УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 157, кн. 1 Физико-математические науки *2015*

УДК 519.63

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУХСЕТОЧНОГО МЕТОДА ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ РЕАКЦИИ – ДИФФУЗИИ С ПОГРАНИЧНЫМИ СЛОЯМИ

С.В. Тиховская

Аннотация

Исследуется двухсеточный метод для линейного эллиптического уравнения с малым параметром ε при старшей производной. Рассматривается ε-равномерно сходящаяся разностная схема на сетке Шишкина. Для разрешения разностной схемы используется двухсеточный метод с ε-равномерной интерполяционной формулой. Для повышения точности схемы применяется экстраполяция Ричардсона. Приводятся результаты численных экспериментов. При реализации двухсеточного алгоритма предлагаются различные итерационные методы.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение реакции – диффузии, сингулярное возмущение, сетка Шишкина, двухсеточный метод, экстраполяция Ричардсона, равномерная сходимость.

Введение

Рассматривается сингулярно возмущенная задача типа реакции – диффузии для линейного эллиптического уравнения в единичном квадрате. Такого рода задачи возникают в различных приложениях, и интерес к ним высок (см., например, [1–5] и приведенную там библиографию). Известно [6], что при выполнении условий согласования [2, 7] решение такого типа задач имеет регулярные экспоненциальные пограничные слои ширины порядка $O(\sqrt{\varepsilon})$ вблизи границы. Известно также [7, 8], что решение может иметь сингулярности в угловых точках области. При исследовании сингулярно возмущенных задач основным аспектом остается вопрос ε-равномерной сходимости разностных схем. Один из способов достижения равномерной сходимости является использование сгущающихся сеток [1, 4, 6, 9]. В настоящей работе рассматривается классическая пятиточечная разностная схема на сетке Шишкина, имеющая в случае выполнения условий согласования ε-равномерную точность порядка $O(\ln^2 N/N^2)$. Имеются также оценки и в случае более слабых ограничений на гладкость решения [7, 10].

Рассматриваемая разностная схема представляет собой систему линейных уравнений, которую можно решить на основе итераций. Двухсеточный метод является быстрым и эффективным методом для решения краевых задач, в том числе и нелинейных (см., например, [5, 11–14] и приведенную там библиографию). Идея двухсеточного метода заключается в предварительном решении задачи на более грубой вспомогательной сетке с последующей интерполяцией найденного решения на исходную сетку. Найденное на основе интерполяции сеточное решение далее принимается за начальное приближение для итераций на исходной сетке, что и приводит к уменьшению числа арифметических действий. Таким образом, возникает необходимость в ε-равномерной интерполяции разностного решения с сохранением полученной точности схемы на вспомогательной сетке [14–16]. При использовании двухсеточного алгоритма также можно практически без дополнительных вычислительных затрат повысить точность решения разностной схемы, если использовать решение на вспомогательной сетке для построения численного решения с помощью метода экстраполяции Ричардсона [14, 15, 17].

1. Постановка задачи

Рассмотрим линейную сингулярно возмущенную эллиптическую задачу

$$\begin{aligned} &\varepsilon u_{xx} + \varepsilon u_{yy} - c(x,y)u = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega; \\ &u(x,y) = g(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma, \end{aligned} \tag{1}$$

где $\Omega = (0,1)^2$, $\Gamma = \partial\Omega = \overline{\Omega} \setminus \Omega$, c, f, g – достаточно гладкие функции,

$$c(x,y) \geqslant 2\gamma > 0, \quad \varepsilon > 0. \tag{2}$$

Известно [1, 2, 6], что при выполнении условий (2) решение задачи (1) является равномерно ограниченным и имеет пограничные слои у границ $x = 0$, $x = 1$ и $y = 0$, $y = 1$.

В соответствии с [2], если $f, c \in C^{4,\lambda}(\overline{\Omega})$, $g \in C^{4,\lambda}(\partial\Omega)$ и выполнены условия согласования [8], то решение задачи (1) имеет регулярные экспоненциальные пограничные слои ширины $O(\sqrt{\varepsilon})$ вблизи $\partial\Omega$ и может быть представлено в виде

$$u = v + \sum_{i=1}^{4} w_i + \sum_{i=1}^{4} z_i,$$

где

$$\|v^{(k,j)}\| \leqslant C\left(1 + \varepsilon^{1-k/2-j/2}\right), \quad 0 \leqslant k+j \leqslant 4,$$

$$|w_1(x,y)| \leqslant Ce^{-\sqrt{\gamma/\varepsilon}y}, \quad |w_2(x,y)| \leqslant Ce^{-\sqrt{\gamma/\varepsilon}x},$$

$$|w_3(x,y)| \leqslant Ce^{-\sqrt{\gamma/\varepsilon}(1-y)}, \quad |w_4(x,y)| \leqslant Ce^{-\sqrt{\gamma/\varepsilon}(1-x)},$$

$$\max\{\|w_i^{(k,j)}\|, \|z_i^{(k,j)}\|\} \leqslant C\varepsilon^{-k/2-j/2}, \quad 0 \leqslant k+j \leqslant 4,$$

$$\|w_i^{(k,0)}\| \leqslant C\left(1 + \varepsilon^{1-k/2}\right), \quad i = 1,3,$$

$$\|w_i^{(0,k)}\| \leqslant C\left(1 + \varepsilon^{1-k/2}\right), \quad i = 2,4, \quad 0 \leqslant k+j \leqslant 4,$$

$$\|z_1(x,y)\| \leqslant Ce^{-\sqrt{\gamma/\varepsilon}y}e^{-\sqrt{\gamma/\varepsilon}x}, \quad \|z_2(k,j)\| \leqslant Ce^{-\sqrt{\gamma/\varepsilon}(1-y)}e^{-\sqrt{\gamma/\varepsilon}x},$$

$$\|z_3(k,j)\| \leqslant Ce^{-\sqrt{\gamma/\varepsilon}(1-y)}e^{-\sqrt{\gamma/\varepsilon}(1-x)}, \quad \|z_4(k,j)\| \leqslant Ce^{-\sqrt{\gamma/\varepsilon}y}e^{-\sqrt{\gamma/\varepsilon}(1-x)},$$

$$f^{(k,j)} = \frac{\partial^{(k+j)}f}{\partial x^k \partial y^j}.$$

Здесь и далее через C (возможно с индексами) обозначаем положительные постоянные, не зависящие от ε и числа шагов.

Для достижения ε-равномерной сходимости разностной схемы для задачи (1) используем схему центральных разностей на сетке Шишкина.

Зададим в области $\overline{\Omega}$ кусочно-равномерную сетку [6]:

$$\Omega_N = \{(x_i, y_j), i, j = \overline{0, N}, h_i = x_i - x_{i-1}, \tau_j = y_j - y_{j-1}, x_0 = 0, x_N = 1, y_0 = 0, y_N = 1\},$$

где

$$h_i = \frac{4\sigma_x}{N}, \quad 1 \leqslant i \leqslant \frac{N}{4}, \quad \frac{3N}{4} < i \leqslant N; \quad h_i = \frac{2(1-2\sigma_x)}{N}, \quad \frac{N}{4} < i \leqslant \frac{3N}{4},$$

$$\tau_j = \frac{4\sigma_y}{N}, \quad 1 \leqslant j \leqslant \frac{N}{4}, \quad \frac{3N}{4} < j \leqslant N; \quad \tau_j = \frac{2(1-2\sigma_y)}{N}, \quad \frac{N}{4} < j \leqslant \frac{3N}{4}, \tag{3}$$

$$\sigma_x = \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{\mu}\ln N\right\}, \quad \sigma_y = \min\left\{\frac{1}{4}, \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{\mu}\ln N\right\}, \quad 0 < \mu < \sqrt{2\gamma}.$$

На сетке Ω_N выпишем схему с использованием центральных разностей

$$\frac{2\varepsilon}{h_i + h_{i+1}}\left(\frac{u^N_{i+1,j} - u^N_{i,j}}{h_{i+1}} - \frac{u^N_{i,j} - u^N_{i-1,j}}{h_i}\right) +$$
$$+ \frac{2\varepsilon}{\tau_j + \tau_{j+1}}\left(\frac{u^N_{i,j+1} - u^N_{i,j}}{\tau_{j+1}} - \frac{u^N_{i,j} - u^N_{i,j-1}}{\tau_j}\right) -$$
$$- c(x_i, y_j)u^N_{i,j} = f(x_i, y_j), \quad (x_i, y_j) \in \Omega_N,$$
$$u^N_{i,j} = g(x_i, y_j), \quad (x_i, y_j) \in \Gamma_N = \Gamma \bigcap \Omega_N. \tag{4}$$

Определим норму непрерывной функции z и норму сеточной функции z^N соответственно по формулам

$$\|z\| = \max_{(x,y)\in\overline{\Omega}} |z(x,y)|, \quad \|z^N\|_N = \max_{0\leqslant i,j\leqslant N} |z^N_{i,j}|.$$

Пусть $[u]_{\Omega_N}$ – проекция функции непрерывного аргумента $u(x,y)$ на сетку Ω_N. В соответствии с [2] выполнено неравенство

$$\|u^N - [u]_{\Omega_N}\|_N \leqslant C_1\Delta_N, \quad \Delta_N = \ln^2 N/N^2. \tag{5}$$

В настоящей работе исследуем реализацию схемы (4) двухсеточным методом для задачи (1) с повышением точности на основе экстраполяции Ричардсона и использованием ε-равномерной интерполяционной формулы.

2. Двухсеточный метод

Решение схемы (4) можно находить на основе итераций

$$u^{(m+1)} = G(u^{(m)}), \tag{6}$$

где $u^{(0)}$ задано. Матрица системы (4) является M-матрицей, что обеспечивает сходимость многих итерационных методов [18, 19]. Пусть для решения системы (4) применяется сходящийся итерационный метод, для которого справедлива оценка сходимости итераций

$$\|u^{(m+1)} - u^N\|_N \leqslant q\|u^{(m)} - u^N\|_N, \quad q < 1. \tag{7}$$

Пусть $\|u^{(0)} - u^N\|_N \leqslant \delta$, тогда, рассуждая аналогично [15], получим, что для разрешения схемы (4) потребуется

$$M_N \approx d\,N^2 \log_q(\Delta_N/\delta) \tag{8}$$

арифметических действий, если предположить, что для реализации одной итерации необходимо выполнить dN^2 арифметических действий (пропорционально N^2).

Теперь рассмотрим двухсеточный метод для нахождения решения разностной схемы (4). Введем сетку Ω_n такую же по структуре и с такими же параметрами σ_x и σ_y, как Ω_N, только с намного меньшим количеством узлов n, $n \ll N$, получив таким образом вложенные сетки. Считаем, что $N = kn$.

В соответствии с идеей двухсеточного метода предварительно с использованием итерационного метода (6) решаем задачу (1) на сетке Ω_n.

Далее необходимо найденное сеточное решение интерполировать в узлы исходной сетки Ω_N. При этом точность интерполяционной формулы должна быть не ниже точности используемой разностной схемы.

Пусть $I_J(v^n, x, y)$ – интерполянт сеточной функции v^n в области $\overline{\Omega}$ и справедлива оценка погрешности

$$\|I_J([u]_{\Omega_{n,\sigma_N}}, x, y) - u\| \leqslant C_2 \Delta_{\mathrm{int},n}, \quad \Delta_{\mathrm{int},n} \leqslant \Delta_n, \tag{9}$$

где $u(x,y)$ – решение задачи (1).

Вычислим, рассуждая аналогично [15], необходимое количество арифметических действий двухсеточного метода:

$$M_{nN} \approx d\,n^2 \log_q \frac{\Delta_n}{\delta} + d\,N^2 \log_q \frac{\Delta_N}{\Delta_n} + J_n, \tag{10}$$

где J_n – количество арифметических действий, необходимых для интерполяции.

Сравнивая (8), (10), оценим выигрыш в числе арифметических действий при использовании двухсеточного метода:

$$M_N - M_{nN} \approx d(N^2 - n^2) \log_q(\Delta_n/\delta) - J_n.$$

Теперь оценим относительный выигрыш в количестве арифметических действий. Считая, что для реализации метода интерполяции необходимо $J_n = d_I(N - n)$ действий (пропорционально $N - n$), и учитывая (8), (10), получим

$$1 - \frac{M_{nN}}{M_N} = \left(1 - \frac{n^2}{N^2}\right) \frac{\dfrac{d}{d_I} \log_q(\Delta_n/\delta) - 1}{\dfrac{d}{d_I} \log_q(\Delta_N/\delta)} = \left(1 - \frac{n^2}{N^2}\right) \Psi(N). \tag{11}$$

Покажем, что $\Psi(N)$ из представления (11) удовлетворяет неравенству

$$0 < \Psi(N) < 1.$$

Представим $\Psi(N)$ как

$$\Psi(N) = \left(\log_q\left(\frac{\Delta_n}{\delta}\right) - \frac{d_I}{d}\right) \Big/ \left(\log_q\left(\frac{\Delta_N}{\delta}\right)\right). \tag{12}$$

Тогда

$$\exists N_0 :\ \forall N \geqslant N_0 \quad \Delta_N < \delta,$$

следовательно, знаменатель в (12) положителен. А так как

$$\exists n_0 : \forall n \geqslant n_0 \quad \Delta_n < \delta q^{d_I/d+1},$$

что означает выполнение неравенства

$$\log_q(\Delta_n/\delta) > d_I/d + 1,$$

следовательно, числитель в (12) также положителен.

Оценка $\Psi(N) < 1$ следует из того, что $\Delta_N < \Delta_n$.

Таким образом, получаем, что

$$1 - \frac{M_{nN}}{M_N} \leqslant 1 - \frac{n^2}{N^2}.$$

Найдем теперь предел $\Psi(N)$ при $N \to \infty$. Учитывая, что $N = kn$ и $\Delta_N = \xi^2/N^2$, где $\xi = (\mu\sigma)/(2\sqrt{\varepsilon})$, получим

$$\lim_{N\to\infty} \Psi(N) = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{1}{\ln q}\frac{\delta}{\Delta_n}\frac{\Delta'_n}{\delta}\right) : \left(\frac{1}{\ln q}\frac{\delta}{\Delta_N}\frac{\Delta'_N}{\delta}\right) = 1.$$

Следовательно, относительный выигрыш в количестве арифметических действий от использования двухсеточного метода ограничен величиной $1 - n^2/N^2$, но при увеличении числа узлов N стремится к этой же величине.

3. Экстраполяция Ричардсона

Исследуем экстраполяцию Ричардсона для повышения точности разностной схемы при использовании двухсеточного метода. Метод экстраполяции Ричардсона для сингулярно возмущенных эллиптических задач исследовался, например, в работах [4, 17, 20]. Рассмотрим случай, когда вспомогательная сетка Шишкина имеет вид (3) и содержит в k раз меньше сеточных интервалов по каждому направлению, чем исходная сетка, где $k > 1$ – целое число.

Решение u^N схемы центральных разностей (4) вычисляется на сетке Ω_N. Для повышения точности будем также использовать решение этой схемы на сетке Ω_n, которая содержит n сеточных интервалов и имеет те же параметры σ_x, σ_y, что и сетка Ω_N. Эти сетки вложены так, что $\Omega_n = \{(X_l, Y_m)\} \subset \Omega_N = \{(x_i, y_j)\}$. Очевидно, что сетку Ω_N можно получить из Ω_n делением каждой ячейки на k равных частей по каждому направлению.

Обозначим решение схемы (4) на Ω_n через u^n, и пусть

$$k_n = -\frac{n^2}{N^2 - n^2} = -\frac{1}{k^2 - 1}, \qquad k_N = \frac{N^2}{N^2 - n^2} = \frac{k^2}{k^2 - 1}.$$

В соответствии с методом экстраполяции Ричардсона зададим функцию u^{nN} на сетке Ω_N, приближающую решение $u(x, y)$ с более высоким порядком точности, чем u^N. Для этого сначала в узлах вспомогательной сетки Ω_n определим сеточную функцию u^{nN} следующим образом:

$$u^{nN}(X_l, Y_m) = k_n u^n(X_l, Y_m) + k_N u^N(X_l, Y_m), \quad (X_l, Y_m) \in \Omega_n.$$

В узлах исходной сетки Ω_N, не совпадающих с узлами сетки Ω_n, зададим сеточную функцию $u^{nN}(x_i, y_j)$, используя интерполяцию. Тогда для каждого узла $(x_i, y_j) \in \Omega_N$ определим

$$u^{nN}(x_i, y_j) = I_R([u^{nN}]_{\Omega_n}, x_i, y_j), \tag{13}$$

где $I_R(v^n, x, y)$ – интерполянт сеточной функции v^n в области Ω.

Отметим, что точность интерполяционной формулы в (13) должна быть ε-равномерной, порядка, не ниже порядка точности сеточной функции u^{nN} в узлах сетки $(X_l, Y_m) \in \Omega_n$, полученного в результате применения метода Ричардсона.

4. Результаты численных экспериментов

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} &\varepsilon u_{xx} + \varepsilon u_{yy} - 2u = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \\ &u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Gamma, \end{aligned} \tag{14}$$

где f соответствует решению

$$u(x, y) = \frac{\left(1 - e^{-x/\sqrt{\varepsilon}}\right)\left(1 - e^{-(1-x)/\sqrt{\varepsilon}}\right)}{\left(1 - e^{-1/\sqrt{\varepsilon}}\right)} \frac{\left(1 - e^{-y/\sqrt{\varepsilon}}\right)\left(1 - e^{-(1-y)/\sqrt{\varepsilon}}\right)}{\left(1 - e^{-1/\sqrt{\varepsilon}}\right)} + \\ + \sin(\pi x)\sin(\pi y). \tag{15}$$

В соответствии с (14) зададим σ_x и σ_y в (3), используя значение $\mu = 1$.

Решение задачи (14) находим на основе схемы (4). Начальное приближение для используемых итерационных методов задаем на основе известных граничных условий дифференциальной задачи (14) следующим образом:

$$u^{(0)}(x_i, y_j) = 0, \quad (x_i, y_j) \in \Omega_N.$$

Итерационный метод на сетке Ω_N завершаем, если выполнено условие

$$\|L^N u^{(m_N)} - f^N\|_N \leqslant \gamma \Delta_N,$$

тогда будет выполнена оценка $\|u^{(m_N)} - u^N\|_N \leqslant \Delta_N$.

Остановимся подробнее на выборе интерполяционных формул в (9), (13). Для этого обобщим интерполяционную формулу из [16] на двумерный случай и исследуем ее при $k = 3, 5$ и различном выборе функций $\Phi(x)$ и $\Theta(y)$. Пусть $L_k(v, z_p, \ldots, z_{p+k-1}, z)$ – многочлен Лагранжа с узлами $z_p, \ldots, z_{p+k-1}$ и $[z_p, \ldots, z_{p+k-1}]v$ – разделенная разность для функции $v(z)$, тогда

$$I_{\Phi,\Theta,k}(u, x, y) = L_{k-1}(u_{\Phi,k}, y_l, \ldots, y_{l+k-2}, y) + \\ + \frac{[y_l, \ldots, y_{l+k-1}]u_{\Phi,k}}{[y_l, \ldots, y_{l+k-1}]\Theta}\Big(\Theta(y) - L_{k-1}(\Theta, y_l, \ldots, y_{l+k-2}, y)\Big), \tag{16}$$

где

$$u_{\Phi,k}(u, x) = L_{k-1}(u, x_m, \ldots, x_{m+k-2}, x) + \\ + \frac{[x_m, \ldots, x_{m+k-1}]u}{[x_m, \ldots, x_{m+k-1}]\Phi}\Big(\Phi(x) - L_{k-1}(\Phi, x_m, \ldots, x_{m+k-2}, x)\Big), \\ (x, y) \in [x_m, x_{m+k-1}] \times [x_l, x_{l+k-1}].$$

Отметим, что в случае, когда $\Phi(x) = x^{k-1}$ и $\Theta(y) = y^{k-1}$, получаем двумерную формулу полиномиальной интерполяции.

В работе [21] показано, что при $k = 2$ одномерная формула (16) имеет ε-равномерную точность $O(\ln N/N)$, а при $k = 3$ имеет точность $O(\ln^2 N/N^2)$. Проводя рассуждения, аналогичные [14], можно обобщить полученные оценки на двумерный случай интерполяционной формулы. В соответствии с (5) и (9) случай $k = 2$ не рассматриваем, так как погрешность метода интерполяции больше погрешности схемы (4).

В (13) необходима интерполяционная формула повышенного порядка точности, поэтому остановимся также на случае $k = 5$. В работе [21] показано, что при этом формула будет иметь точность $O(\ln^4 N/N^4)$. Результаты численных экспериментов показывают, что данная оценка является ε-равномерной.

Выпишем формулу (16) при $k=5$ для каждого узла $(x_i,y_j)\in\Omega_{N,\sigma_N}$, принадлежащего некоторой ячейке $S_{l,m}=[X_{l-2},X_{l+2}]\times[Y_{m-2},Y_{m+2}]$, где $(X_p,Y_q)\in\Omega_{n,\sigma_N}$. Считаем, что n кратно четырем и не меньше 16. Имеем

$$
\begin{gathered}
I_R([u^{nN}]_{\Omega_n},x_i,y_j)=\frac{u_\Phi^{nN}(x_i,Y_{m-1})-u_\Phi^{nN}(x_i,Y_{m-2})}{(Y_{m-1}-Y_{m-2})}(y_j-Y_{m-2})+\\
+\frac{u_\Phi^{nN}(x_i,Y_m)-2u_\Phi^{nN}(x_i,Y_{m-1})+u_\Phi^{nN}(x_i,Y_{m-2})}{(Y_m-Y_{m-2})(Y_m-Y_{m-1})}(y_j-Y_{m-2})(y_j-Y_{m-1})+\\
+\Big(u_\Phi^{nN}(x_i,Y_{m+1})-3u_\Phi^{nN}(x_i,Y_m)+3u_\Phi^{nN}(x_i,Y_{m-1})-\\
-u_\Phi^{nN}(x_i,Y_{m-2})\Big)\frac{(y_j-Y_{m-2})(y_j-Y_{m-1})(y_j-Y_m)}{(Y_{m+1}-Y_{m-2})(Y_{m+1}-Y_{m-1})(Y_{m+1}-Y_m)}+\\
+G_5^y\Big(-\frac{\Theta_{m-1}-\Theta_{m-2}}{Y_{m-1}-Y_{m-2}}(y_j-Y_{m-2})-\frac{\Theta_m-2\Theta_{m-1}+\Theta_{m-2}}{2\,(Y_m-Y_{m-1})^2}(y_j-\\
-Y_{m-2})(y_j-Y_{m-1})-\frac{\Theta_{m+1}-3\Theta_m+3\Theta_{m-1}-\Theta_{m-2}}{6\,(Y_m-Y_{m-1})^3}(y_j-Y_{m-2})(y_j-\\
-Y_{m-1})(y_j-Y_m)+\Theta(y_j)-\Theta_{m-2}\Big)+u_\Phi^{nN}(x_i,Y_{m-2}), \qquad (17)
\end{gathered}
$$

где

$$
\begin{gathered}
u_\Phi^{nN}(x_i,y_j)=u^{nN}(X_{l-2},y_j)+\frac{u^{nN}(X_{l-1},y_j)-u^{nN}(X_{l-2},y_j)}{X_{l-1}-X_{l-2}}(x_i-X_{l-2})+\\
+\big(u^{nN}(X_l,y_j)-2u^{nN}(X_{l-1},y_j)+u^{nN}(X_{l-2},y_j)\big)\frac{(x_i-X_{l-2})(x_i-X_{l-1})}{(X_l-X_{l-2})(X_l-X_{l-1})}+\\
+\Big(u^{nN}(X_{l+1},y_j)-3u^{nN}(X_l,y_j)+3u^{nN}(X_{l-1},y_j)-\\
-u^{nN}(X_{l-2},y_j)\Big)\frac{(x_i-X_{l-2})(x_i-X_{l-1})(x_i-X_l)}{(X_{l+1}-X_{l-2})(X_{l+1}-X_{l-1})(X_{l+1}-X_l)}+\\
+G_5^x\Big(-\frac{\Phi_{l-1}-\Phi_{l-2}}{X_{l-1}-X_{l-2}}(x_i-X_{l-2})-\frac{\Phi_l-2\Phi_{l-1}+\Phi_{l-2}}{2\,(X_l-X_{l-1})^2}(x_i-X_{l-2})(x_i-X_{l-1})-\\
-\frac{\Phi_{l+1}-3\Phi_l+3\Phi_{l-1}-\Phi_{l-2}}{6\,(X_l-X_{l-1})^3}(x_i-X_{l-2})(x_i-X_{l-1})(x_i-X_l)+\Phi(x_i)-\Phi_{l-2}\Big),
\end{gathered}
$$

$$
G_5^y=\frac{u_\Phi^{nN}(x_i,Y_{m+2})-4u_\Phi^{nN}(x_i,Y_{m+1})+6u_\Phi^{nN}(x_i,Y_m)-4u_\Phi^{nN}(x_i,Y_{m-1})+u_\Phi^{nN}(x_i,Y_{m-2})}{\Theta_{m+2}-4\Theta_{m+1}+6\Theta_m-4\Theta_{m-1}+\Theta_{m-2}},
$$

$$
G_5^x=\frac{u^{nN}(X_{l+2},y_j)-4u^{nN}(X_{l+1},y_j)+6u^{nN}(X_l,y_j)-4u^{nN}(X_{l-1},y_j)+u^{nN}(X_{l-2},y_j)}{\Phi_{l+2}-4\Phi_{l+1}+6\Phi_l-4\Phi_{l-1}+\Phi_{l-2}},
$$

$$
\Phi_l=\Phi(X_l), \qquad \Theta_m=\Theta(Y_m).
$$

Так как сетка (3) является кусочно-равномерной, то условия, налагаемые на количество узлов вспомогательной сетки в (17), гарантируют равномерный шаг внутри каждой ячейки. А сгущение сетки (3) в областях больших градиентов интерполируемой функции обеспечивает оценки точности равномерные по ε.

Табл. 1

Нормы погрешности $I_{\Phi,\Theta,3}$ при $\Phi(x) = x^2$ и $\Theta(y) = y^2$

ε	N					
	32	64	128	256	512	1024
1	4.98e–4	6.08e–5	7.48e–6	9.27e–7	1.15e–7	1.44e–8
10^{-1}	3.00e–4	3.78e–5	4.65e–6	5.77e–7	7.18e–8	8.96e–9
10^{-2}	9.18e–3	1.38e–3	1.98e–4	2.65e–5	3.44e–6	4.37e–7
10^{-3}	1.05e–1	3.28e–2	4.95e–3	7.61e–4	1.06e–4	1.39e–5
10^{-4}	1.05e–1	3.72e–2	8.65e–3	1.93e–3	3.91e–4	7.23e–5
10^{-5}	1.05e–1	3.72e–2	8.65e–3	1.93e–3	3.91e–4	7.23e–5
10^{-6}	1.05e–1	3.72e–2	8.65e–3	1.93e–3	3.91e–4	7.23e–5

Табл. 2

Нормы погрешности $I_{\Phi,\Theta,5}$ при $\Phi(x) = x^4$ и $\Theta(y) = y^4$

ε	N					
	32	64	128	256	512	1024
1	9.11e–6	2.74e–7	8.23e–9	2.51e–10	7.73e–12	2.40e–13
10^{-1}	1.39e–5	4.08e–7	1.27e–8	4.01e–10	1.27e–11	3.98e–13
10^{-2}	1.21e–3	5.46e–5	1.93e–6	6.88e–8	2.30e–9	7.43e–11
10^{-3}	3.43e–2	6.24e–3	4.52e–4	1.69e–5	6.35e–7	2.21e–8
10^{-4}	3.43e–2	7.32e–3	1.06e–3	8.96e–5	5.50e–6	3.38e–7
10^{-5}	3.43e–2	7.32e–3	1.06e–3	8.96e–5	5.52e–6	3.38e–7
10^{-6}	3.43e–2	7.32e–3	1.06e–3	8.96e–5	5.59e–6	3.45e–7

В табл. 1 при различных значениях N и ε приведены нормы погрешности метода интерполяции (16) при $k = 3$ в случае $\Phi(x) = x^2$, $\Theta(y) = y^2$ для функции (15). Отметим, что в случае

$$\Phi(x) = e^{-x/\sqrt{\varepsilon}} + e^{-(1-x)/\sqrt{\varepsilon}} \quad \text{и} \quad \Theta(y) = e^{-y/\sqrt{\varepsilon}} + e^{-(1-y)/\sqrt{\varepsilon}}$$

погрешность получается того же порядка.

Из табл. 1 следует, что точность формулы (16) при $k = 3$ в случае $\Phi(x) = x^2$ и $\Theta(y) = y^2$ даже выше, чем теоретически обоснованная оценка $O(\ln^2 N/N^2)$, и близка к $O(\ln^3 N/N^3)$. Следовательно, если применить данную интерполяционную формулу, то будет выполнено неравенство (9).

В табл. 2 при различных значениях N и ε приведены нормы погрешности метода интерполяции (16) при $k = 5$ в случае $\Phi(x) = x^4$, $\Theta(y) = y^4$ для функции (15).

В табл. 3 при различных значениях N и ε приведены нормы погрешности метода интерполяции (16) при $k = 5$ в случае

$$\Phi(x) = e^{-x/\sqrt{\varepsilon}} + e^{-(1-x)/\sqrt{\varepsilon}} \quad \text{и} \quad \Theta(y) = e^{-y/\sqrt{\varepsilon}} + e^{-(1-y)/\sqrt{\varepsilon}}$$

для функции (15).

Из табл. 2 и 3 следует, что точность формулы (16) при $k = 5$ в случае выбора $\Phi(x)$ и $\Theta(y)$ с учетом вида областей больших градиентов интерполируемой функции выше, чем $O(\ln^4 N/N^4)$, и близка к $O(\ln^5 N/N^5)$. Поэтому в (17) возьмем

$$\Phi(x) = e^{-x/\sqrt{\varepsilon}} + e^{-(1-x)/\sqrt{\varepsilon}} \quad \text{и} \quad \Theta(y) = e^{-y/\sqrt{\varepsilon}} + e^{-(1-y)/\sqrt{\varepsilon}}.$$

Исследуем реализацию схемы (4) на основе явного метода Зейделя [19].

Пятиточечную схему (4) можно в общем виде представить как

$$a_{i,j}u^N_{i-1,j} + b_{i,j}u^N_{i,j-1} + c_{i,j}u^N_{i+1,j} + d_{i,j}u^N_{i,j+1} - e_{i,j}u^N_{i,j} = f^N_{i,j}, \quad 0 < i,\, j < N.$$

Табл. 3

Нормы погрешности $I_{\Phi,\Theta,5}$ при $\Phi(x) = e^{-x/\sqrt{\varepsilon}} + e^{-(1-x)/\sqrt{\varepsilon}}$ и $\Theta(y) = e^{-y/\sqrt{\varepsilon}} + e^{-(1-y)/\sqrt{\varepsilon}}$

ε	N					
	32	64	128	256	512	1024
1	9.52e–6	2.93e–7	8.86e–9	2.70e–10	8.38e–12	3.90e–13
10^{-1}	1.27e–5	4.37e–7	1.38e–8	4.22e–10	1.31e–11	4.08e–13
10^{-2}	4.14e–5	1.29e–6	4.16e–8	1.31e–9	4.10e–11	1.28e–12
10^{-3}	2.82e–4	5.68e–6	1.61e–7	4.90e–9	1.50e–10	4.62e–12
10^{-4}	2.78e–3	2.41e–4	7.76e–6	1.79e–7	4.17e–9	1.01e–10
10^{-5}	4.03e–3	4.86e–4	3.55e–5	1.64e–6	4.80e–8	1.23e–9
10^{-6}	4.47e–3	5.51e–4	4.35e–5	2.84e–6	1.65e–7	6.56e–9

Табл. 4

Количество итераций односеточного и двухсеточного методов Зейделя, $\varepsilon = 10^{-4}$

n	N				
	32	64	128	256	512
16	13(7)	36(7)	113(7)	385(7)	1357(7)
32		30(15)	98(14)	341(13)	1219(13)
64			82(39)	296(35)	1082(33)
128				247(121)	942(108)
256					788(407)
	17	45	139	463	1605

Тогда векторно-матричная запись метода Зейделя будет следующей:

$$u^{(m)} = D^{-1}\left(f + Lu^{(m)} + Uu^{(m-1)}\right),$$

где

$$(Lv)_{i,j} = a_{i,j}v_{i-1,j} + b_{i,j}v_{i,j-1}, \quad (Dv)_{i,j} = e_{i,j}v_{i,j}, \quad (Uv)_{i,j} = c_{i,j}v_{i+1,j} + d_{i,j}v_{i,j+1}.$$

Результаты численных экспериментов для метода Зейделя при $\varepsilon = 10^{-4}$ приведены в табл. 4 и 5.

В табл. 4 при различных значениях N и n указано количество итераций двухсеточного метода на исходной сетке Ω_N, при этом в скобках приведено количество итераций на более редкой вспомогательной сетке Ω_n. В нижней строке указано число итераций односеточного метода в зависимости от N. Из таблицы следует, что применение двухсеточного метода приводит к существенному сокращению количества итераций на исходной сетке при $n = N/2$.

В табл. 5 при различных значениях N и n приведены нормы погрешности двухсеточного метода с экстраполяцией Ричардсона (17). В нижней строке для сравнения приведены нормы погрешности односеточного метода в зависимости от N. Из таблицы следует, что экстраполяция Ричардсона (17) повышает точность схемы до порядка не ниже $O(\ln^3 N/N^3)$.

Помимо метода Зейделя в качестве итерационного метода использовался метод последовательной верхней релаксации [19]:

$$u^{(m)} = \omega D^{-1}\left(f + Lu^{(m)} + Uu^{(m-1)}\right) + (1-\omega)u^{(m-1)}$$

Табл. 5

Нормы погрешности односеточного метода Зейделя и двухсеточного метода Зейделя с экстраполяцией Ричардсона, $\varepsilon = 10^{-4}$

n	N				
	32	64	128	256	512
16	1.17e–3	4.23e–4	1.22e–4	2.98e–5	6.20e–6
32		2.74e–4	1.21e–4	4.62e–5	1.59e–5
64			4.16e–5	1.75e–5	6.71e–6
128				4.85e–6	1.87e–6
256					5.27e–7
	8.15e–3	3.15e–3	1.10e–3	3.62e–4	1.15e–4

где ω – итерационный параметр, а также метод Писмана–Речфорда (продольно-поперечных прогонок) [19]:

$$u^{(m-1/2)} = u^{(m-1)} + \tau\left(A_1 u^{(m-1/2)} + A_2 u^{(m-1)} - f\right),$$

$$u^{(m)} = u^{(m-1/2)} + \tau\left(A_1 u^{(m-1/2)} + A_2 u^{(m)} - f\right),$$

где τ – итерационный параметр,

$$(A_1 v)_{i,j} = a_{i,j} v_{i-1,j} - e'_{i,j} v_{i,j} + c_{i,j} v_{i+1,j},$$

$$(A_2 v)_{i,j} = b_{i,j} v_{i,j-1} - e''_{i,j} v_{i,j} + d_{i,j} v_{i,j+1}.$$

Здесь $e_{i,j} = e'_{i,j} + e''_{i,j}$, где $e'_{i,j}$ соответствует аппроксимации производных по направлению x, а $e''_{i,j}$ – по направлению y.

Использованы также итерации в подпространствах Крылова [22–24], а именно стабилизированный метод бисопряженных градиентов (BiCGSTAB) и стабилизированный метод бисопряженных невязок (BiCRSTAB):

$$r^0 = f - Au^0, \quad p^0 = r^0, \qquad n = 0, 1, \ldots$$

$$s^n = r_n^{(q)} - \alpha_n^{(q)} A p^n, \qquad \alpha_n^{(q)} = \frac{\left(r^n, (A^T)^q r^0\right)}{\left(Ap^n, (A^T)^q r^0\right)},$$

$$u^{n+1} = u^n + \alpha_n^{(q)} p_n^{(q)} + \omega_n s^n, \qquad \omega_n = \frac{(As^n, s^n)}{(As^n, As^n)},$$

$$p_{n+1}^{(q)} = r_{n+1}^{(q)} + \beta_n^{(q)}\left(p_n^{(q)} - \omega_n A p_n^{(q)}\right), \qquad \beta_n^{(q)} = \frac{\left[\alpha_n \left(r^{n+1}, (A^T)^q r^0\right)\right]}{\left[\omega_n \left(r^n, (A^T)^q r^0\right)\right]}.$$

Здесь $q = 0$ и 1 для методов BiCGSTAB и BiCRSTAB соответственно, номера итераций указаны в данном случае нижними индексами [22].

Остановимся подробнее на выборе итерационного параметра ω в методе последовательной верхней релаксации. Согласно [19], оптимальное значение релаксационного параметра есть

$$\omega_0 = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho_s}}, \tag{18}$$

где ρ_s – коэффициент подавления ошибки метода Зейделя.

В этом случае можно апостериорно выбрать значение ω_0, используя следующий алгоритм автоматического определения итерационного параметра [19]. Сначала

Табл. 6

Сравнение количества итераций, $\varepsilon = 10^{-4}$

Метод	N				
	32	64	128	256	512
Зейделя	13(7) 17	30(15) 45	82(39) 139	247(121) 463	788(407) 1605
верхней релаксации	12(8) 15	23(15) 35	58(31) 95	106(81) 186	215(159) 330
Писмана – Речфорда	7(5) 11	14(12) 24	28(27) 54	58(60) 119	118(130) 259
BiCRSTAB	6(3) 7	10(6) 15	20(13) 31	41(25) 57	65(60) 98
BiCGSTAB	6(3) 7	11(6) 13	20(13) 28	36(26) 58	58(54) 93

в методе последовательной верхней релаксации проводятся итерации при значении $\omega = 1$ и на каждой итерации вычисляется значение

$$\rho_s^n = \frac{\|u^n - u^{n-1}\|}{\|u^{n-1} - u^{n-2}\|},$$

а также проверяется условие

$$|\rho_s^n - \rho_s^{n-1}| \leqslant \varepsilon_1 \tag{19}$$

при некоторой заданной малой величине ε_1. Когда неравенство (19) выполняется, величина ρ_s^n принимается за приближенное значение ρ_s, после чего по формуле (18) определяется значение ω_0, используемое на последующих итерациях. При этом предварительные итерации по методу Зейделя служат для получения достаточно приемлемого начального приближения.

В [25] показано, что предпочтительнее всего по количеству итераций выглядит автоматический выбор итерационного параметра ω.

В табл. 6 при $\varepsilon = 10^{-4}$ проведено сравнение исследуемых итерационных методов. Двухсеточный метод использовался в случае $n = N/2$. Для метода последовательной верхней релаксации итерационный параметр ω выбирался в соответствии с описанным выше алгоритмом автоматического определения значения, для метода Писмана – Речфорда итерационный параметр $\tau = 8/N$.

Применение методов последовательной верхней релаксации, Писмана – Речфорда, стабилизированных методов бисопряженных направлений и градиентов привело к уменьшению количества итераций по сравнению с методом Зейделя. Повышение точности на основе экстраполяции Ричардсона не зависит от конкретного итерационного метода.

В табл. 7 при различных значениях ε для стабилизированного метода бисопряженных градиентов приведено количество итераций и время выполнения двухсеточного (сверху) и односеточного (снизу) методов.

В табл. 8 при различных значениях ε и N для стабилизированного метода бисопряженных градиентов приведено преимущество по времени выполнения двухсеточного метода перед односеточным в процентном соотношении:

$$\Delta T = 100 \left(1 - \frac{T_{\mathrm{TGM}}}{T_{\mathrm{OGM}}}\right),$$

где T_{TGM} – время выполнения двухсеточным методом, T_{OGM} – время выполнения односеточным методом.

Табл. 7

Количество итераций ($\aleph$) и время выполнения (T) двухсеточного и односеточного методов

$\varepsilon = 10^{-1}$

N	256	512	1024	2048
$\aleph$	121(121) 259	306(259) 570	584(570) 1437	1443(1437) 4623
T	2.01 3.47	28.18 45.92	244.97 492.94	2790.42 7194.04

$\varepsilon = 10^{-2}$

N	256	512	1024	2048
$\aleph$	112(81) 185	207(185) 442	499(442) 901	1212(901) 2251
T	1.79 2.56	19.37 36.55	206.24 317.42	2244.99 3521.70

$\varepsilon = 10^{-3}$

N	256	512	1024	2048
$\aleph$	47(37) 72	87(72) 148	177(148) 430	318(430) 795
T	0.85 1.04	8.44 12.40	73.98 154.29	661.48 1246.48

$\varepsilon = 10^{-4}$

N	256	512	1024	2048
$\aleph$	36(26) 58	58(54) 93	108(97) 207	189(179) 434
T	0.69 0.88	5.94 7.94	46.79 74.27	371.31 684.25

Табл. 8

Преимущество ΔT двухсеточного алгоритма по времени выполнения в процентах

	N			
ε	256	512	1024	2048
10^{-1}	42.04	38.62	50.30	61.21
10^{-2}	30.07	46.99	35.03	36.25
10^{-3}	18.04	31.93	52.05	46.93
10^{-4}	21.93	25.10	37.00	45.73
10^{-5}	20.81	32.83	37.19	44.04

Табл. 9

Скорость сходимости в случае односеточного метода Писмана – Речфорда

	N			
ε	32	64	128	256
10^{-1}	2.001	2.000	2.000	2.000
10^{-2}	1.988	1.997	2.000	2.001
10^{-3}	1.508	1.965	1.991	1.998
10^{-4}	1.370	1.517	1.604	1.656
10^{-5}	1.370	1.517	1.604	1.656
CR_t	1.356	1.474	1.555	1.615

Из табл. 7, 8 следует, что с увеличением N выигрыш от использования двухсеточного метода растет, что соответствует полученной оценке (11).

В табл. 9 приведена скорость сходимости схемы (4) в зависимости от ε и N при ее реализации односеточным методом Писмана – Речфорда:

$$CR = \log_2 \frac{D_N}{D_{2N}}, \quad D_N = \|u^N - [u]_{\Omega_N}\|.$$

В последней строке табл. 9 приведена теоретическая оценка скорости сходимости CR_t схемы (4) в зависимости от N, соответствующая оценке погрешности (5).

В табл. 10 приведены значения скорости сходимости схемы (4) в зависимости от ε и N при ее реализации двухсеточным методом Писмана – Речфорда с использованием экстраполяции Ричардсона при $n = N/2$. В последней строке табл. 10

Табл. 10

Скорость сходимости в случае двухсеточного метода Писмана – Речфорда при использовании экстраполяции Ричардсона

ε	N			
	32	64	128	256
10^{-1}	4.727	4.737	4.538	4.158
10^{-2}	2.123	2.090	2.297	2.354
10^{-3}	2.939	4.261	3.694	2.590
10^{-4}	2.639	3.368	3.139	3.200
10^{-5}	2.638	3.362	3.117	3.225
CR_t	2.034	2.211	2.333	2.422
	2.712	2.948	3.110	3.229

приведены теоретические оценки скорости сходимости CR_t схемы (4) с экстраполяцией Ричардсона в зависимости от N, соответствующие оценке $O(\ln^3 N/N^3)$ и $O(\ln^4 N/N^4)$.

Итак, применение двухсеточного метода на сетке Шишкина приводит к выигрышу в количестве арифметических действий, а использование экстраполяции Ричардсона повышает точность разностной схемы на порядок. Исследовано обобщение одномерной ε-равномерной интерполяции на двумерный случай. С увеличением числа узлов преимущество двухсеточного метода увеличивается. Исследованы методы Зейделя, последовательной верхней релаксации, Писмана – Речфорда и стабилизированные методы бисопряженных градиентов и направлений, наибольшую скорость сходимости среди которых показали два последних.

Автор благодарит профессора А.И. Задорина и профессора В.П. Ильина за полезные советы и интересные обсуждения при подготовке данной работы.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 13-01-00618, 15-01-06584).

Summary

S.V. Tikhovskaya. Investigation of a Two-Grid Method of Improved Accuracy for the Elliptic Reaction–Diffusion Equation with Boundary Layers.

A two-grid method for the elliptic equation with a small parameter ε multiplying the highest derivative is investigated. The ε-uniformly convergent difference scheme on the Shishkin mesh is considered. To resolve the difference scheme, a two-grid method with ε-uniform interpolation formula is used. To increase the accuracy of the scheme, the Richardson extrapolation in the two-grid method is applied. The results of numerical experiments are discussed. Various iterative methods for implementation of the two-grid algorithm are suggested.

Keywords: elliptic reaction–diffusion equation, singular perturbation, Shishkin mesh, two-grid method, Richardson extrapolation, uniform convergence.

Литература

1. *Miller J.J.H., O'Riordan E., Shishkin G.I.* Fitted Numerical Methods for Singular Perturbation Problems. – Singapure: World Scientific, 1996. – 163 p.

2. *Clavero C., Gracia J.L., O'Riordan E.* A parameter robust numerical method for a two dimensional reaction-diffusion problem // Math. Comput. – 2005. – V. 74, No 252. – P. 1743–1758. – doi: 10.1090/S0025-5718-05-01762-X.

3. *Roos H.G., Stynes M., Tobiska L.* Robust Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations. – Berlin: Springer-Verlag, 2008. – 604 p.

4. *Shishkin G.I., Shishkina L.P.* Difference Methods for Singular Perturbation Problems. – Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2009. – 408 p.

5. *Angelova I.T., Vulkov L.G.* A two-grid method on layer-adapted meshes for a semilinear 2-D reaction-diffusion problem // Lecture Notes in Computer Science. – 2010. – V. 5910. – P. 703–710. – doi: 10.1007/978-3-642-12535-5_84.

6. *Шишкин Г.И.* Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. – Екатеринбург: УрО РАН, 1992. – 232 с.

7. *Андреев В.Б.* О точности сеточных аппроксимаций негладких решений сингулярно возмущенного уравнения реакции-диффузии в квадрате // Дифференц. уравнения. – 2006. – Т. 42, № 7. – С. 954–966.

8. *Han H., Kellogg R.B.* Differentiability properties of solutions of the equation $-\varepsilon^2\Delta u + {} + ru = f(x, y)$ in a square // SIAM J. Math. Anal. – 1990. – V. 21, No 2. – P. 394–408. – doi:10.1137/0521022.

9. *Бахвалов Н.С.* К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1969. – Т. 9, № 4. – С. 841–859. – doi: 10.1016/0041-5553(69)90038-X.

10. *Ершова Т.Я.* О решении задачи Дирихле для сингулярно возмущенного уравнения реакции-диффузии в квадрате на сетке Бахвалова // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и кибернетика. – 2009. – № 4. – С. 7–14. – doi: 10.3103/S0278641909040013.

11. *Axelsson O., Layton W.* A two-level discretization of nonlinear boundary value problems // SIAM J. Numer. Anal. – 1996. – V. 33 – P. 2359–2374. – doi: 10.1137/S0036142993247104.

12. *Xu J.* A novel two-grid method for semilinear elliptic equation // SIAM J. Sci. Comput. – 1994. – V. 15. – P. 231–237. – doi: 10.1137/0915016.

13. *Vulkov L.G., Zadorin A.I.* Two-Grid Algorithms for the Solution of 2D Semilinear Singularly perturbed convection-diffusion equations using an exponential finite difference scheme // AIP Conf. Proc. – 2009. – V. 1186. – P. 371–379. – doi: 10.1063/1.3265351.

14. *Zadorin A.I., Tikhovskaya S.V., Zadorin N.A.* A two-grid method for elliptic problem with boundary layers // Appl. Numer. Math. – 2015. – V. 93. – P. 270–278. – doi: 10.1016/j.apnum.2014.06.003.

15. *Тиховская С.В.* Двухсеточный метод для эллиптического уравнения с пограничными слоями на сетке Шишкина // Учен. зап. Казан. ун-та. Серия Физ.-матем. науки. – 2012. – Т. 154, кн. 4. – С. 49–56.

16. *Zadorin A.I., Zadorin N.A.* Interpolation formula for functions with a boundary layer component and its application to derivatives calculation // Сиб. электр. матем. изв. – 2012. – Т. 9. – С. 1–11.

17. *Шишкин Г.И., Шишкина Л.П.* Метод Ричардсона высокого порядка точности для квазилинейного сингулярно возмущенного эллиптического уравнения реакции-диффузии // Дифференц. уравнения. – 2005. – Т. 41, № 7 – С. 980–989.

18. *Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.* Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984. – 320 с.

19. *Ильин В.П.* Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений. – Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2001. – 318 с.

20. *Шишкин Г.И., Шишкина Л.П.* Улучшенная разностная схема метода декомпозиции решения для сингулярно возмущенного уравнения реакции-диффузии // Труды ИММ УрО РАН. – 2010. – Т. 16, № 1. – С. 255–271.

21. *Задорин А.И., Задорин Н.А.* Интерполяция функций с погранслойными составляющими и ее применение в двухсеточном методе // Сиб. электр. матем. изв. – 2011. – Т. 8. – С. 247–267.

22. *Ильин В.П.* Методы и технологии конечных элементов. – Новосибирск: Изд-во ИВМиМГ СО РАН, 2007. – 371 с.

23. *Saad Y.* Iterative Methods for Sparse Linear Systems. – N. Y.: PWS Publ. Co, 1996. – 448 p.

24. *Ильин В.П.* Методы бисопряженных направлений в подпространствах Крылова // Сиб. журн. индустр. матем. – 2008. – Т. 11, № 4 (36). – С. 47–60. – doi: 10.1134/S1990478910010102.

25. *Тиховская С.В.* Разработка разностных схем на сгущающихся сетках для краевых задач с пограничным слоем: Дис. ... канд. физ.-матем. наук. – Омск, 2013. – 105 с.

Поступила в редакцию
23.01.15

Тиховская Светлана Валерьевна – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник, Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омский филиал, г. Омск, Россия.

E-mail: *s.tihovskaya@yandex.ru*