УДК 539.3

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ДЕФОРМИРУЮЩЕЙСЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ

В.А. Вестяк, Д.В. Тарлаковский

Аннотация

Рассмотрена нестационарная задача об определении компонентов электромагнитного поля в толстостенной сферической оболочке по заданному осесимметричному полю перемещений. Использована линеаризованная модель, включающая уравнения Максвелла и обобщенный закон Ома. Для решения применены разложения в ряды по углу, преобразование Лапласа по времени и интегральные представления с ядрами в виде функций Грина. Последние найдены в квазистатическом приближении. Построено аналитическое решение. В качестве примера рассмотрено поступательное движение оболочки.

Ключевые слова: нестационарное электромагнитное поле, сферическая оболочка, осевая симметрия, заданное поле перемещений, ряды по углу, преобразование Лапласа, функции Грина.

Введение

В настоящее время актуальными являются вопросы учета взаимодействия полей механической и другой, в том числе электромагнитной, природы. Постановки подобных нестационарных задач изложены в [1]. Естественными необходимыми составляющими этой проблемы являются решения соответствующих несвязанных задач. В работах [2, 3] исследованы двумерные нестационарные электромагнитные поля, возбуждаемые заданным полем перемещений в полуплоскости и в пространстве со сферической полостью. Решение подобных задач для ограниченных областей является более сложным. Ниже этот вопрос рассматривается применительно к толстостенной сфере (сферической оболочке), что является развитием результатов работ [2, 3]. Рассматриваемая задача имеет также и практическое приложение, например, при исследовании электромагнитного поля в различных летательных аппаратах.

1. Постановка задачи

Рассматривается заполненная изотропным проводником сферическая оболочка с внутренним r_0 и внешним r_1 радиусами. Поле перемещений в оболочке полагается заданным. Описывающие осесимметричное нестационарное электромагнитное поле в сферической системе координат $r,\ \theta,\ \vartheta\ \ (r \geq 0,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ -\pi < \vartheta \leq \pi)$ линеаризованные соотношения приведены в [3]. В них использованы следующие безразмерные величины:

$$l\tau = \frac{c_1 t}{L}, \quad ,r = \frac{r'}{L}, \quad r_0 = \frac{R}{L}, \quad u = \frac{u'}{L}, \quad v = \frac{v'}{L}, \quad H = \frac{H' \mu_e c_1}{c E_*}, \quad \rho_e = \frac{4\pi \rho_e' L}{\varepsilon E_*},$$

$$E_r = \frac{E_r'}{E_*}, \quad E_\theta = \frac{E_\theta'}{E_*}, \quad j_r = \frac{j_r'}{\sigma E_*}, \quad j_\theta = \frac{j_\theta'}{\sigma E_*}, \quad \eta_e^2 = \frac{\mu_e \varepsilon c_1^2}{c^2}, \quad \gamma = \frac{4\pi\sigma L}{\varepsilon c_1},$$

где t – время; u и v, E_r и E_θ, j_r и j_θ – радиальные и тангенциальные перемещения, компоненты векторов напряженности электрического поля и плотности тока соответственно; H – ненулевая компонента вектора напряженности магнитного поля; ρ_e – плотность поверхностных зарядов; c и c_1 – скорости света и распространения волн растяжения; ε и μ_e – коэффициенты диэлектрической и магнитной проницаемостей: σ – коэффициент электропроводимости; L и E_* – некоторые характерные линейный размер и напряженность электрического поля.

Эти соотношения включают в себя разрешающее уравнение (точками здесь и далее обозначаются производные по безразмерному времени τ; дополнительный нижний индекс “0” указывает на параметры начального электромагнитного поля, относительно которых проводится линеаризация)

$$\eta_e^2 \left(\dddot{H} + \gamma \ddot{H} \right) = \Delta \dot{H} - \frac{\dot{H}}{r \sin^2 \theta} + \frac{\eta_e^2}{r} \left[\frac{\partial \left(r \rho_{e0} \ddot{v} \right)}{\partial r} - \rho_{e0} \frac{\partial \left(\ddot{u} \right)}{\partial r} \right], \tag{1}$$

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right],$$

а также вытекающие из уравнений Максвелла и обобщенного закона Ома соотношения

$$-\frac{1}{r} \frac{\partial \left(rH \right)}{\partial r} = \eta_e^2 \left(\gamma j_\theta + \dot{E}_\theta \right), \quad \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \left(H \sin\theta \right)}{\partial \theta} = \eta_e^2 \left(\gamma j_r + \dot{E}_r \right); \tag{2}$$

$$j_r = E_r + \frac{\rho_{e0} \dot{u}}{\gamma}, \quad j_\theta = E_\theta + \frac{\rho_{e0} \dot{v}}{\gamma}; \tag{3}$$

$$\dot{\rho}_e + \gamma \rho_e = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \left(r^2 \rho_{e0} \dot{u} \right)}{\partial r} - \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \left(\rho_{e0} \dot{v} \sin\theta \right)}{\partial \theta}. \tag{4}$$

При этом полагалось, что параметры начального поля следующие:

$$E_{0\theta} = H_0 \equiv 0, \quad E_{0r} = E_0 \left(r \right).$$

Начальные условия нулевые:

$$E_r\big|_{\tau=0} = \dot{E}_r\big|_{\tau=0} = E_\theta\big|_{\tau=0} = \dot{E}_\theta\big|_{\tau=0} = H\big|_{\tau=0} = \dot{H}\big|_{\tau=0} = 0. \tag{5}$$

Поскольку подходы к построению решения для всех возможных граничных условий аналогичны, ограничимся вариантом задания тангенциальной компоненты напряженности электрического поля:

$$E_\theta\big|_{r=r_k} = e_{0k} \left(\tau, \theta \right), \quad k = 0, 1. \tag{6}$$

2. Представление решения в виде рядов

Для решения начально-краевой задачи (1)–(6) представляем искомые функции, заданные перемещения и правые части граничных условий (6) в виде рядов по полиномам Лежандра $P_n(\cos\theta)$ и Гегенбауэра $C_{n-1}^{3/2}(\cos\theta)$:

$$\begin{pmatrix} u \\ E_r \\ \rho_e \\ j_r \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} u_n \\ E_{rn} \\ \rho_n \\ j_{rn} \end{pmatrix} P_n \left(\cos\theta \right), \quad \begin{pmatrix} v \\ E_\theta \\ H \\ j_\theta \\ e_{0k} \end{pmatrix} = \sin\theta \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} v_n \\ E_{\theta n} \\ H_n \\ j_{\theta n} \\ e_{0kn} \end{pmatrix} C_{n-1}^{3/2} \left(\cos\theta \right). \tag{7}$$

Кроме того, применяем преобразование Лапласа по времени (s – его параметр, а индекс “ L” указывает на изображение). Тогда, как показано в [3], для изображений коэффициентов рядов (7) имеют место следующие соотношения:

$$\Delta_n H_n^L + \eta_e^2 s l_H\left(u_n^L, v_n^L\right) = 0, \quad n \geq 1, \tag{8}$$

$$l_H(u,v) = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial\left(r\rho_{e0}v\right)}{\partial r} + \rho_{e0}u\right], \quad \Delta_n = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) - \frac{n(n+1)}{r^2};$$

$$\begin{aligned} \eta_e^2(s+\gamma)E_{\theta n}^L &= -\frac{1}{r}\frac{\partial\left(rH_n^L\right)}{}\partial r - \eta_e^2 s\rho_{e0}v_n^L, \quad n \geq 1, \\ \eta_e^2(s+\gamma)E_{rn}^L &= \frac{n(n+1)}{r}H_n^L - \eta_e^2 s\rho_{e0}u_n^L; \end{aligned} \tag{9}$$

$$(s+\gamma)\rho_n^L = -sl_{n\rho}\left(u_n^L, v_n^L\right), \ l_{n\rho}(u,v) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2\rho_{e0}u\right)}{\partial r} + \frac{m\rho_{e0}v}{r}, \ m = n(n+1). \tag{10}$$

Здесь дополнительно использована обоснованная в [3] приближенная замена нестационарного решения квазистатическим $(\eta_e = 0)$.

При этом граничным условиям (6) согласно первому равенству в (9) соответствуют следующие равенства:

$$\left.\frac{1}{r}\frac{\partial\left(rH_n^L\right)}{\partial r}\right|_{r=r_k} = -\eta_e^2\left[s\rho_{e0}v_n^L(r_k,s) + (s+\gamma)e_{0kn}^L(s)\right], \quad k = 0,1. \tag{11}$$

3. Определение компонентов электромагнитного поля

Решение краевой задачи (8), (11) представляем в интегральном виде:

$$\begin{aligned} H_n^L(r,s) = -\eta_e^2 s\int_{r_0}^{r_1} G_{Hn}(r,\xi)\, l_H\left[u_n^L(\xi,s), v_n^L(\xi,s)\right] d\xi - \\ -\eta_e^2\sum_{k=0}^{1} G_{Hnk}(r)\left[(s+\gamma)e_{0kn}^L(s) + s\rho_{e0}(r_k)v_n^L(r_k,s)\right]. \end{aligned} \tag{12}$$

Здесь $G_{Hn}(r,\xi)$ и $G_{Hnr}(r)$ – объемная и поверхностные функции Грина, а именно решения следующих краевых задач:

$$\Delta_n G_{Hn} = \delta(r-\xi), \quad \left.\frac{1}{r}\frac{\partial\left(rG_{Hn}\right)}{\partial r}\right|_{r=r_0,r_1} = 0; \tag{13}$$

$$\Delta_n G_{Hnk} = 0, \quad \left.\frac{1}{r}\frac{\partial\left(rG_{Hnk}\right)}{\partial r}\right|_{r=r_l} = \delta_{k+1,l+1}, \quad l = 0,1. \tag{14}$$

где $\delta(\xi)$ – дельта-функция Дирака [4]; δ_{kl} – символ Кронекера.

Общее решение уравнения в (13) записываем в виде

$$G_{Hn}(r,\xi) = C_{1n}r^{-(n+1)} + C_{2n}r^n + G_{Hn*}(r,\xi), \tag{15}$$

где C_{1n} и C_{1n} – произвольные постоянные, а $G_{Hn*}(r,\xi)$ – частное решение. Оно находится методом вариации произвольных постоянных и имеет вид

$$G_{Hn*}(r,\xi) = \frac{\alpha_n(r,\xi)}{(2n+1)r^{n+1}\xi^{n-1}}H(r-\xi), \quad \alpha_n(x,y) = x^{2n+1} - y^{2n+1}.$$

где

$$H\left(\xi\right)=\begin{cases}0, & \xi<0,\\ 1, & \xi\geq 0.\end{cases}$$

Удовлетворяя теперь граничным условиям, приходим к следующему результату:

$$G_{Hn}\left(r,\xi\right)=\xi^2G_n\left(r,\xi\right)+G_{Hn*}\left(r,\xi\right),$$

$$G_n\left(r,\xi\right)=-\frac{\beta_n\left(r_1,\xi\right)\beta_n\left(r_0,r\right)}{m\left(2n+1\right)\xi^{n+1}r^{n+1}\alpha_n\left(r_1,r_0\right)},$$

$$\beta_n\left(x,y\right)=\left(n+1\right)x^{2n+1}+ny^{2n+1}.$$

Непосредственной проверкой легко убедиться, что эта функция Грина обладает обобщенной симметрией:

$$G_{Hn}\left(r,\xi\right)=\xi^2\left[G_n\left(r,\xi\right)H\left(\xi-r\right)+G_n\left(\xi,r\right)H\left(r-\xi\right)\right]. \tag{16}$$

Поверхностные функции Грина как решения задач (14) находим с использованием (15):

$$G_{Hn0}\left(r\right)=-\frac{r_0^{n+2}\beta_n\left(r_1,r\right)}{mr^{n+1}\alpha_n\left(r_1,r_0\right)},\quad G_{Hn1}\left(r\right)=\frac{r_1^{n+2}\beta_n\left(r_0,r\right)}{mr^{n+1}\alpha_n\left(r_1,r_0\right)}. \tag{17}$$

Изображения коэффициентов рядов для координат напряженности электрического поля находим, подставляя равенство (12) в формулы (9):

$$E_{rn}^L\left(r,s\right)=-\frac{m}{r}\left\{\frac{s}{s+\gamma}\int\limits_{r_0}^{r_1}G_{Hn}\left(r,\xi\right)l_H\left[u_n^L\left(\xi,s\right),v_n^L\left(\xi,s\right)\right]d\xi+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=0}^{1}G_{Hnk}\left(r\right)\left[e_{0kn}^L\left(s\right)+\rho_{e0}\left(r_k\right)\frac{s}{s+\gamma}v_n^L\left(r_k,s\right)\right]\right\}-\frac{s}{s+\gamma}\rho_{e0}\left(r\right)u_n^L\left(r,s\right); \tag{18}$$

$$E_{\theta n}^L\left(r,s\right)=\frac{s}{s+\gamma}\int\limits_{r_0}^{r_1}\Gamma_{Hn}\left(r,\xi\right)l_H\left[u_n^L\left(\xi,s\right),v_n^L\left(\xi,s\right)\right]d\xi+$$
$$+\sum_{k=0}^{1}\Gamma_{Hnk}\left(r\right)\left[e_{0kn}^L\left(s\right)+\frac{s}{s+\gamma}\rho_{e0}\left(r_k\right)v_n^L\left(r_k,s\right)\right]-$$
$$-\frac{s}{s+\gamma}\rho_{e0}\left(r\right)v_n^L\left(r,s\right),\quad n\geq 1. \tag{19}$$

Оригиналы равенств (12), (18) и (19) с учетом свойств преобразования Лапласа [4] есть

$$H_n\left(r,\tau\right)=-\eta_e^2\int\limits_{r_0}^{r_1}G_{Hn}\left(r,\xi\right)l_H\left[\dot{u}_n\left(\xi,\tau\right),\dot{v}_n\left(\xi,\tau\right)\right]d\xi-$$
$$-\eta_e^2\sum_{k=0}^{1}G_{Hnk}\left(r\right)\left[\gamma e_{0kn}\left(\tau\right)+\dot{e}_{0kn}\left(\tau\right)+\rho_{e0}\left(r_k\right)\dot{v}_n\left(r_k,\tau\right)\right]; \tag{20}$$

$$E_{rn}(r,\tau) = -\frac{m}{r}\left\langle \int\limits_{r_0}^{r_1} G_{Hn}(r,\xi)\, L_s\left\{l_H\left[u_n(\xi,\tau), v_n(\xi,\tau)\right]\right\} d\xi + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{1} G_{Hnk}(r)\left\{e_{0kn}(\tau) + \rho_{e0}(r_k)\, L_s\left[v_n(r_k,\tau)\right]\right\} \right\rangle - \rho_{e0}(r)\, L_s\left[u_n(r,\tau)\right]; \quad (21)$$

$$E_{\theta n}(r,\tau) = \int\limits_{r_0}^{r_1} \Gamma_{Hn}(r,\xi)\, L_s\left\{l_H\left[u_n(\xi,\tau), v_n(\xi,\tau)\right]\right\} d\xi +$$

$$+ \sum_{k=0}^{1} \Gamma_{Hnk}(r)\left\{e_{0kn}(\tau) + \rho_{e0}(r_k)\, L_s\left[v_n(r_k,\tau)\right]\right\} - \rho_{e0}(r)\, L_s\left[v_n(r,\tau)\right], \qquad n \geq 1. \quad (22)$$

Здесь $L_s(v) = v - \gamma e^{-\gamma\tau} * v$ (звездочка обозначает свертку по времени), а ядра в формуле (22) имеют следующий вид:

$$\begin{gathered} \Gamma_{Hn}(r,\xi) = \frac{1}{r}\frac{\partial\left[rG_{Hn}(r,\xi)\right]}{\partial r} = \Gamma_{1Hn}(r,\xi)\, H(\xi - r) + \Gamma_{2Hn}(r,\xi)\, H(r-\xi), \\ \Gamma_{Hn0}(r) = \frac{r_0^{n+2}\alpha_n(r_1,r)}{r^{n+2}\alpha_n(r_1,r_0)}, \quad \Gamma_{Hn1}(r) = \frac{r_1^{n+2}\alpha_n(r,r_0)}{r^{n+2}\alpha_n(r_1,r_0)}, \end{gathered} \quad (23)$$

где

$$\Gamma_{1Hn}(r,\xi) = -\frac{\beta_n(r_1,\xi)\,\alpha_n(r,r_0)}{(2n+1)\,\xi^{n-1}r^{n+2}\alpha_n(r_1,r_0)},$$

$$\Gamma_{2Hn}(r,\xi) = \frac{\beta_n(r_0,\xi)\,\alpha_n(r_1,r)}{(2n+1)\,\xi^{n-1}r^{n+2}\alpha_n(r_1,r_0)}.$$

Формула для оригиналов коэффициентов разложения поверхностных зарядов вытекает из (10):

$$\rho_n(r,\tau) = -L_s\left\{l_{n\rho}\left[u_n(r,\tau), v_n(r,\tau)\right]\right\}. \quad (24)$$

Координаты вектора тока определяются формулой (3) по найденной напряженности электрического поля и заданным перемещениям.

4. Пример

Полагаем, что напряженность электрического поля на границах сферы отсутствует, плотность зарядов в начальном состоянии имеет вид $\rho_{e0}(r) = \rho_* r^{-1}$, сфера движется поступательно по закону $u = \tau_+ \cos\theta$, $v = -\tau_+ \sin\theta$, где $\tau_+ = \tau H(\tau)$.

Тогда использование формул (7), (16), (17), (20)–(24) и (3) приводит к следующим результатам:

$$H(r,\theta,\tau) = \rho_*\eta_e^2 A_H(r)\, H(\tau)\sin\theta, \quad \rho_e(r,\theta,\tau) = -\rho_*\frac{\varphi(r,\tau)}{r}H(\tau)\cos\theta,$$

$$E_r(r,\theta,\tau) = A_{Er}(r)\,\rho_*\varphi(r,\tau)\, H(\tau)\cos\theta, \quad E_\theta(r,\theta,\tau) = A_{E\theta}(r)\,\rho_*\varphi(r,\tau)\, H(\tau)\sin\theta,$$

$$j_r = \rho_*\left[A_{Er}(r)\,\varphi(r,\tau) + \frac{1}{\gamma r}\right]H(\tau)\cos\theta, \quad j_\theta = \rho_*\left[A_{E\theta}(r)\,\varphi(r,\tau) - \frac{1}{\gamma r}\right]H(\tau)\sin\theta,$$

где

$$\varphi(r,\tau) = \frac{e^{-\gamma\tau} - 1}{\gamma r}, \quad A_H(r) = \frac{ar^3 + 2br^2 - 2c}{4br^2}, \quad A_{Er}(r) = \frac{2b - ar^3}{2br^2},$$

$$A_{E\theta}(r) = \frac{ar^3 - br^2 + c}{2br^2}, \quad a = r_0 + r_1, \quad b = r_1^2 + r_0 r_1 + r_0^2, \quad c = r_0^2 r_1^2.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-08-00788) и гранта Президента РФ НШ-2029.2014.8.

Summary

V.A. Vestyak, D.V. Tarlakovskii. Non-Stationary Axially Symmetric Electromagnetic Field in a Deforming Spherical Shell.

A non-stationary problem of determining the electromagnetic field components in a thick-wall spherical shell according to the assumed axially symmetric displacement field is considered. A linearized model, which includes Maxwell's equations and Ohm's generalized law, is used. For solving the problem, the expansions in series are used, as well as Laplace's transformation in the time domain and integral representations with nuclei in the form of Green's functions. These functions are deduced in a quasi-static approximation. An analytical solution is described. A translational shell motion is provided as an example.

Keywords: non-stationary electromagnetic field, spherical shell, axial symmetry, assumed displacement field, expansions in series, Laplace transformation, Green functions.

Литература

1. *Tarlakovskii D.V., Vestyak V.A., Zemskov A.V.* Dynamic processes in thermo-electro-magneto-elastic and thermo-elasto-diffusive media // Encyclopedia of Thermal Stresses. V. 2. – Dordrecht; Heidelberg; N. Y.; London: Springer, 2014. – P. 1064–1071.
2. *Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В.* Интегральное представление характеристик нестационарного электромагнитного поля в движущейся полуплоскости // Докл. РАН. – 2015. – Т. 460, № 3. – С. 279–282.
3. *Vestyak V.A., Igumnov L.A., Tarlakovskiy D.V.* Electromagnetic field in moving space with spherical enclosure // Mater. Phys. Mech. – 2015. – V. 23, No 1. – P. 31–35.
4. *Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В* Волны в сплошных средах. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 472 с.

Поступила в редакцию
06.08.15

Вестяк Владимир Анатольевич – кандидат физико-математически наук, заведующий кафедрой «Математическое моделирование», Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет), г. Москва, Россия.

E-mail: *v.a.vestyak@mail.ru*

Тарлаковский Дмитрий Валентинович – доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией НИИ механики, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

E-mail: *tdvhome@mail.ru*