АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ,РАЗРЕШИМЫЕ В РАДИКАЛАХ, НЕКОТОРЫЕ ТОЖДЕСТВА И МНОГОЧЛЕНЫ ЧЕБЫШЕВА

1. Witula R., Slota D. Cardano's formula, square roots, Chebyshev polynomials and radicals, Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol363, Issue 2, 2010 , 639-647.
2. D.Y. Savio, E.R. Suryanarayan Chebyshev polynomials and regular polygons Amer. Math. Monthly (1993), pp. 657-661.

$$(1) \quad (a+b)^3 - 3ab(a+b) - a^3 - b^3 = 0.$$

$$(2) \quad x^3 - 3px + q = 0$$

Если в качестве a, b взять числа, удовлетворяющие системе уравнений

$$ab = p$$

$$a^3 + b^3 = q,$$

то из тождества (1) следует, что решения уравнения (2) имеют вид

$$x = \varepsilon_3^i a + \varepsilon_3^{2i} b (i = 1, 2, 3).$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2}(q + \sqrt{q^2 - 4p^3})} + \sqrt[3]{\frac{1}{2}(q - \sqrt{q^2 - 4p^3})}$$

$$(1)\quad (a+b)^3-3ab(a+b)-a^3-b^3=0.$$

Тождество (1) имеет следующие расширения на более высокие степени:

$$(2)\quad (a+b)^4-4ab(a+b)^2+2a^2b^2-a^4-b^4=0$$

$$(3)\quad (a+b)^5-5ab(a+b)^3+5a^2b^2(a+b)-a^5-b^5=0.$$

Последнее тождество можно использовать для решения так называемого уравнения де Муавра:

$$(4)\quad x^5-5px^2+5p^2x-q=0.$$

Если в качестве a, b взять числа, удовлетворяющие системе уравнений

$$ab=p$$

$$a^5+b^5=q,$$

то из тождеста (3) следует, что решения уравнения (4) имеют вид

$$x=\varepsilon_5^i a+\varepsilon_5^{4i} b (i=1,2,3,4,5).$$

Решение уравнения (4) можно записать также в виде

$$x=\sqrt[5]{\frac{1}{2}(q+\sqrt{q^2-4p^5})}+\sqrt[5]{\frac{1}{2}(q-\sqrt{q^2-4p^5})}$$

Формулы Куммера:

$$a^n + b^n = \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^i \frac{n}{n-i} C_{n-i}^i (a+b)^{n-2i} (ab)^i$$

Эта формула тесно связана с многочленами Чебышева. Хорошо известно, что

$$\cos(\alpha n) = T_n(\cos(\alpha)),$$

где

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} C_n^{2i} x^{n-2i} (x^2-1)^i.$$

Многочлен $T_n(x)$ называется многочленом Чебышева первого рода. Можно показать, что

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^i n}{(n-i)} C_{n-i}^i (2x)^{n-2i}.$$

Многочлен

$$\Omega_n(x) = \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^i \frac{n}{n-i} C_{n-i}^i x^{n-2i},$$

называется модифицированным многочленом Чебышева первого рода и для него выполнено равенство

$$\Omega_n(x) = 2T_n(\frac{x}{2}).$$

Следующая теорема дает обобщения формул решений для кубического уранения и уравнения де Муавра.

Теорема. Если $p, q \in \mathbb{C}$, то корнями уравнения

$$\sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^i \frac{n}{n-i} C_{n-i}^i p^i x^{n-2i} - q = 0$$

являются числа

$$x = \varepsilon_n^i a + \varepsilon_n^{(n-1)i} b (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где

$$a \in \sqrt[n]{\frac{1}{2}(q + \sqrt{q^2 - 4p^n})}, b \in \sqrt[n]{\frac{1}{2}(q - \sqrt{q^2 - 4p^n})}$$

и

$$ab = p.$$

Если в предыдущей теореме положить $p = 1, q = 2\cos(2\pi\alpha)$, то корнями многочлена

$$\Omega_n(x) - 2\cos(2\pi\alpha) = \sum_{i=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^i \frac{n}{n-i} C_{n-i}^i x^{n-2i} - 2\cos(2\pi\alpha)$$

являются числа

$$x_k = \varepsilon_n^k (\cos(\frac{2\pi\alpha}{n}) + i\sin(\frac{2\pi\alpha}{n})) + \varepsilon_n^{(n-1)k} (\cos(\frac{2\pi\alpha}{n}) - i\sin(\frac{2\pi\alpha}{n})) =$$

$$2\cos(\frac{2\pi(\alpha+k)}{n})(k = 1, 2, \ldots, n),$$

Тогда

$$\Omega_n(x) - 2\cos(2\pi\alpha) = \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k) = \prod_{k=0}^{n-1} (x - 2\cos(\frac{2\pi(\alpha+k)}{n})).$$

При $x = 2$ имеем

$$\sin^2(\pi\alpha) = 2^{n-2}\prod_{k=0}^{n-1}(1-\cos(\frac{2\pi(\alpha+k)}{n})) = (2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\sin(\frac{\pi(\alpha+k)}{n}))^2$$

$$\sin(\pi\alpha) = 2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\sin(\frac{\pi(\alpha+k)}{n})$$

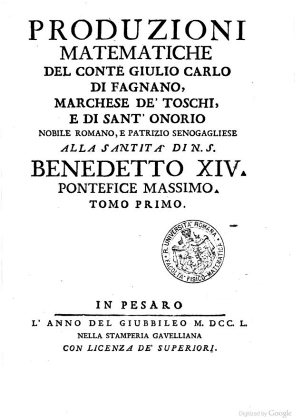
$$\operatorname{ctg}(\pi\alpha) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\operatorname{ctg}(\frac{\pi(\alpha+k)}{n})$$

С помощью последнего соотношения можно доказать следующие формулы:

$$\sum_{k-1}^{\infty}\frac{1}{k^2-a^2} = \frac{1}{2a^2} - \frac{\pi\operatorname{ctg}(\pi a)}{2a}(a\in(0,1))$$

$$\sum_{k-1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

В 1750 году Фаньяно выпустил трактат в двух томах "Математические произведения в котором собрал многие из своих опубликованных работ и несколько неопубликованных. Во втором томе трактата "Математические произведения"опубликован мемуар, в котором Фаньяно предложил единообразный способ решений алгебраических уравнений вплоть до четвертой степени. Этот способ основывался на рассмотрении тождеств, возникающих при разложении выражений вида $(a+b+c)^2, (a+b+c)^3$ и $(a+b+c)^4$.


PRODUZIONI
MATEMATICHE
DEL CONTE GIULIO CARLO
DI FAGNANO,
MARCHESE DE' TOSCHI,
E DI SANT' ONORIO
NOBILE ROMANO, E PATRIZIO SENOGAGLIESE
ALLA SANTITA' DI N. S.
BENEDETTO XIV.
PONTEFICE MASSIMO.
TOMO PRIMO.

R. UNIVERSITA' ROMANA
FACOLTA' FISICO-MATEMATICA

IN PESARO
L' ANNO DEL GIUBBILEO M. DCC. L.
NELLA STAMPERIA GAVELLIANA
CON LICENZA DE' SUPERIORI.

Digitized by Google

Для нахождения формулы корней уравнения

$$x^3 + px^2 + qx + r = 0$$

Фаньяно использовал формулу

$$(a+b+c)^3 = 3c(a+b+c)^2 + (3ab - 3c^2)(a+b+c) + a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

Для нахождения формулы корней уравнения

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

Фаньяно предложил использовать формулу

$$(a+b+c)^4 = (2c^2+4ab)(a+b+c)^2+(4a^2c+4b^2c)(a+b+c)+a^4+b^4-c^4-2a^2b^2+4abc^2$$

XLVII.

SOLUZIONE DI QUATTRO PROBLEMI ANALITICI

DA' QUALI SI DEDUCE CON METODO UNIFORME

LA RESOLUZIONE DELL'EQUAZIONI DEL SECONDO, DEL TERZO, E DEL QUARTO GRADO.

Problema. — Nel quadrato di $a+b+c$ discernere ciò, che moltiplica $a+b+c$, e ciò che può chiamarsi l'omogeneo di comparazione.

Soluzione. — $(a+b+c)^2$ è uguale a quest'espressione: $(a+b)^2+2c(a+b)+c^2$, ed anche a questa $(a+b)^2+2c(a+b+c)-c^2$, vale a dire si à

$$(a+b+c)^2=2c(a+b+c)+a^2+b^2+2ab-c^2 \tag{1}$$

e finalmente

$$(a+b+c)^2=(a+2c)(a+b+c)+b^2+ab-c^2-ac \tag{2}$$

perchè $a^2+b^2+2ab=a(a+b+c)+ab-ac$.

Il che dovea ritrovarsi.

Corollario I. — L'equazione (1) moltiplicata per $4c(a+b+c)$ dà $4c(a+b+c)^3=8c^2(a+b+c)^2+(4a^2c+4b^2c+8abc-4c^3)(a+b+c)$ e aggiungendo di qua e di là $(4ab-6c^2)(a+b+c)^2+(4c^3-8abc)(a+b+c)$ ne proviene quest'equazione

$$\begin{aligned}(3)\qquad 4c(a+b+c)^3+(4ab-6c^2)(a+b+c)^2+(4c^3-8abc)(a+b+c)=\\=(2c^2+4ab)(a+b+c)^2+(4a^2c+4b^2c)(a+b+c).\end{aligned}$$

secondo di quest'equazione doppia, adunque surrogando nell'espressione (5) il secondo valore di $(3ab-3c^2)(a+b+c)$, si conseguisce

$$3c(a+b+c)^2+(3ab-3c^2)(a+b+c)+a^3+b^3+c^3-3abc$$

e conseguentemente abbiamo

$$(a+b+c)^3=3c(a+b+c)^2+(3ab-3c^2)(a+b+c)+a^3+b^3+c^3-3abc. \tag{6}$$

Il che dovea ritrovarsi.

Corollario. — Teorema. — Le lettere h ed m dinotino qualunque numero intiero, positivo o negativo; ed m possa denotare anche zero.

Le lettere c, A, B e G esprimano grandezze razionali; e c possa esprimere anche zero.

Sia $f=\sqrt[3]{G}$; $a=Af^h$, e $b=Bf^{3m-h}$.

Io dico, che nel secondo membro dell'equazione (6) il coefficiente di $a+b+c$, ed anche ciò, che può chiamarsi l'omogeneo di comparazione, saranno grandezze razionali.

Dimostrazione. — In primo luogo $3ab-3c^2$ coefficiente di $a+b+c$ sarà eguale a $3ABf^{3m}-3c^2$.

In secondo luogo $a^3+b^3+c^3-3abc$, che può chiamarsi l'omogeneo di comparazione, sarà eguale ad $A^3f^{3h}+B^3f^{3(3m-h)}+c^3-3ABf^{3m}$. Adunque è dimostrato il teorema.

Esempj. — I. Se $h=1$, ed $m=0$, sarà $a=Af$ e $b=\dfrac{B}{f}$.

II. Se $h=1$, ed $m=1$, sarà $a=Af$, e $b=Bf^2$.

Problema III. — Nel quadrato-quadrato di $a+b+c$ discernere ciò, che moltiplica $(a+b+c)^3$, ciò, che moltiplica $(a+b+c)^2$, ciò, che moltiplica $(a+b+c)$, e ciò, che può chiamarsi l'omogeneo di comparazione.

Soluzione. — $(a+b+c)^4$ è uguale a questa espressione

$$(a+b)^4+4c(a+b)^3+6c^2(a+b)^2+4c^3(a+b)+c^4$$

che equivale a questa

$$(a+b)^4+4c(a+b)^3+(12c^2-6c^2)(a+b)^2+(12c^3-8c^3)(a+b)+4c^4-3c^4$$

$$(1) \qquad x^4 - 4px^3 + 2qx^2 - 4rx + s = 0$$

$(a+b+c+d)^4 - 4d(a+b+c+d)^3 + 2(-a^2 - b^2 - c^2 + 3d^2)(a+b+c+d)^2 + (-4d^3 + (4(a^2+b^2+c^2))d - 8abc)(a+b+c+d) + d^4 - (2(a^2+b^2+c^2))d^2 + 8abcd + (a^2+b^2+c^2)^2 - 4a^2b^2 - 4a^2c^2 - 4b^2c^2 = 0$

Из предущего тождества следут, что если в качестве a, b, c, d взять числа, удовлетовряющие системе уравнений

$$-4d = -4p$$

$$-2a^2 - 2b^2 - 2c^2 + 6d^2 = 2q$$

$$-4d^3 + (4(a^2+b^2+c^2))d - 8abc = -4r$$

$$d^4 - (2(a^2+b^2+c^2))d^2 + 8abcd + (a^2+b^2+c^2)^2 - 4a^2b^2 - 4a^2c^2 - 4b^2c^2 = s$$

или, что равносильно, системе

$$d = p$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 3p^2 - q$$

$$abc = \frac{-qp + r + 2p^3}{2}$$

$$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = 3p^4 - 2p^2q + pr + \frac{q^2 - s}{4}$$

то $x = d + a + b + c$ является решением уравнения (1).

Таким образом, если в качестве a, b, c, d выбрать числа, для которых выполнено равенства $d = p, abc = \frac{qp+r-4p^3}{2}$ и a^2, b^2, c^2 – корни уравнения

$$y^3 + (q - 3p^2)y^2 + (3p^4 - 2p^2q + pr + \frac{q^2 - s}{4})y - (\frac{-qp + r + 2p^3}{2})^2 = 0,$$

то решения уравнения $x^4 - 4px^3 + 2qx^2 - 4rx + s = 0$ имеют вид

$$x_1 = d + a + b + c$$

$$x_2 = d + a - b - c$$

$$x_3 = d - a - b + c$$

$$x_4 = d - a + b - c$$

$$(1) \quad x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

$$(2) \quad (a+b+c)^4 - 2(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)^2 - 8abc(a+b+c) + (a^2+b^2+c^2)^2 -$$

$$4(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2) = 0$$

Если в качестве a, b, c выбрать числа, для которых выполнено равенство $abc = -\frac{q}{8}$ и a^2, b^2, c^2 – корни уравнения

$$y^3 + \frac{p}{2}y^2 + (\frac{p^2}{16} - \frac{r}{4})y + \frac{q}{8} = 0,$$

то решения уравнения $x^4 + px^2 + qx + r = 0$ имеют вид

$$x_1 = a + b + c$$

$$x_1 = a - b - c$$

$$x_1 = -a - b + c$$

$$x_1 = -a + b - c$$

В 1764 году Эйлер публикует мемуар "О решении уравнений любой степени в котором он изучает проблему разрешимости в радикалах общего алгебраического уравнения

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0,$$

предполагая, что корини уравнения имеют вид

$$x = \alpha_0 + \alpha_1 \sqrt[n]{\beta} + \alpha_2 \sqrt[n]{\beta^2} + \ldots + \alpha_{n-1} \sqrt[n]{\beta^{n-1}},$$

где β – корень уравнения степени меньше n.

Одной из главных задач, которую пытался решить Эйлер в мемуаре "О решении уравнений любой степени ", была связана с решением алгебраических уравнений 5-й степени в радикалах. Корни уравнения

$$x^5 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Эйлер искал в виде

$$x = \alpha_1 \sqrt[5]{\beta} + \alpha_2 \sqrt[5]{\beta^2} + \alpha_3 \sqrt[5]{\beta^3} + \alpha_4 \sqrt[5]{\beta^4}.$$

В общем случае Эйлер не смог добиться успехов, но он нашел некоторые интересные классы уравнений 5-ой степени разрешимых в радикалах. Эйлер рассмотрел следующие уравнения

$$(1) \qquad x^5 = 5px^3 - 5p^2x + q$$

$$(2) \qquad x^5 = 5px^2 + 5qx + \frac{q^2}{p} + \frac{p^3}{q}$$

DE RESOLVTIONE AEQVATIONVM CVIVSVIS GRADVS.

Auctore

L. EVLERO.

I.

Quae in Algebra adhuc de resolutione aequationum sunt tradita, ea, si ad regulas generales spectemus, tantum ad aequationes, quae quartum gradum non superant, patent, neque etiamnum regulae sunt inuentae, quarum ope aequationes quinti altiorisue cuiuspiam gradus resolui queant: ita vt vniuersa Algebra ad aequationes quatuor primorum ordinum restringatur. Hoc autem de regulis generalibus est tenendum, quae ad omnes aequationes eiusdem gradus sint accommodatae; nam in quouis gradu dantur infinitae aequationes, quae per diuisionem in duas pluresue aequationes graduum inferiorum resolui possunt, quarum idcirco radices iunctim sumtae praebent omnes radices illarum aequationum altiorum graduum. Tum vero a Cel. *Moiuraeo* obseruatae sunt in quouis gradu quaedam aequationes speciales, quae etsi per diuisionem in factores resolui nequeunt, tamen earum radices assignare liceat.

2. Ex cognita autem resolutione generali aequationum primi, secundi, tertii et quarti gradus, constat

qui casus cum per se sit manifestus, ab eo exordium capere visum est, vt pateat quomodo nostra methodus casus cognitos in se complectatur.

39. Euanescant iam duae litterarum $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{D}$, si enim tres euanescentes ponantur, quaecunque eae sumantur, semper ad casum praecedentem deducimur. Sint igitur $\mathfrak{C}$ et $\mathfrak{D}$ nihilo aequales, seu aequatio quaeratur, cuius radix sit futura $x = \mathfrak{A}\sqrt[5]{v} + \mathfrak{B}\sqrt[5]{v^2}$, atque obtinebimus:

$$A = 0;\; B = 5\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 v;\; C = 5\mathfrak{A}^3\mathfrak{B}v;\; D = \mathfrak{A}^5 v + \mathfrak{B}^5 v^2$$

vnde proposita radix conueniet huic aequationi:

$$x^5 = 5\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 v x^2 + 5\mathfrak{A}^3\mathfrak{B}vx + \mathfrak{A}^5 v + \mathfrak{B}^5 v^2$$

Quae aequatio si comparetur cum hac forma:

$$x^5 = 5Pxx + 5Qx + R$$

erit $\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 v = P$; $\mathfrak{A}^3\mathfrak{B}v = Q$, vnde deducitur $\mathfrak{A}^5 v = \frac{QQ}{P}$ et $\mathfrak{B}^5 v^2 = \frac{P^5}{Q}$, ita vt sit $R = \frac{QQ}{P} + \frac{P^5}{Q}$.

40. Hinc ergo deducimur ad resolutionem huius aequationis specialis quinti gradus:

$$x^5 - 5Pxx + 5Qx + \frac{QQ}{P} + \frac{P^5}{Q}$$

cuius ob $\mathfrak{A}\sqrt[5]{v} = \sqrt[5]{\frac{QQ}{P}}$ et $\mathfrak{B}\sqrt[5]{vv} = \sqrt[5]{\frac{P^5}{Q}}$ quinque radices erunt:

I. $x = \sqrt[5]{\frac{QQ}{P}} + \sqrt[5]{\frac{P^5}{Q}}$

II. $x = \mathfrak{a}\sqrt[5]{\frac{QQ}{P}} + \mathfrak{a}^2\sqrt[5]{\frac{P^5}{Q}}$

III. $x = \mathfrak{b}\sqrt[5]{\frac{QQ}{P}} + \mathfrak{b}^2\sqrt[5]{\frac{P^5}{Q}}$

IV. $x = \mathfrak{c}\sqrt[5]{\frac{QQ}{P}} + \mathfrak{c}^2\sqrt[5]{\frac{P^5}{Q}}$

V. $x = \mathfrak{d}\sqrt[5]{\frac{QQ}{P}} + \mathfrak{d}^2\sqrt[5]{\frac{P^5}{Q}}$.

Aequa-

ЭБ "Научное наследие России"

$$(1) \qquad x^5 = 5px^2 + 5qx + \frac{q^2}{p} + \frac{p^3}{q}$$

$$(2) \qquad (a+b)^5 - 5b^2a(a+b)^2 - 5ba^3(a+b) - (a^5+b^5) = 0.$$

$$(3) \qquad (a+b)^5 = 5b^2a(a+b)^2 + 5ba^3(a+b) + \frac{(ba^3)^2}{b^2a} + \frac{(b^2a)^3}{ba^3}$$

Из (1) и (3) следует, что если в качестве a, b взять числа, удовлетворяющие системе уравнений

$$b^2a = p$$
$$ba^3 = q,$$

то $x = a + b$ является решением уравнения (1). Таким образом, решения уравнения (1) имеют вид

$$x = \varepsilon_5^i a + \varepsilon_5^{2i} b (i = 1, 2, 3, 4, 5),$$

где $b^2a = p$.

Тождество

$$(a+b)^5 - 5b^2a(a+b)^2 - 5ba^3(a+b) - (a^5+b^5) = 0.$$

имеет следующие расширения на более высокие степени:

$$(a+b)^7 - 7b^3a(a+b)^3 - 14b^2a^3(a+b)^2 - 7ba^5(a+b) - a^7 - b^7 = 0$$

$$(a+b)^9 - 9b^4a(a+b)^4 - 27b^3a^3(a+b)^3 - 30b^2a^5(a+b)^2 - 9ba^7(a+b) - a^9 - b^9 = 0$$

Предыдущие тождества являются частным случаем следующей формулы:

$$(a+b)^{2n+1} - a^{2n+1} - b^{2n+1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{2n+1}{n+i} C_{n+i}^{n+1-i} (a+b)^i b^i a^{2(n-i)+1}$$

Как и в случае уравнения пятой степени можно показать с помощью тождества

$$(a+b)^7 - 7b^3a(a+b)^3 - 14b^2a^3(a+b)^2 - 7ba^5(a+b) - a^7 - b^7 = 0,$$

что решениями уравнения вида

$$x^7 - 7\frac{p^2}{q}x^3 - 14px^2 - 7qx - \frac{q^2}{p} - \frac{p^5}{q^3} = 0$$

являются числа

$$x = \varepsilon_7^k \sqrt[7]{\frac{q^2}{p}} + \varepsilon_7^{2k} \sqrt[7]{\frac{p^5}{q^3}} (k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7).$$

$p = q = 1$

$$x^7 - 7x^3 - 14x^2 - 7x - 2 = (x-2)(x^6 + 2x^5 + 4x^4 + 8x^3 + 9x^2 + 4x + 1) = 0$$

$$\varepsilon_7^i + \varepsilon_7^{2i} (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)$$

$$\frac{1}{4} = (1 + \cos(\frac{2\pi}{7}))(1 + \cos(\frac{4\pi}{7}))(1 + \cos(\frac{6\pi}{7}))$$

$$(1) \qquad (a+b)^{2n+1} - a^{2n+1} - b^{2n+1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{2n+1}{n+i} C_{n+i}^{n+1-i} (a+b)^i b^i a^{2(n-i)+1}$$

$$(2) \qquad x^{2n+1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{2n+1}{n+i} C_{n+i}^{n+1-i} x^i \frac{p^{i-1}}{q^{i-2}} + \frac{q^2}{p} + \frac{p^{2n-1}}{q^{2n-3}}$$

$$(3) \qquad x = \varepsilon_{2n+1}^{k} \sqrt[2n+1]{\frac{q^2}{p}} + \varepsilon_{2n+1}^{2k} \sqrt[2n+1]{\frac{p^{2n-1}}{q^{2n-3}}} (k = 1, 2, \ldots, 2n+1).$$

$$(1) \qquad \frac{q^2}{p} + \frac{p^{2n-1}}{q^{2n-3}} =$$

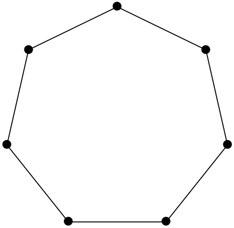
$$\prod_{i=1}^{n} \left(\sqrt[2n+1]{\frac{q^4}{p^2}} + \sqrt[2n+1]{\frac{p^{4n-2}}{q^{4n-6}}} + 2\sqrt[2n+1]{\frac{p^{2n-2}}{q^{2n-4}}} \cos\left(\frac{2\pi k}{2n+1}\right)\right)\left(\sqrt[2n+1]{\frac{q^2}{p}} + \sqrt[2n+1]{\frac{p^{2n-1}}{q^{2n-3}}}\right)$$

$$(2) \qquad p + p^2 = \prod_{i=1}^{n} \left(\sqrt[2n+1]{p^2} + \sqrt[2n+1]{p^4} + 2\sqrt[2n+1]{p^2} \cos\left(\frac{2\pi k}{2n+1}\right)\right)\left(\sqrt[2n+1]{p} + \sqrt[2n+1]{p^2}\right)$$

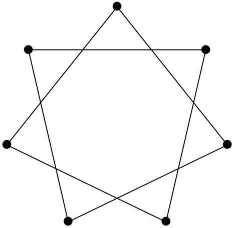
$$(3) \qquad \frac{1}{2^n} = \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right)\right)\left(1 + \cos\left(\frac{4\pi}{2n+1}\right)\right) \dots \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi n}{2n+1}\right)\right)$$

$$(4) \qquad \frac{1}{2^n} = \cos\left(\frac{\pi}{2n+1}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right) \dots \cos\left(\frac{\pi n}{2n+1}\right)$$

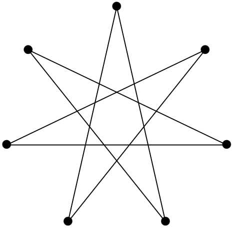
Многочлены Чебышева и правильные n-угольники.



$\left\{ \begin{matrix} 7 \\ 1 \end{matrix} \right\}$



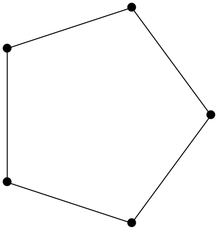
$\left\{ \begin{matrix} 7 \\ 2 \end{matrix} \right\}$



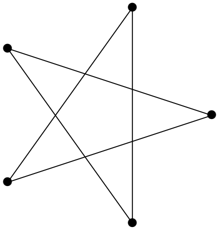
$\left\{ \begin{matrix} 7 \\ 3 \end{matrix} \right\}$

Кеплер заметил, что квадраты сторон правильных семиугольников $\{7\}$, $\left\{ \begin{matrix} 7 \\ 2 \end{matrix} \right\}$, $\left\{ \begin{matrix} 7 \\ 3 \end{matrix} \right\}$, вписанных в единичный круг, являются корнями неприводимого многочлена

$$x^3 - 7x^2 + 14x - 7$$



$\left\{ \begin{matrix} 5 \\ 1 \end{matrix} \right\}$



$\left\{ \begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix} \right\}$

Несложно заметить, что квадраты сторон правильных пятиугольников $\{5\}$, $\left\{ \begin{matrix} 5 \\ 2 \end{matrix} \right\}$, вписанных в единичный круг, являются корнями неприводимого многочлена.

$$x^2 - 5x + 5$$

Пусть

$$A_n(x) = \begin{pmatrix} 2x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2x & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2x \end{pmatrix}, B_n(x) = \begin{pmatrix} 2x & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2x & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2x & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2x+1 \end{pmatrix}$$

Тогда $T_n(x) = det(A_n(x)), T_n(x) + T_{n-1}(x) = det(B_n(x))$.

Теорема (D.Y. Savio, E.R. Suryanarayan, 1993).

1) Если $n \geq 3$ – нечетное натуральное число, то квадраты сторон правильных n-угольников $\left\{ \begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right\}, i = 1, 2, \ldots, [\frac{n}{2}]$, вписанных в единичный круг, являются корнями характеристического многочлена матрицы $A_{[\frac{n}{2}]}(1)$.
2) Если $n \geq 4$ – четное натуральное число, то квадраты сторон правильных n-угольников $\left\{ \begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right\}, i = 1, 2, \ldots, \frac{n}{2} - 1$, вписанных в единичный круг, являются корнями характеристического многочлена матрицы $A_{\frac{n}{2}-1}(1)$.

Теорема.

1) Если $n \geq 3$ – нечетное натуральное число, то квадраты сторон правильных n-угольников $\left\{ \begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right\}, i = 1, 2, \dots, [\frac{n}{2}]$, вписанных в единичный круг, являются корнями многочлена $f_n(x) \in \mathbf{Z}[x]$, для которого выполнено равенство $\Omega_n(x-2) + 2 = x f_n(x)^2$.

2) Если $n \geq 4$ – четное натуральное число, то квадраты сторон правильных n-угольников $\left\{ \begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right\}, i = 1, 2, \dots, \frac{n}{2} - 1$, вписанных в единичный круг, являются корнями многочлена $f_n(x) \in \mathbf{Z}[x]$, для которого выполнено равенство $\Omega_n(x-2) - 2 = x(x-4) f_n(x)^2$.

3)
$$f_n(x) = \prod_{d|n, d>2} g_d(x),$$
где $g_m(x) \in \mathbf{Z}[x]$ – многочлен, корнями которого являются в точности квадраты сторон связанных правильных m-угольников $\left\{ \begin{array}{c} n \\ i \end{array} \right\} (i \in \{1, 2, \dots, [\frac{m}{2}](\frac{m}{2} - 1)\}, (i, m) = 1)$, вписанных в единичный круг.

$$(1)\quad \begin{vmatrix} 2-x & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2-x & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2-x & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3-x \end{vmatrix} = x^4-9x^3+27x^2-30x+9 = (x-3)(x^3-6x^2+9x-3)$$

$$(2)\quad \Omega_9(x) = x^9 - 9x^7 + 27x^5 - 30x^3 + 9x$$

$$\Omega_9(x-2)+2 = x^9-18x^8+135x^7-546x^6+1287x^5-1782x^4+1386x^3-540x^2+81x =$$

$$x(x-3)^2(x^3-6x^2+9x-3)^2$$

$$x^4 - 9x^3 + 27x^2 - 30x + 9 = (\Omega_9(x-2)+2, V_8(x-2)).$$