

УДК 539.1+539.2+538.955

РЧ КОНТРОЛИРУЕМАЯ КВАНТОВАЯ ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ НА МЕССБАУЭРОВСКИХ ПЕРЕХОДАХ

Э.К. Садыков, В.В. Аринин, Ф.Г. Вагизов, О.А. Кочаровская

Аннотация

Рассмотрены эффекты когерентности и квантовой интерференции при резонансной флюоресценции мессбауэровского излучения в магнитных материалах, подверженных воздействию внешнего р.ч. поля. Для вычисления мессбауэровских спектров использован метод, разработанный ранее для аналогичных задач в оптике, проведена модификация этого метода на случай гамма-оптики. Показано, что в режиме ЯМР на возбужденном уровне ядра интенсивность рамановской линии рассеяния может оказаться больше, чем интенсивность упругого рассеяния («вентильный» эффект), благодаря квантовой интерференции. Анализ полученных эффектов проведен на основе теории возмущений во втором порядке по взаимодействию гамма-излучения с ядром и при точном учете сильного резонансного р.ч. поля. Проведено сопоставление и сравнение полученных результатов с аналогичными эффектами в оптике. Показана возможность экспериментальных исследований квантовой интерференции на мессбауэровских гамма-переходах (на изотопе ^{57}Fe) на основе традиционной мессбауэровской техники в режиме когерентного р.ч. возбуждения, в отсутствие когерентных источников излучения в гамма-диапазоне.

Введение

Интерференция амплитуд – один из базовых элементов квантовой теории, и она естественным образом учитывается при формировании отклика системы на внешние сигналы. Об *эффектах квантовой интерференции* говорят в том случае, когда отклик становится необычным (аномальным) благодаря изменившемуся характеру интерференции в результате целенаправленного воздействия на систему. Таким образом, эффекты квантовой интерференции (КИ), как правило, являются *контролируемыми* извне. Наиболее интенсивные исследования КИ проведены в оптике, в двух- и многоуровневых системах, подверженных воздействию сильных резонансных полей [1–3]. Было показано, что в таких условиях проявляется ряд эффектов по отношению к сигналу (пробному излучению), такие, как электромагнитно-индуцированная прозрачность среды, уменьшение групповой скорости света, безинверсные механизмы усиления и генерации излучения и т. д. Все эти эффекты подтверждены экспериментально.

Получение аналогичных результатов в гамма-диапазоне представляет исключительно большой интерес, поскольку это означало бы значительное продвижение в технике эксперимента с гамма-квантами (в частности, в мессбауэровской спектроскопии) и в решении основной проблемы гамма-оптики – усиления и генерации когерентного излучения. Наиболее удобными системами для этих целей представляются ядра в твердых телах [4, 5]. В этом случае благодаря эффекту Мессбауэра устраняется доплеровское (фононное) уширение линии гамма-излучения, что можно уподобить условию, достигаемому в оптике с помощью использования атомарных пучков.

Рассмотрим вслед оптике возможные механизмы резонансного воздействия на мессбауэровскую систему – механизмы контроля интерференции радиационных амплитуд:

1. Возможность гипотетическая – резонансное перемешивание ядерных уровней на гамма-переходе. Это требует когерентных источников в гамма-диапазоне.
2. Оптический или электронно-спиновый резонанс на мессбауэровском атоме (лазерное или микроволновое излучение).
3. Радиочастотный резонанс ядерных спинов в сверхтонком поле, инициированный внешним р.ч. полем.

Перечисленные механизмы отражают то, что состояние мессбауэровского атома задается произведением функций

$$\Psi \sim \Psi_N \Psi_{el} \Psi_I,$$

представляющих ядерную, электронную и ядерно-спиновую подсистемы соответственно.

Только эффект р.ч. резонанса на ядрах – когерентная динамика ядерных спинов – убедительно продемонстрирован к настоящему времени в мессбауэровских экспериментах по поглощению на магнитных материалах [6, 7].

Целью данной работы является анализ возможностей р.ч. метода возбуждения когерентной динамики ядерных спинов и обусловленных этим радикальных изменений в мессбауэровских спектрах магнитных материалах за счет КИ. В первую очередь нас интересуют схемы эксперимента с использованием обычного мессбауэровского источника в качестве пробного излучения. Расчеты спектров проведены методом, заимствованным из оптики и модифицированным на случай конечной ширины линии пробного излучения. Показана возможность эффектов КИ в спектрах резонансной флуоресценции мессбауэровского излучения в условиях воздействия на магнитный образец резонансного р.ч. поля. Интерпретация результатов проводится на основе представления квазиэнергетических (КЭ) или «одетых» состояний (ОС). Построение этой статьи таково. В п. 1 приводится общий гамильтониан мессбауэровской системы, включающий характерные для ядра взаимодействия. Далее (п. 2) изложен метод расчета спектра флуоресценции, основанный на уравнениях для матрицы плотности и модифицированный с учетом конечной ширины линии пробного излучения. Анализируются аналоги известных в оптике трехуровневых Σ -схемы и V -схемы с учетом специфических для мессбауэровской системы особенностей. Расчетами показано, что в спектрах резонансного рассеяния мессбауэровской линии в условиях ЯМР на возбужденном уровне ядра (Σ -схема) интенсивность рамановской линии может превосходить интенсивность линии упругого рассеяния благодаря квантовой интерференции. Иными словами, здесь имеет место «вентильный» эффект. В случае V -схемы (р.ч. резонанс в основном состоянии ядра) получена характерная для этого случая пятикомпонентная структура линий рассеяния. Рассмотренные простейшие Σ -схема и V -схема не исчерпывают встречающиеся для реальных мессбауэровских изотопов ситуации, а являются необходимыми фрагментами для их анализа. В п. 3 полученные в п. 2 результаты интерпретируются на основе амплитуды рассеяния мессбауэровского кванта, записанной во втором порядке теории возмущений по взаимодействию ядра с гамма-излучением и точно учитывающей влияние р.ч. поля. В приближении малых скоростей ядерной релаксации этот метод воспроизводит спектры, рассчитанные матричным методом. Далее, в п. 4 вычислена форма спектра флуоресценции, ожидаемая для реального изотопа ^{57}Fe методом, разработанным в п. 2. Заключительные замечания о квантовой интерференции, прозрачности мессбауэровской среды по отношению к

гамма-квантам, сопоставление и сравнение полученных результатов с имеющимися результатами в оптике приведены в п. 5.

1. Взаимодействие мессбауэровского ядра с гамма-излучением и со сверхтонкими полями

В магнитоупорядоченных соединениях железа мессбауэровские уровни расщепляются на $(2I_g + 1)$ или $(2I_e + 1)$ подуровней (для ядра ^{57}Fe спины основного и возбужденного состояний – $I_g = 1/2$, $I_e = 3/2$). Резонансное перемешивание зеемановских подуровней р.ч. полем – один из эффективных механизмов создания когерентной динамики ядерного спина. Анализ последствий такой когерентности можно проводить на основе гамильтониана [8, 9]:

$$\hat{H} = \hat{H}_N^0 + \hat{H}_g^0 + \hat{H}_e^0 + \hat{H}_Q + \hat{H}_\gamma^0 + \hat{H}_{rf}^0 + \hat{H}_\gamma + \hat{H}_{rf}. \quad (1)$$

Здесь \hat{H}_N^0 и $\hat{H}_{g,e}^0$ представляют внутриядерное взаимодействие и магнитное сверхтонкое взаимодействие для основного (возбужденного) состояния ядра, \hat{H}_Q – квадрупольное взаимодействие. Первые 4 слагаемых в (1) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \hat{H}_N^0 &= \varepsilon_0 \sum_M \hat{a}_M^+ \hat{a}_M, & \hat{H}_g^0 &= \sum_m \varepsilon_m \hat{a}_m^+ \hat{a}_m, \\ \hat{H}_e^0 &= \sum_M \varepsilon_M \hat{a}_M^+ \hat{a}_M, & \hat{H}_Q &= \sum_{M,M'} Q_{MM'} \hat{a}_M^+ \hat{a}_{M'}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь \hat{a}_m^+ и \hat{a}_m , \hat{a}_M^+ и \hat{a}_M – ферми-операторы рождения и уничтожения состояний с определенным значением (m, M) оператора $\hat{I}_z^{g,e}$, ε_0 – энергия возбужденного состояния ядра. Следующие слагаемые в (1), \hat{H}_γ^0 и \hat{H}_{rf}^0 – поле гамма-квантов и р.ч. поле, задаются следующим образом:

$$\hat{H}_\gamma^0 = \sum_k \omega_k \hat{c}_k^+ \hat{c}_k, \quad \hat{H}_{rf}^0 = \omega_0 \hat{b}^+ \hat{b}. \quad (3)$$

Здесь \hat{c}_k^+ , \hat{c}_k , ω_k и \hat{b}^+ , \hat{b} , ω_0 – операторы рождения, уничтожения и энергии гамма-фотона и р.ч. фотона (далее полагаем $\hbar = 1$), \hat{H}_γ – взаимодействие ядра с гамма-фотоном (\mathbf{k} , σ и L – волновой вектор, поляризация и мультипольность фотона, α , β , γ – углы Эйлера, определяющие направление его распространения):

$$\hat{H}_\gamma = \hat{H}_\gamma(\mathbf{k}, \sigma, L, \alpha, \beta, \gamma) = K \sum_{M,m} \sigma^{\Delta(\pi)} D_{\mu\sigma}^L(\alpha, \beta, \gamma) \langle I_g m L \mu | I_e M \rangle \hat{c}_k \hat{a}_M^+ \hat{a}_m + c.c., \quad (4)$$

где $\Delta(\pi) = 0$ или 1 (электрическое или магнитное мультипольное излучение), $D_{\sigma\mu}^L(\alpha, \beta, \gamma)$ – матрица вращения, $\langle I_g m L \mu | I_e M \rangle$ – коэффициенты Глебша–Гордона, K – константа, зависящая от L , I_e , I_g . Взаимодействие ядерных спинов (I_e , I_g) с р.ч. полем может быть представлено аналогично (4):

$$\begin{aligned} \hat{H}_{rf} &= \hat{H}_{rf}^e = \sum_{M,M'} g_{rf}^e(M, M') \hat{b} \hat{a}_M^+ \hat{a}_{M'} + c.c., \\ \hat{H}_{rf} &= \hat{H}_{rf}^g = \sum_{m,m'} g_{rf}^g(m, m') \hat{b} \hat{a}_m^+ \hat{a}_{m'} + c.c.. \end{aligned} \quad (5)$$

Константы $\varepsilon_{m,M}$, $g_{rf}^e(M, M')$ и $g_{rf}^g(m, m')$ (для ^{57}Fe) могут быть выражены через параметры полуклассического гамильтониана, используемого в магнитном резонансе:

$$\hat{H}_{g,e}^0 = -\gamma_{g,e} H_{hf}^0 \hat{I}_z^{g,e}, \quad \hat{H}_{rf}^{e,g} = -\gamma_{e,g} \frac{H_{hf}^{rf}}{2} \left(\hat{I}_+^{e,g} \exp(\mp i\omega_0 t) + \hat{I}_-^{e,g} \exp(\pm i\omega_0 t) \right),$$

откуда, например,

$$\varepsilon_M = -\gamma_e H_{hf}^0 M, \quad g_{rf}^e(M, M') = -\gamma_e \frac{H_{hf}^{rf}}{2\sqrt{n_r}} \langle M | \hat{I}_+^e | M' \rangle,$$

$$g_{rf}^g(m, m') = -\gamma_g \frac{H_{hf}^{rf}}{2\sqrt{n_r}} \langle m | \hat{I}_-^g | m' \rangle,$$

где $\gamma_{e,g}$ – гиромагнитное отношение, H_{hf}^0 и H_{hf}^{rf} – постоянное сверхтонкое поле и амплитуда переменного сверхтонкого поля, формирующегося под влиянием внешнего р.ч. поля, $\hat{I}_z^{g,e}$, $\hat{I}_\pm^{g,e}$ – операторы ядерного спина в системе координат с осью квантования вдоль H_{hf}^0 , n_r – число р.ч. квантов, соответствующее амплитуде классического р.ч. поля H_{hf}^{rf} .

Представим \hat{H}_{rf} и \hat{H}_γ также в полуклассическом представлении, в более привычных в оптике обозначениях:

$$\hat{H}_{rf} = \Omega_{M,M'} \hat{a}_M^+ \hat{a}_{M'} \exp(-i\omega_0 t) + c.c., \quad \Omega_{M,M'} = \sqrt{n_r} g_{rf}^e(M, M'), \quad (6)$$

$$\hat{H}_\gamma = K \sum_{M,m} \sigma^{\Delta(\pi)} D_{\mu\sigma}^L(\alpha, \beta, \gamma) \langle I_g m L \mu | I_e M \rangle \exp(-i\omega_k t) \hat{a}_M^+ \hat{a}_m + c.c., \quad (7)$$

где ω_0 и ω_k – частоты р.ч.- и гамма-фотона соответственно. Выражения (2)–(7) будут далее использованы при анализе эффектов КИ методом теории возмущений. Выражение (7) будет использовано в виде

$$\hat{H}_\gamma = K \sum_{M,m} \sigma^{\Delta(\pi)} D_{\mu\sigma}^L(\alpha, \beta, \gamma) \langle I_g m L \mu | I_e M \rangle \exp(-i(\omega_k t - \theta(t))) \hat{a}_M^+ \hat{a}_m + c.c.,$$

где $\theta(t)$ – случайная функция, подчиняющаяся процессу Винера–Леви, описывает флуктуацию фазы гамма-излучения. Излучение с флуктуирующей фазой может быть описано лоренцевой формой с шириной линии $\Gamma = 2D$, определяемой соотношением [10, 11]:

$$\langle \dot{\theta}(t) \dot{\theta}(t') \rangle = 2D \delta(t - t').$$

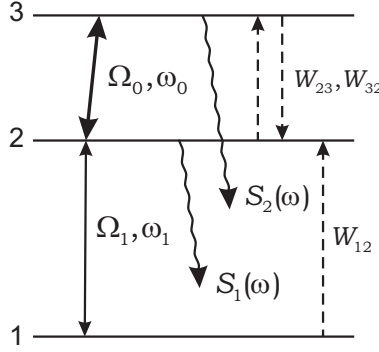
2. Метод матрицы плотности. Учет ширины линии пробного излучения

2.1. Трехуровневая Σ -схема. Трехуровневая мессбауэровская Σ -схема представлена на рис. 1 [12, 13]. Здесь уровень 1 и пара уровней (2, 3) представляют основное и возбужденное состояния ядра, связанные гамма-спектроскопическими переходами. Пробное излучение мессбауэровского источника возбуждает переход 1-2. Сильное р.ч. (сверхтонкое) поле резонансно перемешивает спиновые подуровни 2 и 3. Спонтанное излучение гамма-фотонов 2-1 и 3-1 в таких условиях моделирует флюоресценцию мессбауэровского излучения в режиме ЯМР. Уравнение для матрицы плотности в представлении взаимодействия имеет вид

$$\frac{d\hat{\rho}'}{dt} = -i [\hat{H}' \hat{\rho}'] + \Lambda \hat{\rho}'. \quad (8)$$

В этом уравнении гамильтониан \hat{H}' определяется следующим образом

$$\hat{H}' = \exp(i\hat{H}_0 t) \left(\hat{H}_{rf} + \hat{H}_\gamma \right) \exp(-i\hat{H}_0 t), \quad (9)$$

Рис. 1. Σ -схема

где \hat{H}_0 , \hat{H}_{rf} и \hat{H}_γ – нулевой гамильтониан, сильное р.ч. поле и пробное поле – определяются как:

$$\hat{H}_0 = \hat{H}_N^0 + \hat{H}_g^0 + \hat{H}_e^0 + \hat{H}_Q = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i \hat{a}_i^+ \hat{a}_i, \quad (10)$$

$$\hat{H}_{rf} = \Omega_0 \exp(-i\omega_0 t) \hat{a}_3^+ \hat{a}_2 + \Omega_0^* \exp(i\omega_0 t) \hat{a}_2^+ \hat{a}_3, \quad (11)$$

$$\hat{H}_\gamma = \Omega_1 \exp(i\theta(t)) \hat{a}_2^+ \hat{a}_1 \exp(-i\omega_1 t) + \Omega_1^* \exp(-i\theta(t)) \hat{a}_1^+ \hat{a}_2 \exp(i\omega_1 t). \quad (12)$$

Здесь \hat{a}_i и \hat{a}_i^+ – операторы Ферми, ε_i – энергия i -го состояния (рис. 1), $\Omega_0 = \Omega_{M3, M2}$, $\Omega_1 = \Omega_{M2, m1} = K \sigma^{\Delta(\pi)} D_{\mu\sigma}^L(\alpha, \beta, \gamma) \langle I_1 m1 L \mu | I_2 M2 \rangle$ (сравни с выражениями (6), (7)), ω_1 – частота пробного гамма-кванта.

Рассмотрим второе слагаемое в правой части выражения (8), отвечающее за необратимые процессы в системе:

$$\Lambda \hat{\rho}' = \sum_{i,j=1,2,3} \hat{a}_i^+ \hat{a}_j \hat{\rho}' \hat{a}_j^+ \hat{a}_i (A_{jii} + A_{jii}^*) - \hat{a}_i^+ \hat{a}_j \hat{\rho}' A_{jii} - \hat{\rho}' \hat{a}_i^+ \hat{a}_j A_{jii}^*.$$

Здесь A_{jii} , A_{jii}^* – комплексные константы релаксации, которые связаны с вероятностями переходов W_{ij} и константами распада Γ_{ij} (см. рис. 1):

$$W_{ij} = A_{jii} + A_{jii}^*, \quad \Gamma_{ij} = \frac{1}{2} \sum_k (W_{ik} + W_{jk}), \quad A_{iii} = 0.$$

Прежде чем решить уравнение (8) с взаимодействием (12), определим решение этого уравнения, когда в (12) флуктуации отсутствуют [14, 15]. Для этого уравнение (8) перепишем, вводя вектор столбец Ψ :

$$\frac{d}{dt} \Psi = \mathbf{L} \Psi + \mathbf{I}, \quad (13)$$

где \mathbf{L} и \mathbf{I} – постоянные матрица и вектор (см. табл. 1), зависящие от Ω_0 , Ω_1 и параметров необратимых процессов (второе слагаемое в уравнении (8)). Ψ задан следующими компонентами:

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \rho'_{12} \exp(-i\Delta_1 t), \quad \Psi_2 = \rho'_{13} \exp(-i(\Delta_1 + \Delta) t), \quad \Psi_3 = \rho'_{21} \exp(i\Delta_1 t), \\ \Psi_4 &= \rho'_{22}, \quad \Psi_5 = \rho'_{23} \exp(-i\Delta t), \quad \Psi_6 = \rho'_{31} \exp(i(\Delta_1 + \Delta) t), \\ \Psi_7 &= \rho'_{32} \exp(i\Delta t), \quad \Psi_8 = \rho'_{33}. \end{aligned} \quad (14)$$

Табл. 1

Матрица \mathbf{L} и вектор \mathbf{I} . $\Gamma_{12} = (W_{12} + W_{13} + \Gamma + W_{23})/2 + i\Delta_1$, $\Gamma_{21} = \Gamma_{12}^*$, $\Gamma_{13} = (W_{12} + W_{13} + \Gamma + W_{32})/2 + i(\Delta_1 + \Delta)$, $\Gamma_{31} = \Gamma_{13}^*$, $\Gamma_{23} = (2\Gamma + W_{23} + W_{32})/2 + i\Delta$, $\Gamma_{32} = \Gamma_{23}^*$, $\Gamma_{22} = \Gamma + W_{23} + W_{12}$, $\Gamma_{33} = \Gamma + W_{32} + W_{13}$. Здесь W_{ij} – релаксационный переход с i -го на j -й уровень, Γ – естественная ширина мессбауэровского излучения

	1	2	3	4	5	6	7	8	I
1	$-\Gamma_{12}$	$i\Omega_0$	0	$-2i\Omega_1^*$	0	0	0	$-i\Omega_1^*$	$i\Omega_1^*$
2	$i\Omega_1^*$	$-\Gamma_{13}$	0	0	$-i\Omega_1^*$	0	0	0	0
3	0	0	$-\Gamma_{21}$	$2i\Omega_1$	0	$-i\Omega_0^*$	0	$i\Omega_1$	$-i\Omega_1$
4	$-i\Omega_1$	0	$i\Omega_1^*$	$-\Gamma_{22}$	$i\Omega_0$	0	$-i\Omega_0^*$	$W_{32} - W_{12}$	W_{12}
5	0	$-i\Omega_1$	0	$i\Omega_0^*$	$-\Gamma_{23}$	0	0	$-i\Omega_0^*$	0
6	0	0	$-i\Omega_0$	0	0	$-\Gamma_{31}$	$i\Omega_1$	0	0
7	0	0	0	$-i\Omega_0$	0	$i\Omega_1^*$	$-\Gamma_{32}$	$i\Omega_0$	0
8	0	0	0	$W_{23} - W_{13}$	$-i\Omega_0$	0	$i\Omega_1^*$	$-\Gamma_{33}$	W_{13}

Здесь $\Delta = \omega_0 - \omega_{32}$ и $\Delta_1 = \omega_1 - \omega_{21}$ – расстройки частот полей относительно частот соответствующих переходов.

Как показано в работах [14, 15], именно решения уравнения (13) позволяют вычислить корреляционные функции и, далее, спектр излучения. Спектр спонтанного излучения, например, на переходе $j-i$ является Фурье образом двухвременной корреляционной функции:

$$\gamma(\tau_1, \tau_0) \propto \langle \hat{P}^{(-)}(\tau_1) \hat{P}^{(+)}(\tau_0) \rangle, \quad (15)$$

где $\hat{P}^{(+)} = \mu_{ij} \hat{a}_i^+ \hat{a}_j$ – оператор перехода. Мы рассматриваем только гамма-переходы, а именно 3-1 и 2-1 (рис. 1).

Вычисление (15) облегчается использованием теоремы квантовой регрессии. Согласно процедуре, следующей из этой теоремы, сначала вычисляется одновременное среднее

$$\begin{aligned} \langle \hat{P}^{(-)}(\tau_1) \rangle &= Tr [\mu_{ij} \hat{a}_j^+ \hat{a}_i \hat{\rho}] = \mu_{13} \exp(i\omega_1 \tau_1 + i\omega_0 \tau_1) \Psi_2(\tau_1) + \\ &+ \mu_{12} \exp(i\omega_1 \tau_1) \Psi_1(\tau_1). \end{aligned} \quad (16)$$

Далее функции $\Psi_1(\tau_1)$ и $\Psi_2(\tau_1)$ можно выразить через набор функций $\Psi_i(\tau_0)$ в момент времени τ_0 на основе уравнения (13). Искомая корреляционная функция получится, если функции $\Psi_i(\tau_0)$ представим как средние системных операторов $\langle \hat{a}_i^+ \hat{a}_j \rangle_{\tau_0}$, а далее эти средние заменим средними типа $\langle \hat{a}_i^+ \hat{a}_j \hat{P}^+(\tau_0) \rangle$, которые снова окажутся выраженными через функции $\Psi_i(\tau_0)$.

Эта простая схема требует модификации при использовании пробного поля с флуктуирующей фазой. Одновременное среднее, необходимое для вычисления корреляционной функции, имеет тот же внешний вид (16), но теперь функции $\Psi_1(\tau_1)$ и $\Psi_2(\tau_1)$ определяются путем решения системы стохастических дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt} \Psi' = [\mathbf{L} - i\dot{\theta}(t) \mathbf{L}'] \Psi' + \mathbf{I} \exp(-i\theta(t)). \quad (17)$$

Компоненты нового вектора Ψ' ($\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3^{--}, \Psi_4^-, \Psi_5^-, \Psi_6^{--}, \Psi_7^-, \Psi_8^-$) связаны с введенным выше набором Ψ_i (14):

$$\begin{aligned} \Psi_i^- &= \Psi_i \exp(-i\theta(t)), \quad \Psi_i^+ = \Psi_i \exp(i\theta(t)), \\ \Psi_i^{--} &= \Psi_i \exp(-i2\theta(t)) \dots \end{aligned}$$

Матрица \mathbf{L} и вектор \mathbf{I} – те же, что и в (13). Диагональная матрица \mathbf{L}' имеет следующие ненулевые компоненты: $L'_{3,3} = L'_{6,6} = 2$, $L'_{4,4} = L'_{5,5} = L'_{7,7} = L'_{8,8} = 1$.

Уравнение (17) решим после того, как проведем его стохастическое усреднение [10, 11]:

$$\frac{d}{dt} \langle \Psi' \rangle = [\mathbf{L} - D(\mathbf{L}')^2] \langle \Psi' \rangle + \mathbf{I} \langle \exp(-i\theta(t)) \rangle = \mathbf{L}_1 \langle \Psi' \rangle + \mathbf{I} \langle \exp(-i\theta(t)) \rangle. \quad (18)$$

Решение этого уравнения можно записать (далее опускаем знак стохастического усреднения для величины Ψ') в виде:

$$\Psi'(\tau_1) = \exp[\mathbf{L}_1(\tau_1 - \tau_0)] \Psi'(\tau_0) + \int_{\tau_0}^{\tau_1} d\tau' \exp[\mathbf{L}_1(\tau_1 - \tau')] \mathbf{I} \langle \exp(-i\theta(\tau')) \rangle. \quad (19)$$

Таким образом, далее будем предполагать в выражениях (15) и (16), помимо квантово-механического, и стохастическое усреднение.

Производя замену переменных $\tau = \tau_1 - \tau_0$ и с учетом $\langle \exp(-i\theta(\tau')) \rangle = \exp(-D(\tau' - \tau_0)) \langle \exp(-i\theta(\tau_0)) \rangle$, получаем из (19)

$$\begin{aligned} \Psi'(\tau_1) &= \exp[\mathbf{L}_1\tau] \Psi'(\tau_0) + \int_0^\tau d\tau' \exp[\mathbf{L}_1(\tau - \tau')] \exp(-\mathbf{D}\tau') \mathbf{I} \langle \exp(-i\theta(\tau_0)) \rangle = \\ &= \exp[\mathbf{L}_1\tau] \Psi'(\tau_0) + \frac{\exp(\mathbf{L}_1\tau) - \exp(-\mathbf{D}\tau)}{\mathbf{L}_1 + \mathbf{D}} \mathbf{I} \langle \exp(-i\theta(\tau_0)) \rangle. \end{aligned} \quad (20)$$

Под \mathbf{D} следует понимать число D , умноженное на единичную матрицу того же порядка, что и \mathbf{L} .

Величины $\Psi'_j(\tau_0)$ в (20) можно представить через системные операторы в момент времени $\tau = \tau_0$. Например:

$$\Psi'_2(\tau_0) = \exp(-i\omega_1\tau_0) \rho_{13}(\tau_0) = \exp(-i\omega_1\tau_0) \langle |3\rangle \langle 1| \rangle_{\tau_0},$$

где подразумевается также усреднение по стохастическим переменным.

Используем теперь теорему квантовой регрессии для вычисления $\langle \langle P^{(-)}(\tau_1) P^{(+)}(\tau_0) \rangle \rangle$ (здесь явно учтено также стохастическое усреднение). Выразим $\langle \langle P^{(-)}(\tau_1) \rangle \rangle$ согласно (16) через величины $\Psi'_j(\tau_1)$. После этого $\Psi'_j(\tau_1)$ представим согласно (19) через $\Psi'_j(\tau_0)$, а затем $\Psi'_j(\tau_0)$ (или $\langle \langle |i\rangle \langle j| \rangle_{\tau_0} \rangle$) и $\langle \exp(-i\theta(\tau_0)) \rangle$ в (20) заменим на $\langle \langle |i\rangle \langle j| \hat{P}^{(+)}(\tau_0) \rangle_{\tau_0} \rangle$ и $\langle \exp(-i\theta(\tau_0)) \hat{P}^{(+)}(\tau_0) \rangle$ соответственно.

При такой замене появляются переменные $\Psi''_j(\tau_0)$, которые входят в вектор Ψ'' ($\Psi''_1, \Psi''_2, \Psi''_3, \Psi''_4, \Psi''_5, \Psi''_6, \Psi''_7, \Psi''_8$), удовлетворяющий следующему матричному уравнению:

$$\frac{d}{dt} \langle \Psi'' \rangle = [\mathbf{L} - D(\mathbf{L}'')^2] \langle \Psi'' \rangle + \mathbf{I} = \mathbf{L}_2 \langle \Psi'' \rangle + \mathbf{I}. \quad (21)$$

Здесь \mathbf{L}'' – диагональная матрица со следующими ненулевыми элементами: $L''_{1,1} = L''_{2,2} = 1$, $L''_{3,3} = L''_{6,6} = -1$.

Для дальнейшего исследования существенно, что решение (21) ищется в пределе $\tau_0, \tau_1 \rightarrow \infty$, но так, чтобы разность $\tau = \tau_1 - \tau_0$ оставалась конечной. В этом случае левая часть (21) равна нулю, и $\langle \Psi''(\tau_0) \rangle$ находится обращением матрицы. После преобразования Лапласа корреляционной функции (15) и взятия реальной части спектр флюоресценции имеет вид

$$S(\omega) \propto S_1(\omega) + S_2(\omega), \quad (22)$$

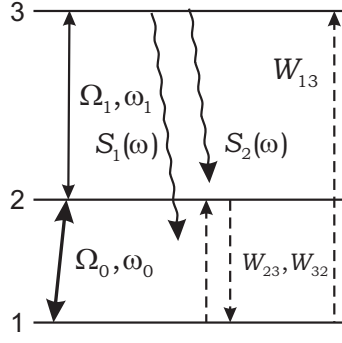


Рис. 2. V-схема

где

$$S_1(\omega) = \text{Re} \left[\sum_{j=1}^2 M_{1j}(z_1) \Psi''_{j+3}(\infty) + \sum_{j=1}^8 N_{1j}(z_1) I_j \Psi''_3(\infty) \right],$$

$$S_2(\omega) = \text{Re} \left[\sum_{j=1}^2 M_{2j}(z_2) \Psi''_{j+6}(\infty) + \sum_{j=1}^8 N_{2j}(z_2) I_j \Psi''_6(\infty) \right].$$

Здесь введены следующие обозначения: $\mathbf{M}(z) = (\mathbf{z} - \mathbf{L}_1)^{-1}$, $\Psi''(\infty) = \mathbf{L}_2^{-1} \mathbf{I}$, $\mathbf{N}(z) = (\mathbf{L}_1 + \mathbf{D})^{-1} [(\mathbf{z} - \mathbf{L}_1)^{-1} - (\mathbf{z} + \mathbf{D})^{-1}]$, $\mathbf{z} - z$, умноженное на единичную матрицу размерности \mathbf{L} , $z_1 = i(\omega - \omega_{21})$, $z_2 = i(\omega - \omega_{31})$.

Выражение (22) дает спектр флюоресценции мессбауэровского излучения с естественной шириной линии $2D = \Gamma$ в условиях ЯМР на возбужденном уровне ядра. Здесь учтены также возможные стохастические (релаксационные) переходы (W_{23} , W_{32}) между спиновыми подуровнями 2 и 3 (см. рис. 1). Параметр W_{12} характеризует нерезонансный механизм накачки ядра на мессбауэровский уровень.

2.2. Трехуровневая V-схема. Рассмотрим теперь трехуровневую V-схему (рис. 2). В этом случае р.ч. резонанс связывает подуровни 1 и 2 основного состояния ядра, а гамма-излучение – подуровни 1 и 2 с подуровнем 3 возбужденного ядра. Уравнение для матрицы плотности для этой схемы имеет тот же вид, что и для трехуровневой Σ -схемы, отличие имеется лишь в гамильтониане задачи (см. (8)–(12)):

$$\frac{d\rho'}{dt} = -i [\hat{H}' \rho'] + \Lambda \rho',$$

$$\hat{H}' = \exp(i\hat{H}_0 t) (\hat{H}_{rf} + \hat{H}_\gamma) \exp(-i\hat{H}_0 t),$$

$$\hat{H}_0 = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_i,$$

$$\hat{H}_{rf} = \Omega_0 \exp(-i\omega_0 t) \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_1 + \Omega_0^* \exp(i\omega_0 t) \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2,$$

$$\hat{H}_\gamma = \Omega_1 \exp(i\theta(t)) \hat{a}_3^\dagger \hat{a}_1 \exp(-i\omega_1 t) + \Omega_1^* \exp(-i\theta(t)) \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_3 \exp(i\omega_1 t).$$

Для такого гамильтониана (при возбуждении гамма-перехода 1-3) возможны две линии спонтанного излучения: 3-1 и 3-2. Процедура вычислений спектра флюоресценции, приведенная выше, позволяет получить последствия р.ч. резонанса на

Табл. 2

Трехуровневая V-схема. Матрица \mathbf{L} и вектор \mathbf{I} . $\Gamma_{12} = (W_{12} + W_{13} + W_{21} + W_{23})/2 + i\Delta$, $\Gamma_{21} = \Gamma_{12}^*$, $\Gamma_{13} = (W_{12} + W_{13} + W_{21} + W_{32})/2 + i\Delta_1$, $\Gamma_{31} = \Gamma_{13}^*$, $\Gamma_{23} = (2W_{21} + W_{23} + W_{32})/2 + i(\Delta_1 - \Delta)$, $\Gamma_{32} = \Gamma_{23}^*$, $\Gamma_{22} = W_{21} + W_{23} + W_{12}$, $\Gamma_{33} = W_{21} + W_{32} + W_{13}$. Здесь W_{ij} – релаксационный переход с i -го на j -й уровень, Γ – естественная ширина мессбауэровского излучения, $\Delta = \omega_0 - \omega_{21}$ и $\Delta_1 = \omega_1 - \omega_{31}$

	1	2	3	4	5	6	7	8	I
1	$-\Gamma_{12}$	0	0	$-2i\Omega_0^*$	0	0	$-i\Omega_1^*$	$-i\Omega_0^*$	$i\Omega_1^*$
2	0	$-\Gamma_{13}$	0	$-i\Omega_1^*$	0	0	0	$-2i\Omega_1^*$	$i\Omega_1^*$
3	0	0	$-\Gamma_{21}$	$2i\Omega_0$	$i\Omega_1$	0	0	$i\Omega_0$	$-i\Omega_0$
4	$-i\Omega_0$	0	$i\Omega_0^*$	$-\Gamma_{22}$	0	0	0	$W_{32} - W_{12}$	W_{12}
5	0	$-i\Omega_0$	$i\Omega_0^*$	0	$-\Gamma_{23}$	0	0	0	0
6	0	0	0	$i\Omega_1$	0	$-\Gamma_{31}$	$i\Omega_0$	$2i\Omega_1$	$-i\Omega_1$
7	$-i\Omega_1$	0	0	0	0	$i\Omega_0^*$	$-\Gamma_{32}$	0	0
8	0	$-i\Omega_1$	0	$W_{23} - W_{13}$	0	$i\Omega_1^*$	0	$-\Gamma_{33}$	W_{13}

основном состоянии ядра [16]:

$$S(\omega) \propto S_1(\omega) + S_2(\omega), \quad (23)$$

где

$$S_1(\omega) = \text{Re} \left[\sum_{j=1}^2 M_{2j}(z_1) \Psi''_{j+6}(\infty) + \sum_{j=1}^8 N_{2j}(z_1) I_j \Psi''_6(\infty) \right],$$

$$S_2(\omega) = \text{Re} \left[\sum_{j=3}^5 M_{5j}(z_2) \Psi''_{j+3}(\infty) + \sum_{j=1}^8 N_{5j}(z_2) I_j \Psi''_7(\infty) \right].$$

Использованы следующие обозначения: $\mathbf{M}(z) = (\mathbf{z} - \mathbf{L}_1)^{-1}$, $\Psi''(\infty) = \mathbf{L}_2^{-1} \mathbf{I}$, $\mathbf{N}(z) = (\mathbf{L}_1 + \mathbf{D})^{-1} \left[(\mathbf{z} - \mathbf{L}_1)^{-1} - (\mathbf{z} + \mathbf{D})^{-1} \right]$, \mathbf{z} получается умножением z на единичную матрицу размерности \mathbf{L} , $z_1 = i(\omega - \omega_{31})$, $z_2 = i(\omega - \omega_{32})$. Матрицы \mathbf{L}_1 и \mathbf{L}_2 получаются аналогично процедуре, проведенной в пп. 2.1 для Σ -схемы. Как и в пп. 2.1, они выражаются через \mathbf{L} и \mathbf{I} (см. последовательность формул (13), (18), (21)). Матрица \mathbf{L} и вектор \mathbf{I} для V-схемы представлены в табл. 2. Выражение (23) определяет спектр рассеяния мессбауэровской линии (ширина $\Gamma = 2D$) в условиях ЯМР на основном уровне ядра.

3. Приближение теории возмущений

Смысл процессов, описанных в предыдущем пункте, становится более прозрачным, если воспользоваться выражением для амплитуды резонансного рассеяния мессбауэровского фотона ($k_1 \rightarrow k_2$), записанным во втором порядке теории возмущений по взаимодействию ядра с полем гамма-излучения H_γ и точно учитывающим взаимодействие ядерных спинов со сверхтонкими полями:

$$A_{i \rightarrow f} \sim -i \int_0^\infty dt \exp(-pt) \times$$

$$\times \langle f, k_2 | \hat{A} e^{i \int_0^t H_g(t') dt'} \hat{H}_\gamma(k_2) \hat{T} e^{-i \int_0^t H_e(t') dt'} |e\rangle \langle e | \hat{H}_\gamma(k_1) |i, k_1\rangle. \quad (24)$$

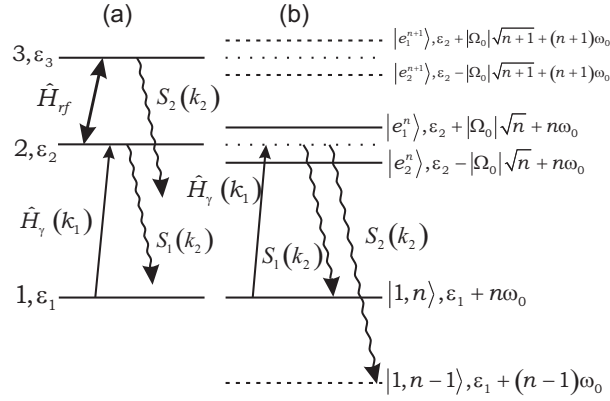


Рис. 3. (a) Модельная трехуровневая Σ -схема рассеяния мессбауэровских квантов; (b) эквивалентная схема рассеяния на «одетых» состояниях

Данное выражение является обобщением амплитуд рассеяния, обычно используемых [17, 18], на случай взаимодействия ядерных спинов со сверхтонкими полями произвольной временной зависимости $\hat{H}_{g,e}(t)$. Операторы \hat{T} и \hat{A} означают упорядочение и антиупорядочение соответствующих экспонент во времени, $|k_1\rangle$ и $|k_2\rangle$ – состояния (\hat{H}_γ^0) фотонов с волновыми векторами \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 , $p = -i(\omega_{k_2} - \varepsilon_0) + \Gamma/2$; Γ – естественная ширина мессбауэровского уровня. Начальное, конечное и промежуточное состояния ядра в процессе резонансного рассеяния, $|i\rangle$, $|f\rangle$ и $|e\rangle$ – собственные состояния $\hat{H}_N^0 + \hat{H}_{g,e}^0$. Для рассматриваемой задачи $\hat{H}_{g,e}(t) = \hat{H}_{g,e}^0 + \hat{H}_{rf}^{g,e}(t)$ – периодические гамильтонианы во времени (подразумевается, что $\hat{H}_{rf}^{g,e}(t)$ записаны в полуклассическом представлении). Тогда вместо $|i\rangle$, $|f\rangle$ и $|e\rangle$ могут быть взяты квазиэнергетические (КЭ) состояния [19] системы (steady states [20]); в (24) предполагается суммирование по е. КЭ состояния образуются в результате резонансного перемешивания пары спиновых подуровней (возбужденных или основных; Σ -схема или V-схема соответственно). Эти состояния имеют следующую структуру:

$$e_q(t) = \exp(-iE_q^e t) \chi_q^e(t), \quad g_q(t) = \exp(-iE_q^g t) \chi_q^g(t), \quad \chi_q^{e,g}(t) = \chi_q^{e,g}(t + T),$$

где E_q^g и E_q^e – квазиэнергии, $q = 1, 2$. Амплитуда рассеяния теперь выглядит так:

$$A_{q \rightarrow q'} \sim -i \int_0^\infty dt \exp\left(-\frac{\Gamma t}{2}\right) \langle g_{q'}, k_2, t | \hat{H}_\gamma(k_2) | e_{q''}, t \rangle \langle e_{q''}, 0 | \hat{H}_\gamma(k_1) | g_q, k_1, 0 \rangle.$$

Если $\hat{H}_{rf}^{g,e}$ заданы вторично квантованными операторами, то система характеризуется «одетыми» состояниями (см., например, [21]). Двухуровневая система в резонансном р.ч. поле (см.рис. 3, b) характеризуется следующим гамильтонианом

$$\sum_{i=2,3} \varepsilon_i \hat{a}_i^+ \hat{a}_i + \omega_0 \hat{b}^+ \hat{b} + \Omega_0 \hat{a}_3^+ \hat{a}_2 \hat{b} + \Omega_0^* \hat{a}_2^+ \hat{a}_3 \hat{b}^+.$$

Явные выражения для ОС $e_q^n(t)$ получаются диагонализацией этого гамильтониана; в условиях точного р.ч. резонанса, например, имеем (см. рис. 3):

$$\begin{aligned} e_1^n(t) &= \exp(-iE_1^n t - in\omega_0 t) \frac{1}{\sqrt{2}} (-|2, n\rangle + e^{i\varphi} |3, n-1\rangle), \\ e_2^n(t) &= \exp(-iE_2^n t - in\omega_0 t) \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{-i\varphi} |2, n\rangle + |3, n-1\rangle), \end{aligned} \quad (25)$$

где $|i, n\rangle \equiv |i\rangle |n\rangle$, $|n\rangle$ – n -фотонное состояние р.ч. поля, φ определяется соотношением $\Omega_0 = |\Omega_0| \exp(i\varphi)$. Снова имеем $e_q^n(t) = \exp(-iE_q^n t) \chi_q^n(t)$, $\chi_q^n(t+T) = \chi_q^n(t)$, где $T = 2\pi/\omega_0$ – период р.ч. поля, $E_{1,2}^n = \mp\Omega_r + \varepsilon_2$ – квазиэнергии, $\Omega_r = |\Omega_0| \sqrt{n}$ – частота Раби р.ч. поля.

Классическое р.ч. поле в представлении вторичного квантования описывается когерентным состоянием

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-|\alpha|^2/2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle,$$

где $|\alpha|^2 = \bar{n} = \sum_{n=1}^{\infty} nP(n)$ – велико. В этом случае распределение Пуассона $P(n)$, описывающее заселенность р.ч. фоковских состояний $|n\rangle$, имеет острый максимум при $n \approx \bar{n}$. Поэтому далее, в целях учета эффекта классического р.ч. поля, будем использовать выражения (25), полагая при этом n равным среднему числу фотонов, $n \approx \bar{n}$ (см., например, [22]).

Аналогичным образом определяются ОС при р.ч. перемешивании подуровней основного состояния. Теперь амплитуда рассеяния ($k_1 \rightarrow k_2$) может быть записана:

$$A_{q,n \rightarrow q',n'} \sim -i \int_0^{\infty} dt \exp\left(-\frac{\Gamma t}{2}\right) \langle g_{q'}^{n'}, k_2, t | H_{\gamma}(k_2) | e_{q''}^{n''}, t \rangle \langle e_{q''}^{n''}, 0 | H_{\gamma}(k_1) | g_q^n, k_1, 0 \rangle.$$

Амплитуды рассеяния для Σ -схемы и V -схемы могут быть получены из этого общего выражения как частные случаи.

Зная амплитуду рассеяния, можно определить как сечение поглощения мессбауэровских квантов (оптическая теорема):

$$\sigma_{\text{abs}} \sim \text{Im} A_{i \rightarrow i},$$

так и вероятность рассеяния квантов

$$W(k_1 \rightarrow k_2) \sim \int d\omega_{k_1} |A_{i \rightarrow f}|^2 \delta(E_f - E_i) f_L(\omega_{k_1} - \omega_{k_0}). \quad (26)$$

В последнем выражении учтен закон сохранения полной энергии системы. Начальное и конечное состояния полной системы – $i = q, n, k_1$; $f = q', n', k_2$. Предполагается усреднение по энергии рассеиваемого гамма-кванта ω_{k_1} с учетом функции формы линии (как правило, лоренцевой) мессбауэровского источника $f_L(\omega_{k_1} - \omega_{k_0})$, где ω_{k_0} – энергия, соответствующая максимуму этой функции. Выражение (26) определяет спектр рассеянного излучения, и далее рассмотрим Σ -схему и V -схему отдельно.

3.1. Σ -схема. В этом случае (см. рис. 3) [23]:

$$A_{i \rightarrow f} \sim \sum_q \int_0^{\infty} dt \exp(-\Gamma t/2) \langle f(t) | \hat{H}_{\gamma}(k_2) | e_q^n(t) \rangle \langle e_q^n(0) | \hat{H}_{\gamma}(k_1) | i(0) \rangle, \quad (27)$$

где $|i(0)\rangle = |i(t=0)\rangle = |1\rangle |n\rangle |k_1\rangle$ и $|f(t)\rangle = \exp(-iE_f t) |1\rangle |n'\rangle |k_2\rangle$ – начальное и конечное состояния системы, полная энергия которых равна $E_i = \varepsilon_1 + n\omega_0 + \omega_{k_1}$ и $E_f = \varepsilon_1 + n'\omega_0 + \omega_{k_2}$ соответственно.

На рис. 3, *b* приведена схема рассеяния гамма-фотонов в представлении «одетых» состояний при $\omega_{k_0} = \varepsilon_2$. Мы рассмотрим переходы (27) с $n' = n$ и $n' = n - 1$,

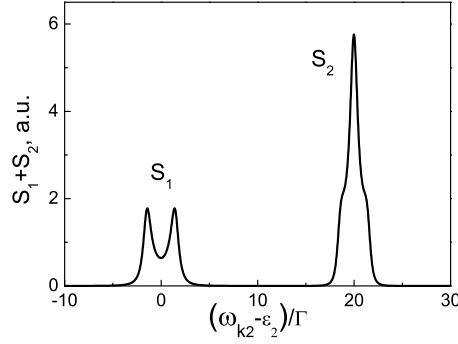


Рис. 4. Ожидаемый спектр рассеяния. Σ -схема. $\Omega_r = 1.5$, $2D = \Gamma$

соответствующие упругому рассеянию (S_1) и рамановскому рассеянию (S_2). Этим двум переходам соответствуют амплитуды

$$A_{1nk_2 \rightarrow 1nk_1} \sim \sum_q \int_0^\infty dt \langle 1, n, k_2 | \hat{H}_\gamma(k_2) | e_q^n(t) \rangle \times \\ \times \langle e_q^n(0) | \hat{H}_\gamma(k_1) | 1, n, k_1 \rangle \exp(i\omega_{k_2}t + in\omega_0t - \Gamma t/2), \quad (28)$$

$$A_{1nk_1 \rightarrow 1(n-1)k_2} \sim \sum_q \int_0^\infty dt \langle 1, n-1, k_2 | \hat{H}_\gamma(k_2) | e_q^n(t) \rangle \times \\ \times \langle e_q^n(0) | \hat{H}_\gamma(k_1) | 1, n, k_1 \rangle \exp(-\Gamma t/2 + i\omega_{k_2}t + i(n-1)\omega_0t). \quad (29)$$

Подставляя амплитуды (28) и (29) в (26) и выполнив интегрирование по энергии первичного фотона, получим спектральные формы упругого и рамановского рассеяния при ($\omega_{k_0} = \varepsilon_2$):

$$S_1(k_2) = W_{k_1n \rightarrow k_2n} \sim \left| \frac{1}{ip - \Omega_r} + \frac{1}{ip + \Omega_r} \right|^2 \times \\ \times f_L(\omega_{k_2} - \varepsilon_2) \left| \langle 1 | \hat{H}_\gamma(k_2) | 2 \rangle \langle 2 | \hat{H}_\gamma(k_1) | 1 \rangle \right|^2, \quad (30)$$

$$S_2(k_2) = W_{k_1n \rightarrow k_2n-1} \sim \left| \frac{1}{ip - \Omega_r - \omega_0} - \frac{1}{ip + \Omega_r - \omega_0} \right|^2 \times \\ \times f_L(\omega_{k_2} - \varepsilon_2 - \omega_0) \left| \langle 1 | \hat{H}_\gamma(k_2) | 3 \rangle \langle 2 | \hat{H}_\gamma(k_1) | 1 \rangle \right|^2. \quad (31)$$

Здесь $p = -i(\omega_{k_2} - \varepsilon_2) + \frac{\Gamma}{2}$, $\Omega_r = |\Omega_0| \sqrt{\bar{n}}$.

Легко заметить, что в выражениях (30) и (31) имеют место конструктивная и деструктивная интерференции соответственно, пока Ω_r мало. В частности, при Ω_r , стремящемся к нулю, S_2 стремится к нулю. Однако с ростом Ω_r (а именно, при $\Omega_r > \Gamma/2$) характер интерференции в (30) и (31) при тех же условиях ($\omega_{k_0} = \varepsilon_2$) меняется на обратный. Теперь при достаточно больших Ω_r значениях интенсивность рамановской линии может оказаться больше, чем интенсивность линии упругого рассеяния. На рис. 4 представлен ожидаемый спектр $S_1(k_2) + S_2(k_2)$,

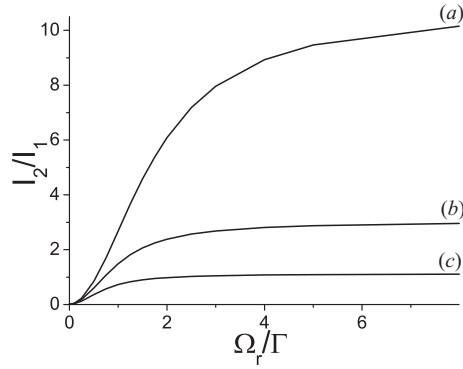


Рис. 5. Зависимость отношения I_2/I_1 от частоты Раби Ω_r . (a) $D = 0.1$; (b) $D = 0.5$; (c) $D = 10$. D измеряется в единицах Γ

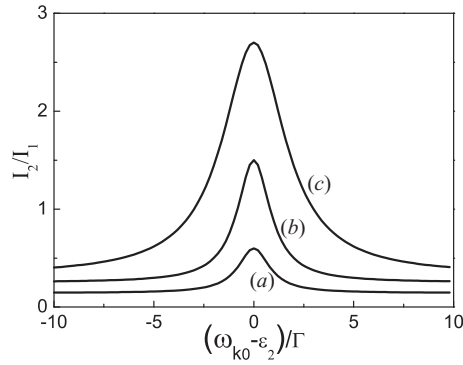


Рис. 6. Зависимость отношения I_2/I_1 от энергии фотонов мессбауэровского источника ω_{k0} ; (a) $\Omega_r = 0.5$; (b) $\Omega_r = 1$; (c) $\Omega_r = 3$

вычисленный для $\Omega_r = 1.5$ в предположении, что матричные элементы переходов 1-2 и 1-3 равны: $\langle 1 | \hat{H}_\gamma(k_2) | 2 \rangle = \langle 1 | \hat{H}_\gamma(k_2) | 3 \rangle$. Здесь и далее вычисления спектров флуоресценции проведены численным методом, развитым в п. 2, с использованием аппарата матрицы плотности. Заметим, что $S_i(\omega)$ из п. 2 сопоставляем $S_i(k_2)$. Метод теории возмущений, развитый в этом пункте, позволяет провести ясную интерпретацию результатов аналитическими выражениями. Эти два метода дают идентичные результаты (спектры) в пределе малых скоростей ядерной спиновой релаксации. Соотношение интенсивностей линий S_2 и S_1 определяется как I_2/I_1 , где I_2 и I_1 – площади под линиями S_2 и S_1 . Зависимость I_2/I_1 от Ω_r представлена на рис. 5. То, что значение I_2/I_1 превышает единицу, означает, что ядро, поглотившее первичный гамма-фотон на переходе 1-2, предпочитает высвечиваться с уровня 3, т. е. по рамановскому, а не по упругому каналу. Такое предпочтение в высвечивании ядра было названо нами «вентильным» эффектом (из интуитивных соображений отношение I_2/I_1 должно было бы асимптотически стремиться к единице с ростом Ω_r). Данное явление объясняется тем, что при достаточно больших значениях Ω_r интенсивность упругого рассеяния уменьшается в результате деструктивной интерференции амплитуд, а рамановского – увеличивается в результате конструктивной интерференции. Эффект интерференции максимален именно при $\omega_{k0} = \varepsilon_2$, в этом случае значения интерферирующих амплитуд в (30) и (31) сравнимы по величине. При нарушении равенства $\omega_{k0} = \varepsilon_2$ величина «вентильного» эффекта уменьшает-

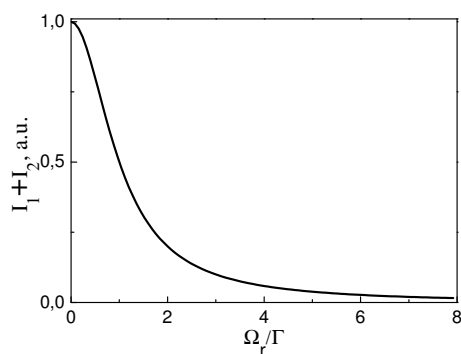


Рис. 7. Зависимость суммарной интенсивности рассеянного излучения $I_1 + I_2$ от частоты Раби р.ч. поля Ω_r ; $\omega_{k0} = \varepsilon_2$

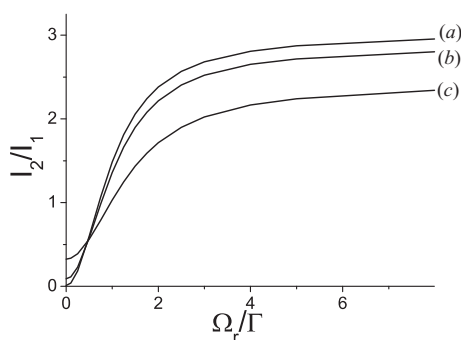


Рис. 8. Зависимость отношения I_2/I_1 от частоты Раби Ω_r . (a) $W_{32} = W_{23} = 0.01$; (b) $W_{32} = W_{23} = 0.1$; (c) $W_{32} = W_{23} = 0.5$

ся, в результате зависимость (I_2/I_1) от энергии мессбауэровского излучения ω_{k0} имеет резонансный характер (рис. 6).

Как видно из рис. 5, величина «вентильного» эффекта монотонно зависит от значения Ω_r/Γ . Однако при увеличении отношения Ω_r/Γ (при сохранении равенства $\omega_{k0} = \varepsilon_2$) довольно быстро уменьшается суммарная интенсивность рассеяния ($I_1 + I_2$) (рис. 7), что необходимо учитывать в первую очередь при экспериментальной реализации этого эффекта. Таким образом, оптимальное условие наблюдения эффекта сводится к соотношению $\Gamma \sim \Omega_r$. Это есть условие возбуждения одним фотоном двух «одетых» состояний, согласованных по фазе, интерференция которых лежит в основе обсуждаемого явления.

Из рис. 5, *a, b* видно, что при заданной частоте Раби отношение I_2/I_1 увеличивается с уменьшением ширины линии источника $2D$. Это говорит о том, что в р.ч. экспериментах по флюоресценции мессбауэровского излучения эффект КИ («вентильный» эффект) будет выражен тем больше, чем меньше отношение D/Γ . С другой стороны, «вентильный» эффект исчезает с ростом D (см. рис. 5, *c*); видно, что с ростом D отношение I_2/I_1 стремится к единице. Обратим также внимание на то, как зависит искомое соотношение площадей от скорости релаксационных процессов (рис. 8).

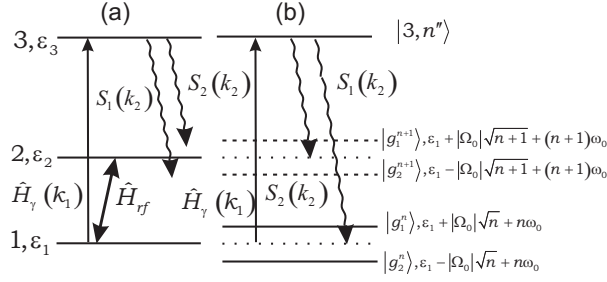


Рис. 9. (a) Модельная трехуровневая V-схема рассеяния мессбауэровских квантов; (b) эквивалентная схема рассеяния на «одетых» состояниях

3.2. V-схема. На рис. 9 приведена V-схема в терминах «одетых» состояний. Общий вид амплитуды рассеяния выглядит так:

$$A_{q,n \rightarrow q',n'} \sim (-i) \int_0^\infty dt \exp\left(-\frac{\Gamma t}{2}\right) \times \\ \times \langle g_{q'}^{n'}, k_2, t | H_\gamma(k_2) | 3, n'', t \rangle \langle 3, n'' | H_\gamma(k_1) | g_q^n, k_1, 0 \rangle. \quad (32)$$

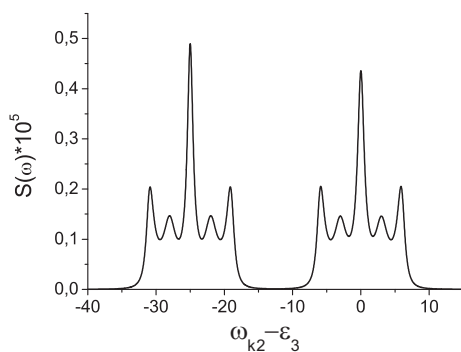
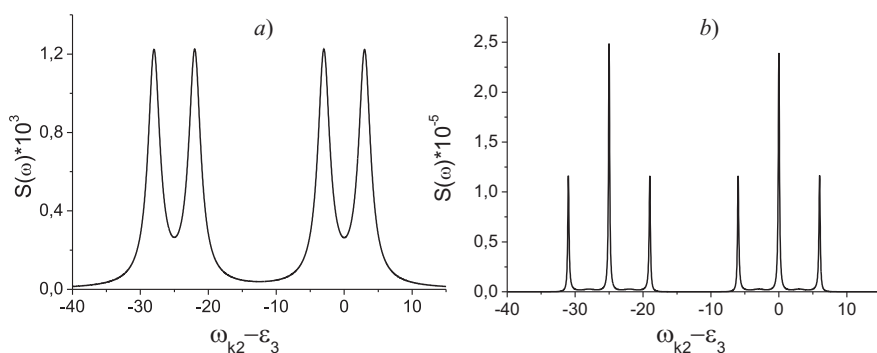
$$g_1^n(t) = \exp(-iE_1^n t - in\omega_0 t) \frac{1}{\sqrt{2}} (-|1, n\rangle + e^{i\varphi} |2, n-1\rangle), \\ g_2^n(t) = \exp(-iE_2^n t - in\omega_0 t) \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{-i\varphi} |1, n\rangle + |2, n-1\rangle),$$

где суммирование проводится по n'' . Имеются четыре различные амплитуды. Подставляя их в (26) и проводя интегрирование по времени и по ω_{k_1} , получим следующие слагаемые для вероятности рассеяния ($n' = n$):

$$W_{g_1 k_1, g_1 k_2}(k_1 - k_2) \sim \left| \frac{i |^1 a_1|^2 \langle 1 | 3 \rangle \langle 3 | 1 \rangle}{ip - \Omega_r + \varepsilon_1} + \frac{i |^1 a_2|^2 \langle 2 | 3 \rangle \langle 3 | 2 \rangle}{ip - \Omega_r + \varepsilon_1 + \omega_0} \right|^2 f_L(\omega_{k_2} - \omega_{k_0}), \\ W_{g_1 k_1, g_2 k_2}(k_1 - k_2) \sim \left| \frac{i ^1 a_2^2 a_1 \langle 1 | 3 \rangle \langle 3 | 1 \rangle}{ip + \Omega_r + \varepsilon_1} + \frac{i ^2 a_2^* a_2 \langle 2 | 3 \rangle \langle 3 | 2 \rangle}{ip + \Omega_r + \varepsilon_1 + \omega_0} \right|^2 \times \\ \times f_L(\omega_{k_2} - \omega_{k_0} - 2\Omega_r), \\ W_{g_2 k_1, g_1 k_2}(k_1 - k_2) \sim \left| \frac{i ^2 a_1^1 a_1 \langle 1 | 3 \rangle \langle 3 | 1 \rangle}{ip - \Omega_r + \varepsilon_1} + \frac{i ^2 a_2^1 a_2^* \langle 2 | 3 \rangle \langle 3 | 2 \rangle}{ip - \Omega_r + \varepsilon_1 + \omega_0} \right|^2 \times \\ \times f_L(\omega_{k_2} - \omega_{k_0} + 2\Omega_r), \\ W_{g_2 k_1, g_2 k_2}(k_1 - k_2) \sim \left| \frac{i |^2 a_1|^2 \langle 1 | 3 \rangle \langle 3 | 1 \rangle}{ip + \Omega_r + \varepsilon_1} + \frac{i |^2 a_2|^2 \langle 2 | 3 \rangle \langle 3 | 2 \rangle}{ip + \Omega_r + \varepsilon_1 + \omega_0} \right|^2 f_L(\omega_{k_2} - \omega_{k_0}),$$

где $p = -i(\omega_{k_2} - \varepsilon_3) + \Gamma/2$, $\varepsilon_1 = 0$, $^1 a_1 = -1/\sqrt{2}$, $^2 a_1 = \exp(-i\varphi)\sqrt{2}$, $^1 a_2 = \exp(i\varphi)/\sqrt{2}$, $^2 a_2 = 1/\sqrt{2}$.

В этих выражениях, в отличие от Σ -схемы, эффекты интерференции практически отсутствуют; мы полагаем, что $\Omega_r, \Gamma \ll \omega_0$, поэтому слагаемые в амплитудах рассеяния соответствуют линиям излучения, отстоящим на величину, намного большую естественной ширины. Если, например, $\omega_{k_0} = \varepsilon_3$, вторым слагаемым в амплитудах можно пренебречь. Нетрудно видеть, что каждое из четырех слагаемых может быть представлено как произведение лоренцианов, центры которых

Рис. 10. Ожидаемый спектр рассеяния. V-схема. $2D = \Gamma$, $\Omega_r = 3$ Рис. 11. Ожидаемая форма спектров рассеяния (V-схема): (a) $2D = 20\Gamma$, $\Omega_r = 3$; (b) $2D = 0.1\Gamma$, $\Omega_r = 3$.

смещены на Ω_r . Сумма четырех слагаемых приводит к линии рассеяния, имеющей пятикомпонентную структуру (рис. 10). Аналогичная пятикомпонентная структура получается для рамановской линии рассеяния, если в выражении (32) взять ($n' = n + 1$).

Описанная выше пятикомпонентная структура получена для типичных в мессбауэровской спектроскопии условий: ширина линии источника совпадает с шириной мессбауэровского перехода в рассеивателе. Теперь мы обсудим возможность, когда эти величины могут различаться. Легко видеть, когда ширина линии источника намного больше Γ , пятикомпонентная структура превращается в дублет Раби (рис. 11, a). С другой стороны, когда ширина линии источника намного меньше Γ , спектр рассеянного излучения превращается в триплет (рис. 11, b).

Таким образом, структура рассеянного мессбауэровского излучения (в условиях ЯМР на основном уровне) отражает когерентность в системе ядерных спинов (дублет Раби) и конечную ширину линии излучения источника.

4. Изотоп ^{57}Fe

Рассмотренные выше трехуровневые системы хорошо подходят для понимания сути обсуждаемых явлений. Однако для реальных изотопов нам приходится рассматривать схему с числом уровней больше трех. При этом возникает необходимость учитывать то, что интенсивности сверхтонких составляющих мессбауэровских переходов различны и имеют различные угловые зависимости. Но «вен-

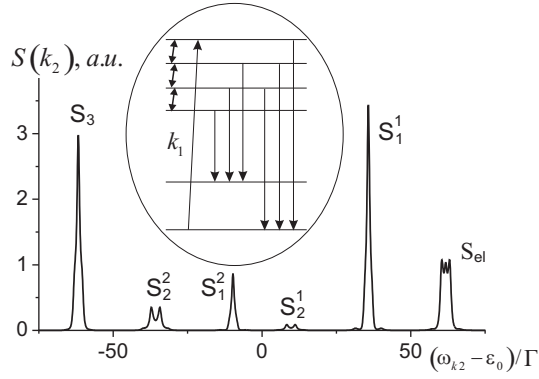


Рис. 12. Ожидаемый спектр резонансного рассеяния на изотопе ^{57}Fe в режиме РЧ резонанса возбужденного состояния ядра; $\Omega_r = 1.5$, ε_0 – энергия мессбауэровского уровня. Линия накачки настроена на шестую линию зеемановской шестерки, S_{el} – линия упругого рассеяния, (S_1^1, S_1^2) , (S_2^1, S_2^2) и S_3 – рамановские линии 1, 2 и 3 порядка соответственно

«тильный» эффект по-прежнему будет иметь место, если подуровни возбужденного состояния ядра связаны р.ч. (управляющим) полем. По-прежнему, при достаточно больших значениях параметра Ω_r/Γ интенсивность упругого рассеяния будет уменьшена за счет деструктивной интерференции. Интенсивность же рамановских линий увеличивается, если линия формируется с участием нечетного числа р.ч. фотонов и уменьшается при четном их числе. Однако теперь отношение интенсивностей линий необходимо сравнивать не с единицей, как с предельным значением, а с отношением квадратов матричных элементов соответствующих переходов, вычисленных для данного угла рассеяния.

Рассмотрим простой случай, когда квадрупольное взаимодействие отсутствует. Подуровни возбужденного состояния ядра в этом случае образуют эквидистантную зеемановскую структуру ($I_e = 3/2$). С учетом спина основного состояния ядра ($I_g = 1/2$) и правил отбора гамма-переходов, $M - m = 0, \pm 1$, возможны шесть мессбауэровских переходов. Пробное (мессбауэровское) излучение настроено на первый (по энергии) из этих переходов (переход 2-3).

Теперь размерность матрицы \mathbf{L} в уравнении, аналогичном (13), равна 35. Спектр спонтанного излучения по-прежнему вычисляется как Фурье образ двухвременной корреляционной функции. Повторяя процедуру п. 2 (Σ -схема), можно получить следующее выражение для спектра (за деталями расчета мы отсылаем к [24]):

$$S(\omega) \propto S_1(\omega) + S_2(\omega) + S_3(\omega) + S_4(\omega) + S_5(\omega) + S_6(\omega),$$

где

$$S_1(\omega) = \text{Re} \left[\sum_{j=6}^{11} M_{8,j}(z_1) \Psi''_{6+j}(\infty) + \sum_{j=1}^{35} N_{8,j}(z_1) I_j \Psi''_{13}(\infty) \right],$$

$$S_2(\omega) = \text{Re} \left[\sum_{j=6}^{11} M_{9,j}(z_2) \Psi''_{12+j}(\infty) + \sum_{j=1}^{35} N_{9,j}(z_2) I_j \Psi''_{19}(\infty) \right],$$

$$S_3(\omega) = \text{Re} \left[\sum_{j=6}^{11} M_{10,j}(z_3) \Psi''_{18+j}(\infty) + \sum_{j=1}^{35} N_{10,j}(z_3) I_j \Psi''_{25}(\infty) \right],$$

$$\begin{aligned}
S_4(\omega) &= \operatorname{Re} \left[\sum_{j=1}^5 M_{3,j}(z_4) \Psi''_{18+j}(\infty) + \sum_{j=1}^{35} N_{3,j}(z_4) I_j \Psi''_{18}(\infty) \right], \\
S_5(\omega) &= \operatorname{Re} \left[\sum_{j=1}^5 M_{4,j}(z_5) \Psi''_{24+j}(\infty) + \sum_{j=1}^{35} N_{4,j}(z_5) I_j \Psi''_{24}(\infty) \right], \\
S_6(\omega) &= \operatorname{Re} \left[\sum_{j=1}^5 M_{5,j}(z_6) \Psi''_{30+j}(\infty) + \sum_{j=1}^{35} N_{5,j}(z_6) I_j \Psi''_{30}(\infty) \right].
\end{aligned}$$

На рис. 12 представлен ожидаемый спектр рассеяния, вычисленный для изотопа ^{57}Fe .

5. Заключительные замечания

В заключение обсудим связь данной работы с известными ранее эффектами р.ч. резонанса в мессбауэровской спектроскопии. Впервые такая задача была рассмотрена теоретически; исследовалась структура спектра безотдачного гамма-излучения в условиях когерентного р.ч. перемешивания зеемановских подуровней возбужденного ядра [25]. Было показано, что каждая сверхтонкая компонента мессбауэровского спектра излучения расщепляется на $2I_e + 1$ линий естественной ширины. В работе [26] тот же результат был получен для спектров поглощения. В дальнейшем была проведена интерпретация этих результатов в рамках концепции квазиэнергий. Прошло достаточно много времени, прежде чем квазиэнергетическая структура, описанная в [25], была подтверждена в экспериментах на поглощение [6, 7]. Отметим, что такая структура является следствием когерентной динамики ядерных спинов, но не свидетельствует о квантовой интерференции. Действительно, в спектрах поглощения (в приближении тонкого поглотителя) не следует ожидать эффектов КИ для данного (р.ч.) механизма реализации КИ. Согласно оптической теореме, сечение поглощения представляется как мнимая часть амплитуды рассеяния вперед. Таким образом, сечение зависит от амплитуды рассеяния линейно (а не квадратично, как в случае вероятности рассеяния, см. п. 3), и интерференции различных слагаемых амплитуды не возникает.

Этот результат отличается от известного в оптике результата [21]. В [21] на примере Σ -схемы была показана возможность электромагнитно-индуцированной прозрачности по отношению к пробному излучению на переходе 1-2, если перемешиваемые сильным полем уровни 2 и 3 имеют существенно различные константы распада. Это условие, естественное в оптике, исключается на мессбауэровском переходе (мы подразумеваем, что уровни 2 и 3 являются сверхтонкими уровнями возбужденного состояния ядра и имеют идентичные константы распада). С другой стороны, результат [21] может быть получен методом теории возмущений (см. п. 3), если пользоваться «одетыми» состояниями, полученными на базе состояний, имеющих изначально различные константы распада.

Вместе с тем эффекты КИ могут влиять на спектры поглощения толстых мессбауэровских поглотителей. Об этом свидетельствует эксперимент [27], где была обнаружена частичная прозрачность поглотителя (FeCO_3) для мессбауэровского излучения в точке антипересечения ядерных подуровней. В теоретической работе [28] данный эффект прозрачности был объяснен на основе допущения многократного перерассеяния гамма-фотона по мере прохождения через резонансную среду.

Основным выводом этой работы является то, что эффекты КИ могут быть реализованы в схеме резонансной флуоресценции мессбауэровских квантов в режиме р.ч. перемешивания подуровней возбужденного ядра. Эксперименты по мессбауэровскому поглощению [6, 7], выполненные в этих же условиях, подтверждают этот вывод. В них была экспериментально показана возможность когерентной динамики ядерных спинов ^{57}Fe в магнитных материалах в резонансном р.ч. поле, то, что является обязательным для реализации р.ч. КИ в схеме рассеяния. Кроме того, результаты работ [6, 7] показали, что значения частот Раби, необходимые для наблюдения «вентильного» эффекта, могут быть реализованы в случае изотопа ^{57}Fe в магнитоупорядоченных системах. Из экспериментальных спектров [6] легко оценить амплитуду индуцированного на ядре осциллирующего сверхтонкого поля $h_1 \approx 88$ кЭ, что соответствует частоте Раби $\Omega_r \approx 1.5$, использованной при расчете спектра на рис. 12.

Возможность эффектов КИ при резонансном рассеянии мессбауэровского излучения в режиме радиочастотной динамики ядерных спинов содержалась уже в ранних работах [29–31], однако в них этот вопрос не акцентировался.

Хотя исследования эффектов КИ, проведенные нами, относились к мессбауэровским переходам, полученные результаты (например, «вентильный» эффект) весьма интересны и для оптики. Нам представляется, что здесь они наиболее легко реализуемы на эксперименте.

Исследования КИ на мессбауэровских переходах были поддержаны грантами РФФИ (№ 01-02-17502, 04-02-16939), CRDF (CGP RP1-2560-KA-03).

Summary

E.K. Sadykov, V.V. Arinin, F.G. Vagizov, O.A. Kocharovskaya. RF controllable quantum interference on Mossbauer transition.

Coherency and a quantum interference effects at resonant fluorescence of moessbauer radiation in the magnetic materials subjected to influence of external r.f. fields are considered. Density matrix method for calculation of moessbauer spectra developed earlier for similar problems in optics is used. It is shown, that in the regime of a nuclear magnetic resonance at the excited nuclear level the intensity of raman lines in scattering spectra can exceed considerably the intensity of elastic scattering line (“valve” effect) due to a quantum interference. The analysis of this effect by the perturbation theory method is carried out also. The received results and similar results known in optics are compared. The possibility of experimental researches of a quantum interference effects on moessbauer transitions (on isotope ^{57}Fe) is shown, using traditional moessbauer technique and r.f. excitation of magnetic materials.

Литература

1. *Kocharovskaya O., Mandel P.* Amplification without inversion: The double- Λ scheme // Phys. Rev. A. – 1990. – V. 42. – P. 523–535.
2. *Boller K.-J., Imamoglu A., Harris S.E.* Observation of electromagnetically induced transparency // Phys. Rev. Lett. – 1991. – V. 66. – P. 2593–2596.
3. *Lee H., Polynkin P., Scully M.O., Zhu S.-Y.* Quenching of spontaneous emission via quantum interference // Phys. Rev. A. – 1997. – V. 55. – P. 4454–4465.
4. *Kocharovskaya O., Kolesov R., Rostovtsev Yu.* Coherent optical control of Mossbauer spectra // Phys. Rev. Lett. – 1999. – V. 82. – P. 3593–3596.
5. *Sadykov E.K., Zakirov L.L., Yurichuk A.A.* Quantum interference of Mossbauer gamma transitions in magnetic materials // Laser Physics. – 2001. – V. 11. – P. 409–418.

6. *Vagizov F.G.* The splitting of hyperfine lines of ^{57}Fe nuclei in RF magnetic field // *Нур. Int.* – 1990. – V. 61. – P. 1359–1362.
7. *Tittonen I., Lippmaa M., Ikonen E., Linden J., Katila T.* Observation of Mossbauer resonance line splitting caused by Rabi oscillations // *Phys. Rev. Lett.* – 1992. – V. 69. – P. 2815–2818.
8. *Андреева М.А., Кузьмин Р.Н.* Мессбауэровская гамма-оптика. – М.: Изд-во МГУ, 1982. – 228 с.
9. *Ахизор А.И., Берестецкий В.Б.* Квантовая электродинамика. – М.: Физматлит, 1969. – 625 с.
10. *Toor A.H., Zhu S.-Y., Zubairy M.S.* Quantum interference in the spectrum of a driven atom: Effects of pumping and phase fluctuations // *Phys. Rev. A.* – 1995. – V. 52. – P. 4803–4811.
11. *Geo-Vanacloche J., Zubairy M.S.* Influence of pump-phase fluctuations on the squeezing in a degenerate parametric oscillator // *Phys. Rev. A.* – 1990. – V. 42. – P. 1742–1751.
12. *Садыков Э.К., Закиров Л.Л., Юричук А.А., Аринин В.В.* Квантовая интерференция на мессбауэровских гамма-переходах в магнитных материалах // *ФТТ.* – 2002. – Т. 44, № 8. – С. 1439–1444.
13. *Садыков Э.К., Аринин В.В., Вагизов Ф.Г.* Эффекты квантовой интерференции на мессбауэровских переходах // *Изв. РАН. Сер. Физическая.* – 2005. – Т. 69, № 10. – С. 1408–1413.
14. *Narducci L.M., Scully M.O., Oppo G.-L., Ru P., Tredicce J.R.* Spontaneous emission and absorption properties of a driven three-level system // *Phys. Rev. A.* – 1990. – V. 42. – P. 1630–1649.
15. *Manka A.S., Doss H.M., Narducci L.M., Ru P., Oppo G.-L.* Spontaneous emission and absorption properties of a driven three-level system. II. The Λ and cascade models // *Phys. Rev. A.* – 1991. – V. 43. – P. 3748–3763.
16. *Садыков Э.К., Юричук А.А., Аринин В.В.* Резонансная флюоресценция гамма-излучения в режиме когерентного перемешивания мессбауэровских подуровней // *ФТТ.* – 2003. – Т. 45, № 4. – С. 685–689.
17. *Шпитель В.С.* Резонанс гамма-лучей в кристаллах. – М.: Наука, 1969. – 407 с.
18. *Sadykov E.K., Isavnin A.G., Skvortsov A.I.* Mossbauer transitions dynamics in conditions of strong excitation of nuclear spin // *Нур. Int.* – 1997. – V. 107. – P. 257–276.
19. *Зельдович Я.Б.* Рассеяние и излучение квантовой системой в сильной электромагнитной волне // *УФН.* – 1973. – Т. 110. – С. 139–152.
20. *Sambe H.* Steady states and quasienergies of a Quantum-mechanical system in an oscillating field // *Phys. Rev. A.* – 1973. – V. 7. – P. 2203–2213.
21. *Скалли М.О., Зубаири М.С.* Квантовая оптика. – М.: Физматлит, 2003. – 512 с.
22. *Перина Я.* Когерентность света. – М.: Мир, 1974. – 367 с.
23. *Садыков Э.К., Аринин В.В., Вагизов Ф.Г.* Квантовая интерференция в спектрах мессбауэровского рассеяния // *Письма в ЖЭТФ.* – 2005. – Т. 82, № 7. – С. 484–488.
24. *Sadykov E.K., Arinin V.V., Zakirov L.L.* Quantum interference in Moessbauer resonance fluorescence // *Proc. SPIE.* – 2004. – V. 5402. – P. 463–471.
25. *Hack M.N., Hammermesh M.* Effect of radiofrequency resonance on the natural line form // *Nuovo Cimento.* – 1961. – V. 19. – P. 546–557.

26. *Gabriel H.* Effect of radio-frequency fields on Mossbauer spectra // *Phys. Rev.* – 1969. – V. 184. – P. 359–363.
27. *Coussement R., Rostovtsev Y., Odeurs J. et al* Controlling absorption of gamma radiation via nuclear level anticrossing // *Phys. Rev. Lett.* – 2002. – V. 7. – P. 107601-1–107601-4.
28. *Shakhmuratov R.N., Odeurs J., Gheysen S., Rostovtsev Y., Kocharovskaya O., Mandel P.* Level mixing induced transparency for gamma radiation // *Appl. Phys. B: Lasers Opt.* – 2005. – V. 81. – P. 883–888.
29. *Bashkirov Sh.Sh., Beljanin A.L., Sadykov E.K.* The scattering of gamma-Rays in the Re-gime of Double Reso-nance // *Phys. Status Solidi (b).* – 1979. – V. 93. – P. 437–442.
30. *Афанасьев А.М., Александров П.А., Якимов С.С.* Влияние резонансного радиочастотного поля на мессбауэровские спектры. – Препринт № 3337/9. – Ин-т Атомной энергии, 1980. – 24 с.
31. *Mitin A.V.* Theory of Mossbauer scattering under gamma magnetic resonance conditions // *Phys. Lett. A.* – 1981. – V. 84. – P. 283–286.

Поступила в редакцию
15.03.06

Садыков Эдгар Камилович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой физики твердого тела Казанского государственного университета.
E-mail: *esad@ksu.ru*

Аринин Виталий Валерьевич – аспирант кафедры физики твердого тела Казанского государственного университета.
E-mail: *varinse@mail.ru*

Вагизов Фарит Габдулхакович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры физики твердого тела Казанского государственного университета.
E-mail: *vagizov@jewel.tamu.edu*

Кочаровская Ольга Анатольевна – доктор физико-математических наук, профессор Техасского университета, штат Техас, США.
E-mail: *Kochar@jewel.tamu.edu*