Известия вузов. Математика
2013, №6, с. 45–59

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

А.В. ФАДЕЕВ

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ $\mathbb{R}$-ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ СОФОКУСНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО КОЛЬЦА В КЛАССЕ КУСОЧНО-МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Аннотация. Рассмотрена задача о возмущении комплексного потенциала в результате внесения в однородную среду инородного двухфазного включения в виде софокусного эллиптического кольца. Исследованы случаи произвольного расположения особенностей заданных главных частей искомого потенциала.

Ключевые слова: задача $\mathbb{R}$-линейного сопряжения, гетерогенные среды, аналитические функции, софокусное эллиптическое включение, функция Жуковского.

УДК: 532.546

В работе изучается математическая модель теории плоских гетерогенных сред, которая сводится к задаче построения плоскопараллельного стационарного поля $\mathbf{v}(x,y) = (v_x, v_y)$, являющегося потенциальным и соленоидальным в каждой изотропной фазе рассматриваемой среды. На границе контакта $\mathcal{L}$ разнородных фаз предполагаются равными нормальные (касательные) составляющие предельных значений вектора $\mathbf{v}$ ($\rho\mathbf{v}$). Коэффициент $\rho(x,y)$, характеризующий физические свойства среды, в каждом изотропном компоненте среды принимает постоянное значение. В теореме Милн-Томсона ([1], с. 153) утверждается единственность и приводится вид явного решения этой задачи для одиночного кругового включения в классе кусочно-голоморфных функций, принимающих фиксированное значение на бесконечности. В работах [2]–[4] результат Л.М. Милн-Томсона обобщен на случай эллиптического включения. В данной статье с помощью методов работ [5]–[7] приводится дальнейшее обобщение теоремы Милн-Томсона на случай двухфазного включения в виде софокусного эллиптического кольца.

1. Постановка задачи

Рассматривается бесконечная плоская однородная среда, интерпретируемая как плоскость $\mathbb{C}$ комплексного переменного z. Пусть $f(z)$ есть комплексный потенциал с конечным числом особенностей, заданный в плоскости $\mathbb{C}$. Задача состоит в нахождении возмущенного комплексного потенциала $w(z)$ в результате внесения в однородную среду $\mathbb{C}$ инородного включения в виде софокусного эллиптического кольца. Особенности $f(z)$ могут находиться как внутри кольца, так и снаружи, или на любом из компонентов его границы.

В терминах кусочно-мероморфных функций $v(z) = w'(z) = v_x(x,y) - \mathrm{i}v_y(x,y)$, где $v(z)$ — комплексно-сопряженная с функцией скорости $\mathbf{v}(z) = v_x(x,y) + \mathrm{i}v_y(x,y)$, рассматриваемая задача приводится к задаче $\mathbb{R}$-линейного сопряжения ([8], с. 53). А именно, пусть S_1, S_2 и S_3 — бесконечная среда и области включения соответственно (рис. 1), функция $v(z) = v_k(z)$,

Поступила 10.04.2012

$z \in S_k$, мероморфна в S_k и непрерывна в $\overline{S}_k$ всюду, за исключением соответствующих особых точек $f'(z)$ $(k = 1, 2, 3)$. Тогда предельные значения $v_k(z)$ на границах $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ двух софокусных эллипсов связаны краевым условием:

$$\begin{aligned} cv_2(t) &= A_1 v_1(t) - B_1 [t'(s)]^{-2} \overline{v_1(t)}, \quad t \in \mathcal{L}_1, \\ v_3(t) &= A_2 v_2(t) - B_2 [t'(s)]^{-2} \overline{v_2(t)}, \quad t \in \mathcal{L}_2, \end{aligned} \tag{1}$$

где s — длина дуги контура $\mathcal{L}_j$, производная $t'(s)$ – единичный вектор касательной к контуру $\mathcal{L}_j$ в точке $t \in \mathcal{L}_j$ $(j = 1, 2)$, и

$$A_j = \frac{\rho_j + \rho_{j+1}}{2\rho_{j+1}}, \quad B_j = \frac{\rho_{j+1} - \rho_j}{2\rho_{j+1}}, \quad \Delta_j = B_j / A_j = \frac{\rho_{j+1} - \rho_j}{\rho_{j+1} + \rho_j}, \quad j = 1, 2. \tag{2}$$

Здесь ρ_k $(\sigma_k = 1/\rho_k)$ — постоянный коэффициент, характеризующий физические свойства среды S_k.

Главная часть искомого решения задачи (1) должна совпадать с заданной функцией $f'(z)$, которая имеет конечное число полюсов и, следовательно, рациональна.

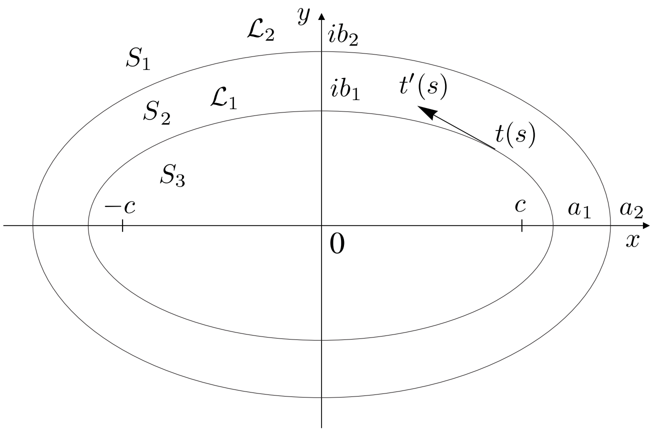

Рис. 1. Включение в виде софокусного эллиптического кольца

Сначала рассмотрим решение задачи (1) в предположении, что у $f'(z)$ нет особых точек на контурах $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$.

2. Решение задачи (1) в случае отсутствия особенностей на границе

Пусть для определенности координатные оси плоскости z совпадают с осями симметрии эллипсов $\mathcal{L}_k = \{z = x + iy : x^2/a_k^2 + y^2/b_k^2 = 1\}$, где a_k, b_k $(k = 1, 2)$ — заданные положительные параметры такие, что $a_k \geq b_k > 0$, а фокусы эллипсов $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ совпадают:

$$c = \sqrt{a_1^2 - b_1^2} = \sqrt{a_2^2 - b_2^2} \geq 0.$$

Рассмотрим конформное отображение плоскости z с разрезом по отрезку $[-c, c]$ на плоскость ζ с помощью ветви функции

$$\zeta(z) = \frac{1}{c}(z + \sqrt{z^2 - c^2}), \tag{3}$$

фиксированной в $\mathbb{C} \setminus [-c, c]$ условием $\zeta(\infty) = \infty$.

Функция (3) является обратной к функции Жуковского

$$z(\zeta) = \frac{c}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)$$

и отображает области S_1, S_2 и $S_3\backslash[-c,c]$ на области $S_1^* = \{\zeta : |\zeta| > R_1\}$, $S_2^* = \{\zeta : R_2<|\zeta|<R_1\}$ и $S_3^* = \{\zeta : 1 < |\zeta| < R_2\}$ соответственно (рис. 2), где

$$R_k = \zeta(a_k) = \frac{a_k + b_k}{c} = \frac{c}{a_k - b_k} = \sqrt{\frac{a_k + b_k}{a_k - b_k}}.$$

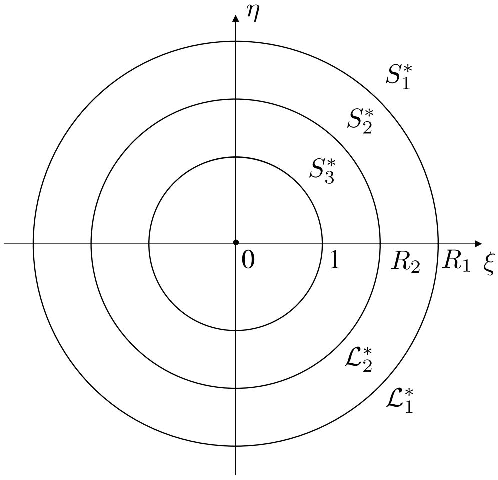

Рис. 2. Образ $\mathbb{C} \setminus [-c, c]$ в плоскости ζ

Эллипсы $\mathcal{L}_k$ переходят в окружности $\mathcal{L}_k^*$. В ([7], с. 36) было доказано, что если точка $t \in \mathcal{L}_k$ и ее образ $\tau = \zeta(t) \in \mathcal{L}_k^*$, то

$$[t'(s)]^{-2} = -\frac{\overline{\tau - 1/\tau}}{\tau - 1/\tau}, \quad |\tau| = R_k. \tag{4}$$

Введем новую неизвестную кусочно-мероморфную функцию

$$V(\zeta) = \frac{c}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right) v[z(\zeta)] = V_p(\zeta), \quad \zeta \in S_p^*, \quad p = 1, 2, 3, \tag{5}$$

где множитель $c/2$ взят для удобства последующих вычислений.

Согласно (1), (4) функция (5) удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} V_2(\tau) &= A_1 V_1(\tau) + B_1 \overline{V_1(\tau)}, && |\tau| = R_1, \\ V_3(\tau) &= A_2 V_2(\tau) + B_2 \overline{V_2(\tau)}, && |\tau| = R_2, \\ V_3(\tau) &= -V_3(1/\tau), && |\tau| = 1. \end{aligned} \tag{6}$$

Последнее условие (6) следует из определения (5) и того, что отрезок $[-c, c]$ не является линией скачков для $v_3(z)$.

Очевидно, функция

$$\mathrm{V}(\zeta) = \begin{cases} V(\zeta), & |\zeta| \geqslant 1; \\ -V(1/\zeta), & |\zeta| < 1, \end{cases}$$

будет определена во всей плоскости ζ. Эта функция в силу третьего условия (6) доставляет аналитическое продолжение $\mathrm{V}_3(\zeta)$ функции $V_3(\zeta)$ из кольца $S_3^* = \{\zeta : 1 < |\zeta| < R_2\}$ в кольцо $\Omega_3 = \{\zeta : 1/R_2 < |\zeta| < R_2\}$ и определяет функции $\mathrm{V}_1^+(\zeta)$ и $\mathrm{V}_2^+(\zeta)$ в областях $\Omega_1^+ = \{\zeta : |\zeta| < 1/R_1\}$ и $\Omega_2^+ = \{\zeta : 1/R_1 < |\zeta| < 1/R_2\}$ соответственно. Для симметрии обозначим $\mathrm{V}_1^-(\zeta) = V_1(\zeta)$ для $\zeta \in S_1^* \equiv \Omega_1^-$ и $\mathrm{V}_2^-(\zeta) = V_2(\zeta)$ для $\zeta \in S_2^* \equiv \Omega_2^-$. Тогда будет выполняться тождество

$$\mathrm{V}(1/\zeta) \equiv -\mathrm{V}(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{C}. \tag{7}$$

Таким образом, задача (6) приведена к следующей:

$$\begin{aligned} (1+\Delta_1)\mathrm{V}_2^+(\tau) &= \mathrm{V}_1^+(\tau) + \Delta_1\overline{\mathrm{V}_1^+(\tau)}, \quad |\tau| = 1/R_1, \\ (1+\Delta_1)\mathrm{V}_2^-(\tau) &= \mathrm{V}_1^-(\tau) + \Delta_1\overline{\mathrm{V}_1^-(\tau)}, \quad |\tau| = R_1, \\ (1+\Delta_2)\mathrm{V}_3(\tau) &= \mathrm{V}_2^+(\tau) + \Delta_2\overline{\mathrm{V}_2^+(\tau)}, \quad |\tau| = 1/R_2, \\ (1+\Delta_2)\mathrm{V}_3(\tau) &= \mathrm{V}_2^-(\tau) + \Delta_2\overline{\mathrm{V}_2^-(\tau)}, \quad |\tau| = R_2, \end{aligned} \tag{8}$$

где параметры Δ_1 и Δ_2 определены в (2). Кусочно-мероморфное решение краевой задачи (8) должно удовлетворять условиям симметрии (7), а сумма его главных частей должна совпадать с функцией

$$F(\zeta) = \frac{c}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right) f'\left[\frac{c}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\right]. \tag{9}$$

Функция (9), очевидно, рациональна и удовлетворяет тождеству (7). Рациональную функцию $F(\zeta)$ можно представить в виде суммы простых дробей и, возможно, полинома. Обозначим через $F_1^+(\zeta)$ и $F_2^+(\zeta)$ сумму тех дробей, полюсы которых лежат в областях Ω_1^+ и Ω_2^+. Пусть

$$\begin{aligned} F_1^-(\zeta) = -F_1^+(1/\zeta), \quad F_2^-(\zeta) = -F_2^+(1/\zeta), \\ F_3(\zeta) = F(\zeta) - \left(F_1^-(\zeta) + F_1^+(\zeta) + F_2^-(\zeta) + F_2^+(\zeta)\right). \end{aligned} \tag{10}$$

Нетрудно видеть, что определенная таким образом функция $F_3(\zeta)$ удовлетворяет тождеству (7) и разве лишь на константу отличается от суммы всех простых дробей, входящих в $F(\zeta)$, полюсы которых находятся в области Ω_3. Действительно, по построению $F_3(\zeta)$ не имеет особенностей в $\Omega_1^+ \bigcup \Omega_2^+$, а в силу тождества (7) у нее нет особенностей и в $\Omega_1^- \bigcup \Omega_2^-$. Таким образом, получим представление функции (9) в виде

$$F(\zeta) = F_1^+(\zeta) + F_1^-(\zeta) + F_2^+(\zeta) + F_2^-(\zeta) + F_3(\zeta). \tag{11}$$

В случае отсутствия особенности на бесконечности, функции $F_l^{\pm}(\zeta)$ удобно представить следующим образом:

$$F_l^+(\zeta) = \sum_{k=1}^{n_l}\sum_{j=1}^{m_{lk}} \frac{c_{lj}^k}{(1-\zeta_{lk}\zeta)^j}, \quad F_l^-(\zeta) = -\sum_{k=1}^{n_l}\sum_{j=1}^{m_{lk}} c_{lj}^k \left(\frac{\zeta}{\zeta - \zeta_{lk}}\right)^j, \quad l = 1, 2,$$

$$F_3(\zeta) = \sum_{k=1}^{n_3}\sum_{j=1}^{m_{3k}} c_{3j}^k \left(\frac{1}{(1-\zeta_{3k}\zeta)^j} - \left(\frac{\zeta}{\zeta - \zeta_{3k}}\right)^j\right).$$

Если бесконечность является особой точкой, то в определениях функций $F_1^{\pm}(\zeta)$ добавятся соответствующие полиномы $P_{n_0}(\zeta^{\pm 1})$ с нулевым свободным членом. Заметим также, что в силу (10) $F_l^+(\infty) = F_l^-(0) = 0$ $(l = 1, 2)$.

Искомое решение задачи (8) можно записать в виде

$$\begin{aligned} \mathrm{V}_1^{\pm}(\zeta) &= F_1^{\pm}(\zeta) + \mathrm{V}_{01}^{\pm}(\zeta), \\ \mathrm{V}_2^{\pm}(\zeta) &= F_2^{\pm}(\zeta) + \mathrm{V}_{02}^{\pm}(\zeta), \\ \mathrm{V}_3(\zeta) &= F_3(\zeta) + \mathrm{V}_{03}(\zeta), \end{aligned} \tag{12}$$

где $\mathrm{V}_{01}^{\pm}(\zeta)$, $\mathrm{V}_{02}^{\pm}(\zeta)$ и $\mathrm{V}_{03}(\zeta)$ — новые неизвестные ограниченные на бесконечности функции, голоморфные в областях $\Omega_1^{\pm}$, $\Omega_2^{\pm}$, Ω_3 соответственно. Так как $\mathrm{V}(\zeta)$ и $F(\zeta)$ удовлетворяют тождеству (7), то $\mathrm{V}_0(\zeta) = \{\mathrm{V}_{01}^{\pm}(\zeta), \zeta \in \Omega_1^{\pm};\ \mathrm{V}_{02}^{\pm}(\zeta), \zeta \in \Omega_2^{\pm};\ \mathrm{V}_{03}(\zeta), \zeta \in \Omega_3\}$ также должна удовлетворять этому тождеству.

Голоморфные в кольцах Ω_2^-, Ω_3 функции V_{02}^-, V_{03} можно представить в виде сумм

$$\mathrm{V}_{03}(\zeta) = W_{03}^+(\zeta) + W_{03}^-(\zeta), \tag{13}$$

$$\mathrm{V}_{02}^-(\zeta) = W_{02}^+(\zeta) + W_{02}^-(\zeta), \tag{14}$$

где функции $W_{02}^{\pm}(\zeta)$ голоморфны в областях $\{\zeta : |\zeta| < R_1\}$ и $\{\zeta : |\zeta| > R_2\}$ соответственно, а функции $W_{03}^{\pm}(\zeta)$ голоморфны в областях $\{\zeta : |\zeta|^{\pm 1} < R_2\}$. Причем слагаемые функции (13) удовлетворяют тождеству

$$W_{03}^+(1/\zeta) \equiv -W_{03}^-(\zeta), \quad \frac{1}{R_2} < |\zeta| < R_2. \tag{15}$$

Единственность представлений (14), (13) обеспечивается условиями $W_{02}^-(\infty)=0$, $W_{03}^-(\infty)=0$. Тогда из (15) следует $W_{03}^+(0) = 0$.

Используя (12), перепишем второе и четвертое условия (8) в виде

$$\begin{aligned} (1+\Delta_1)(W_{02}^+(\tau) + W_{02}^-(\tau) + F_2^-(\tau)) = \mathrm{V}_{01}^-(\tau) + \\ + F_1^-(\tau) + \Delta_1\left(\overline{\mathrm{V}_{01}^-(R_1^2/\overline{\tau})} + \overline{F_1^-(R_1^2/\overline{\tau})}\right), \quad |\tau| = R_1, \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} (1+\Delta_2)(W_{03}^+(\tau) + W_{03}^-(\tau) + F_3(\tau)) = W_{02}^-(\tau) + W_{02}^+(\tau) + F_2^-(\tau) + \\ + \Delta_2\left(\overline{W_{02}^-(R_2^2/\overline{\tau})} + \overline{W_{02}^+(R_2^2/\overline{\tau})} + \overline{F_2^-(R_2^2/\overline{\tau})}\right), \quad |\tau| = R_2. \end{aligned} \tag{17}$$

Рассмотрим функции

$$\Phi(\zeta) = \begin{cases} (1+\Delta_1)(W_{02}^-(\zeta) + F_2^-(\zeta)) - \mathrm{V}_{01}^-(\zeta) - \Delta_1\overline{F_1^-(R_1^2/\overline{\zeta})}, & |\zeta| > R_1; \\ F_1^-(\zeta) - (1+\Delta_1)W_{02}^+(\zeta) + \Delta_1\overline{\mathrm{V}_{01}^-(R_1^2/\overline{\zeta})}, & |\zeta| < R_1, \end{cases} \tag{18}$$

$$\Psi(\zeta) = \begin{cases} (1+\Delta_2)(W_{03}^-(\zeta) + F_3(\zeta)) - W_{02}^-(\zeta) - \Delta_2\overline{(F_2^-(R_2^2/\overline{\zeta}) + W_{02}^+(R_2^2/\overline{\zeta}))}, & |\zeta| > R_2; \\ F_2^-(\zeta) - (1+\Delta_2)W_{03}^+(\zeta) + W_{02}^+(\zeta) + \Delta_2\overline{W_{02}^-(R_2^2/\overline{\zeta})}, & |\zeta| < R_2. \end{cases} \tag{19}$$

Ясно, что функция (18) голоморфна в областях Ω_1^- и $\mathbb{C} \setminus \overline{\Omega_1^-}$, не имеет скачка на границе $|\zeta| = R_1$ в силу (16) и ограничена на бесконечности. Следовательно, эта функция голоморфна в $\overline{\mathbb{C}}$ и согласно теореме Лиувилля $\Phi(\zeta) \equiv C = \mathrm{const}$. Аналогично получаем, что и $\Psi(\zeta) \equiv D = \mathrm{const}$.

Учитывая, что $W_{02}^-(\infty) = W_{03}^-(\infty) = W_{03}^+(0) = 0$, $F_1^-(0) = F_2^-(0) = 0$, и устремив значение ζ к бесконечности в первых уравнениях (18), (19) и к нулю во вторых, получим

$$(1+\Delta_1)F_2^-(\infty) - \mathrm{V}_{01}^-(\infty) = C,$$

$$-(1+\Delta_1)W_{02}^+(0) + \Delta_1\overline{\mathrm{V}_{01}^-(\infty)} = C,$$

$$(1+\Delta_2)F_3(\infty) - \Delta_2\overline{W_{02}^{+}(0)} = D,$$
$$W_{02}^{+}(0) = D.$$

Отсюда, в частности, найдем

$$D = \frac{F_3(\infty) - \Delta_2\overline{F_3(\infty)}}{1-\Delta_2}, \quad C = \frac{\Delta_1(\overline{F_2^{-}(\infty)} - \Delta_1 F_2^{-}(\infty))}{1-\Delta_1} - \frac{D - \Delta_1\overline{D}}{1-\Delta_1}. \tag{20}$$

Заменим во втором уравнении (18) ζ на $R_1^2/\overline{\zeta}$ и возьмем комплексное сопряжение. Во втором уравнении (19) ζ заменим на $1/\zeta$. Учитывая тождество (15), получим

$$(1+\Delta_1)(W_{02}^{-}(\zeta) + F_2^{-}(\zeta)) - \mathrm{V}_{01}^{-}(\zeta) - \Delta_1\overline{F_1^{-}(R_1^2/\overline{\zeta})} = C, \quad |\zeta| > R_1,$$
$$\overline{F_1^{-}(R_1^2/\overline{\zeta})} - (1+\Delta_1)\overline{W_{02}^{+}(R_1^2/\overline{\zeta})} + \Delta_1\mathrm{V}_{01}^{-}(\zeta) = \overline{C}, \quad |\zeta| > R_1,$$
$$(1+\Delta_2)(W_{03}^{-}(\zeta) + F_3(\zeta)) - W_{02}^{-}(\zeta) - \Delta_2(\overline{F_2^{-}(R_2^2/\overline{\zeta}) + W_{02}^{+}(R_2^2/\overline{\zeta})}) = D, \quad |\zeta| > R_2,$$
$$F_2^{-}(1/\zeta) + (1+\Delta_2)W_{03}^{-}(\zeta) + W_{02}^{+}(1/\zeta) + \Delta_2\overline{W_{02}^{-}(R_2^2\overline{\zeta})} = D, \quad |\zeta| > 1/R_2.$$

Исключая $\mathrm{V}_{01}^{-}(\zeta)$ из первых двух уравнений и $W_{03}^{-}(\zeta)$ из последних двух, получаем

$$(1-\Delta_1^2)\overline{F_1^{-}(R_1^2/\overline{\zeta})} + \Delta_1(1+\Delta_1)(F_2^{-}(\zeta) + W_{02}^{-}(\zeta)) -$$
$$- (1+\Delta_1)\overline{W_{02}^{+}(R_1^2/\overline{\zeta})} = \overline{C} + \Delta_1 C, \quad |\zeta| > R_1,$$

$$(1+\Delta_2)F_3(\zeta) - F_2^{-}(1/\zeta) - W_{02}^{-}(\zeta) - W_{02}^{+}(1/\zeta) -$$
$$- \Delta_2(\overline{F_2^{-}(R_2^2/\overline{\zeta}) + W_{02}^{+}(R_2^2/\overline{\zeta}) + W_{02}^{-}(R_2^2\overline{\zeta})}) = 0. \quad |\zeta| > R_2.$$

Отсюда

$$W_{02}^{+}(\zeta) = -\frac{C + \Delta_1\overline{C}}{1+\Delta_1} + (1-\Delta_1)F_1^{-}(\zeta) + \Delta_1(\overline{F_2^{-}(R_1^2/\overline{\zeta}) + W_{02}^{-}(R_1^2/\overline{\zeta})}), \quad |\zeta| < R_1. \tag{21}$$

Следовательно,

$$W_{02}^{-}(\zeta) + \Delta_1\overline{W_{02}^{-}(R_1^2\overline{\zeta})} + \Delta_2\overline{W_{02}^{-}(R_2^2\overline{\zeta})} + \Delta_1\Delta_2 W_{02}^{-}\left(\frac{R_1^2}{R_2^2}\zeta\right) = G(\zeta), \quad |\zeta| > R_2. \tag{22}$$

Таким образом, пришли к функциональному уравнению относительно голоморфной в области $\{\zeta : |\zeta| > R_2\}$ функции $W_{02}^{-}(\zeta)$, где

$$G(\zeta) = (1+\Delta_2)F_3(\zeta) - F_2^{-}(1/\zeta) - \Delta_1\overline{F_2^{-}(R_1^2\overline{\zeta})} -$$
$$- \Delta_2(\overline{F_2^{-}(R_2^2/\overline{\zeta})}) - \Delta_2\Delta_1 F_2^{-}\left(\frac{R_1^2}{R_2^2}\zeta\right) - (1-\Delta_1)F_1^{-}(1/\zeta) -$$
$$- \Delta_2(1-\Delta_1)\overline{F_1^{-}(R_2^2/\overline{\zeta})} + \frac{C + \Delta_1\overline{C}}{1+\Delta_1} + \Delta_2\frac{\overline{C} + \Delta_1 C}{1+\Delta_1}, \tag{23}$$

причем в силу (20) и $F_1^{-}(0) = F_2^{-}(0) = 0$ имеем $G(\infty) = 0$.

Функции $W_{02}^{-}(\zeta)$ и $G(\zeta)$, голоморфные при $|\zeta| > R_2$, представляются в виде

$$G(\zeta) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k\zeta^{-k}, \quad W_{02}^{-} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\zeta^{-k} \tag{24}$$

с известными g_k и неизвестными a_k.

Подставляя ряды (24) в уравнение (22) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ζ, придем к уравнениям

$$a_k c_k + \overline{a}_k d_k = g_k, \quad c_k = 1 + \Delta_1\Delta_2 R_1^{-2k} R_2^{2k},\ d_k = \Delta_1 R_1^{-2k} + \Delta_2 R_2^{-2k}, \tag{25}$$

откуда находим

$$a_k = \frac{g_k c_k - \overline{g}_k d_k}{c_k^2 - d_k^2}. \tag{26}$$

С помощью представлений (23), (24) и (26) определяется функция $W_{02}^-(\zeta)$.

Далее, из первого уравнения (18) и второго уравнения (19) находим

$$\mathrm{V}_{01}^-(\zeta) = (1+\Delta_1)(W_{02}^-(\zeta) + F_2^-(\zeta)) - \Delta_1 \overline{F_1^-(R_1^2/\overline{\zeta})} - C, \tag{27}$$

$$W_{03}^+(\zeta) = \frac{F_2^-(\zeta) + W_{02}^+(\zeta) + \Delta_2 \overline{W_{02}^-(R_2^2/\overline{\zeta})} - D}{1+\Delta_2}. \tag{28}$$

Окончательно, искомое решение получится с помощью (15), (14), (12) и (13). В результате доказана

Теорема 1. *Если заданный возмущенный комплексный потенциал f(z) не имеет особенностей на границах* $\mathcal{L}_k = \{z = x+iy : x^2/a_k^2 + y^2/b_k^2 = 1\}$, $a_k \geq b_k > 0$ $(k = 1, 2)$ *софокусного эллиптического кольца, то задача нахождения кусочно-мероморфной функции с главной частью* $f'(z)$, *удовлетворяющей краевым условиям* (1), *разрешима, и ее решение может быть записано в следующем виде*:

$$\begin{aligned}
v_1(z) &= [\mathrm{V}_{01}^-(\zeta(z)) + F_1^-(\zeta(z))]/\sqrt{z^2-c^2},\\
v_2(z) &= [W_{02}^-(\zeta(z)) + W_{02}^+(\zeta(z)) + F_2^-(\zeta(z))]/\sqrt{z^2-c^2},\\
v_3(z) &= [W_{03}^+(\zeta(z)) - W_{03}^+(1/\zeta(z)) + F_3(\zeta(z))]/\sqrt{z^2-c^2},
\end{aligned} \tag{29}$$

где $\zeta(z) = (z + \sqrt{z^2-c^2})/c$, *функция* $W_{02}^-(\zeta)$ *определяется рядом* (24) *с коэффициентами* (26), $\mathrm{V}_{01}^-(\zeta)$, $W_{02}^+(\zeta)$ *и* $W_{03}^+(\zeta)$ *вычисляются из соотношений* (21), (27) *и* (28). *Параметры* Δ_k *определены в* (2), $R_k = \sqrt{(a_k+b_k)/(a_k-b_k)}$,

$$F(\zeta) = \frac{c}{2}\left(\zeta - \frac{1}{\zeta}\right) f'\left[\frac{c}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right)\right],$$

$F_1^-(\zeta) = -F_1^+(1/\zeta)$, $F_2^-(\zeta) = -F_2^+(1/\zeta)$, $F_3(\zeta) = F(\zeta) - \big(F_1^-(\zeta) + F_1^+(\zeta) + F_2^-(\zeta) + F_2^+(\zeta)\big)$, $F_1^+(\zeta)$ *и* $F_2^+(\zeta)$ *— суммы простых дробей для* $F(\zeta)$, *полюсы которых лежат в областях* $\Omega_1^+ = \{\zeta : |\zeta| < 1/R_1\}$ *и* $\Omega_2^+ = \{\zeta : 1/R_1 < |\zeta| < 1/R_2\}$ *соответственно.*

Замечание 1. Если $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$, то $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$. Тогда в силу (23), (24), (26) $G(\zeta) = F_3(\zeta) + F_2^+(\zeta) + F_3^+(\zeta) + C$, $a_k = g_k$ и $W_{02}^- = G(\zeta)$. Из соотношений (27), (28), (21), (15) следует

$$\begin{aligned}
\mathrm{V}_{01}^-(\zeta) &= F_3(\zeta) + F_2^+(\zeta) + F_1^+(\zeta) + F_2^-(\zeta),\\
W_{02}^+(\zeta) &= F_1^-(\zeta) - C,\\
W_{03}^+(\zeta) &= F_2^-(\zeta) + F_1^-(\zeta) - C - D,\\
W_{03}^-(\zeta) &= F_2^+(\zeta) + F_1^+(\zeta) + C + D.
\end{aligned}$$

Из (12), (13), (14) и (11) вытекает

$$\mathrm{V}_1^-(\zeta) = \mathrm{V}_2^-(\zeta) = \mathrm{V}_3(\zeta) = F_1^+(\zeta) + F_2^+(\zeta) + F_1^-(\zeta) + F_2^-(\zeta) + F_3(\zeta) = F(\zeta)$$

и $v_1(z)=v_2(z)=v_3(z)=f'(\zeta)$, как и следовало ожидать.

Замечание 2. Покажем, что при $\rho_1=\rho_2\neq\rho_3$ полученное решение совпадает с решением задачи для эллипса [4].

Действительно, при $\rho_1=\rho_2\neq\rho_3$ $\Delta_1=0$, и из (26) получим

$$a_k=\frac{g_k-\overline{g}_k\frac{\Delta_2}{R_2^{2k}}}{1-\frac{\Delta_2^2}{R_2^{4k}}}=\sum_{i=0}^{\infty}g_k\frac{\Delta_2^{2i}}{R_2^{4ki}}-\sum_{i=0}^{\infty}\overline{g_k}\frac{\Delta_2^{2i+1}}{R_2^{4ki+2k}}.$$

Из (24) тогда следует

$$W_{02}^{-}(\zeta)=\sum_{i=0}^{\infty}\Delta_2^{2i}G\left(\zeta R_2^{4i}\right)-\sum_{i=0}^{\infty}\Delta_2^{2i+1}\overline{G\left(\overline{\zeta}R_2^{4i+2}\right)}=\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\Delta_2^j\mathrm{C}_{\mathbb{R}}^jG\left(\mathrm{C}_{\mathbb{R}}^j\zeta R_2^{2j}\right),$$

где $\mathrm{C}_{\mathbb{R}}z=\overline{z}$ — оператор комплексного сопряжения.

Из (23) найдем

$$G(\zeta)=(1+\Delta_2)F_3(\zeta)+F_{12}^{+}(\zeta)+\Delta_2(\overline{F_{12}^{+}(\overline{\zeta}R_2^2)})+C+\Delta_2\overline{C},$$

где $F_{12}^{\pm}(\zeta)=F_1^{\pm}(\zeta)+F_2^{\pm}(\zeta)$. С учетом последнего равенства получим

$$W_{02}^{-}(\zeta)=(1+\Delta_2)\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\Delta_2^j\mathrm{C}_{\mathbb{R}}^jF_3\big(\mathrm{C}_{\mathbb{R}}^j\zeta R_2^{2j}\big)+$$
$$+(1-\Delta_2^2)\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\Delta_2^j\mathrm{C}_{\mathbb{R}}^jF_{12}^{+}\big(\mathrm{C}_{\mathbb{R}}^j\zeta R_2^{2j}\big)+\Delta_2\overline{F_{12}^{+}(\overline{\zeta}R_2^2)}+C.$$

Соотношения (21), (27), (28) и (13) приводят к результатам

$$W_{02}^{+}(\zeta)=-C+F_1^{-}(\zeta),$$
$$W_{03}^{+}(\zeta)=\frac{F_2^{-}(\zeta)-C+F_1^{-}(\zeta)+\Delta_2\overline{W_{02}^{-}(R_2^2/\overline{\zeta})}-D}{1+\Delta_2},$$
$$\mathrm{V}_{03}(\zeta)=\frac{F_{12}^{-}(\zeta)+F_{12}^{+}(\zeta)+\Delta_2\overline{W_{02}^{-}(R_2^2/\overline{\zeta})}-\Delta_2\overline{W_{02}^{-}(R_2^2\overline{\zeta})}}{1+\Delta_2}.$$

Учитывая тождества (10), получим

$$\mathrm{V}_{03}(\zeta)=(1-\Delta_2)\sum_{j=0}^{\infty}(-1)^j\Delta_2^j\mathrm{C}_{\mathbb{R}}^j\big(F_{12}^{-}\big(\mathrm{C}_{\mathbb{R}}^j\zeta/R_2^{2j}\big)+F_{12}^{+}\big(\mathrm{C}_{\mathbb{R}}^j\zeta R_2^{2j}\big)\big)+$$
$$+\sum_{j=1}^{\infty}(-1)^j\Delta_2^j\mathrm{C}_{\mathbb{R}}^j\big(F_3\big(\mathrm{C}_{\mathbb{R}}^j\zeta/R_2^{2j}\big)+F_3\big(\mathrm{C}_{\mathbb{R}}^j\zeta R_2^{2j}\big)\big).$$

Таким образом, получим решение [4]

$$v_1(z)=v_2(z)=\left[W_{02}^{-}(\zeta(z))+F_{12}^{-}(\zeta(z))\right]/\sqrt{z^2-c^2},$$
$$v_3(z)=\left[\mathrm{V}_{03}(\zeta(z))+F_3(\zeta(z))\right]/\sqrt{z^2-c^2},$$

где $\zeta(z)=(z+\sqrt{z^2-c^2})/c$.

Случай $\rho_1\neq\rho_2=\rho_3$, т. е. $\Delta_2=0$, рассматривается аналогично.

Пример. Пусть комплексный потенциал $f(z)$ имеет логарифмические особенности в точках z_1, z_2, z_3 в областях S_1, S_2, S_3 соответственно, т. е.

$$f(z) = \gamma_1 \ln(z - z_1) + \gamma_2 \ln(z - z_2) + \gamma_3 \ln(z - z_3), \quad \gamma_k = \frac{\Gamma_k + \mathrm{i}\, Q_k}{2\pi \mathrm{i}}.$$

Пусть $z_k = c(\zeta_k + 1/\zeta_k)/2$, где $\zeta_k = \left(z_k + \sqrt{z_k^2 - c^2}\right)/c$, $|\zeta_1| > R_1$, $R_2 < |\zeta_2| < R_1$, $1 < |\zeta_2| < R_2$. Тогда в соответствии с обозначением (11) получим

$$F(\zeta) = \sum_{k=1}^{3} \gamma_k \left(\frac{\zeta}{\zeta - \zeta_k} + \frac{1/\zeta_k}{\zeta - 1/\zeta_k} \right),$$

$$F_1^+(\zeta) = \gamma_1 \frac{1/\zeta_1}{\zeta - 1/\zeta_1}, \quad F_1^-(\zeta) = \gamma_1 \frac{\zeta}{\zeta - \zeta_1}, \quad F_2^+(\zeta) = \gamma_2 \frac{1/\zeta_2}{\zeta - 1/\zeta_2}, \quad F_2^-(\zeta) = \gamma_2 \frac{\zeta}{\zeta - \zeta_2},$$

$$F_3(\zeta) = \gamma_3 \left(\frac{1/\zeta_3}{\zeta - 1/\zeta_3} + \frac{\zeta}{\zeta - \zeta_3} \right).$$

Коэффициенты первого ряда (24)

$$g_k = (1 - \Delta_1)(\gamma_1 \zeta_1^{-k} + \Delta_2 \overline{\gamma}_1 (R_2^2/\overline{\zeta}_1)^{-k}) + \gamma_2(\zeta_2^{-k} - \Delta_1 \Delta_2 \zeta_2^k (R_2^2/R_1^2)^k) +$$
$$+ \overline{\gamma}_2(\Delta_2 (R_2^2/\overline{\zeta}_2)^k - \Delta_1 (R_1^2/\overline{\zeta}_2)^{-k}) + \gamma_3(1 + \Delta_2)(\zeta_3^k + \zeta_3^{-k}).$$

Коэффициенты искомой функции $W_{02}^-(\zeta)$ далее определяются по формуле (26), а константа C находится из соотношения (20)

$$C = \Delta_1 \overline{\gamma}_1 - \gamma_1 + \frac{\Delta_1 \overline{\gamma}_2 - \gamma_2}{1 - \Delta_1} - \frac{\gamma_3(1 + \Delta_1 \Delta_2) - \overline{\gamma}_3(\Delta_1 + \Delta_2)}{(1 - \Delta_1)(1 - \Delta_2)}.$$

Скорости v_1, v_2, v_3 запишутся по формулам (21), (24), (27), (28) и (29). Комплексные потенциалы получим, интегрируя найденное решение

$$w_1(z) = \int_c^z v_1(z) dz = \int_1^\zeta \frac{\mathrm{V}_1(\zeta)}{\zeta} d\zeta = \gamma_1 \ln\left(1 - \frac{\zeta_1}{\zeta(z)}\right) +$$
$$+ (1 + \Delta_1)\left(\gamma_2 \ln\left(1 - \frac{\zeta_2}{\zeta(z)}\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k \zeta^{-k}(z)}{k}\right) + \Delta_1 \overline{\gamma_1} \ln(R_1^2 - \zeta \overline{\zeta_1}) - C \ln \zeta(z) + C_1,$$

$$w_2(z) = \int_c^z v_2(z) dz = \int_1^\zeta \frac{\mathrm{V}_2(\zeta)}{\zeta} d\zeta =$$
$$= \gamma_2 \ln\left(1 - \frac{\zeta_2}{\zeta(z)}\right) + (1 - \Delta_1)\gamma_1 \ln\left(1 - \frac{\zeta_1}{\zeta(z)}\right) - \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k \zeta^{-k}(z)}{k} -$$
$$- \Delta_1\left(\overline{\gamma_2} \ln(R_1^2 - \zeta(z)\overline{\zeta_2}) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{a_k} \zeta^k(z)}{k R_1^{2k}}\right) - \frac{C + \Delta_1 \overline{C}}{1 + \Delta_1} \ln \zeta(z) + C_2,$$

$$w_3(z) = \int_c^z v_3(z) dz = \int_1^\zeta \frac{\mathrm{V}_3(\zeta)}{\zeta} d\zeta = \gamma_3 \ln(2(z - z_3)/c) +$$
$$+ \frac{1}{1 + \Delta_2}(\gamma_2 \ln(2(z - z_2)/c) + (1 - \Delta_1)\gamma_1 \ln(2(z - z_1)/c) +$$

$$+\Delta_1\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\overline{a_k}\zeta^k(z)}{kR_1^{2k}}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\overline{a_k}\zeta^{-k}(z)}{kR_1^{2k}}\right)-$$

$$-\Delta_1\overline{\gamma_2}\ln\left(R_1^4+\overline{\zeta}_2^2-2R_1^2\overline{\zeta}_2 z/c\right)+\Delta_2\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\overline{a_k}\zeta^k(z)}{kR_2^{2k}}+\sum_{k=1}^{n}\frac{\overline{a_k}\zeta^{-k}(z)}{kR_2^{2k}}\right)+C_3.$$

3. Решение задачи (1) с комплексным потенциалом, имеющим конечное число особенностей на границе

Рассмотрим случай, когда комплексный потенциал $f_0(z)$ имеет единственную особенность в точке $t_0\in\mathcal{L}_1$, т. е.

$$f_0'(z)=\sum_{k=0}^{n}a_{0k}(z-t_0)^{-(k+1)}, \tag{30}$$

а главные части $f_{1,2}(z)$ возмущенных комплексных потенциалов $w_{1,2}(z)$ имеют тот же самый вид, что и $f_0(z)$, т. е.

$$f_j'(z)=\sum_{k=0}^{n}a_{jk}(z-t_0)^{-(k+1)},\quad j=1,2.$$

Кроме того, в соответствии с физическим смыслом рассматриваемой задачи должно выполняться условие

$$f_1(z)+f_2(z)=2f_0(z). \tag{31}$$

С помощью представления (5) снова сведем задачу (1) к задаче (6), а затем к (8) с дополнительными условиями симметрии (7).

Можно показать, что функции

$$F_j(\zeta)=\frac{c}{2}(\zeta-1/\zeta)f_j'\left(\frac{c}{2}(\zeta+1/\zeta)\right),\quad j=0,1,2, \tag{32}$$

удовлетворяющие тождеству

$$F_j(\zeta)\equiv -F_j(1/\zeta), \tag{33}$$

могут быть представлены в виде

$$F_j(\zeta)=\sum_{k=0}^{n}a_{jk}^{-}\left(\frac{\tau_0}{\zeta-\tau_0}\right)^{k+1}-\sum_{k=0}^{n}a_{jk}^{-}\left(\frac{\zeta}{1/\tau_0-\zeta}\right)^{k+1}=F_j^{-}(\zeta)-F_j^{-}(1/\zeta),\quad j=0,1,2. \tag{34}$$

Действительно, главную часть $F_j^{-}(\zeta)$ функции $F_j(\zeta)$ в точке τ_0, пользуясь неопределенностью коэффициентов a_{jk}^{-}, можно взять в виде первой суммы в (34). Тогда разность $\Psi(\zeta)=F_j(\zeta)-(F_j^{-}(\zeta)-F_j^{-}(1/\zeta))$ удовлетворяет тождеству (33) и не имеет особенностей в точке τ_0, а значит, и в точке $1/\tau_0$. Таким образом, функция $\Psi(\zeta)$ голоморфна и ограничена в $\overline{\mathbb{C}}$. В силу теоремы Лиувилля и согласно (33) имеем $\Psi(\zeta)\equiv\mathrm{const}=0$, что доказывает представление (34).

Заметим, что коэффициенты a_{0k}^{-} единственным образом определяются через коэффициенты a_{0k} заданной функции (30) в соответствии с (32). Коэффициенты a_{jk}^{-} $(j=1,2)$ найдем, используя граничные условия (8) и соотношения (31).

Из (31) и представлений (32), (34) следует

$$a_{1k}^{-}+a_{2k}^{-}=2a_{0k}^{-},\quad k=\overline{0,n}. \tag{35}$$

Искомое решение задачи (8) запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathrm{V}_1^-(\zeta) &= F_1^-(\zeta) + \mathrm{V}_{01}^-(\zeta), \\ \mathrm{V}_2^-(\zeta) &= F_2^-(\zeta) + \mathrm{V}_{02}^-(\zeta), \\ \mathrm{V}_3(\zeta) &= \mathrm{V}_{03}(\zeta). \end{aligned} \tag{36}$$

Используя разложения (13) и (14) и учитывая (15), перепишем первые два условия (36)

$$(1+\Delta_1)(W_{02}^+(\tau) + W_{02}^-(\tau) + F_2^-(\tau)) = \mathrm{V}_{01}^-(\tau) + F_1^-(\tau) + \\ + \Delta_1\left(\overline{\mathrm{V}_{01}^-(R_1^2/\overline{\tau})} + \overline{F_1^-(R_1^2/\overline{\tau})}\right), \quad |\tau| = R_1,$$

$$(1+\Delta_2)(W_{03}^+(\tau) + W_{03}^-(\tau)) = W_{02}^-(\tau) + W_{02}^+(\tau) + \\ + F_2^-(\tau) + \Delta_2\left(\overline{W_{02}^-(R_2^2/\overline{\tau})} + \overline{W_{02}^+(R_2^2/\overline{\tau})} + \overline{F_2^-(R_2^2/\overline{\tau})}\right), \qquad |\tau| = R_2.$$

Введем функции

$$\Phi(\zeta) = \begin{cases} (1+\Delta_1)(W_{02}^-(\zeta) + F_2^-(\zeta)) - \mathrm{V}_{01}^-(\zeta) - \Delta_1\overline{F_1^-(R_1^2/\overline{\zeta})}, & |\zeta| > R_1; \\ F_1^-(\zeta) - (1+\Delta_1)W_{02}^+(\zeta) + \Delta_1\overline{\mathrm{V}_{01}^-(R_1^2/\overline{\zeta})}, & |\zeta| < R_1, \end{cases} \tag{37}$$

$$\Psi(\zeta) = \begin{cases} (1+\Delta_2)W_{03}^-(\zeta) - W_{02}^-(\zeta) - \Delta_2\overline{(F_2^-(R_2^2/\overline{\zeta}) + W_{02}^-(R_2^2/\overline{\zeta}))}, & |\zeta| > R_2; \\ F_2^-(\zeta) - (1+\Delta_2)W_{03}^+(\zeta) + W_{02}^+(\zeta) + \Delta_2\overline{W_{02}^-(R_2^2/\overline{\zeta})}, & |\zeta| < R_2. \end{cases} \tag{38}$$

Нетрудно видеть, что функция $\Phi(\zeta)$ голоморфна всюду в расширенной плоскости за исключением точки τ_0, где у нее имеется полюс порядка $n+1$. Согласно обобщенной теореме Лиувилля получим

$$\Phi(\zeta) = C + P_{n+1}(1/(\zeta - \tau_0)), \tag{39}$$

где C — постоянная, $P_{n+1}(\zeta)$ — полином степени $n+1$. Этот полином надо выбрать так, чтобы искомые функции V_{01}^-, W_{02}^- были голоморфны в точке τ_0. Последнему условию можно удовлетворить, только если одновременно выполняются тождества

$$P_{n+1}(1/(\zeta - \tau_0)) \equiv -\Delta_1\overline{F_1^-(R_1^2/\overline{\zeta})} + (1+\Delta_1)F_2^-(\zeta) \equiv F_1^-(\zeta) + C_1. \tag{40}$$

Устремляя значение ζ к бесконечности, получим $C_1 = -\Delta_1\overline{F_1^-(0)}$.

Функция $\Psi(\zeta)$ голоморфна всюду в $\mathbb{C}$, поэтому

$$\Psi(\zeta) \equiv D. \tag{41}$$

Учитывая (34), получим

$$\overline{F_1^-(R_1^2/\overline{\zeta})} = \sum_{k=0}^{n}\overline{a_{1k}^-}\left(\frac{-\zeta}{\zeta-\tau_0}\right)^{k+1} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\overline{a_{1k}^-}\sum_{i=0}^{k+1}\frac{\tau_0^i\binom{k+1}{i}}{(\zeta-\tau_0)^i} = \\ = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\overline{a_{1k}^-} + \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\tau_0}{\zeta-\tau_0}\right)^{k+1}\sum_{j=k}^{n}(-1)^{j+1}\overline{a_{1j}^-}\binom{j+1}{k+1}.$$

Теперь уравнение (40) примет вид

$$-\Delta_1\left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\overline{a_{1k}^-} + \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\tau_0}{\zeta-\tau_0}\right)^{k+1}\sum_{j=k}^{n}(-1)^{j+1}\overline{a_{1j}^-}\binom{j+1}{k+1}\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \overline{a_{1k}^{-}} \left(\frac{\tau_0}{\zeta - \tau_0}\right)^{k+1} - (1+\Delta_1) \sum_{k=0}^{n} \overline{a_{2k}^{-}} \left(\frac{\tau_0}{\zeta - \tau_0}\right)^{k+1} + C_1.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $(\zeta - \tau_0)$, получим систему

$$\begin{aligned} &-\Delta_1(-1)^{n+1}\overline{a_{1n}^{-}} = a_{1n}^{-} - (1+\Delta_1)a_{2n}^{-}, \\ &c_k\overline{a_{1k-1}^{-}} = a_{1j-1}^{-} - (1+\Delta_1)a_{2j-1}^{-}, \quad k = \overline{1, n-1}, \end{aligned} \tag{42}$$

где

$$c_k = \Delta_1 \sum_{j=k+1}^{n} \overline{a_{1j}^{-}}(-1)^j \binom{j+1}{k+1}, \quad k = \overline{0, n-1}, \quad c_n = 0. \tag{43}$$

Система (42) совместно с условием (35) имеет единственное решение

$$a_{1k}^{-} = \begin{cases} a_{0k}^{-} + \Delta_1 \Re a_{0k}^{-} + \dfrac{c_k + \Delta_1 \Re c_k}{2(1+\Delta_1)}, & k = 2m; \\ a_{0k}^{-} + \mathrm{i}\Delta_1 \Im a_{0k}^{-} + \dfrac{c_k + \mathrm{i}\Delta_1 \Im c_k}{2(1+\Delta_1)}, & k = 2m+1, \end{cases} \tag{44}$$

$$a_{2k}^{-} = \begin{cases} a_{0k}^{-} - \Delta_1 \Re a_{0k}^{-} - \dfrac{c_k + \Delta_1 \Re c_k}{2(1+\Delta_1)}, & k = 2m; \\ a_{0k}^{-} - \mathrm{i}\Delta_1 \Im a_{0k}^{-} - \dfrac{c_k + \mathrm{i}\Delta_1 \Im c_k}{2(1+\Delta_1)}, & k = 2m+1. \end{cases} \tag{45}$$

Из (43)–(45) определяются сначала a_{1n}^{-}, a_{2n}^{-}, затем $a_{1\,n-1}^{-}$, $a_{2\,n-1}^{-}$ и далее до a_{10}^{-}, a_{20}^{-}. Возвращаясь к (37), (38) и учитывая (39)–(41), получим

$$\begin{aligned} &(1+\Delta_1)W_{02}^{-}(\zeta) - \mathrm{V}_{01}^{-}(\zeta) - C_1 = C, \quad |\zeta| > R_1, \\ &-(1+\Delta_1)W_{02}^{+}(\zeta) + \Delta_1\overline{\mathrm{V}_{01}^{-}(R_1^2/\overline{\zeta})} = C, \quad |\zeta| < R_1, \\ &(1+\Delta_2)W_{03}^{-}(\zeta) - W_{02}^{-}(\zeta) - \Delta_2(\overline{F_2^{-}(R_2^2/\overline{\zeta}) + W_{02}^{+}(R_2^2/\overline{\zeta})}) = D, \quad |\zeta| > R_2, \\ &F_2^{-}(\zeta) - (1+\Delta_2)W_{03}^{+}(\zeta) + W_{02}^{+}(\zeta) + \Delta_2\overline{W_{02}^{-}(R_2^2/\overline{\zeta})} = D, \quad |\zeta| < R_2. \end{aligned} \tag{46}$$

Коэффициенты C и D вычисляются так же, как и в случае отсутствия особенности на границе, т. е. устремляя в первом и третьем уравнении ζ к бесконечности, а во втором и четвертом к нулю

$$C = \frac{F_2^{-}(0) - \Delta_1\overline{F_2^{-}(0)}}{1-\Delta_1} - \frac{\Delta_1(\overline{C_1} - \Delta_1 C_1)}{1-\Delta_1^2}, \quad D = 0.$$

Далее второе и четвертое уравнения в (46) перепишем в виде

$$\begin{aligned} &-(1+\Delta_1)\overline{W_{02}^{+}(R_1^2/\overline{\zeta})} + \Delta_1\mathrm{V}_{01}^{-}(\zeta) - \overline{C_1} = \overline{C}, \quad |\zeta| > R_1, \\ &F_2^{-}(1/\zeta) + (1+\Delta_2)W_{03}^{-}(\zeta) + W_{02}^{+}(1/\zeta) + \Delta_2\overline{W_{02}^{-}(R_2^2\overline{\zeta})} = D, \quad |\zeta| > 1/R_2. \end{aligned}$$

Исключая из (46) функции $\mathrm{V}_{01}^{-}(\zeta)$ и $W_{03}^{-}(\zeta)$, придем к системе уравнений

$$\begin{aligned} &\Delta_1(1+\Delta_1)W_{02}^{-}(\zeta) - (1+\Delta_1)\overline{W_{02}^{+}(R_1^2/\overline{\zeta})} = \overline{C_1} + \overline{C} + \Delta_1 C, && |\zeta| > R_1, \\ &F_2^{-}(1/\zeta) + W_{02}^{-}(\zeta) + W_{02}^{+}(1/\zeta) + \Delta_2(\overline{F_2^{-}(R_2^2/\overline{\zeta}) + W_{02}^{+}(R_2^2/\overline{\zeta}) + W_{02}^{-}(R_2^2\overline{\zeta})}) = 0, && |\zeta| > R_2. \end{aligned}$$

Выражаем из первого уравнения

$$W_{02}^{+}(\zeta) = -\frac{C + C_1 + \Delta_1\overline{C}}{1+\Delta_1} + \Delta_1\overline{W_{02}^{-}(R_1^2/\overline{\zeta})}, \quad |\zeta| < R_1, \tag{47}$$

и подставляем во второе

$$W_{02}^{-}(\zeta) = -F_2^{-}(1/\zeta) - \left[-\frac{C + C_1 + \Delta_1\overline{C}}{1+\Delta_1} + \overline{W_{02}^{-}(R_1^2\overline{\zeta})}\right] - \\ - \Delta_2(\overline{F_2^{-}(R_2^2/\overline{\zeta}) + W_{02}^{-}(R_2^2\overline{\zeta})}) - \Delta_2\left[-\frac{\overline{C}+\overline{C_1}+\Delta_1 C}{1+\Delta_1} + W_{02}^{-}\left(\frac{R_1^2}{R_2^2}\zeta\right)\right]$$

или

$$W_{02}^{-}(\zeta) + \Delta_1\overline{W_{02}^{-}(R_1^2\overline{\zeta})} + \Delta_2\overline{W_{02}^{-}(R_1^2\overline{\zeta})} + \Delta_1\Delta_2 W_{02}^{-}\left(\frac{R_1^2}{R_2^2}\zeta\right) = G(\zeta), \quad |\zeta| > R_2,$$

где

$$G(\zeta) = -F_2^{-}(1/\zeta) - \Delta_2\overline{F_2^{-}(R_2^2/\overline{\zeta})} + \frac{C + C_1 + \Delta_1\overline{C}}{1+\Delta_1} + \Delta_2\frac{\overline{C}+\overline{C_1}+\Delta_1 C}{1+\Delta_1}. \tag{48}$$

С помощью разложения (24) снова получим уравнения для a_k

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\zeta^{-k} + \Delta_1\sum_{k=0}^{\infty}\overline{a_k}R_1^{-2k}\zeta^{-k} + \Delta_2\sum_{k=0}^{\infty}\overline{a_k}R_2^{-2k}\zeta^{-k} + \Delta_1\Delta_2\sum_{k=0}^{\infty}a_k R_1^{-2k}R_2^{2k}\zeta^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} g_k\zeta^{-k},$$

решения которых выписаны в (25), (26).

Таким образом, найдена $W_{02}^{-}(\zeta)$. Из (47) получаем $W_{02}^{+}(\zeta)$. Из первого и четвертого уравнения системы (46) выражаем

$$\mathrm{V}_{01}^{-}(\zeta) = (1+\Delta_1)W_{02}^{-}(\zeta) - C_1 - C, \tag{49}$$

$$W_{03}^{+}(\zeta) = \frac{F_2^{-}(\zeta) + W_{02}^{+}(\zeta) + \Delta_2\overline{W_{02}^{-}(R_2^2/\overline{\zeta})} - D}{1+\Delta_2}. \tag{50}$$

Итоговый результат записывается в виде

$$\begin{aligned} v_1(z) &= [\mathrm{V}_{01}^{-}(\zeta(z)) + F_1^{-}(\zeta(z))]/\sqrt{z^2-c^2}, \\ v_2(z) &= [W_{02}^{-}(\zeta(z)) + W_{02}^{+}(\zeta(z)) + F_2^{-}(\zeta(z))]/\sqrt{z^2-c^2}, \\ v_3(z) &= [W_{03}^{+}(\zeta(z)) - W_{03}^{+}(1/\zeta(z))]/\sqrt{z^2-c^2}, \end{aligned} \tag{51}$$

где $\zeta(z) = (z + \sqrt{z^2-c^2})/c$.

Теорема 2. *Если заданный возмущенный комплексный потенциал $f_0(z)$ имеет единственную особенность в точке t_0 на границе $\mathcal{L}_1$ софокусного эллиптического кольца и $f_0'(z)$ является рациональной функцией* (30), *то задача нахождения кусочно-мероморфной функции с главной частью $f_0'(z)$, удовлетворяющей краевым условиям* (1), *разрешима, и ее решение вычисляется по формулам* (51), (49), (50), (47), (24), (48), (25), (26). *Функции $F_{1,2}^{-}(\zeta)$ определяются в* (34), *коэффициенты которых a_{1k}^{-}, a_{2k}^{-} выражаются из* (43)–(45).

Замечание 3. Случай, когда особенность функции (30) находится на $\mathcal{L}_2$, рассматривается аналогично. Функция $G(\zeta)$ будет иметь вид

$$G(\zeta) = D_1 - (1+\Delta_2)F_3^{-}(1/\zeta) + \frac{C+\Delta_1\overline{C}}{1+\Delta_1} - \Delta_1\overline{F_2^{-}(R_1^2\overline{\zeta})} + \Delta_2\frac{\overline{C}+\Delta_1 C}{1+\Delta_1} - \Delta_1\Delta_2 F_2^{-}\left(\frac{R_1^2}{R_2^2}\zeta\right), \tag{52}$$

где

$$F_j^{-}(\zeta) = \sum_{k=0}^{n} a_{jk}^{-}\left(\frac{\tau_0}{\zeta-\tau_0}\right)^{k+1}, \qquad j = 2,3, \tag{53}$$

при разложении

$$F_j(\zeta) = \sum_{k=0}^{n} a_{jk}^{-} \left(\frac{\tau_0}{\zeta - \tau_0}\right)^{k+1} - \sum_{k=0}^{n} a_{jk}^{-} \left(\frac{\zeta}{1/\tau_0 - \zeta}\right)^{k+1} = F_j^{-}(\zeta) - F_j^{-}(1/\zeta), \ j = 2, 3. \tag{54}$$

Коэффициенты a_{2k}^{-} и a_{3k}^{-} выражаются, как и коэффициенты a_{1k}^{-}, a_{2k}^{-} в случае особенности на первой границе,

$$a_{2k}^{-} = \begin{cases} a_{0k} + \Delta_2 \Re a_{0k}^{-} + \dfrac{c_k + \Delta_2 \Re c_k}{2(1+\Delta_2)}, & k = 2m; \\ a_{0k}^{-} + \mathrm{i}\Delta_2 \Im a_{0k}^{-} + \dfrac{c_k + \mathrm{i}\Delta_2 \Im c_k}{2(1+\Delta_2)}, & k = 2m+1, \end{cases} \tag{55}$$

$$a_{3k}^{-} = \begin{cases} a_{0k}^{-} - \Delta_2 \Re a_{0k}^{-} - \dfrac{c_k + \Delta_2 \Re c_k}{2(1+\Delta_2)}, & k = 2m; \\ a_{0k}^{-} - \mathrm{i}\Delta_2 \Im a_{0k}^{-} - \dfrac{c_k + \mathrm{i}\Delta_2 \Im c_k}{2(1+\Delta_2)}, & k = 2m+1, \end{cases} \tag{56}$$

$$c_k = \Delta_2 \sum_{j=k+1}^{n} \overline{a_{2j}^{-}} (-1)^j \binom{j+1}{k+1}, \quad k = \overline{0, n-1}, \quad c_n = 0. \tag{57}$$

Отсюда вычисляются сначала a_{2n}^{-}, a_{3n}^{-}, затем $a_{2\,n-1}^{-}$, $a_{3\,n-1}^{-}$ и так далее до a_{20}^{-}, a_{30}^{-}.

Искомые функции выражаются по следующим формулам:

$$W_{02}^{+}(\zeta) = W_{02}^{+}(0) + \Delta_1 (\overline{F_2^{-}(R_1^2/\overline{\zeta}) + W_{02}^{-}(R_1^2/\overline{\zeta})}),$$

$$\mathrm{V}_{01}^{-}(\zeta) = (1+\Delta_1)(W_{02}^{-}(\zeta) + F_2^{-}(\zeta)) - \Delta_1 \overline{F_1^{-}(R_1^2/\overline{\zeta})} + \frac{W_{02}^{+}(0) - \Delta_1 \overline{W_{02}^{+}(0)}}{1-\Delta_1}, \tag{58}$$

$$W_{03}^{+}(\zeta) = \frac{W_{02}^{+}(\zeta) + \Delta_2 \overline{W_{02}^{-}(R_2^2/\overline{\zeta})} - W_{02}^{+}(0)}{1+\Delta_2},$$

где

$$W_{02}^{+}(0) = \frac{\Delta_2^2 F_2^{-}(0) - \Delta_2 \overline{F_2^{-}(0)}}{1-\Delta_2^2} - \frac{F_3^{-}(0) - \Delta_2 \overline{F_3^{-}(0)}}{1-\Delta_2}.$$

Теорема 3. *Если заданный возмущенный комплексный потенциал $f_0(z)$ имеет единственную особенность в точке t_0 на границе $\mathcal{L}_2$ софокусного эллиптического кольца и $f_0'(z)$ является рациональной функцией (30), то задача нахождения кусочно-мероморфной функции с главной частью $f_0'(z)$, удовлетворяющей краевым условиям (1), разрешима, и ее решение записывается по формуле*

$$v_1(z) = \mathrm{V}_{01}^{-}(\zeta(z))/\sqrt{z^2 - c^2},$$
$$v_2(z) = [W_{02}^{-}(\zeta(z)) + W_{02}^{+}(\zeta(z)) + F_2^{-}(\zeta(z))]/\sqrt{z^2 - c^2},$$
$$v_3(z) = [W_{03}^{+}(\zeta(z)) - W_{03}^{+}(1/\zeta(z)) + F_3(\zeta(z))]/\sqrt{z^2 - c^2},$$

где $\zeta(z) = (z + \sqrt{z^2 - c^2})/c$, $W_{02}^{+}(\zeta)$, $\mathrm{V}_{01}^{-}(\zeta)$, $W_{03}^{+}(\zeta)$ вычисляются в (58), (24), (52), (25), (26). Функции $F_{2,3}^{-}(\zeta)$ определяются в (53), (54), коэффициенты которых a_{2k}^{-}, a_{3k}^{-} выражаются из (55)–(57).

Литература

[1] Милн-Томсон Л.М. *Теоретическая гидродинамика* (Мир, М., 1968).

[2] Голубева О.В., Шпилевой А.Я. *О плоской фильтрации в средах с прерывно изменяющейся проницаемостью вдоль кривых второго порядка*, Изв. АН СССР. МЖГ, №2, 174–179 (1967).

[3] Obdam A.N.V., Veiling E.J.M. *Elliptical inhomogeneities in groundwater flow — an analytical description*, J. Hydrology, **95**, 87–96 (1987).

[4] Obnosov Yu.V., Fadeev A.V. *A generalized Milne-Thomson theorem for the case of an elliptical inclusion*, Euro. J. Appl. Math. **23** (4), 469–484 (2012), Cambridge University Press, doi:10.1017/S0956792512000058.

[5] Obnosov Yu.V. *A generalized Milne-Thomson theorem*, Appl. Math. Lett. **19**, 581–586 (2006).

[6] Obnosov Yu.V. *A generalized Milne-Thomson theorem for the case of parabolic inclusion*, Appl. Math. Modell. **33**, 1970–1981 (2009).

[7] Обносов Ю.В. *Краевые задачи теории гетерогенных сред. Многофазные среды, разделенные кривыми второго порядка* (Изд-во Казан. ун-та, 2009).

[8] Емец Ю.П. *Краевые задачи электродинамики анизотропно проводящих сред* (Наук. думка, Киев, 1987).

А.В. Фадеев

аспирант, кафедра дифференциальных уравнений,
Институт математики и механики,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,

`e-mail:` aleksey.fadeev@kpfu.ru

A.V. Fadeev

Solution of a problem of $\mathbb{R}$-linear conjugation for confocal elliptical annulus in the class of piecewise-meromorphic functions

Abstract. We consider the problem of disturbance of a complex potential after insertion of a foreign inclusion in the form of two-phase confocal elliptical annulus into a homogeneous medium. We investigate the cases of an arbitrary distribution of singularities.

Keywords: $\mathbb{R}$-linear conjugation problem, heterogeneous medium, analytic functions, confocal elliptical annulus, Zhukovskii function.

A.V. Fadeev

Postgraduate, Chair of Differential Equations,
Institute of Mathematics and Mechanics,
Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

`e-mail:` aleksey.fadeev@kpfu.ru