УДК 517.958

Харасова Л.С., старший преподаватель, Набережночелнинский институт ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университета, *kharasova.liya@mail.ru*

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ТИПА ТИМОШЕНКО.

Аннотация. Статья посвящена разрешимости геометрически нелинейной задачи равновесия для пологих упругих оболочек типа Тимошенко с шарнирно опертыми краями в произвольной области. Исследование заключается в сведении исходной задачи к одному нелинейному операторному уравнению, разрешимость которого устанавливается с помощью принципа сжатых отображений. Основу метода составляют интегральные представления для перемещений, которые строятся с привлечением общих решений неоднородного уравнения Коши-Римана.

Ключевые слова: система нелинейных дифференциальных уравнений, краевая задача, уравнения равновесия, интегральные представления, теорема существования.

В плоской ограниченной области Ω рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений вида

$$
\begin{gathered}
w_{1\alpha^1\alpha^1}+\mu_1 w_{1\alpha^2\alpha^2}+\mu_2 w_{2\alpha^1\alpha^2}=f_1,\;\; \mu_1 w_{2\alpha^1\alpha^1}+w_{2\alpha^2\alpha^2}+\mu_2 w_{1\alpha^1\alpha^2}=f_2,\\
k^2\mu_1(w_{3\alpha^1\alpha^1}+w_{3\alpha^2\alpha^2}+\psi_{1\alpha^1}+\psi_{2\alpha^2})+k_3 w_{1\alpha^1}+k_4 w_{2\alpha^2}-k_5 w_3+\\
+k_3 w_{3\alpha^1}^2/2+k_4 w_{3\alpha^2}^2/2+\beta_2[(T^{\lambda\mu}w_{3\alpha^\lambda})_{\alpha^\mu}+R^3]=0,\\
\psi_{1\alpha^1\alpha^1}+\mu_1\psi_{1\alpha^2\alpha^2}+\mu_2\psi_{2\alpha^1\alpha^2}=g_1+k_0\psi_1,\;\; \mu_1\psi_{2\alpha^1\alpha^1}+\psi_{2\alpha^2\alpha^2}+\mu_2\psi_{1\alpha^1\alpha^2}=g_2+k_0\psi_2,
\end{gathered}
\tag{1}
$$

при условиях на её границе Г:

$$w_3=\psi_1=0, \tag{2}$$

$$
\begin{gathered}
(w_{1\alpha^1}+\mu w_{2\alpha^2})(t)\,d\alpha^2/ds-\mu_1(w_{1\alpha^2}+w_{2\alpha^1})(t)\,d\alpha^1/ds=\varphi_1(w_3)(t),\\
\mu_1(w_{1\alpha^2}+w_{2\alpha^1})(t)\,d\alpha^2/ds-(\mu w_{1\alpha^1}+w_{2\alpha^2})(t)\,d\alpha^1/ds=\varphi_2(w_3)(t),
\end{gathered}
\tag{3}
$$

$$\mu_1(\psi_{1\alpha^2}+\psi_{2\alpha^1})(t)\,d\alpha^2/ds-(\mu\psi_{1\alpha^1}+\psi_{2\alpha^2})(t)\,d\alpha^1/ds=\tilde{\varphi}_2(t). \tag{4}$$

В (1) – (4) приняты следующие обозначения

$$f_j \equiv f_j(w_3) = k_{j+2} w_{3\alpha^j} - w_{3\alpha^j} w_{3\alpha^j\alpha^j} - \mu_2 w_{3\alpha^{3-j}} w_{3\alpha^1\alpha^2} - \mu_1 w_{3\alpha^j} w_{3\alpha^{3-j}\alpha^{3-j}} - \beta_2 R^j,$$
$$g_j \equiv g_j(w_3) = k_0 w_{3\alpha^j} - \beta_1 L^j, \quad \varphi_j(w_3)(t) = \beta_2 P^j\left(s\right) + [(-\mu)^j w^2_{3\alpha^1}(t)\big/2 +$$
$$+(-\mu)^{2-j} w^2_{3\alpha^2}(t)\big/2]\, d\alpha^{3-j}\big/ds + (-1)^{j-1}\mu_1\, w_{3\alpha^1}(t) w_{3\alpha^2}(t) d\alpha^j\big/ds, \quad j = 1, 2,$$
$$\tilde{\varphi}_2(w_3)\left(t\right) = \beta_1 N^2\left(s\right), t = t(s) = \alpha^1(s) + i\alpha^2(s) = \cos s + i \sin s \in \Gamma, \qquad (5)$$
$$\mu_1 = \left(1-\mu\right)\big/2, \mu_2 = \left(1+\mu\right)\big/2, k_3 = k_1 + \mu k_2, k_4 = k_2 + \mu k_1, k_5 = k_1^2 + k_2^2 + 2\mu k_1 k_2,$$
$$k_0 = 6k^2(1-\mu)/h^2, \beta_1 = 12(1-\mu^2)/(h^3 E), \beta_2 = (1-\mu^2)/(Eh).$$

Система (1) совместно с граничными условиями (2) – (4) описывает состояние равновесия упругой пологой изотропной однородной оболочки с шарнирно опертыми краями в рамках сдвиговой модели С.П. Тимошенко [1, с.168-170, 269]. При этом T^{ij} - усилия, M^{ij} - моменты:

$$T^{ij} \equiv T^{ij}\left(a\right) = D_0^{ijkn}\gamma^0_{kn}, M^{ij} \equiv M^{ij}\left(a\right) = D_2^{ijkn}\gamma^1_{kn}, a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2),$$
$$D^{ijkn}_m = \int_{-h/2}^{h/2} B^{ijkn}(\alpha^3)^m d\alpha^3;\; B^{1111} = B^{2222} = E\big/(1-\mu^2), B^{1122} = \mu E\big/(1-\mu^2),$$
$$B^{1212} = E\big/\left(2\left(1+\mu\right)\right),\; B^{1313} = B^{2323} = Ek^2\big/\left(2\left(1+\mu\right)\right),$$

остальные $B^{ijkn} = 0;$ здесь по повторяющимся индексам ведется суммирование от 1 до 3, по греческим индексам – от 1 до 2; $\alpha^j = \alpha^j(s)(j = 1,2)$ - уравнение кривой Г, s - длина дуги Г; $\gamma^k_{ij}(i, j = \overline{1,3}, k = 0,1)$ – компоненты деформаций срединной поверхности S_0 оболочки, гомеоморфной области Ω,

$$\gamma^0_{jj} = w_{j\alpha^j} - k_j w_3 + w^2_{3\alpha^j}/2,\; j = 1,2, \quad \gamma^0_{12} = w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1} + w_{3\alpha^1} w_{3\alpha^2},$$
$$\gamma^1_{jj} = \psi_{j\alpha^j},\; j = 1,2,\;\; \gamma^1_{12} = \psi_{1\alpha^2} + \psi_{2\alpha^1},$$
$$\gamma^0_{j3} = w_{3\alpha^j} + \psi_j,\; j = 1,2, \quad \gamma^0_{33} = \gamma^1_{k3} \equiv 0, k = \overline{1,3},$$

$w_j(j = 1,2)$ и w_3 - тангенциальные и нормальное перемещение точек S_0, $\psi_j(j = 1,2)$ - углы поворота нормальных сечений S_0, a - вектор обобщенных перемещений, $R^j\left(j = \overline{1,3}\right), L^k, P^k\left(k = 1,2\right), N^2$ - компоненты внешних сил, действующих на оболочку, $\mu = const$ - коэффициент Пуассона, $E = const$ - модуль Юнга, $k_1, k_2 = const$ - главные кривизны, $k^2 = const$ - коэффициент сдвига, $h = const$ - толщина оболочки, $\alpha^1, \alpha^2 = const$ - декартовы координаты точек области Ω.

Задача А. Найти решение системы (1), удовлетворяющее граничным условиям (2) – (4).

В случае единичного круга аналогичная задача исследована в [2]. В [3] - [5] система (1) изучена в произвольной области Ω при граничных условиях $w_1 = w_3 = \psi_1 = 0$, $w_2 = w_3 = \psi_2 = 0$ и $w_3 = \psi_2 = 0$ соответственно. В данной работе метод [2] - [5] развивается на случай произвольной упругой оболочки с шарнирно опертыми краями.

Краевую задачу А будем изучать в обобщенной постановке. Пусть выполнены следующее условие:

а) Ω – односвязная область с границей $\Gamma \in C^1_\beta$,

б) внешние силы $R^i \left(i = \overline{1,3}\right)$ и $L^k\left(k = 1,2\right)$ принадлежат $L_p(\Omega)$, компоненты внешних сил $P^k\left(k = 1,2\right)$ и N^2 принадлежат $C_\beta(\Gamma)$.

Определение. Обобщенным решением задачи А назовем вектор обобщенных перемещений $a = \left(w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2\right) \in W_p^{(2)}(\Omega)$, $p > 2$, почти всюду удовлетворяющий системе (1) и поточечно граничным условиям (2) – (4).

Здесь $W_p^{(2)}(\Omega)$ – пространство Соболева. В силу теорем вложения для соболевских пространств $W_p^{(2)}(\Omega)$, $p > 2$, обобщенное решение a принадлежит $C^1_\beta(\overline{\Omega})$. Здесь и далее $\alpha = (p-2)/p$.

Рассмотрим первые два уравнения системы (1) относительно тангенциальных перемещений, в которых w_3 временно считаем фиксированным. Общее решение имеет вид:

$$\omega_0(z) = w_2 + iw_1 = \Phi_2(z) + iTd[\Phi_1 + Tf](z), \tag{6}$$

$$z = \alpha^1 + i\alpha^2, \quad f = \left(f_1 + if_2\right)/2,$$

где $\Phi_1(z)\in C_\alpha(\overline{\Omega})$, $\Phi_2(z)\in C_\alpha^1(\overline{\Omega})$ – произвольные голоморфные функции.

Функции $\Phi_j(z),\ j=1{,}2$ находим так, чтобы тангенциальные перемещения w_1, w_2 удовлетворяли граничным условиям (3). С этой целью выражения тангенциальных перемещений w_1, w_2 из (6) подставляем в граничные условия (3). Тогда для голоморфных функций $\Psi_j(z)$ имеем задачу Римана – Гильберта в произвольной области Ω с краевым условием

$$\operatorname{Re}\{t'\Psi_j(t)\}=h_j(t),\quad t'=dt/ds,\quad t\in\Gamma,\quad j=1{,}2, \tag{7}$$

$$h_j(t)=l_j(w_3)(t)-\operatorname{Re}\{i^j t'Sd[\Phi_1]^+(t)\}+\mu_3\operatorname{Re}\{i^j\overline{t'}\Phi_1(t)\}/2, \tag{8}$$

$$l_j(w_3)(t)=\varphi_j(w_3)(t)/(\mu-1)-\operatorname{Re}\{i^j t'Sd[Tf]^+(t)+(-1)^j\mu_3 d\alpha^{3-j}/ds\operatorname{Re}Tf(t)\}.$$

$\Psi_j(t)$ – граничные значения голоморфных в Ω функций

$$\Psi_j(z)=i^{j-1}\Phi_2'(z)+i^{2-j}\mu_3\Phi_1(z)/2. \tag{9}$$

Пусть $z=\varphi(\zeta)$ – конформное отображение единичного круга $\overline{K}:|\zeta|\le 1$ на область $\overline{\Omega}$. Задачу (7) приводим к задаче Римана – Гильберта для голоморфной функции $\Psi_j(z)\varphi'(z)$ в единичном круге K с краевым условием

$$\operatorname{Re}\{t'\varphi'(t)\Psi_j(t)\}=h_j(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|,\quad t\in\partial K:|t|=1,\quad j=1{,}2. \tag{10}$$

Решаем задачу (10). Индекс этой задачи, как легко видеть, равен -1. Тогда, следуя [6*, с.253*], решение задачи (10) получим в виде

$$\Psi_j(z)=-\frac{1}{\pi\varphi'(z)}\int_{\partial K}\frac{h_j(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|}{t(t-z)}dt,\quad z\in\overline{K},\ j=1{,}2, \tag{11}$$

при этом должно выполняться условие разрешимости

$$\int_{\partial K}\frac{h_j(\varphi(t))\,|\varphi'(t)|}{t}dt=0,\quad j=1{,}2. \tag{12}$$

Функции $\Phi_1(z)$, $\Phi_2'(z)$ через $\Psi_j(z)(j=1,2)$ определяются из (9) равенствами

$$\Phi_1(z)=(\Psi_2(z)-i\Psi_1(z))/\mu_3,\ \Phi_2'(z)=(\Psi_1(z)-i\Psi_2(z))/2. \tag{13}$$

Преобразуем соотношение для $\Phi_1(z)$, в результате получим

$$\Phi_1(z)+\frac{1}{\pi\varphi'(z)}\iint_K\frac{\varphi'(\zeta)}{(1-\bar{\zeta}z)^2}\overline{\Phi_1(\zeta)}d\xi d\eta=\frac{i}{\pi\mu_3\varphi'(z)}A(w_3)(z),\quad z\in K, \tag{14}$$

где

$$A(w_3)(z)\equiv A[l(w_3)](z)=\int_{\partial K}\frac{l(w_3)(\varphi(t))\,|\,\varphi'(t)\,|}{t(t-z)}dt,\quad l(w_3)=l_1(w_3)+il_2(w_3). \tag{15}$$

Переходя от (14) к комплексно – сопряженному уравнению и исключая с его помощью $\overline{\Phi_1(\zeta)}$ в (14), для определения голоморфной функции $\Phi_1(z)$ получаем интегральное уравнение вида

$$\Phi_1(z)-\iint_K h(\zeta;z)\Phi_1(\zeta)d\xi d\eta=B(w_3)(z),\quad z\in K, \tag{16}$$

где

$$h(\zeta;z)=\frac{\overline{\varphi'(\zeta)}}{\pi^2\varphi'(z)}\iint_K\frac{\varphi'(\zeta_1)}{\overline{\varphi'(\zeta_1)}}\frac{d\xi_1d\eta_1}{(1-\overline{\zeta_1}z)^2(1-\zeta\overline{\zeta_1})^2},\quad \zeta_1=\xi_1+i\eta_1, \tag{17}$$

$$B(w_3)(z)\equiv B[l(w_3)](z)=\frac{i}{\pi\mu_3\varphi'(z)}\left\{\frac{1}{\pi}\iint_K\frac{\varphi'(\zeta)}{\overline{\varphi'(\zeta)}}\frac{\overline{A(w_3)(\zeta)}}{(1-\bar{\zeta}z)^2}d\xi d\eta+A(w_3)(z)\right\}.$$

Исследуем разрешимость уравнения (16) в пространстве $C_\alpha(\overline{K})$. Легко показать, что к уравнению (16) применима альтернатива Фредгольма. Непосредственной подстановкой убеждаемся в том, что $\Phi_1(z)=ic_2$ является решением однородного уравнения

$$\Phi_1(z)-\iint_K h(\zeta;z)\Phi_1(\zeta)d\xi d\eta=0,\quad z\in K. \tag{18}$$

Покажем, что других решений уравнения (18) не существует. Допустим противное: пусть $\Phi_1(z) \in C_\alpha(\overline{K})$ – какое-нибудь другое решение. Этому решению по формулам (11) с $l_j(w_3)(\varphi(t)) \equiv 0$ $(j=1,2)$ соответствуют функции $\Psi_j(z)$, $j=1,2$, которые в свою очередь по второй формуле в (13) определяют $\Phi_2(z)$. Тогда перемещения w_1, w_2, найденные с помощью представления (6) при $f \equiv 0$, удовлетворяют однородным уравнениям

$$w_{1\alpha^1\alpha^1} + \mu_1 w_{1\alpha^2\alpha^2} + \mu_2 w_{2\alpha^1\alpha^2} = 0, \ \ \mu_1 w_{2\alpha^1\alpha^1} + w_{2\alpha^2\alpha^2} + \mu_2 w_{1\alpha^1\alpha^2} = 0$$

и однородным граничным условиям (3) с $\varphi_j(w_3)(t) \equiv 0$, $j=1,2$. Равенства соответственно умножим на w_1, w_2, проинтегрируем по области Ω и сложим. В результате будем иметь $w_{j\alpha^j} = 0$ $(j=1,2)$, $w_{1\alpha^2} + w_{2\alpha^1} = 0$ в Ω, откуда с учетом соотношений (13) вытекает равенство $\operatorname{Re}\Phi_1(z) = 0$, то есть $\Phi_1(z) = ic_0$, $z \in \Omega$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим однородное уравнение вида

$$\Psi(z) - \iint_K \overline{h(z;\zeta)}\Psi(\zeta)d\xi d\eta = 0, \tag{19}$$

союзное уравнению (18).

Непосредственной подстановкой убеждаемся в том, что $\Psi(z) = |\varphi'(z)|^2$ является решением уравнения (19). Следовательно, для разрешимости уравнения (16) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\iint_K B[l(w_3)](z)\,|\varphi'(z)|^2 d\alpha^1 d\alpha^2 = 0. \tag{20}$$

Тогда решение уравнения (16) можно представить в виде

$$\Phi_1(z) = \Phi_1[l(w_3)](z) + ic_2, \ \ \Phi_1[l(w_3)](z) = \Re_1 B[l(w_3)](z), \ \ z \in K, \tag{21}$$

где $\Re_1 g$ – линейный ограниченный оператор в $C_\alpha(\overline{K})$, существование которого следует из третьей теоремы Фредгольма [7, с.91]. Причем, при выполнении условий *а*), *б*) решение $\Phi_1(z)\in C_\alpha(\overline{K})$ уравнения (16) принадлежит пространству $W_p^{(1)}(K),\ 2<p<2/(1-\beta)$.

Пусть $\zeta=\psi(z)$ – функция, обратная $z=\varphi(\zeta)$. Известно [8, с.25], что $\psi(z)\in C_\beta^1(\overline{\Omega})$. Тогда, очевидно, $\Phi_1(\psi(z))\in W_p^{(1)}(\Omega)$, $2<p<2/(1-\beta)$.

Подставляя выражения (21) в (11), а затем (11) во вторую формулу (13), для $\Phi_2'(\psi(z))$ получаем представление вида

$$\Phi_2'(\psi(z))=\Phi_2'[l(w_3)](\psi(z))-(d_1-d_2)c_2 b'(z),\ z\in\Omega, \tag{22}$$

$$\Phi_2'[l(w_3)](\psi(z))=-\frac{\psi'(z)}{2\pi}\int_{\partial K}\frac{h_0[l(w_3)](t)}{t(t-\psi(z))}dt,\ \ b'(z)=S_\Gamma(\bar{t})(z),$$

$$h_0[l(w_3)](t)=|\varphi'(t)|\,\overline{l(w_3)(\varphi(t))}+t\varphi'(t)Sd[\Phi_1[l(w_3)]]^+(\varphi(t))+\mu_3\overline{t\varphi'(t)}\Phi_1[l(w_3)](t)/2.$$

Отсюда в свою очередь будем иметь

$$\Phi_2(\psi(z))=\Phi_2[l(w_3)](\psi(z))-(d_1-d_2)c_2 b(z)+c_3+ic_4,\ z\in\Omega, \tag{23}$$

$$\Phi_2[l(w_3)](\psi(z))=\frac{1}{2\pi}\int_{\partial K}\ln\left(1-\frac{\psi(z)}{t}\right)\frac{h_0[l(w_3)](t)}{t}dt,\ \ b(z)=T_\Gamma(\bar{t})(z),$$

где $c_i\,(i=2,3,4)$ – произвольные действительные постоянные; под $\ln\bigl(1-\psi(z)/t\bigr)$ понимается ветвь, которая обращается в нуль при $\psi(z)=0$. Причем, легко показать, что $\Phi_2'(\psi(z))\in W_p^{(1)}(\Omega)$, $2<p<2/(1-\beta)$.

Теперь если выражения (21), (23) подставить в (6), то для тангенциальных перемещений w_1, w_2, удовлетворяющих первым двум уравнениям в (1) и граничным условиям (3), при выполнении условий (12), (20) получим представление

$$\omega_0(z) = H_0 w_3 + \omega_{0*}, \quad z \in \Omega, \tag{24}$$

$$H_0 w_3(z) \equiv H_0[f(w_3); l(w_3)](z) = \Phi_2[l(w_3)](\psi(z)) + iTd[\Phi_1[l(w_3)](\psi(\zeta)) +$$
$$+ Tf(w_3)(\zeta)](z), \;\; \omega_{0*} = c_2 \bar{z} \big/ (1-\mu) + c_3 + ic_4.$$

Условия разрешимости (12), (20) после преобразования представимы в виде

$$\int\limits_\Gamma P^j(s)ds + \iint\limits_\Omega R^j d\alpha^1 d\alpha^2 = 0, \; j = 1,2, \tag{25}$$

$$\int\limits_\Gamma (\alpha^1 P^2 - \alpha^2 P^1)ds + \iint\limits_\Omega (\alpha^1 R^2 - \alpha^2 R^1) d\alpha^1 d\alpha^2 = 0.$$

Переходим к нахождению функций ψ_1, ψ_2 из последних двух уравнений в (1). Для углов поворота ψ_1, ψ_2, удовлетворяющих условиям в (2) и (4), получаем представление

$$\psi = \psi_2 + i\psi_1 = \left(I - K_0\right)^{-1} H_0\left[g\left(w_3\right); \tilde{\varphi}_2\left(w_3\right)\right], \tag{26}$$

$$\tilde{\psi} = k_0(\psi_1 + i\psi_2)/2, g \equiv g(w_3) = (g_1 + ig_2)/2, g_j \equiv g_j(w_3);$$

При этом должно выполняться условие разрешимости, которое, поступая как и выше, можно привести к виду

$$\beta_1(\int\limits_\Gamma N^1(s)ds + \iint\limits_\Omega L^1 d\alpha^1 d\alpha^2) - k_0 \iint\limits_\Omega \psi_1 d\alpha^1 d\alpha^2 = 0, \tag{27}$$

Условие (27) при углах поворота (26) выполняется тождественно.

Подставляя найденные значения тангенциальных перемещений w_1, w_2, углов поворота ψ_1, ψ_2 и их производных первого порядка из (24), (26) в третье уравнение системы (1), сводим задачу А, с учетом условия $w_3 = 0$ на Γ, к уравнению

$$w_{3\alpha^1\alpha^1} + w_{3\alpha^2\alpha^2} + K_1 w_3 + G_1 w_3 = 0,$$

$$w_3 + Kw_3 + Gw_3 = 0, \tag{28}$$

$$Kw_3 = \iint_{\Omega} H(\varsigma, z) K_1 w_3(\varsigma) d\xi d\eta, \;\; Gw_3 = \iint_{\Omega} H(\varsigma, z) G_1 w_3(\varsigma) d\xi d\eta$$

$H(\varsigma, z)$ – гармоническая функция Грина для единичного круга. Kw_3 – линейный вполне непрерывный, Gw_3 – нелинейный ограниченный операторы в $W_p^{(2)}(\Omega)$, $2 < p < 2/(1-\beta)$.

Уравнение $w_3 + Kw_3 = 0$ имеет только тривиальное решение в $W_p^{(2)}(\Omega)$, $2 < p < 2/(1-\beta)$. Следовательно, существует обратный оператор $(I + K_0)^{-1}$, ограниченный в $W_p^{(2)}(\Omega)$, $2 < p < 2/(1-\beta)$, с помощью которого уравнение (28) сведется к эквивалентному

$$w_3 + G_* w_3 = 0, \qquad G_* w_3 = (I + K)^{-1} G w_3 \tag{29}$$

Из вышеустановленных свойств оператора Gw_3 следует, что $G_* w_3$ – нелинейный ограниченный оператор в $W_p^{(2)}(\Omega)$, $2 < p < 2/(1-\beta)$.

Предположим, что радиус r шара и внешние силы, действующие на оболочку, таковы, что выполняются условия

$$q_* < 1, \qquad \|G_*(0)\|_{W_p^{(2)}(\Omega)} < (1 - q_*) r. \tag{30}$$

В этих условиях к уравнению (29) можно применить принцип сжатых отображений [9, с.146], согласно которому уравнение (29) в шаре $\|w_3\|_{W_p^{(2)}} < r$ имеет единственное решение $w_3 \in W_p^{(2)}(\Omega)$, $2 < p < 2/(1-\beta)$.

Теорема. *Пусть выполнены условия а), б), неравенства (30). Тогда для разрешимости геометрически нелинейной задачи равновесия для пологих упругих оболочек типа Тимошенко при граничных условиях (2) – (4) необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (25). В случае их выполнения задача имеет обобщенное решение* $a = (w_1, w_2, w_3, \psi_1, \psi_2) \in W_p^{(2)}(\Omega), 2 < p < 2/(1-\beta)$.

Литература

1. Галимов К.З. Основы нелинейной теории тонких оболочек. – Изд-во Казан. ун-та, 1975.

2. Тимергалиев С.Н., Харасова Л.С. Иследование разрешимости одной краевой задачи для системы нелинейных дифференциальных уравнений теории пологих оболочек типа Тимошенко // Дифференциальные уравнения. – 2016. – Т.52. - №5. – С.651-664.

3. Timergaliev S.N., Kharasova L.S. On the existence of solutions of one nonlinear boundary-value problem for shallow shells of Timoshenko type with simply supported edges // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. – 2016. – Vol. 158. - Code 012092.

4. Харасова Л.С. К вопросу о разрешимости одной геометрически нелинейной краевой задачи для оболочек типа Тимошенко с шарнирно опертыми краями // Социально-экономические и технические системы: исследование, проектирование, оптимизация. – 2017. - № 3 (76). – С.28-35.

5.Тимергалиев С.Н., Харасова Л.С. К проблеме разрешимости одной геометрически нелинейной краевой задачи для системы дифференциальных уравнений теории пологих оболочек типа Тимошенко // Актуальные проблемы физико-математического образования: материалы II Международной научно-практической конференции (20-22 октября, 2017г., Наб. Челны). - Набережные Челны: НГПУ, 2017. – С.50-51.

6. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.: Физматгиз, 1963.

7. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных. – М.: Наука, 1976.

8. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. – М.: Наука, 1988.

9. Красносельский М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. – М.: Гостехиздат, 1956.

Kharasova L.S., senior lecturer, Naberezhnye Chelny Institute of Kazan Federal University, kharasova.liya@mail.ru

THE STUDY OF SOLVABILITY OF ONE OF THE GEOMETRICALLY NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE SHALLOW SHELL THEORY OF THE TIMOSHENKO TYPE.

Abstract. The article is devoted to the solvability of a geometrically *nonlinear equilibrium problem for shallow elastic homogeneous Timoshenko-type shells with simply supported edges in an arbitrary field. The research consists in reduction the original problem to one nonlinear operator equation. The solvability is established by the principle of contracting mappings. The method based on integral representations for displacements, which are built with the assistance of the general solutions of the nonhomogeneous equation of Cauchy-Riemann.*

Key word: system of nonlinear differential equations, boundary problem, equilibrium equations, integral images, existence theorem.