимальным аффинным преобразованием пространства $(T_2^0(M_n), \nabla^H)$ тогда и только тогда, когда

$$L_{\tilde{X}} \nabla^H = 0. \tag{1}$$

Проинтегрировав систему (1), найдем необходимое и достаточное условие существования инфинитезимального аффинного преобразования пространства $(T_2^0(M_n), \nabla^H)$.

Теорема 1. Для того чтобы произвольное векторное поле \tilde{X} являлось инфинитезимальным аффинным преобразованием на расслоении $(T_2^0(M_n), \nabla^H)$, необходимо и достаточно, чтобы на M_n существовали тензорные поля $A \in \mathfrak{S}_0^3(M_n)$, $B \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$, $P \in \mathfrak{S}_2^2(M_n)$, $D \in \mathfrak{S}_2^0(M_n)$, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\tilde{X} = A^{H\gamma} + B^C + P^{V\gamma} + D^V, \tag{2}$$

$$\begin{cases} \nabla A = 0, \\ A * R = 0, \\ \nabla^2 D = 0, \\ \nabla P = 0, \\ L_B \nabla = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Каждое из векторных полей, входящих в разложение (2), самостоятельно является инфинитезимальным аффинным преобразованием пространства $(T_2^0(M_n), \nabla^H)$, если \tilde{X} является инфинитезимальным аффинным преобразованием этого пространства.

2. Расслоение $(T_2^0(M_n), \nabla^H)$ над максимально подвижным непроективноплоским пространством (M_n, ∇)

Рассмотрим расслоение дважды ковариантных тензоров над максимально подвижным непроективноплоским пространством \mathbb{R}^n с объектом связности

$$\Gamma_{jk}^i = \delta_1^i (\delta_j^2 \delta_k^3 + \delta_j^3 \delta_k^2) x^2, \quad i, j, k = \overline{1, n}.$$

Тензор кривизны этого пространства имеет компоненты

$$R_{jkl}^i = \delta_1^i \delta_j^2 (\delta_k^2 \delta_l^3 - \delta_k^3 \delta_l^2), \quad i, j, k, l = \overline{1, n}.$$

Пусть $\tilde{X} = A^{H\gamma} + B^C + P^{V\gamma} + D^V$ – произвольное инфинитезимальное аффинное преобразование связности ∇^H на $T_2^0(M_n)$. Тензорные поля $A \in \mathfrak{S}_0^3(M_n)$, $B \in \mathfrak{S}_0^1(M_n)$, $P \in \mathfrak{S}_2^2(M_n)$, $D \in \mathfrak{S}_2^0(M_n)$ удовлетворяют системе уравнений (3).

Проинтегрируем систему (3) и определим компоненты тензорных полей A , B , P , D на базе. Система (3) распадается на четыре независимые системы

$$\begin{cases} \nabla A = 0, \\ A * R = 0, \end{cases} \quad (4)$$

$$\nabla^2 D = 0, \quad (5)$$

$$\nabla P = 0, \quad (6)$$

$$L_B \nabla = 0. \quad (7)$$

Система (7) была проинтегрирована И.П. Егоровым в работе [1].

Рассмотрим смешанную систему дифференциальных и алгебраических уравнений (4). Найдем условия интегрируемости этой системы. Запишем систему (4) в развернутом виде:

$$\begin{cases} \nabla_i A^{lmk} = 0, \\ R_{rij}^k A^{lmr} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Условия полной интегрируемости этой системы имеют вид

$$\begin{cases} R_{rij}^l A^{rmk} + R_{rij}^m A^{lrk} = 0, \\ R_{rij}^k A^{lmr} = 0. \end{cases}$$

Подставим в систему компоненты тензора кривизны

$$\begin{cases} (\delta_i^2 \delta_j^3 - \delta_i^3 \delta_j^2)(\delta_1^l A^{2mk} + \delta_1^m A^{l2k}) = 0, \\ (\delta_i^2 \delta_j^3 - \delta_i^3 \delta_j^2) \delta_1^k A^{lm2} = 0. \end{cases}$$

Придав различные значения индексам, получим первую серию условий интегрируемости:

$$\begin{cases} A^{lm2} = 0, & l, m = \overline{1, n}, \\ A^{2pk} = 0, & k = \overline{1, n}, p = \overline{2, n}, \\ A^{q2s} = 0, & s = \overline{1, n}, q = \overline{2, n}, \\ A^{21r} + A^{12r} = 0, & r = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Чтобы получить вторую серию условий интегрируемости, продифференцируем каждое уравнение первой серии и подставим значения частных производных:

$$\partial_i A^{lmk} = -(\delta_1^2 \delta_r^3 + \delta_i^3 \delta_r^2)(\delta_1^l A^{rmk} + \delta_1^m A^{lrk} + \delta_1^k A^{lmr})x^2, \quad (9)$$

(9) является развернутой записью первого равенства системы (8). Каждое из уравнений второй серии является следствием некоторых уравнений первой серии, следовательно, система уравнений (4) имеет только одну серию условий интегрируемости.

Учитывая условия интегрируемости, получим общее решение системы (4):

$$A^{lmk} = -\frac{(x^2)^6}{8} \delta_1^l \delta_1^m \delta_1^k C^{333} + \frac{(x^2)^4}{4} (\delta_1^l \delta_1^m C^{33k} + \delta_1^l \delta_1^k C^{3m3} + \delta_1^m \delta_1^k C^{l33}) - \frac{(x^2)^2}{2} (\delta_1^l C^{3mk} + \delta_1^m C^{l3k} + \delta_1^k C^{lm3}) + C^{lmk},$$

где константы C^{ijk} удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{cases} C^{lm2} = 0, & l, m = \overline{1, n}, \\ C^{2pk} = 0, & k = \overline{1, n}, p = \overline{2, n}, \\ C^{q2s} = 0, & s = \overline{1, n}, q = \overline{2, n}, \\ C^{21r} + C^{12r} = 0, & r = \overline{1, n}. \end{cases}$$

Проинтегрируем систему дифференциальных уравнений (5). Обозначив $\nabla_k D_{ij}$ через S_{kij} , систему (5) дифференциальных уравнений второго порядка сведем к системе уравнений первого порядка:

$$\begin{cases} \nabla_k D_{ij} = S_{kij}, \\ \nabla_l S_{kij} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Условия интегрируемости системы (10) состоят из двух серий и имеют вид

$$\begin{cases} D_{12} + D_{21} = 0, \\ D_{1j} = 0, & j = \overline{1, n}, j \neq 2, \\ D_{i1} = 0, & i = \overline{1, n}, i \neq 2, \\ S_{k12} + S_{k21} = 0, & k = \overline{1, n}, \\ S_{1ab} = 0, & a, b = \overline{1, n}, \\ S_{rs1} = 0, & r, s = \overline{1, n}, s \neq 2, \\ S_{p1q} = 0, & p, q = \overline{1, n}, q \neq 2. \end{cases}$$

Проинтегрируем систему (10). Запишем эту систему в развернутом виде:

$$\begin{cases} S_{kij} = \partial_k D_{ij} - (\delta_k^2 \delta_i^3 + \delta_k^3 \delta_i^2) x^2 D_{1j} - (\delta_k^2 \delta_j^3 + \delta_k^3 \delta_j^2) x^2 D_{i1}, \\ \partial_l S_{kij} = x^2 ((\delta_l^2 \delta_i^3 + \delta_l^3 \delta_i^2) S_{k1j} + (\delta_l^2 \delta_j^3 + \delta_l^3 \delta_j^2) S_{ki1}). \end{cases}$$

Общее решение второй группы уравнений системы (10) имеет вид

$$S_{kij} = (\delta_i^3 \delta_j^2 - \delta_i^2 \delta_j^3) \frac{(x^2)^2}{2} C_{k12} + C_{kij}. \quad (11)$$

Константы C_{kij} удовлетворяют условиям

$$\begin{cases} C_{k12} + C_{k21} = 0, & k = \overline{1, n}, \\ C_{1ab} = 0, & a, b = \overline{1, n}, \\ C_{rs1} = 0, & r, s = \overline{1, n}, s \neq 2, \\ C_{p1q} = 0, & p, q = \overline{1, n}, q \neq 2. \end{cases} \quad (12)$$

Проинтегрируем первую группу уравнений системы (10) с учетом (11) и условий интегрируемости этой системы. Получим общее решение системы (5) в виде

$$D_{ij} = (\delta_i^3 \delta_j^2 - \delta_i^2 \delta_j^3) \left(\frac{(x^2)^2}{2} C_{k12} x^k - \frac{(x^2)^2}{2} C_{21} \right) + C_{kij} x^k + C_{ij}.$$

Константы C_{kij} определены условиями (12), а C_{ij} – следующими условиями:

$$\begin{cases} C_{12} + C_{21} = 0, \\ C_{1j} = 0, & j = \overline{1, n}, j \neq 2, \\ C_{i1} = 0, & i = \overline{1, n}, i \neq 2. \end{cases}$$

Рассмотрим систему уравнений (6). Общее решение этой системы имеет вид

$$\begin{aligned} P_{pq}^{ij} = & C_{pq}^{ij} + (\delta_p^3 C_{1q}^{ij} + \delta_q^3 C_{p1}^{ij} - \delta_1^i C_{pq}^{3j} - \delta_1^j C_{pq}^{i3}) \frac{(x^2)^2}{2} + \delta_1^i \delta_1^j \frac{(x^2)^4}{4} C_{pq}^{33} - \\ & - (\delta_1^j \delta_q^3 C_{p1}^{i3} + \delta_1^i \delta_p^3 C_{1q}^{3j} + \delta_1^i \delta_q^3 C_{p1}^{3j} + \delta_1^j \delta_p^3 C_{1q}^{i3}) \frac{(x^2)^4}{8} + \delta_1^i \delta_p^3 \delta_q^3 \left(-\frac{(x^2)^6}{24} C_{11}^{3j} + \frac{(x^2)^4}{4} C_{11}^{1j} \right) + \\ & + \delta_1^j \delta_p^3 \delta_q^3 \left(-\frac{(x^2)^6}{24} C_{11}^{i3} + \frac{(x^2)^4}{4} C_{11}^{i1} \right) + \delta_1^i \delta_1^j \delta_p^3 \left(\frac{(x^2)^6}{12} C_{1q}^{33} - \frac{(x^2)^4}{8} C_{1q}^{31} - \frac{(x^2)^4}{8} C_{1q}^{13} \right) + \\ & + \delta_1^i \delta_1^j \delta_q^3 \left(\frac{(x^2)^6}{12} C_{p1}^{33} - \frac{(x^2)^4}{8} C_{p1}^{31} - \frac{(x^2)^4}{8} C_{p1}^{13} \right) + \\ & + \delta_1^i \delta_1^j \delta_p^3 \delta_q^3 \left(\frac{(x^2)^8}{32} C_{11}^{33} - \frac{(x^2)^6}{12} C_{11}^{31} - \frac{(x^2)^6}{12} C_{11}^{13} - \frac{(x^2)^4}{4} C_{11}^{11} \right), \end{aligned}$$

где константы C_{ij}^{kl} удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} C_{12}^{11} + C_{21}^{11} - C_{21}^{21} - C_{22}^{12} &= 0, \\ C_{12}^{1j} + C_{21}^{1j} - C_{22}^{2j} &= 0, \quad j \neq 1, \\ C_{12}^{i1} + C_{21}^{i1} - C_{22}^{i2} &= 0, \quad i \neq 1, \\ C_{p1}^{11} - C_{p2}^{21} - C_{p2}^{12} &= 0, \quad p \neq 2, \\ C_{1q}^{11} - C_{2q}^{21} - C_{2q}^{12} &= 0, \quad q \neq 2, \\ C_{12}^{ij} + C_{21}^{ij} &= 0, \quad i, j \neq 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{pq}^{21} + C_{pq}^{12} &= 0, \quad p, q \neq 2, \\
C_{p1}^{i1} + C_{p2}^{i2} &= 0, \quad i \neq 1, \quad p \neq 2, \\
C_{1q}^{1j} - C_{2q}^{2j} &= 0, \quad j \neq 1, \quad q \neq 2, \\
C_{p1}^{1j} + C_{p2}^{2j} &= 0, \quad j \neq 1, \quad p \neq 2, \\
C_{1q}^{i1} - C_{2q}^{i2} &= 0, \quad i \neq 1, \quad q \neq 2, \\
C_{1q}^{ij} &= 0, \quad i, j \neq 1, \quad q \neq 2, \\
C_{p1}^{ij} &= 0, \quad i, j \neq 1, \quad p \neq 2, \\
C_{pq}^{2j} &= 0, \quad j \neq 1, \quad p, q \neq 2, \\
C_{pq}^{i2} &= 0, \quad i \neq 1, \quad p, q \neq 2, \\
C_{2q}^{22} &= 0, \quad q \neq 2, \\
C_{p2}^{22} &= 0, \quad p \neq 2, \\
C_{11}^{i1} &= 0, \quad i \neq 1, \\
C_{11}^{1j} &= 0, \quad j \neq 1.
\end{aligned}$$

Поднимем полученные тензорные поля A, B, P, D на расслоение дважды ковариантных тензоров с помощью соответствующих лифтов, указанных в разложении (2). Линейно независимых векторных полей вида $A^{H\gamma}$ существует $n^3 - 3n^2 + 4n - 2$. Одно из них имеет вид

$$X_{lm3}^{H\gamma} = \left(-\frac{(x^2)^2}{2}\delta_1^k + \delta_3^k\right)x_{lm}\partial_k^H.$$

Линейно независимых векторных полей вида $P^{V\gamma}$ существует $n^4 - 4n^3 + 12n^2 - 20n + 14$. Одно из них

$$(X_{i3}^{pq})^{V\gamma} = \left(-\frac{(x^2)^2}{2}\delta_1^j + \delta_3^j\right)x_{ij}\partial^{pq}.$$

Далее, линейно независимых векторных полей вида D^V существует $n^3 - 2n^2 + 2n + 1$. Одно из них

$$(X^{21})^V = \left(\frac{(x^2)^2}{2}(\delta_i^3\delta_j^2 - \delta_i^2\delta_j^3) + \delta_i^2\delta_j^1\right)\partial^{ij}.$$

Максимальное число линейно независимых векторных полей вида B^C равно $n^2 - 2n + 5$ [1].

На основе всего выше сказанного можно сформулировать

Предложение 1. *Размерность алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований расслоения дважды ковариантных тензоров над максимально подвижным непроективноплоским пространством аффинной связности размерности n равна $n^4 - 2n^3 + 8n^2 - 16n + 18$.*

Summary

O.A. Monakhova. Infinitesimal affine transformations of the space $(T_2^0(M_n), \nabla^H)$ over a maximally movable space (M_n, ∇) which is not projectively flat.

We consider the bundle $T_0^2 M$ of tensors of type $(2, 0)$ over a maximally movable affinely connected space (M, ∇) . On the total space of this bundle we take the horizontal lift ∇^C of the connection ∇ and construct decomposition for infinitesimal affine transformations of ∇^C . Also we find the dimension of the Lie algebra of infinitesimal transformations of this space.

Литература

1. *Егоров И.П.* Движения в пространствах аффинной связности. – Казань, 1965. – 206 с.
2. *Монахова О.А.* Горизонтальный лифт связности в расслоении дважды ковариантных тензоров // В сб. Движения в обобщенных пространствах. – Пенза, 2002. – С. 168–172.
3. *Yano K., Ishihara S.* Tangent and cotangent bundles. Differential geometry. – New York, 1973.

Поступила в редакцию
20.12.04

Монахова Оксана Александровна – сотрудник кафедры алгебры Пензенского государственного педагогического университета.

E-mail: *monakh@penza.com.ru*