Известия вузов. Математика *http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/*
2016, № 10, с. 70–75 *e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

Краткое сообщение, представленное В.Г. Звягиным

А.В. ЗВЯГИН

РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ ТЕРМОВЯЗКОУПРУГОСТИ ДЛЯ АЛЬФА-МОДЕЛИ ЛЕРЕ

Аннотация. В статье исследуется проблема разрешимости в слабом смысле для одной начально-краевой задачи, описывающей альфа-модель Лере с вязкостью, зависящей от температуры.

Ключевые слова: слабые решения, теоремы существования, альфа-модель Лере.

УДК: 517.958

Движение вязкой несжимаемой жидкости при умеренных скоростях с постоянной плотностью описывается следующей системой уравнений, называемой *системой Навье–Стокса* (СНС):

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}v - \nu\Delta v + (v\cdot\nabla)v + \nabla p = f,\\ \nabla\cdot v = 0,\end{gathered} \tag{1}$$

где v — скорость частицы среды в точке x в момент времени t, p — давление среды, f — плотность внешних сил, $\nu > 0$ — вязкость среды. Доказательство слабой разрешимости СНС в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$ впервые было приведено Ж. Лере [1] на основе регуляризации системы (1). Один частный случай этой регуляризации рассматривается в данной статье, который носит название *альфа-модель Лере*:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}v - \nu\Delta v + (u\cdot\nabla)v + \nabla p = f,\\ \nabla\cdot v = 0,\\ v = u - \alpha^2\Delta u,\end{gathered} \tag{2}$$

где α — фиксированный положительный параметр, который называется *"длиной подсеточного (фильтрующего) масштаба" модели* (мотивация модели и ссылки приведены в [2]).

В статье рассматривается альфа-модель Лере (2) с вязкостью, зависящей от температуры. При появлении температуры система (2) пополняется дополнительным уравнением баланса

Поступила 28.03.2016

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16-31-60075 мол_а_дк) и Российского научного фонда (проект № 14-21-00066, выполняемый в Воронежском государственном университете).

энергий [3]. Исходя из вышеизложенного, в данной статье изучается следующая начально-краевая задача:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}v - 2\mathrm{Div}(\nu(\theta)\mathcal{E}(v)) + (u\cdot\nabla)v + \nabla p = f,\\ \nabla\cdot v = 0,\\ v = u - \alpha^2\Delta u,\\ \frac{\partial}{\partial t}\theta + (u\cdot\nabla)\theta - \chi\Delta\,\theta = 2\nu(\theta)\mathcal{E}(v):\mathcal{E}(v) + g;\\ v|_{t=0} = v_0,\quad \theta|_{t=0} = \theta_0,\quad v|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0,\quad \theta|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0.\end{gathered}\tag{3}$$

Здесь $\theta(t,x)$ — температура среды, $\chi > 0$ — коэффициент теплопроводности, g — источник внешнего тепла, $\mathcal{E}(v) = (\mathcal{E}_{ij})$, $\mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{2}(\partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i)$, — тензор скоростей деформаций, v_0 и θ_0 — начальные скорость и температура. Символ $A : B = \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}b_{ij}$ для произвольных квадратных матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$; $\mathrm{Div}\, C$ — дивергенция тензора $C = (c_{ij}(t,x))$, т. е. вектор $\mathrm{Div}\, C = \Big(\sum\limits_{j=1}^{n}\partial c_{1j}(t,x)/\partial x_j, \dots, \sum\limits_{j=1}^{n}\partial c_{nj}(t,x)/\partial x_j\Big)$.

При $\theta = 0$ и $g = 0$ система (3) переходит в (2), изучение которой начал Ж. Лере [1] и продолжается до сих пор ([4], [5]). Добавление температуры приводит к появлению уравнения баланса энергии, что существенно осложняет исследуемую задачу (обзорная статья [6]). Именно, появляется параболическое уравнение с коэффициентами из Соболевских пространств и правой частью из $L_1(0,T;L_1(\Omega))$. Решение данной проблемы подробно описано в [7] и применялось для ряда моделей неньютоновской гидродинамики ([8]–[10]). В данной статье на основе разработанного метода доказывается существование слабых решений для альфа-модели Лере с вязкостью, зависящей от температуры.

Функциональные пространства. Опишем шкалу пространств V^α [11]. Обозначим через $\mathcal{V}$ множество гладких векторных полей, дивергенция которых равна нулю и носители которых содержатся в Ω.

Пусть V^0 — замыкание $\mathcal{V}$ по норме $L_2(\Omega)^n$; V^1 — замыкание $\mathcal{V}$ по норме $W_2^1(\Omega)^n$; $V^2 = W_2^2(\Omega)^n \cap V^1$. Пространство V^0 гильбертово со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$, индуцированным из $L_2(\Omega)^n$. Соответствующую норму обозначим $\|\cdot\|_0$. На пространстве V^1 рассматривается норма $\|u\|_1 = \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)^n}$, относительно которой оно является банаховым.

Рассмотрим оператор $A = -\pi\Delta$ с областью определения V^2. Известно, что оператор A, продолженный до замкнутого оператора в пространстве V^0, является самосопряженным положительным оператором с вполне непрерывным обратным. Отсюда следует, что он имеет счетное множество собственных значений $0 < \lambda_1 \le \lambda_2 \le \dots$; соответствующие собственные вектор-функции обозначим e_k. Вектор-функции e_k $(k = 1, 2, \dots)$ гладкие.

Рассмотрим множество

$$E_\infty = \left\{ v = \sum_{k=1}^{m} v_k e_k : m\in\mathbb{N},\ v_k\in\mathbb{R}\right\}$$

(здесь m зависит от v) и определим пространство V^α, $\alpha\in\mathbb{R}$, как пополнение E_∞ по норме

$$\|v\|_\alpha = \left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^\alpha |v_k|^2\right)^{1/2}.$$

Эти нормы порождаются скалярными произведениями, которые будем обозначать $(\cdot,\cdot)_\alpha$; пространство V^α со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)_\alpha$ является гильбертовым.

При $\alpha = 0, 1, 2$ описанная конструкция приводит к пространствам V^0, V^1, V^2 и нормам $\|\cdot\|_0$ и $\|\cdot\|_1$, определенным выше.

При $\alpha \geq 0$ пространство V^α состоит из функций, принадлежащих V^0; при $\alpha < 0$ пространство V^α шире, чем V^0. Пусть $\beta \geq 0$ и пространство $(V^\beta)^*$ сопряжено к V^β. Тогда пространство $(V^\beta)^*$ изометрично пространству $V^{-\beta}$, и будем отождествлять эти пространства.

При $\alpha \geq 0$ имеет место непрерывное вложение $V^\alpha \subset W_2^\alpha(\Omega)^n$, причем норма $\|\cdot\|_\alpha$ эквивалентна норме, индуцированной на V^α из $W_2^\alpha(\Omega)^n$ ([11]). В частности, имеем, что при $\alpha > \beta \geq 0$ вложение $V^\alpha \subset V^\beta$ компактно.

Особый интерес связан с пространствами V^0, V^1, V^3 и сопряженными к ним.

Через E^* будем обозначать пространство, сопряженное к E. Для любого $f \in E^*$ через $\langle f, v\rangle$ обозначается действие функционала $f \in E^*$ на векторе $v \in E$.

Введем пространства $E_1 = \{v : v \in L_2(0,T;V^1),\ v' \in L_2(0,T;V^{-1})\}$ и $E_2 = \{\theta : \theta \in L_p(0,T;W_p^1(\Omega)) \cap C_\omega(0,T;W_p^{1-2/p}(\Omega)), \theta' \in L_1(0,T;W_p^{-1}(\Omega)), 1 < p < +\infty\}$. Здесь $C_\omega(0,T;E)$ — пространство слабо непрерывных функций со значениями в банаховом пространстве E.

В силу того, что v будет рассматриваться из пространства E_1, и в силу равенства $u = (I + \alpha^2 A)^{-1} v$ получим $u \in C([0,T], V^2)$.

Определение. Слабым решением задачи (3) называется пара (v,θ), где $v \in E_1$ и $\theta \in E_2$, удовлетворяющая при всех $\varphi \in V$, $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ и почти всех $t \in [0,T]$ соотношениям

$$\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial t}\,\varphi\,dx - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n u_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx + 2\int_\Omega \nu(\theta)\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(\varphi)\,dx = \langle f(t), \varphi\rangle, \tag{4}$$

$$\int_\Omega \frac{\partial \theta}{\partial t}\phi\,dx - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n u_i \theta_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x_i} dx + \chi \int_\Omega \mathcal{E}(\theta) : \mathcal{E}(\phi) dx = 2\int_\Omega \big(\nu(\theta)\mathcal{E}(v) : \mathcal{E}(v)\big) : \phi dx + \langle g, \phi\rangle, \tag{5}$$

и начальным условиям $v|_{t=0} = v_0$ и $\theta|_{t=0} = \theta_0$.

Основным результатом работы является

Теорема 1. *Пусть функция $\nu(\theta) \in C^2(-\infty, +\infty)$ является монотонно возрастающей и $0 \leq \nu(\theta) \leq M$, $f \in L_p(0,T;V^{-1})$, $g \in L_1(0,T;H_p^{-2(1-1/p)}(\Omega))$, $v_0 \in V^1$, $\theta_0 \in W_p^{1-2/p}(\Omega)$. Тогда при $1 < p < 4/3$ для $n = 2$ и для $1 < p < 10/9$ при $n = 3$ существует слабое решение задачи (3).*

Доказательство теоремы 1 проводится поэтапно. На первом этапе устанавливается разрешимость задачи (3) с известной $\theta \in E_2$. Затем устанавливается разрешимость задачи (3) с заданной $\nu \in E_1$. Далее описывается итерационный процесс, состоящий в последовательном решении вышеприведенных задач, и, наконец, доказывается сходимость последовательных приближений к решению задачи (3).

Шаг 1. Рассмотрим начально-краевую задачу (3) при фиксированной $\theta \in E_2$. Получим следующую начально-краевую задачу:

$$\begin{gathered} \frac{\partial}{\partial t} v - 2\mathrm{Div}(\nu(\theta)\mathcal{E}(v)) + (u\cdot\nabla)v + \nabla p = f, \\ \nabla\cdot v = 0, \quad v = u - \alpha^2 \Delta u, \quad v|_{t=0} = v_0, \quad v|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0. \end{gathered} \tag{6}$$

Слабое решение задачи (6) определим как функцию $v \in E_1$, удовлетворяющую (4) и начальному условию $v|_{t=0} = v_0$.

Для данной задачи справедлива

Теорема 2. *Пусть функция $\nu(\theta) \in C^2(-\infty, +\infty)$ является монотонно возрастающей и $0 \le \nu(\theta) \le M$, $f \in L_2(0,T;V^{-1})$, $v_0 \in V^1$, $\theta \in E_2$. Тогда задача* (6) *имеет по крайней мере одно слабое решение $v \in E_1$, для которого справедлива оценка*

$$\|v\|_{E_1} \le R_1, \quad R_1 = R_1(T, \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}, \|v_0\|_{V^1}). \tag{7}$$

Шаг 2. Рассмотрим следующую начально-краевую задачу при фиксированных $\widehat{\theta} \in E_2$ и $v \in E_1$:

$$\begin{gathered} \frac{\partial \theta}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} - \chi \triangle \theta = \big(\nu(\widehat{\theta})\mathcal{E}(v)\big) : \mathcal{E}(v) + g, \\ \theta|_{t=0} = \theta_0, \quad \theta|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0. \end{gathered} \tag{8}$$

Слабое решение задачи (8) определим как $\theta \in E_2$, удовлетворяющую тождеству (5) и начальному условию $\theta|_{t=0} = \theta_0$.

Для начально-краевой задачи (8) справедлива

Теорема 3. *Пусть $g \in L_1(0,T;H_p^{-2(1-1/p)}(\Omega))$, $\theta_0 \in W_p^{1-2/p}(\Omega)$, $\widehat{\theta} \in E_2$, $v \in E_1$. Тогда при $1 < p < 4/3$ для $n = 2$ и при $1 < p < 10/9$ для $n = 3$ задача* (8) *имеет по крайней мере одно слабое решение и справедлива оценка*

$$\|\theta\|_{E_2} \le R_2(\|g\|_{L_1(0,T;H_p^{-2(1-1/p)}(\Omega))} + \|\partial v/\partial t\|^2_{L_2(0,T;H)} + \|\theta_0\|_{W_p^{1-2/p}(\Omega)}). \tag{9}$$

Шаг 3. Рассмотрим последовательность (v^n, θ^n), $n = 0, 1, 2, \dots$, определяемую следующим образом. Пусть v^0 и θ^0 равны начальным значениям v_0 и θ_0 для v и θ из (6) и (8) соответственно. Пусть (v^n, θ^n) известны. Тогда вначале находится v^{n+1} как слабое решение задачи

$$\frac{\partial v^{n+1}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} u_i^{n+1} \frac{\partial v^{n+1}}{\partial x_i} - 2\mathrm{Div}(\nu(\theta^n)\mathcal{E}(v^{n+1})) + \mathrm{grad}\, p = f, \tag{10}$$

$$\mathrm{div}\, v^{n+1} = 0, \quad v^{n+1}|_{t=0} = v_0, \quad v^{n+1}|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0. \tag{11}$$

Затем при найденном v^{n+1} находится θ^{n+1} как слабое решение задачи

$$\frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} u_i^{n+1} \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial x_i} - \chi \triangle\, \theta^{n+1} = 2\nu(\theta^n)\mathcal{E}(v^{n+1}) : \mathcal{E}(v^{n+1}) + g, \tag{12}$$

$$\theta^{n+1}|_{t=0} = \theta_0, \quad \theta^{n+1}|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0. \tag{13}$$

Отметим, что слабым решением задачи (10)–(11) называется функция $v^{n+1} \in E_1$, удовлетворяющая соотношению (4) и начальному условию $v^{n+1}|_{t=0} = v_0$, а слабым решением задачи (12)–(13) называется функция $\theta^{n+1} \in E_2$, удовлетворяющая соотношению (5) и начальному условию $\theta^{n+1}|_{t=0} = \theta_0$.

Разрешимость задачи (10)–(11) следует из теоремы 2. При найденной функции v^{n+1} выполнены все требования теоремы 3. Отсюда следует, что задача (12)–(13) также разрешима.

Шаг 4. Рассмотрим теперь последовательность (v^n, θ^n), $n = 1, 2, \dots$, где v^n — решение задачи (10)–(11), а θ^n — решение задачи (12)–(13). Изучим вопрос о сходимости последовательности (v^n, θ^n).

Лемма 1. *Последовательность* $\{\theta^n\}$ *относительно компактна в* $L_p(0,T;L_p(\Omega))$, *где* p *удовлетворяет условиям теоремы* 3.

В силу оценки (7) можно считать (без ограничения общности), что v^n слабо сходится в $L_2(0,T;V^1)$, а $\partial v^n/\partial t$ слабо сходится в $L_2(0,T;V^{-1})$. Покажем, что подпоследовательность v^n сходится к v, где v — это решение задачи (10)–(11) при $\theta \in E_2$ и $\theta = \lim \theta^n$.

Так как v^n — решение задачи (10)–(11), то при почти всех $t \in (0,T)$ справедливо равенство

$$\int_\Omega \frac{\partial v^n}{\partial t}\varphi\,dx - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n u_i^n v_j^n \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx + 2\int_\Omega \nu(\theta^n)\mathcal{E}(v^n) : \mathcal{E}(\varphi)\,dx = \langle f, \varphi\rangle. \tag{14}$$

В силу теоремы Симона [12] (при необходимости с переходом к подпоследовательностям) $v^n \to v$ сильно в $L_4(\Omega)$. Таким образом, v^n сходится к v сильно в $L_4(\Omega)^n$, а u^n сходится к u в V^{-1}. Тогда произведение этих последовательностей сходится слабо к произведению пределов. Следовательно, в равенстве (14) в каждом слагаемом можно перейти к пределу. Получим, что предельная функция $v \in E_1$ будет удовлетворять равенству (4) и, следовательно, будет являться слабым решением задачи (10)–(11).

Чтобы обосновать предельный переход в задаче (12)–(13), понадобится более сильный результат о сходимости v^n. Имеет место

Лемма 2. *Последовательность* v^n *сильно сходится в* $L_2(0,T;V^1)$ *к* $v \in E_1$.

Покажем, что полученное при предельном переходе $\theta \in E_2$ является слабым решением задачи (8). Так как θ^n является решением задачи (12)–(13), то для него справедливо равенство (5). Рассмотрим бесконечно дифференцируемую по t и x на Q_T функцию $\psi(t,x)$, удовлетворяющую условиям $\psi(0,\cdot) = \psi(T,\cdot) = 0$ и $\psi|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0$. Умножим (5) на $\psi(t,x)$, проинтегрируем на $[0,T]$ и упростим:

$$\begin{aligned} -\int_0^T (\theta^n,\phi)\frac{\partial\psi}{\partial t}\,dt - \int_0^T \sum_{i=1}^n (u_i^n\theta^n, \frac{\partial\phi}{\partial x_i})\psi\,dt + \chi\int_0^T \sum_{i=1}^n (\frac{\partial\theta^n}{\partial x_i}, \frac{\partial\phi}{\partial x_i})\,\psi\,dt = \\ = \int_0^T \langle g,\phi\rangle\psi\,dt + 2\int_0^T (\nu(\theta^{n-1})\mathcal{E}(v^n) : \mathcal{E}(v^n), \phi)\psi\,dt, \quad \phi \in C_0^\infty(\Omega). \end{aligned}$$

Из сильной сходимости v^n в $L_2(0,T;V^1)$ и θ^n в $L_p(0,T;\,L_p(\Omega))$ и слабой сходимости u^n к u^v в $C([0,T];V^{-1})$ и θ^n к θ в $L_p(0,T;W_p^1(\Omega))$, где p удовлетворяет условиям теоремы 3, вытекает возможность предельного перехода во всех слагаемых. Из последнего равенства в силу произвольности ψ вытекает справедливость соотношения (5).

Это и завершает доказательство теоремы 1.

Литература

[1] Leray J. *Essai sur le mouvement d'un fluide visqueux emplissant l'espace*, Acta Math. **63**, 193–248 (1934).

[2] Foias C., Holm D.D., Titi E.S. *The three dimensional viscous Camassa–Holm equations, and their relation to the Navier–Stokes equations and turbulence theory*, J. Dynam. Diff. Equat. **14** (1), 1–35 (2002).

[3] Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. *Краевые задачи механики неоднородных жидкостей* (Наука, Новосибирск, 1983).

[4] Cheskidov A., Holm D.D., Olson E., Titi E.S. *On a Leray-α model of turbulence*, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. **461** (2055), 629–649 (2005).

[5] Ilyin A.A., Lunasin E.M., Titi E.S. *A modified-Leray-α subgrid scale model of turbulence*, Nonlinearity **19** (4), 879–897 (2006).

[6] Zvyagin V.G., Orlov V.P. *On certain mathematical models in continuum thermomechanics*, J. Fixed Point Theory and Appl. **15** (1), 3–47 (2014).

[7] Звягин В.Г., Орлов В.П. *Об одной параболической задаче движения термовязкоупругих сред*, Матем. заметки **99** (3), 465–469 (2016).

[8] Звягин В.Г., Орлов В.П. *Разрешимость в слабом смысле системы термовязкоупругости для модели Джеффриса*, Изв. вузов. Матем., № 9, 64–69 (2013).

[9] Звягин А.В., Орлов В.П. *Разрешимость задачи термовязкоупругости для одной модели Осколкова*, Изв. вузов. Матем., № 9, 65–71 (2014).

[10] Звягин А.В., Орлов В.П. *Исследование разрешимости задачи термовязкоупругости для линейно упруго-запаздывающей жидкости Фойгта*, Матем. заметки **97** (5), 681–698 (2015).

[11] Фурсиков А.В. *Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения* (Научная книга, Новосибирск, 1999).

[12] Simon J. *Compact sets in the space* $L^p(0,T;B)$, Ann. Mat. Pura Appl. **146**, 65–96 (1987).

А.В. Звягин

Воронежский государственный университет,
Университетская пл., д. 1, г. Воронеж, 394006, Россия,

e-mail: zvyagin.a@mail.ru

A.V. Zvyagin

Solvability of thermoviscoelastic problem for Leray alpha-model

Abstract. We investigate solvability problem (in a weak sense) for one initial boundary-value problem describing alpha-Leray model with viscosity depending on a temperature.

Keywords: weak solutions, existence theorems, alpha-Leray model.

A.V. Zvyagin

Voronezh State University,
1 Universitetskaya sq., Voronezh, 394006 Russia,

e-mail: zvyagin.a@mail.ru