Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2012, №2, с. 23–33 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421200123\0016*

С.В. ГАЙДОМАК

О КАНОНИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ ПУЧКА ВЫРОЖДЕННЫХ МАТРИЦ-ФУНКЦИЙ

Аннотация. Работа посвящена изучению глобальных свойств пучка тождественно вырожденных матриц-функций с компактной областью определения. Предполагается, что матрицы-функции имеют постоянный ранг, а все корни характеристического уравнения матричного пучка — постоянную кратность в каждой точке области определения. В работе получены достаточные условия гладкого ортогонального подобия матриц-функций верхнему (правому) треугольному виду и достаточные условия гладкой эквивалентности пучка матриц-функций его каноническому виду. Результаты работы иллюстрируются на простых примерах.

Ключевые слова: матрица-функция, пучок, каноническая структура, p-гладко подобные матрицы-функции, p-гладко эквивалентные матричные пучки.

УДК: 512.643

Abstract. In this paper we study global properties of pencil of identically degenerate matrix functions with a compact domain of definition. Matrix functions are assumed to have a constant rank and all roots of the characteristic equation of matrix pencil are assumed to have a constant multiplicity at each point in the domain of definition. We obtain sufficient conditions for the smooth orthogonal similarity of matrix functions to the upper triangular form and sufficient conditions for the smooth equivalence of the pencil of matrix functions to its canonical form. We illustrate the obtained results with simple examples.

Keywords: matrix function, pencil, canonical structure, p-smoothly similar matrix functions, p-smoothly equivalent matrix pencils.

При исследовании линейных дифференциально-алгебраических систем уравнений в частных производных

$$A(x)u_{x_1}(x) + B(x)\sum_{i=2}^{m} u_{x_i}(x) + C(x)u(x) = f(x)$$

с тождественно вырожденными в области определения $\mathcal{U}$ матричными коэффициентами $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, элементы которых являются дифференцируемыми до некоторого порядка p функциями, зависящими от переменной $x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \subseteq \mathbb{R}^m$, важным является вопрос о приведении пучка матриц-функций $A(x) + \lambda B(x)$, где $\lambda \equiv \lambda(x) \in C^p(\mathcal{U})$, к каноническому виду с помощью p раз дифференцируемого линейного преобразования (например, [1], с. 140). В работах [2]–[4] рассмотрены линейные системы, в которых пучок матриц-функций имеет структуру “ранг-степень”. Это наиболее простая структура пучка вырожденных матриц-функций с некратными в каждой точке области определения конечными и

Поступила 10.02.2011

бесконечными элементарными делителями пучка. Структура пучка матриц-функций "ранг-степень" впервые возникла при изучении алгебро-дифференциальных систем ([5], с. 52) и позднее была перенесена автором работы [5] на случай пучков матриц-функций, зависящих от нескольких переменных. В данной работе рассмотрена каноническая структура пучка тождественно вырожденных матриц-функций с конечными и бесконечными элементарными делителями, имеющими постоянную кратность, не меньшую единицы. Получены достаточные условия p-гладкой эквивалентности пучка матриц-функций этому каноническому виду.

Примем следующие обозначения. Пусть $A(x)$ и $B(x)$ — квадратные матрицы порядка n, элементы которых являются вещественнозначными p раз дифференцируемыми функциями m действительных переменных $x \in \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$, где $\mathcal{U}$ – замыкание некоторой области, содержащееся в $\mathbb{R}^m$. Для $A(x)$ и $B(x)$ используем термин "матрицы-функции", как в работах [6]–[8].

Понадобятся следующие определения.

Определение 1 ([6]–[8])**.** Две квадратные матрицы-функции $A(x)$ и $\widetilde{A}(x)$ порядка n с элементами из $C^p(\mathcal{U})$ называются p-гладко подобными, если существует квадратная матрица-функция $T(x)$ порядка n, обладающая свойствами:

1) элементы $T(x)$ принадлежат $C^p(\mathcal{U})$,
2) $\forall x \in \mathcal{U}$ существует $T^{-1}(x)$,
3) имеет место соотношение $A(x) = T^{-1}(x)\widetilde{A}(x)T(x) \quad \forall x \in \mathcal{U}$.

Если, к тому же, матрица-функция $T(x)$ из определения 1 ортогональная (унитарная для комплекснозначной матрицы $A(x)$) в каждой точке $\mathcal{U}$, то будем говорить, что матрицы-функции $A(x)$ и $\widetilde{A}(x)$ p-гладко ортогонально (унитарно) подобны в области $\mathcal{U}$.

Определение 2 ([6]–[8])**.** Два пучка квадратных матриц-функций $A(x) + \lambda B(x)$ и $\widetilde{A}(x) + \lambda\widetilde{B}(x)$ порядка n с элементами из $C^p(\mathcal{U})$ будем называть p-гладко эквивалентными, если существуют квадратные матрицы-функции $P(x)$ и $Q(x)$ порядка n, которые не зависят от λ и удовлетворяют условиям:

1) элементы $P(x)$ и $Q(x)$ принадлежат $C^p(\mathcal{U})$,
2) $\forall x \in \mathcal{U}$ существуют $P^{-1}(x)$ и $Q^{-1}(x)$,
3) справедливо соотношение $P(x)(A(x) + \lambda B(x))Q(x) = \widetilde{A}(x) + \lambda\widetilde{B}(x) \ \forall x \in \mathcal{U}$.

В классической теории матриц изучение структуры матричных пучков базируется на свойствах их подобия каноническим видам (например, [9], с. 318). При исследовании пучков матриц-функций будем придерживаться этого подхода. В следующем разделе приведем известное утверждение о p-гладком подобии матрицы-функции нормальной форме из [6] (теорема 3) и докажем теорему о подобии матрицы-функции верхнему (правому) треугольному виду. Эта теорема имеет самостоятельное значение и может оказаться полезной при анализе вырожденных дифференциально-алгебраических уравнений в частных производных с симметрическими матричными коэффициентами. В третьем разделе докажем теорему о p-гладкой эквивалентности пучка $A(x) + \lambda B(x)$ каноническому виду. В заключении статьи проиллюстрируем доказанную теорему о канонической форме пучка матриц-функций на простых примерах.

1. Теоремы о подобии матриц-функций

Теорема Шура и Тёплица (например, [10], с. 74) утверждает, что всякая квадратная матрица порядка n, заданная над полем вещественных или комплексных чисел, унитарно подобна верхней (правой) треугольной матрице. В данном разделе мы докажем обобщение теоремы Шура и Тёплица, опираясь на известное обобщение теоремы Долежаля [11], [12].

Теорема 1 ([5], с. 36)**.** *Пусть $A(x)$ — квадратная матрица порядка n и в каждой точке области определения $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$ $\operatorname{rank} A(x) = r$, $r < n$. Тогда найдутся квадратные матрицы $P(x)$ и $Q(x)$ порядка n с элементами из $C^p(\mathcal{U})$, невырожденные в области $\mathcal{U}$, удовлетворяющие равенству $P(x)A(x)Q(x) = \operatorname{diag}\{E_r, \mathcal{O}\}$, где $\mathcal{O}$ — квадратный нулевой блок порядка $n - r$, E_r — единичная матрица порядка r.*

Справедлива

Теорема 2. *Пусть $A(x)$ — квадратная матрица-функция порядка n с областью определения $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^m$, удовлетворяющая условиям*:

1) *элементы $A(x)$ принадлежат пространству $C^p(\mathcal{U})$,*

2) *в каждой точке области определения $A(x)$ имеет единственное собственное значение $\xi(x)$ постоянной кратности n,*

3) *в каждой точке области определения $\operatorname{rank}(A(x) - \xi(x)E_n) = r$ является постоянным.*

Тогда $A(x)$ p-гладко ортогонально[1] подобна верхней (*правой*) *треугольной матрице-функции.*

Доказательство. Методика доказательства теоремы заимствована из работ ([10], с. 74) и [13]. Поэтому не будем подробно записывать все доказательство теоремы, а остановимся лишь на некоторых важных моментах. Для начала покажем, что среди множества правых собственных векторов матрицы-функции $A(x)$, соответствующих единственному собственному значению $\xi(x)$, можно выбрать ненулевой в каждой точке $\mathcal{U}$ собственный вектор $X(x)$, компоненты которого принадлежат пространству $C^p(\mathcal{U})$. Запишем уравнение для правого собственного вектора

$$D(x)X(x) = 0, \tag{1}$$

где $D(x) = A(x) - \xi(x)E_n$. Так как по условию теоремы ранг $D(x)$ постоянный в области определения, то согласно теореме 1 найдутся невырожденные в области определения матрицы-функции $P(x)$ и $Q(x)$, элементы которых принадлежат пространству $C^p(\mathcal{U})$, удовлетворяющие равенству $P(x)D(x)Q(x) = \operatorname{diag}\{E_r, \mathcal{O}\}$. Поскольку $\xi(x)$ — собственное значение $A(x)$, то матрица-функция $D(x)$ тождественно вырождена в $\mathcal{U}$, т. е. $r < n$. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$ — стандартный ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}^n$. Собственными векторами, не обращающимися в нуль в $\mathcal{U}$, являются $n - r$ последних столбцов матрицы $Q(x) : Q_{*,j}(x) = Q(x)e_j$, $j = r+1, \ldots, n$. В частности, вектор $X(x) = Q(x)e_n$ будет одним из собственных векторов матрицы $A(x)$. Очевидно, все элементы $X(x)$ принадлежат пространству $C^p(\mathcal{U})$.

Докажем, что для собственного вектора $X(x)$ можно построить ортонормированную систему линейно независимых векторов $\{\widehat{X}_i(x)\}_{i=1}^n$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$\widehat{X}_1(x) = X(x)/\|X(x)\|, \tag{2}$$

$$\widehat{X}_i(x)^\top \cdot \widehat{X}_j(x) = 0 \ \ \forall i \neq j, \ \ i,j = \overline{1,n} \ \text{ и } \ \forall x \in \mathcal{U}, \tag{3}$$

$$X_i(x) \in C^p(\mathcal{U}), \ \ \|\widehat{X}_i(x)\| \equiv 1 \ \ \forall i = \overline{1,n}, \tag{4}$$

[1] В случае комплекснозначной матрицы $A(x)$ свойство ортогональности заменяется свойством унитарности.

где $\|\cdot\|$ — евклидова норма.

Рассмотрим систему векторов [13] $Z_i(x) = Q(x)e_{n-i+1}$, где $i = \overline{1,n}$. Так как матрица-функция $Q(x)$ невырожденная, то векторы $Z_i(x)$ линейно независимые в каждой точке $\mathcal{U}$. Применяя процесс ортогонализации Грама–Шмидта к системе векторов $\{Z_i(x)\}$, получим ортогональную систему векторов $\{X_i(x)\}$, которая определяется рекуррентным соотношением

$$X_i(x) = Z_i(x) - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{X_j^*(\overline{x}) \cdot Z_i(x)}{X_j^*(\overline{x}) \cdot X_j(x)} X_j(x), \quad i = \overline{1,n}, \tag{5}$$

где $X_j^*(\overline{x})$ означает вектор, полученный из $X_j(x)$ транспонированием вектора, элементы которого комплексно сопряжены к элементам $X_j(x)$. По построению векторы $X_i(x)$ отличны от нулевого вектора в каждой точке области определения $\mathcal{U}$. Следовательно, скалярные произведения $X_i^*(\overline{x}) \cdot X_i(x) \neq 0 \quad \forall i = \overline{1,n}$ и $x \in \mathcal{U}$ и компоненты системы (5) принадлежат пространству $C^p(\mathcal{U})$. Векторы $X_i(x)$, $i = 1, \ldots, r+1$, являются собственными векторами (образуют базис собственного подпространства). Нормируя векторы (5), получим искомую систему $\widehat{X}_i(x) = X_i(x)/\|X_i(x)\|$, $i = \overline{1,n}$, которая удовлетворяет условиям (2)–(4). Векторы (2)–(4) линейно независимые, так как их определитель Грама равен единице в каждой точке $\mathcal{U}$. Таким образом, матрица-функция $U(x) = (\widehat{X}_1(x), \widehat{X}_2(x), \ldots, \widehat{X}_n(x))$ невырождена в области определения и ортогональна в этой области, так как $U^\top(x) = U^{-1}(x)$.

Теперь доказательство теоремы можно провести методом математической индукции по параметру n, доказывая, что $U(x)^{-1}A(x)U(x) = F(x)$, где $F(x)$ — верхняя (правая) треугольная матрица-функция. Эта часть доказательства полностью совпадает с доказательством теоремы Шура и Тёплица (например, [10], с. 74), поэтому не будем на ней останавливаться. $\square$

Заметим, что условие постоянства ранга $A(x)$ в теореме 2 является достаточным условием, но не необходимым. Можно привести пример, когда ранг $A(x)$ с единственным собственным значением, тождественно равным нулю, из теоремы 2 переменный, но при этом $A(x)$ p-гладко ортогонально подобна верхней (правой) треугольной матрице-функции с нулевой диагональю.

Рассмотрим матрицу-функцию

$$A(x) = \begin{pmatrix} x_1 & -1 & x_1(x_1+x_2) \\ x_1^2 & -x_1 & -x_1 - x_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U} = \mathbb{R}^2.$$

На прямой, заданной уравнением $x_2 = -x_1$, ранг $A(x)$ равен единице, а вне этой прямой равен двум. Изолированных точек перемены ранга $A(x)$ в данном случае нет. Это дает возможность построить ортогональную преобразующую матрицу $U(x)$ аналитических в области $\mathbb{R}^2$ функций. Она имеет вид

$$U(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x_1^2}} \begin{pmatrix} 1 & x_1 & 0 \\ x_1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нильпотентная матрица-функция $\mathcal{N}(x)$, аналитически подобная $A(x)$, будет иметь вид

$$\mathcal{N}(x) = (1+x_1^2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x_1+x_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Более сильный результат о p-гладком подобии матриц-функций доказан в работе [6].

Рассмотрим характеристический полином $\Delta(\xi, x) = \det(\xi E_n - A(x))$ матрицы-функции $A(x)$. В каждой точке $x \in \mathcal{U}$ полином $\Delta(\xi, x)$ является характеристическим полиномом числовой матрицы $A(x)$ и имеет степень n. Его корни составят числовой набор из $q \le n$ различных собственных значений $\xi_i = \xi_i(x)$ матрицы $A(x)$. Таким образом, каждой точке x сопоставляем множество Ω из q различных значений. Выбирая каким-либо способом для каждого значения x одно значение из множества Ω, получим функцию $\xi(x)$, которую будем называть собственной функцией матрицы $A(x)$. Точно также можно построить другие собственные функции, при этом каждое значение из множества Ω можем выбрать столько раз, какова его кратность. В итоге получим совокупность функций $\{\xi_i = \xi_i(x)\}$. Их свойства будут зависеть, в частности, от того, как осуществляется выбор значений из множества Ω. Естественным образом возникает вопрос: при выполнении каких условий можно построить множество собственных функций $\{\xi_i = \xi_i(x)\}$, обладающих той же гладкостью, что и элементы матрицы $A(x)$. Ответ на поставленный вопрос дает

Лемма 1 ([6]). *Пусть $\Delta(\xi, x) = \det(\xi E_n - A(x))$ — характеристический полином матрицы-функции $A(x)$, элементы которой принадлежат $C^p(\mathcal{U})$. Если кратности различных корней полинома $\Delta(\xi, x)$ остаются постоянными, каким бы ни был $x \in \mathcal{U}$, то можно в каждой точке $\mathcal{U}$ выбрать такую нумерацию корней $\{\xi_i(x)\}_{i=1}^q$ характеристического полинома $\Delta(\xi, x)$, что $\xi_i(x) \in C^p(\mathcal{U})$ для каждого $i = 1, \dots, q$, где q — число различных корней полинома $\Delta(\xi, x)$.*

Из леммы 1 следует, что при выполнении всех ее условий в каждой точке x можно занумеровать корни $\xi_i(x)$ полинома $\Delta(\xi, x)$ так, что в совокупности каждый i-й набор этих значений будет определять некоторую функцию $\xi_i = \xi_i(x)$, принадлежащую пространству $C^p(\mathcal{U})$. Подобные рассуждения для матриц-функций с простыми в каждой точке области определения собственными значениями имеются в работе [1].

Для характеристического многочлена пучка матриц-функций $A(x) + \lambda B(x)$ справедлива аналогичная лемме 1 из [6]

Лемма 2. *Пусть $\Delta(\lambda, x) = \det(A(x) + \lambda B(x))$ — характеристический полином пучка матриц-функций $A(x) + \lambda B(x)$ относительно переменной λ с функциональными коэффициентами из пространства $C^p(\mathcal{U})$. Если кратности различных корней полинома $\Delta(\lambda, x)$ остаются постоянными, каким бы ни был $x \in \mathcal{U}$, и старший коэффициент многочлена $\det(A(x) + \lambda B(x))$ относительно параметра λ не обращается в нуль ни в одной точке $\mathcal{U}$, то можно в каждой точке $\mathcal{U}$ выбрать такую нумерацию корней $\{\lambda_i(x)\}_{i=1}^k$ характеристического полинома $\Delta(\lambda, x)$, что $\lambda_i(x) \in C^p(\mathcal{U})$ для каждого $i = 1, \dots, k$, где k — число различных корней полинома $\Delta(\lambda, x)$.*

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству леммы 1 из [6].

Приведем основную теорему о подобии матрицы-функции нормальной жордановой форме.

Теорема 3 ([6]). *Пусть матрица-функция $A(x)$ удовлетворяет условиям леммы 1 и пусть для любых $x \in \mathcal{U}$ она подобна жордановой матрице $J(x)$, у которой каждому собственному значению $\xi_i(x)$ $(i = 1, \dots, q)$ соответствует постоянное число жордановых ящиков, размерности которых не зависят от $x \in \mathcal{U}$. Тогда $A(x)$ p-гладко подобна $J(x)$.*

2. Теорема о канонической структуре пучка матриц-функций

В работе [14] показано, что если характеристический полином квадратной матрицы-функции $A(x)$ с элементами из $C^p(\mathcal{U})$ можно представить в виде произведения полиномов $\Delta(\xi, x) = \Delta_1(\xi, x) \cdot \Delta_2(\xi, x)$, корни которых различны в каждой точке области определения, то матрица $A(x)$ p-гладко подобна блочно-диагональной матрице, блоки которой имеют характеристические полиномы $\Delta_1(\xi, x)$ и $\Delta_2(\xi, x)$ соответственно.

Пользуясь этим результатом и основываясь на доказательстве теоремы Вейерштрасса о канонической структуре регулярного пучка матриц ([9], с. 321), докажем следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия*:

1) *все корни характеристического многочлена* $\det(A(x)+\lambda B(x))$ *вещественные и имеют постоянную кратность в области определения* $\mathcal{U}$,

2) *старший коэффициент многочлена* $\det(A(x)+\lambda B(x))$ *относительно параметра* λ *не обращается в нуль ни в одной точке* $\mathcal{U}$,

3) *ранги матриц-функций* $A(x)$ *и* $B(x)$ *являются постоянными в каждой точке области* $\mathcal{U}$ *и меньше размерности* n.

Тогда пучок $A(x)+\lambda B(x)$ *p-гладко эквивалентен пучку канонического вида*

$$\operatorname{diag}\{E_d, \mathcal{M}(x), E_{n-d-l}\} + \lambda \operatorname{diag}\{\mathcal{J}(x), E_l, \mathcal{N}(x)\}, \tag{6}$$

где E_d *— единичная матрица порядка* d; $\mathcal{M}(x)$ *и* $\mathcal{N}(x)$ *— верхние (правые) треугольные блоки с нулевой диагональю порядка* l *и* $(n-d-l)$ *соответственно*; $\mathcal{J}(x) = \operatorname{diag}\{\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \ldots, \mathcal{J}_k\}$, *где* $\mathcal{J}_i$, $i=\overline{1,k}$, *— невырожденные матрицы-функции порядка* p_i *соответственно,* $\sum\limits_{i=1}^{k} p_i=d$; *каждый блок* $\mathcal{J}_i$ *имеет единственное собственное значение* $-1/\lambda_i(x)$ *в области определения;* $\lambda_i(x)$, $i=\overline{1,k}$, *— собственные значения характеристического многочлена* $\det(A(x)+\lambda B(x))$*, не обращающиеся в нуль в области определения.*

Доказательство. По второму условию теоремы $\Delta(\lambda, x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathcal{U}$. Пусть $\lambda_i(x)$, $i = \overline{1, k+1}$, — корни характеристического полинома $\Delta(\lambda, x)$ кратностей p_i соответственно. По лемме 2 $\lambda_i(x) \in C^p(\mathcal{U}) \quad \forall i = \overline{1,n}$ и в силу первого условия теоремы $\lambda_i(x) \neq \lambda_j(x) \quad \forall i \neq j$, $i, j = \overline{1, k+1}$. Тогда найдется функция $c = c(x) \in C^p(\mathcal{U})$, $c(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathcal{U}$, для которой выполняется условие $\det(A(x)+cB(x)) \neq 0 \quad \forall x \in \mathcal{U}$. Функцию $c(x)$ можно построить как среднее арифметическое некоторых двух соседних корней характеристического многочлена $\Delta(\lambda, x)$. Пусть $A_1(x) \equiv A(x)+cB(x)$, тогда

$$A(x)+\lambda B(x) = A_1(x) + (\lambda - c)B(x). \tag{7}$$

Умножив равенство (7) слева на $A_1^{-1}(x)$, получим

$$A_1^{-1}(x)[A(x)+\lambda B(x)] = E_n + (\lambda - c)A_1^{-1}(x)B(x), \tag{8}$$

где E_n — единичная матрица порядка n. Покажем, что матрица $A_1^{-1}(x)B(x)$ из правой части равенства (8) подобна жордановой матрице. Запишем ее характеристический полином $\widetilde{\Delta}(\xi, x) = \det(A_1^{-1}(x)B(x) - \xi E_n)$. Применив свойства определителя, получим

$$\widetilde{\Delta}(\xi, x) = (-1)^n \det A_1^{-1}(x) \det(\xi A(x) + (\xi c - 1)B(x)). \tag{9}$$

Разложим полином (9) на простые множители. Для этого понадобится характеристический многочлен

$$\Delta(\lambda, x) = \sum_{i=0}^{n} S_i(x)\lambda^i, \tag{10}$$

где $S_i(x)$ — суммы всевозможных миноров порядка n, составленных из $(n-i)$ строк $A(x)$ и i строк $B(x)$ с сохранением порядка расположения строк. В частности, $S_0(x)$, $S_n(x)$ — определители $A(x)$ и $B(x)$ соответственно. По третьему условию теоремы ранги $A(x)$ и $B(x)$

меньше порядка n. Следовательно, $S_0(x) \equiv 0$ и $S_n(x) \equiv 0$ в $\mathcal{U}$. Тогда среди корней характеристического полинома $\Delta(\lambda, x)$ степени не меньше единицы всегда найдется корень, тождественно равный нулю в области определения. Без ограничения общности будем считать, что $\lambda_{k+1}(x)$ — нулевой корень кратности l, где $l \geq 0$. Учитывая (10), характеристический полином $\Delta(\lambda, x)$ запишем в виде

$$\Delta(\lambda, x) = \lambda^l \sum_{i=l}^{l+d} S_i(x)\lambda^{i-l}, \quad l + d \leq n, \tag{11}$$

где l и d не зависят от x в $\mathcal{U}$. Коэффициенты $S_l(x)$ и $S_{l+d}(x)$ из равенства (11) не обращаются в нуль в области определения, так как в противном случае кратности корней характеристического полинома $\Delta(\lambda, x)$ не будут постоянными в этой области. В силу условий теоремы и равенства (11)

$$\Delta(\lambda, x) = S_{l+d}(x)\lambda^l \prod_{i=1}^{k}(\lambda - \lambda_i(x))^{p_i}, \quad \sum_{i=1}^{k} p_i = d. \tag{12}$$

Наряду с $\Delta(\lambda, x)$ рассмотрим многочлен $\widehat{\Delta}(\mu, \lambda, x) = \det(\mu A(x) + \lambda B(x))$, где $\mu = \mu(x)$ — искомая функция. Из равенства (10) следует

$$\widehat{\Delta}(\lambda, x) = \sum_{i=0}^{n} S_i(x)\lambda^i \mu^{n-i}.$$

В условиях теоремы с учетом (11) и (12) имеем

$$\widehat{\Delta}(\lambda, x) = \lambda^l \mu^{n-d-l} \sum_{i=0}^{d} S_{l+i}(x)\lambda^i \mu^{d-i} = S_{l+d}(x)\lambda^l \mu^{n-d-l} \prod_{i=1}^{k}(\lambda - \lambda_i(x)\mu)^{p_i}. \tag{13}$$

Тогда из равенств (9) и (13), получаем

$$\widetilde{\Delta}(\lambda, x) = (-1)^n \varepsilon(x) \xi^{n-d-l} \left(\xi - \frac{1}{c}\right)^l \prod_{i=1}^{k} \left(\xi - \frac{1}{c - \lambda_i(x)}\right)^{p_i}, \tag{14}$$

где

$$\varepsilon(x) = \det A_1^{-1}(x) S_{l+d}(x) c^l \prod_{i=1}^{k}(c - \lambda_i(x))^{p_i}.$$

В равенстве (14) $c \neq \lambda_i(x) \quad \forall x \in \mathcal{U}$ и $\forall i = \overline{1, n}$. С другой стороны,

$$\widetilde{\Delta}(\lambda, x) = (-1)^n \xi^n + \cdots, \tag{15}$$

где после знака + (на месте многоточия) находятся слагаемые, содержащие степени ξ, меньшие, чем n. Сравнивая формулы (14) и (15), заключаем, что $\varepsilon(x) \equiv 1$. Таким образом, получили искомое разложение полинома (9)

$$\widetilde{\Delta}(\lambda, x) = (-1)^n \xi^{n-d-l} \left(\xi - \frac{1}{c}\right)^l \prod_{i=1}^{k} (\xi - \xi_i(x))^{p_i}, \quad \xi_i(x) = \frac{1}{c - \lambda_i(x)}.$$

По теореме из [14] найдется матрица-функция $T(x)$, которая удовлетворяет всем условиям определения 1 и равенству

$$T^{-1}(x) A_1^{-1}(x) B(x) T(x) = \operatorname{diag}\{J_1(x), J_2(x), \ldots, J_k(x), M(x), N(x)\},$$

где $J_i(x)$ — невырожденные матрицы-функции в области определения с попарно неравными собственными значениями ξ_i, $i = \overline{1, n}$; $M(x)$ — невырожденная матрица-функция порядка l

с единственным собственным значением, равным $1/c$; $N(x)$ — квадратная матрица-функция порядка $(n-d-l)$ с единственным собственным значением, тождественно равным нулю.

Умножим пучок из правой части равенства (8) слева и справа на $T^{-1}(x)$ и $T(x)$ соответственно. Тогда получим

$$\begin{aligned} E_n + (\lambda - c)\operatorname{diag}\{J_1(x), J_2(x), \ldots, J_k(x), M(x), N(x)\} = \\ = \operatorname{diag}\{E_{p_1} - cJ_1(x), E_{p_2} - cJ_2(x), \ldots, E_{p_k} - cJ_k(x), E_l - cM(x), E_{n-d-l} - cN(x)\} + \\ + \lambda \operatorname{diag}\{J_1(x), J_2(x), \ldots, J_k(x), M(x), N(x)\}, \quad (16) \end{aligned}$$

где E_n — единичная матрица порядка n. Так как ранги матриц-функций $B(x)$, $J(x)$ и $M(x)$ постоянны в $\mathcal{U}$, то по свойству ранга матрицы (например, [9], с. 25) ранг $N(x)$ не зависит от x в области определения. Тогда согласно теореме 2 $N(x)$ p-гладко подобна верхней (правой) треугольной матрице $\widehat{N}(x)$ с нулевой диагональю, т. е. найдется невырожденная матрица-функция $T_1(x)$, удовлетворяющая равенству $T_1^{-1}(x)N(x)T_1(x) = \widehat{N}(x)$. Составим матрицу-функцию $\widetilde{T}(x) = \operatorname{diag}\{E_d, E_l, T_1(x)\}$. Умножив пучок (16) слева и справа на $\widetilde{T}^{-1}(x)$ и $\widetilde{T}(x)$ соответственно, приведем его к виду

$$\begin{aligned} \operatorname{diag}\{E_{p_1} - cJ_1(x), E_{p_2} - cJ_2(x), \ldots, E_{p_k} - cJ_k(x), E_l - cM(x), E_{n-d-l} - c\widehat{N}(x)\} + \\ + \lambda \operatorname{diag}\{J_1(x), J_2(x), \ldots, J_k(x), M(x), \widehat{N}(x)\}. \quad (17) \end{aligned}$$

Построим для каждого из блоков $E_{p_i} - cJ_i(x)$, $i = \overline{1,k}$, характеристический полином

$$\det(E_{p_i} - cJ_i(x) - \nu_i E_{p_i}) = (-1)^{p_i} c^{p_i} \det\left(J_i(x) - \frac{1-\nu_i}{c} E_{p_i}\right), \quad i = \overline{1,k},$$

где $c \neq 0 \quad \forall x \in \mathcal{U}$; ν_i — спектральный параметр соответствующего блока i, параметрически зависящий от x. Очевидно, $\nu_i = -\lambda_i(x)/(c - \lambda_i(x))$ и не обращаются в нуль ни в одной точке области определения $\mathcal{U}$. Таким образом, $E_{p_i} - cJ_i(x)$, $i = \overline{1,k}$, невырожденные в области определения.

Далее, умножив пучок (17) слева на невырожденную в $\mathcal{U}$ матрицу-функцию

$$\overline{J}(x) = \operatorname{diag}\{\widehat{J}(x), E_l, (E_{n-d-l} - c\widehat{N}(x))^{-1}\},$$

где $\widehat{J}(x) = \operatorname{diag}\{(E_{p_1} - cJ_1(x))^{-1}, (E_{p_2} - cJ_2(x))^{-1}, \ldots, (E_{p_k} - cJ_k(x))^{-1}\}$, преобразуем его к виду

$$\operatorname{diag}\{E_d, E_l - cM(x), E_{n-d-l}\} + \lambda \operatorname{diag}\{\mathcal{J}(x), M(x), \widetilde{\mathcal{N}}(x)\}, \quad (18)$$

где $\mathcal{J}(x) = \operatorname{diag}\{\mathcal{J}_1(x), \mathcal{J}_2(x), \ldots, \mathcal{J}_k(x)\}$, $\mathcal{J}_i(x) = (E_{p_i} - cJ_i(x))^{-1} J_i(x)$, $i = \overline{1,k}$, и $\widetilde{\mathcal{N}}(x) = (E_{n-d-l} - c\widehat{N}(x))^{-1}\widehat{N}(x)$; матрица-функция $\widetilde{\mathcal{N}}(x)$ нильпотентная, так как получена в результате произведения верхней (правой) треугольной и нильпотентной матриц-функций. Каждый блок $\mathcal{J}_i(x)$, $i = \overline{1,k}$, в (18) невырожденный в $\mathcal{U}$ и имеет единственное собственное значение $-1/\lambda_i(x) \quad \forall i$. В силу постоянства рангов матриц $B(x)$, $\mathcal{J}(x)$ и $M(x)$, а также свойства ранга ([9], с. 25) ранг $\widetilde{\mathcal{N}}(x)$ постоянный в области определения. Матрица $\widetilde{\mathcal{N}}(x)$ имеет единственное собственное значение кратности $n-d-l$, равное нулю в каждой точке области $\mathcal{U}$. Следовательно, по теореме 2 матрица $\widetilde{\mathcal{N}}(x)$ p-гладко подобна верхней (правой) треугольной матрице $\mathcal{N}(x)$ с нулевой диагональю и с некоторой невырожденной преобразующей матрицей $\widetilde{T}_1(x)$. Составим матрицу $\widetilde{T}_2(x) = \operatorname{diag}\{E_d, E_l, \widetilde{T}_1(x)\}$ и умножим (18) слева и справа на матрицы $\widetilde{T}_2^{-1}(x)$ и $\widetilde{T}_2(x)$ соответственно. Получим пучок

$$\operatorname{diag}\{E_d, E_l - cM(x), E_{n-d-l}\} + \lambda\ \operatorname{diag}\{\mathcal{J}(x), M(x), \mathcal{N}(x)\}. \quad (19)$$

Умножив (19) слева на $\overline{M}(x) = \operatorname{diag}\{E_d, M^{-1}(x), E_{n-d-l}\}$, запишем

$$\operatorname{diag}\{E_d, \widehat{M}(x), E_{n-d-l}\} + \lambda\ \operatorname{diag}\{\mathcal{J}(x), E_l, \mathcal{N}(x)\}, \tag{20}$$

где $\widehat{M}(x) = M^{-1}(x) - cE_l$. Из характеристического уравнения для $\widehat{M}(x)$ получим

$$\det\left(M(x) - \frac{1}{c+\lambda}E_l\right) = 0, \quad c \neq -\lambda \ \ \forall\, x \in \mathcal{U}.$$

Из последнего равенства следует, что все собственные числа $\widehat{M}(x)$ равны нулю, так как все собственные значения $M(x)$ равны $1/c$. К тому же в силу постоянства ранга $A(x)$ в области определения $\mathcal{U}$ и свойства ранга (например, [9], с. 25) ранг $\widehat{M}(x)$ не зависит от $x \in \mathcal{U}$. Тогда согласно теореме 2 найдется невырожденная в области определения $\mathcal{U}$ матрица-функция $\overline{T}(x)$, удовлетворяющая равенству $\overline{T}^{-1}(x)\widehat{M}(x)\overline{T}(x) = \mathcal{M}(x)$, где $\mathcal{M}(x)$ — верхняя (правая) треугольная матрица с нулевой диагональю. Положим $\widehat{T}(x) = \operatorname{diag}\{E_d, \overline{T}(x), E_{n-d-l}\}$. Умножив пучок (20) слева и справа на матрицы-функции $\widehat{T}^{-1}(x)$ и $\widehat{T}(x)$ соответственно, получим (6). Таким образом, доказали существование невырожденных в области определения матриц-функций

$$P(x) = \widehat{T}^{-1}(x)\overline{M}(x)\widetilde{T}_2^{-1}(x)\overline{J}(x)\widetilde{T}_1^{-1}(x)T^{-1}(x)A_1^{-1}(x)$$

и

$$Q(x) = T(x)\widetilde{T}(x)\widetilde{T}_2(x)\widehat{T}(x),$$

преобразующих матричный пучок $A(x) + \lambda B(x)$ к каноническому виду (6). Элементы $P(x)$ и $Q(x)$ принадлежат пространству $C^p(\mathcal{U})$. □

Проиллюстрируем теорему 4 на примерах.

3. Примеры

В этом разделе рассмотрим примеры пучков матриц-функций $A(x) + \lambda B(x)$. Данные примеры являются лишь иллюстрацией выполнения достаточных условий теоремы 4.

Пример 1. Рассмотрим пучок

$$A(x) + \lambda B(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1x_2 & -x_2^2 \\ 0 & x_1^2 & -x_1x_2 \end{pmatrix}, \tag{21}$$

где $x \in \mathcal{U} = [a,b] \times [a,b] \subseteq \mathbb{R}^2$, $a > 0$. Имеем $\operatorname{rank}(A(x)) = \operatorname{rank}(B(x)) = 2$ в каждой точке $\mathcal{U}$. Составим характеристический полином пучка (21)

$$\det(A(x) + \lambda B(x)) = x_1x_2\lambda(\lambda + x_1 + x_2). \tag{22}$$

Его корни $\lambda_1 \equiv 0$ и $\lambda_2(x) = -x_1 - x_2$ не имеют общих значений в области определения и сохраняют свой порядок в этой области. Старший коэффициент характеристического многочлена (22) не обращается в нуль в области определения. Следовательно, по теореме 4 пучок матриц-функций (22) в области определения гладко эквивалентен пучку $\operatorname{diag}\{1,0,1\} + \lambda \operatorname{diag}\{1/(x_1+x_2), 1, 0\}$. Преобразующие матрицы-функции $P(x)$ и $Q(x)$ можно определить по шагам доказательства теоремы 4, полагая, например, $c \equiv 1$. В данном случае они имеют вид

$$P(x) = \begin{pmatrix} 1/(x_1+x_2) & 0 & 0 \\ 0 & 1/(x_1x_2) & 0 \\ 0 & -x_1/x_2 & 1 \end{pmatrix}, \quad Q(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x_2/x_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы-функции $P(x)$ и $Q(x)$ невырожденные $\forall x \in \mathcal{U}$ и имеют ту же гладкость в этой области, что $A(x)$ и $B(x)$.

Пример 2. Рассмотрим пучок $A(x) + \lambda\, B(x)$, где

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma(x)\sigma(x) \\ 0 & \gamma(x) & 0 \\ 0 & -\gamma(x)x_2 & \gamma(x) \end{pmatrix}, \quad B(x) = \begin{pmatrix} 0 & \sigma(x)x_2 & -\upsilon(x)\sigma(x) \\ x_1^2 & \upsilon(x) & -\upsilon(x)\sin(x_1) \\ 0 & -x_1(\upsilon(x)-1) & \upsilon(x)(\upsilon(x)-1) \end{pmatrix}, \quad (23)$$

$$\gamma(x) = x_1 x_2, \quad \sigma(x) = x_1 + x_2, \quad \upsilon(x) = x_2\sin(x_1), \quad x \in \mathcal{U} = [1,b]\times[1,b] \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Заметим, что $\det(A(x)) \equiv 0$ и $\det(B(x)) \equiv 0$ в области определения $\mathcal{U}$. При этом существуют миноры второго порядка матриц-функций $A(x)$ и $B(x)$

$$A_{23} = \begin{vmatrix} \gamma(x) & 0 \\ -\gamma(x)x_2 & \gamma(x) \end{vmatrix} \neq 0, \quad B_{23} = \begin{vmatrix} 0 & \sigma(x)x_2 \\ x_1^2 & \upsilon(x) \end{vmatrix} \neq 0 \ \ \forall x \in \mathcal{U}.$$

Следовательно, $\operatorname{rank}(A(x)) = \operatorname{rank}(B(x)) = 2 \ \ \forall x \in \mathcal{U}$. Составим характеристический полином пучка (23)

$$\det(A(x) + \lambda B(x)) = -x_1^4 x_2^3 (x_1 + x_2)\lambda.$$

Он имеет единственный корень $\lambda \equiv 0 \ \ \forall x \in \mathcal{U}$. Старший коэффициент характеристического полинома не обращается в нуль в $\mathcal{U}$. Следовательно, по теореме 4 пучок (23) гладко эквивалентен пучку вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти преобразующие матрицы-функции $P(x)$ и $Q(x)$ из теоремы 4, вновь необходимо обратиться к доказательству теоремы 4 и по шагам последовательно их восстановить. Они будут иметь вид

$$P(x) = \frac{x_1^2}{\nu(x)x_2} P_0(x) \begin{pmatrix} -\rho(x)\gamma(x) & \nu(x)x_2 & \nu(x) \\ (\sin(x_1) + x_2)x_1^2 & 0 & -\sin(x_1)\sigma(x)x_1^2 \\ (1-\upsilon(x))x_1^2 & 0 & -\sigma(x)x_1^2 \end{pmatrix},$$

$$Q(x) = \frac{1}{\rho(x)} \begin{pmatrix} \rho(x) & 0 & 0 \\ 0 & \sin(x_1) & 1 \\ 0 & 1 & -\sin(x_1) \end{pmatrix} Q_0(x),$$

где $\nu(x) = \rho(x)\gamma(x)\sigma(x)$, $\rho(x) = (1 + \sin^2(x_1))^{1/2}$; матрицы-функции $P_0(x)$ и $Q_0(x)$ имеют вид $P_0(x) = \operatorname{diag}\{1, 1, \varphi(x)\}$, $Q_0(x) = \operatorname{diag}\{1, 1, 1/\varphi(x)\}$, $\varphi(x) = (1 + \sin^2(x_1))/x_1$. Матрицы-функции $A(x)$, $B(x)$, $P(x)$ и $Q(x)$ бесконечно дифференцируемые в $\mathcal{U}$.

В заключение отметим, что блоки $\mathcal{J}_i(x)$, где $i = \overline{1,k}$, из канонической структуры (6) представляют собой невырожденные квадратные матрицы-функции порядка p_i, которые не совпадают с жордановыми клетками. Чтобы получить каноническую структуру, полностью совпадающую с жордановой структурой, необходимо наложить дополнительные условия на матрицы $A(x)$ и $B(x)$. В данной работе не будем этого делать, поскольку полученная нами каноническая форма пучка (6) вполне достаточна для начала исследований линейных дифференциально-алгебраических уравнений в частных производных и построения для них численных методов.

Литература

[1] Годунов С.К. *Уравнения математической физики* (Наука, М., 1971).

[2] Гайдомак С.В. *Метод сплайн-коллокации для линейных вырожденных гиперболических систем*, Журн. вычисл. матем. и матем. физ. **48** (7), 1230–1249 (2008).

[3] Гайдомак С.В. *Трехслойный разностный метод решения линейных дифференциально-алгебраических систем уравнений в частных производных*, Дифференц. уравнения **46** (4), 583–594 (2010).

[4] Гайдомак С.В. *Об устойчивости неявной разностной схемы для линейной дифференциально-алгебраической системы уравнений в частных производных*, Журн. вычисл. матем. и матем. физ. **50** (4), 707–717 (2010).

[5] Чистяков В.Ф. *Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром* (Сибирская издат. фирма РАН "Наука", Новосибирск, 1996).

[6] Вербицкий Б.В. *Одно глобальное свойство матриц-функций, зависящих от нескольких переменных*, Изв. вузов. Матем. №1, 8–17 (1978).

[7] Вербицкий Б.В. *Об одном глобальном свойстве матриц-функций, зависящих от нескольких переменных*, УМН **28** (5), 233–234 (1973).

[8] Вербицкий Б.В. *Об одном глобальном свойстве матрицы-функции от одного переменного*, Матем. сборник **91** (1), 50-61 (1973).

[9] Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц*(Физматлит, М., 2004).

[10] Ланкастер П. *Теория матриц* (Наука, М., 1982).

[11] Doležal V. *The existence of a continuous basis of a certain linear subspace of E_r which depends on a parameter*, Cas. Pěst. Mat. **89**, 466–468 (1964).

[12] Silverman L.M., Bucy R.S. *Generalizations of a theorem of Dolezal*, Theory of Computing Systems **4** (4), 334–339 (1969).

[13] Gingold H., Hsieh P.F. *Globally analytic triangularization of a matrix function*, Linear Algebra Appl. **169**, 75–101 (1992).

[14] Hsieh P.F., Sibuya Y. *A global analysis of matrices of functions of several variables*, J. Math. Anal. Appl. **14**, 332–340 (1966).

С.В. Гайдомак

старший научный сотрудник,
Институт динамики систем и теории управления
Сибирского отделения Российской Академии наук,
ул. Лермонтова, д. 134, г. Иркутск, 664033, Россия,

`e-mail:` gaidamak@icc.ru

S.V. Gaidomak

Senior Researcher,
Institute for System Dynamics and Control Theory
of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences,
134 Lermontov str., Irkutsk, 664033 Russia,

`e-mail:` gaidamak@icc.ru