Стохастическая геометрия

Дмитрий Запорожец

Санкт-Петербургское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова РАН
zap1979@gmail.com

Казань
12 мая 2017

Предыстория теории вероятностей - азартные игры

Al-zar (араб.) – игральная кость.

Христиан Гюйгенс

“Я полагаю, что при внимательном изучении предмета читатель заметит, что имеет дело не только с игрой, но что здесь закладываются основы очень интересной и глубокой теории.”

Пьер Симон Лаплас

“Замечательно, что науке, начинавшейся с рассмотрения азартных игр, суждено было стать важнейшим объектом человеческого знания.”

Предыстория теории вероятностей - азартные игры

Епископ Виболд, “Ludus Regularis”, 960 г.

Число различных исходов при бросании трех игральных костей равно 56 (правильный ответ 216).

Ошибка Даламбера

Вероятность того, что две брошенные монеты выпадут орлом, равна $1/3$ (правильный ответ $1/4$).

Переписка Паскаля и Ферма: рождение науки

М. В. Остроградский

“Паскаль, а за ним Ферма, геометры XVII столетия, по справедливости считаются основателями науки о вероятностях”.

Задачи шевалье де Мере (1607-1648)

- Сколько раз нужно подбросить две кости, чтобы число случаев, благоприятствующих выпадению двух шестерок хотя бы раз, было больше числа случаев, когда ни при одном броске не выпадает двух шестерок?
- Как нужно разделить ставку между игроками, когда они прекратили игру, не набрав необходимого для выигрыша числа очков?

Классическая вероятность

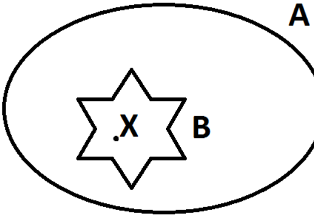
Якоб Бернулли, “Искусство предположений”, 1713

Вероятность события – это отношение числа благоприятствующих этому событию исходов к числу всех возможных равновероятных исходов.

Пример

Какова вероятность того, что при бросании двух костей сумма выпавших очков не будет превосходить четырех?

Геометрическая вероятность



$$\mathbb{P}[X \in B] = \frac{S(B)}{S(A)}$$

Геометрическая вероятность

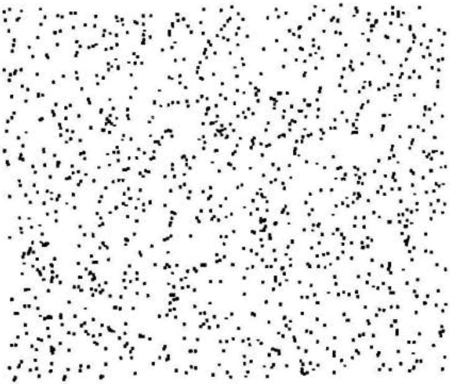
Жорж Бюффон, задача об игле, 1733

“Геометрия может быть использована в качестве аналитического инструмента в области теории вероятностей”.

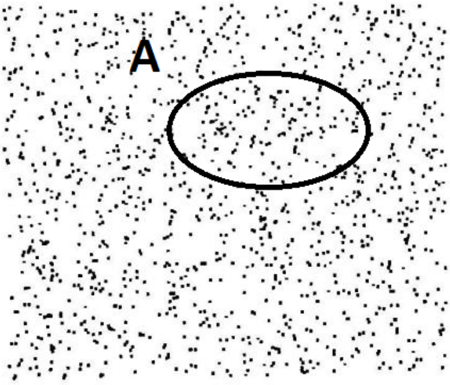
Пример: задача о встрече

Какова вероятность Вашей встречи с другом, если вы договорились встретиться в определенном месте, с 12.00 до 13.00 часов и ждете друг друга в течение 5 минут?

Двумерный пуассоновский процесс

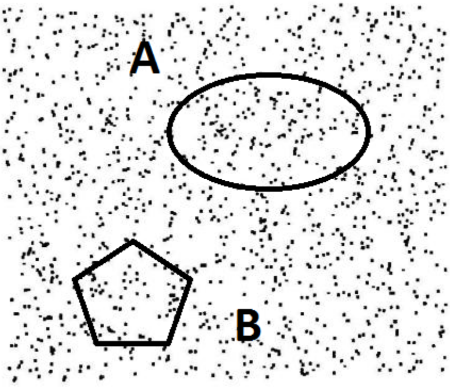


Двумерный пуассоновский процесс



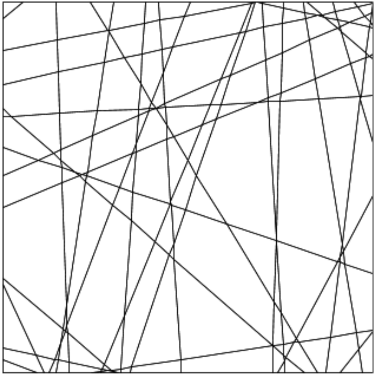
$$\mathbb{P}[\mu(A) = k] = \frac{(\lambda S(A))^k}{k!} e^{-\lambda S(A)}, \quad \mathbb{P}[\mu(A) = 0] = e^{-\lambda S(A)}.$$

Двумерный пуассоновский процесс



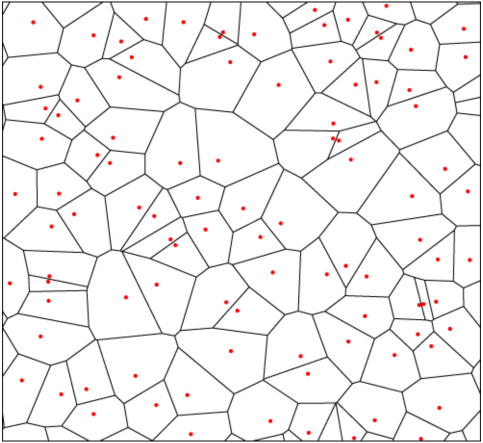
$\mu(A)$ и $\mu(B)$ независимы.

Пуассоновский процесс прямых



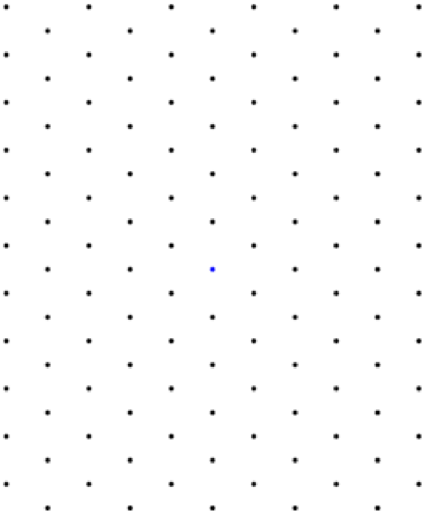
Источник: C. Gloaguen, F. Fleischer, H. Schmidt, V. Schmidt, Simulation of typical Cox–Voronoi cells with a special regard to implementation tests.

Мозаика Пуассона–Вороного

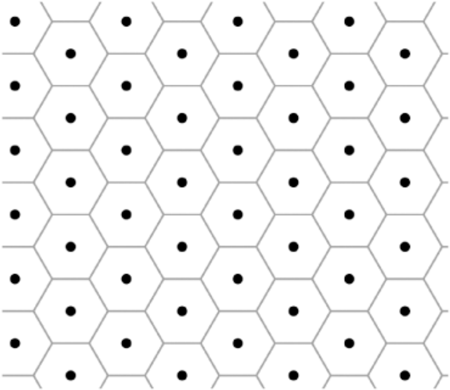


Источник: H. J. Hilhorst, Asymptotic statistics of the n-sided planar Poisson–Voronoi cell.

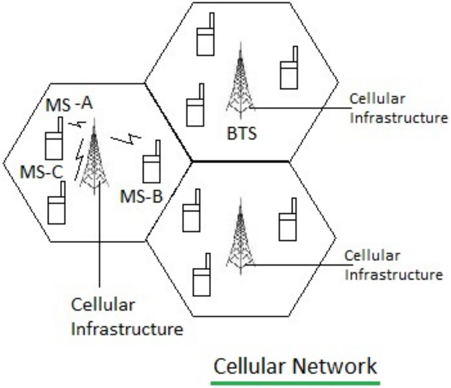
Треугольная решетка



Мозаика Вороного для треугольной решетки



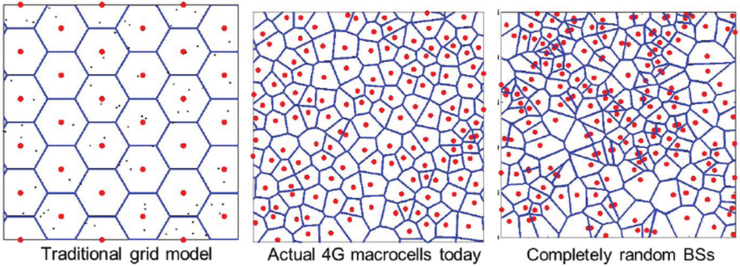
Традиционная модель для сетей сотовой связи



Источник: http://www.rfwireless-world.com/Terminology/Cellular-network-vs-Ad-Hoc-network.html

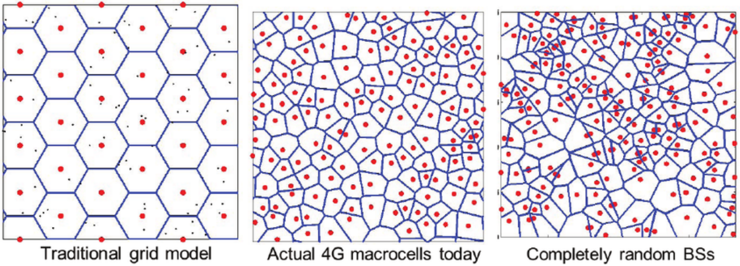
Стохастическая модель

J. Andrews, F. Baccelli, and R. Ganti. "A tractable approach to coverage and rate in cellular networks."IEEE Transactions on Communications 59(11) (2011): 3122-3134.

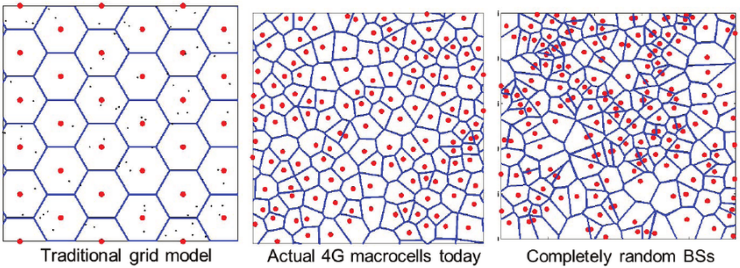


Источник: J. Andrews, H. Claussen, M. Dohler, Femtocells: Past, present, and future.

Сравнение моделей



Традиционные решеточные сети все еще наиболее популярны, но системы связи 4G имеют более маленькие и неправильные ячейки и лучше моделируются точечным пуассоновским процессом.
Источник: J. Andrews, H. Claussen, M. Dohler, Femtocells: Past, present, and future.



Расстояние до ближайшей базовой станции

$$\mathbb{P}[\xi > R] = e^{-\lambda \pi R^2}.$$

Вероятность покрытия. Signal-to-inference-plus-noise ratio (SINR)

$$SINR = \frac{h\xi^{-\alpha}}{\sigma^2 + \sum \xi_i^{-\alpha}}, \quad \alpha > 2.$$

$$\mathbb{P}[SINR > T] = ?$$

СПАСИБО!