

УДК 523.34

doi: 10.26907/2541-7746.2020.4.481-491

ИССЛЕДОВАНИЕ СЕЛЕНОФИЗИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ НА ОСНОВЕ МЕТОДА РОБАСТНЫХ ОЦЕНОК

Ю.А. Нефедьев, А.О. Андреев, Н.Ю. Демина

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

Настоящая работа посвящена вопросам редукции долгопериодических рядов астрономических наблюдений. Такие ряды измерений содержат как неравноточные, так и ошибочные наблюдения. Поэтому определение из таких наблюдений искомым параметров является достаточно сложной задачей. Основную трудность представляет адекватная оценка точности полученных результатов. Для решения этой проблемы разработано множество подходов, но помехоустойчивый метод Хьюбера (NIHEM – Noise Immunity Huber Estimator Method) позволяет наилучшим образом оценить искомые параметры. В работе селенофизические параметры найдены в результате анализа измерений положения кратера Mösting A по данным миссий Kaguya и Apollo и гелиометрических наблюдений. Такие наблюдения отличаются сложной внутренней структурой, и их анализ с помощью метода наименьших квадратов не позволяет провести оценку и исключение ошибочных измерений и учесть неравноточность проведенных наблюдений. По этой причине для вывода искомым селенофизических параметров использован NIHEM-подход. В результате получены значения и оценки радиус-вектора кратера Mösting A, его селенографической долготы и широты, а также величины наклона лунного экватора к эклиптике, гармоники в разложении физической либрации по долготе и поправки к среднему радиусу Луны.

Ключевые слова: метод M -оценок, помехоустойчивый робастный анализ, селенографические наблюдения, планетофизические параметры

Введение

Для нахождения селенофизических параметров требуется редукция больших рядов данных наблюдений. Такие наблюдательные ряды формируются на основе космических миссий и наземных телескопов с использованием современных измерительных технологий и регистрирующих систем. К этим наблюдениям относятся астрометрические, фотограмметрические, навигационные, геодезические и др. В настоящей работе длительные селенофизические временные ряды наблюдений анализируются с применением робастного помехоустойчивого M -метода оценки искомым параметров NIHEM (Noise Immunity Huber Estimator Method). Развитие NIHEM вызвано необходимостью создания высокоточного координатно-временного обеспечения для построения цифровых моделей структуры Луны и разработки навигационной окололунной системы координат [1]. Необходимо отметить, что обработка рядов разнородных наблюдений, полученных с использованием различных методов и измерительных приборов, может быть сопряжена с большим количеством систематических и случайных ошибок. Приведение таких разнородных космических и наземных наблюдений в единую систему является до сих пор не решенной до конца и одной из труднейших задач. Разнородность наблюдений

заключается в неточности нахождения орбитальных параметров космических аппаратов (КА), отличии самих орбит, наличии ошибочных измерений и т. д. Тем не менее каждое астрономическое измерение является ценным и уникальным, так как в отличие от многих экспериментов в области химии и физики астрономические наблюдения не могут быть заново воспроизведены для заданных условий эксперимента. С другой стороны, определенная часть астрономических измерений может содержать ошибки, как и в случае проведения любых экспериментальных работ. Ошибки могут возникнуть под действием многих факторов – как естественных, так и технологических: вследствие несовершенства измерительных приборов, из-за погодных условий в момент измерений, по субъективным и объективным причинам и т. д. Поэтому высокоточная обработка селенодизических наблюдений зависит от выбора оптимального метода оценки искомых параметров для исключения ошибочных измерений. Имеется большое разнообразие методов для определения достоверности результатов исследований, значительной частью которых является робастное моделирование. Робастное моделирование параметрических систем при редукции наблюдений, в отличие от метода наименьших квадратов (МНК), позволяет исключить факторы, влияющие на точность оценки значений селенофизических параметров. Практика показала, что одним из самых эффективных подходов для решения данной проблемы является NINEM-подход, разработанный Хьюбером [2] и являющийся достаточно простым для работы по сравнению с другими аналогичными методами. Данный метод имеет другие названия: метод M -оценок (M -estimators), или метод максимального правдоподобия. Развитие NINEM осуществлено во многих последующих работах [3, 4]. Одним из свойств NINEM является тот факт, что при отсутствии корреляционных измерений, наличии аномальных наблюдений и других искажающих факторов результаты, полученные с использованием NINEM и МНК, должны быть одинаковыми. Если этого не происходит, то можно сделать вывод о наличии грубых ошибок измерений. NINEM позволяет произвести анализ всей совокупности наблюдений, полученных в ходе экспериментов, введением достоверных значений «весов» измерений на основе построенной функции Хьюбера, и привести их в единую систему с использованием регрессионного моделирования.

Определение планетофизических параметров является современной и актуальной задачей для решения следующих проблем:

- 1) моделирование физической поверхности Луны;
- 2) селеноцентрическая привязка и нахождение центра проецирования наземных и космических измерений с целью решения обратной фотограмметрической задачи;
- 3) определение планетофизических параметров для Луны;
- 4) построение структурных моделей макрорельефа и внутреннего строения Луны.

В настоящей работе использовались данные измерений космических миссий Kaguya и Apollo и данные наземных гелиометрических наблюдений, последние получены нами. Вся цифровая наблюдательная база наблюдений обозначена как Digital Observation Database (DOD). Проведенные в работе исследования показали, что в DOD имеются аномальные наблюдения, которые не могут быть исключены применением классического МНК. Поэтому для оценки искомых параметров необходимо использовать эффективный робастный метод, в нашем случае применен NINEM.

1. Создание регрессионных моделей селенодизических наблюдений

Определение селенофизических параметров сводится к нахождению матрицы поворота координатных систем A . Для этих целей составляется и решается урав-

нение, представляющее регрессионную модель

$$Z = A\Delta q + \varepsilon, \quad (1)$$

где Z – свободные члены (вектор размерности n), A – матрица поворота размерности $n \times m$, ε – вектор ошибок размерности n .

Алгоритм вычисления значений компонент вектора Z , а также компонент матрицы A достаточно подробно описан в [5].

По отношению к вектору Δq необходимо отметить, что его конкретная форма определяется подходом к определению параметра f . В случае использования вышеописанного метода можно записать

$$\Delta q = [\Delta\lambda, \Delta\beta, \Delta J, a_3, \Delta R_0, \Delta H], \quad (2)$$

где $\Delta\lambda$ и $\Delta\beta$ являются поправками к селенографическим стандартным значениям долготы λ_0 и широты β_0 , ΔJ есть поправка к стандартной величине наклона экватора Луны к эклиптике J_0 , a_3 представляет собой третью гармонику в разложении физической либрации по долготе, через ΔR_0 обозначена поправка к среднему лунному радиусу R_0 , а за ΔH – поправка к стандартной величине радиус-вектора h_0 лунного кратера.

Если для оценки искомых параметров используется МНК, то считается, что распределение ошибок измерений соответствует стандартному нормальному закону с фиксированным значением ожидания $E(\varepsilon)$ и ковариационной матрицей D . Тогда для D с точностью σ^2 можно записать

$$D = \sigma^2 M, \quad (3)$$

где σ^2 – определенный положительный множитель, M – введенная положительно заданная матрица. При известном значении $E(\varepsilon)$ задача оценки искомых параметров с помощью МНК для всех возможных случаев может быть сведена к виду, когда $E(\varepsilon) = 0$ [6]. В результате оценка параметров с использованием МНК выполняется с соблюдением условия

$$F(\varepsilon) = N[0, \sigma^2, M], \quad (4)$$

где $N[E(\varepsilon), D]$ в случае нормального распределения ошибок измерений представляет величину стандартной плотности.

Для классического МНК можно записать следующее выражение [7]:

$$\Delta\hat{q} = SA^T D^{-1} Z. \quad (5)$$

Здесь через $(SA^T D^{-1} Z)^{-1}$ обозначена матрица, у которой дисперсионные параметры для компонент вектора $\Delta\hat{q}$ расположены по диагонали.

Значительным недостатком классического МНК является большая зависимость МНК-оценок от случайных аномальных отклонений распределения ошибок измерений от стандартного нормального закона [8]. Данный недостаток усугубляется тем фактом, что эти отклонения невозможно контролировать. Еще в XIX веке Ньюкомб (1886) подчеркивал важность учета аномальных отклонений распределения ошибок от нормального закона, так как в данном случае возникают массивные хвосты в распределении по сравнению с нормальным случаем, что объясняется наличием различных ошибок измерений. Поскольку в классическом МНК нет возможности учета ошибочных выбросов, при редукции наблюдений используются различные числовые и аналитические методы очистки измерений от грубых ошибок. Задача точной оценки планетофизических параметров в этом отношении не является исключением. Проблема достоверной оценки искомых параметров всегда являлась важной составляющей любой редукции наблюдательных данных. Однако при обработке большого массива разнородных наблюдений всегда присутствуют как ошибочные измерения, так и ошибочные выбросы [9].

2. Использование метода Хьюбера для анализа моделей наблюдений

Как отмечено выше, для получения оценок селенофизических параметров, защищенных от возможных аномальных ошибок измерений, использован помехоустойчивый (робастный) метод оценок [10], а именно робастный вариант метода наименьших квадратов, взвешенных по вариациям, в котором весовая матрица P ищется с использованием функции Хьюбера Ψ . Решение ищется согласно следующим формулам:

$$\Delta \tilde{q} = (A^T B A)^{-1} A^T B, \quad (6)$$

где

$$\text{diag } B = \frac{\Psi(\xi)}{\xi}, \quad (7)$$

$$\Psi(\varepsilon) = \begin{cases} \xi, & |\xi| \leq b, \\ b \text{ sign}(\xi), & |\xi| \geq b', \end{cases} \quad (8)$$

$$\xi = \frac{Z_i - A_i \Delta q_0}{M}. \quad (9)$$

В свою очередь, медиана среди ненулевых значений равна

$$M = \text{med} \{|Z_i - A_i \Delta q_0| / 0.6745 \neq 0\}, \quad (10)$$

где Δq_0 – предварительная оценка вектора Δq ; b – параметр настройки.

Оценка точности конечного результата $\Delta \tilde{q}$ описывается ковариационной матрицей следующего вида:

$$\text{Cov} = k(A^T A)^{-1}, \quad (11)$$

где

$$k = (Mn)^2 \sum_1^n \frac{\Psi^2(\xi)}{n-m} \left[\sum_1^n \Psi(\xi) \right]^2. \quad (12)$$

В этом случае в выражениях (9) и (10) окончательное значение Δq_0 вектора равно Δq .

3. Анализ результатов

Значения селенофизических параметров [11] Луны получены с использованием двух указанных выше подходов: МНК (LSM) и НИЕМ. Чтобы качественно проанализировать данные, взятые для обработки, проведена оценка вариантов с различными объемами исследуемой информации:

- 1) VARIANT 1 – решена система (5) размера 616×6 (глобальная система),
- 2) VARIANT 2 – решена первая половина глобальной системы,
- 3) VARIANT 3 – решена вторая половина глобальной системы.

Окончательные значения LSM-оценок и M -оценок селенофизических параметров приведены в табл. 1–3 (согласно различным объемам обработанной информации). Поправки к начальным значениям селенофизических параметров приведены в табл. 4–6.

В качестве значений селенофизических параметров [12], полученных в результате обработки лунных наблюдений, рекомендуется принять робастные оценки, представленные в табл. 7.

Табл. 1

Селенофизические параметры для VARIANT 1

Параметры	LSM-оценки	M-оценки	
		$b = 1.50$	$b = 1.345$
λ	$-5^{\circ}10'10.24'' \pm 10.08''$	$-5^{\circ}10'11.25'' \pm 10.15''$	$-5^{\circ}10'10.09'' \pm 6.53''$
β	$-3^{\circ}12'30.40'' \pm 9.16''$	$-3^{\circ}12'14.14'' \pm 7.32''$	$-3^{\circ}12'22.37'' \pm 6.24''$
J	$1^{\circ}31'50.26'' \pm 10.12''$	$1^{\circ}31'39.24'' \pm 8.44''$	$1^{\circ}31'38.8'' \pm 8.46''$
f	0.633 ± 0.048	0.642 ± 0.029	0.641 ± 0.021
R_C	$932.311'' \pm 0.027''$	$932.300'' \pm 0.019''$	$932.299'' \pm 0.015''$
H	933.400 ± 0.450	933.425 ± 0.400	933.470 ± 0.3001

Табл. 2

Селенофизические параметры для VARIANT 2

Параметры	LSM-оценки	M-оценки	
		$b = 1.50$	$b = 1.345$
λ	$-5^{\circ}09'35.84'' \pm 20.10''$	$-5^{\circ}09'36.72'' \pm 11.01''$	$-5^{\circ}09'33.22'' \pm 19.84''$
β	$-3^{\circ}12'23.72'' \pm 15.44''$	$-3^{\circ}12'23.20'' \pm 9.44''$	$-3^{\circ}12'23.33'' \pm 8.17''$
J	$1^{\circ}31'37.19'' \pm 20.11''$	$1^{\circ}31'39.80'' \pm 12.54''$	$1^{\circ}31'35.44'' \pm 12.43''$
f	0.654 ± 0.055	0.661 ± 0.050	0.662 ± 0.039
R_C	$932.421'' \pm 0.072''$	$932.312'' \pm 0.043''$	$932.567'' \pm 0.075''$
H	933.662 ± 0.742	933.711 ± 0.679	933.642 ± 0.492

Табл. 3

Селенофизические параметры для VARIANT 3

Параметры	LSM-оценки	M-оценки	
		$b = 1.50$	$b = 1.345$
λ	$-5^{\circ}09'63.48'' \pm 18.78''$	$-5^{\circ}09'52.29'' \pm 21.33''$	$-5^{\circ}09'52.43'' \pm 16.22''$
β	$-3^{\circ}12'30.57'' \pm 18.32''$	$-3^{\circ}12'46.17'' \pm 10.59''$	$-3^{\circ}12'29.17'' \pm 14.22''$
J	$1^{\circ}31'54.40'' \pm 19.43''$	$1^{\circ}32'03.11'' \pm 20.31''$	$1^{\circ}31'57.64'' \pm 10.84''$
f	0.600 ± 0.054	0.601 ± 0.062	0.601 ± 0.072
R_C	$932.296'' \pm 0.044''$	$932.255'' \pm 0.042''$	$932.390'' \pm 0.041''$
H	933.311 ± 0.649	933.401 ± 0.396	933.501 ± 0.421

При оценке методом наименьших квадратов принята гипотеза о эквипотенциальных измерениях, то есть $R = 1$ в выражении (3). В то же время оценка $\Delta\hat{q}$ вектора Δq определена из выражения

$$\Delta\hat{q} = (A^T A)^{-1} A Z. \quad (13)$$

Заключение

Большая сложность структурных элементов современных моделей требует новых подходов к системным решениям для поддержания необходимого уровня точности, что можно обеспечить робастными методами и подходами. Кроме того, запрос на индивидуальное производство с введением разнородных наблюдений увеличивает разнообразие вычислительных систем, что делает их реконфигурацию трудоемкой и сложной задачей и требует соответствующих суперкомпьютерных мощностей [13].

Табл. 4

Поправки к селенофизическим параметрам для VARIANT 1

Параметры	LSM-оценки	M-оценки	
		$b = 1.50$	$b = 1.345$
ΔH	$23.42'' \pm 94.53''$	$41.20'' \pm 49.80''$	$44.03'' \pm 57.42''$
$\Delta \lambda$	$5.07'' \pm 17.44''$	$8.33'' \pm 11.14''$	$8.92'' \pm 14.63''$
$\Delta \beta$	$-77.68'' \pm 10.40''$	$-79.12'' \pm 11.73''$	$-73.57'' \pm 14.52''$
ΔJ	$-37.62'' \pm 26.11''$	$-30.39'' \pm 19.46''$	$-33.53'' \pm 21.18''$
a_3	91.84 ± 22.30	87.37 ± 18.41	85.39 ± 17.20
ΔR_0	-0.322 ± 0.048	-0.335 ± 0.043	-0.342 ± 0.042

Табл. 5

Поправки к селенофизическим параметрам для VARIANT 2

Параметры	LSM-оценки	M-оценки	
		$b = 1.50$	$b = 1.345$
ΔH	$14.22'' \pm 104.31''$	$62.17'' \pm 98.77''$	$-84.43'' \pm 99.41''$
$\Delta \lambda$	$30.11'' \pm 41.12''$	$40.32'' \pm 21.81''$	$42.10'' \pm 8.23''$
$\Delta \beta$	$-62.87'' \pm 21.23''$	$-73.54'' \pm 11.31''$	$-92.22'' \pm 15.42''$
ΔJ	$-41.76'' \pm 23.64''$	$-52.11'' \pm 19.72''$	$-56.37'' \pm 25.19''$
a_3	74.15 ± 31.25	55.63 ± 23.14	79.15 ± 17.22
ΔR_0	-0.366 ± 0.048	-0.369 ± 0.052	-0.368 ± 0.041

Табл. 6

Поправки к селенофизическим параметрам для VARIANT 3

Параметры	LSM-оценки	M-оценки	
		$b = 1.50$	$b = 1.345$
ΔH	$5.63'' \pm 104.33''$	$21.17'' \pm 106.11''$	$18.72'' \pm 75.48''$
$\Delta \lambda$	$31.67'' \pm 26.85''$	$36.44'' \pm 22.21''$	$39.15'' \pm 19.21''$
$\Delta \beta$	$-9.17'' \pm 23.51''$	$-92.74'' \pm 15.43''$	$-79.23'' \pm 17.21''$
ΔJ	$-20.36'' \pm 34.12''$	$-33.72'' \pm 24.41''$	$-22.18'' \pm 20.93''$
a_3	101.12 ± 32.76	104.22 ± 19.11	98.31 ± 18.35
ΔR_0	-0.277 ± 0.065	-0.231 ± 0.034	-0.245 ± 0.031

Табл. 7

Рекомендуемые селенофизические параметры Луны

J	$1^\circ 31' 39.91'' \pm 15.14''$
λ	$-5^\circ 10' 11.21'' \pm 14.35''$
β	$-3^\circ 12' 37.41'' \pm 32.78''$
f	0.640 ± 0.038
H	$933.624'' \pm 0.352''$
R_C	932.371 ± 0.041

Оценка помехоустойчивых селенофизических постоянных выполнена для двух вариантов значения параметра настройки b (8): $b = 1.50$ и $b = 1.3457$. Первый вариант рассматривает случай нормального распределения ошибок наблюдений [14]. При втором варианте задания параметра b эффективность оценки селенофизических постоянных в асимптотике достигает 95%, если распределение ошибок нормальное. Потеря эффективности при оценке селенофизических постоянных

в 5% возникает из-за учета при их определении эффектов помехоустойчивости. Если считать, что выборка измерений соответствует закону нормального распределения, то оценки искомых параметров методом наименьших квадратов и NINEM ($b = 1.50$) должны совпадать [15]. Анализ табл. 1–3 показывает, что в нашем случае значения оценок искомых параметров разные. Данный результат говорит о неравноточности принятых в обработку наблюдений. Вероятно, в выборке присутствуют ошибочные измерения, которые вызывают отличие модели ошибок от нормального распределения. Поэтому оценка помехоустойчивых селенофизических постоянных с принятым значением $b = 1.3457$ представляется более достоверным вариантом при редукции наблюдений кратера Mösting A.

Результаты настоящей работы могут быть использованы для анализа селенофизических параметров Луны [16], изучения внутренней структуры Луны [17] и построения карт физической поверхности нашего естественного спутника [18]. Это особенно важно в связи с тем, что в ближайшее время планируются новые лунные космические миссии и роботизированное исследование Луны.

Благодарности. Работа частично поддержана Российским научным фондом (проект № 20-12-00105, разработан метод анализа данных и проведены численные расчеты), также Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 19-32-90024) и Фондом развития теоретической физики и математики «БАЗИС». Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной в рамках государственной поддержки Казанского (Приволжского) федерального университета в целях повышения его конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров.

Литература

1. *Nefedjev Yu.A., Rizvanov N.G.* The results of an accurate analysis of EAO charts of the Moon marginal zone constructed on the basis of lunar occultations // *Astron. Nachr.* – 2002. – V. 323, No 2. – P. 135–138. – doi: 10.1002/1521-3994(200207)323:2<135::AID-ASNA135>3.0.CO;2-8.
2. *Huber P.J., Kleiner B., Gasser T., Dumermuth G.* Statistical methods for investigating phase relations in stationary stochastic processes // *IEEE Transact. on Audio and Electroacoustics.* – 1971. – V. 19, No 1. – P. 78–86. – doi: 10.1109/TAU.1971.1162163.
3. *Андреев А.О., Нефедьев Ю.А., Нефедьев Л.А., Ахмедшина Е.Н., Демина Н.Ю., Загидуллин А.А.* Использование многопараметрического анализа и фрактальной геометрии для исследования структуры лунной поверхности // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки.* – 2020. – Т. 162, кн. 2. – С. 223–236. – doi: 10.26907/2541-7746.2020.2.223-236.
4. *Duchnowski R.* Sensitivity of robust estimators applied in strategy for testing stability of reference points // *Geodesy and Cartography.* – 2011. – V. 60, No 2. – P. 123–134. – doi: 10.2478/v10277-012-0011-z.
5. *Andreev A.O., Nefedjev Yu.A., Demina N.Yu., Nefediev L.A., Petrova N.K., Zagidullin A.A.* Development of methods for navigational referencing of circumlunar spacecrafts to the selenocentric dynamic coordinate system // *Astron. Rep.* – 2020. – V. 64, No 9. – P. 795–803. – doi: 10.1134/S1063772920100017.
6. *Yang Y., Cheng M.K., Shum C.K., Tapley B.D.* Robust estimation of systematic errors of satellite laser range // *J. Geodesy.* – 1999. – V. 73, No 7. – P. 345–349. – doi: 10.1007/s001900050252.
7. *Nefedjev Yu.A., Andreev A.O., Petrova N.K., Demina N.Yu., Zagidullin A.A.* Creation of a global selenocentric coordinate reference frame // *Astron. Rep.* – 2018. – V. 62, No 12. – P. 1016–1020. – doi: 10.1134/S1063772918120119.

8. Nowel K., Kamiński W. Robust estimation of deformation from observations' differences (REDOD) for free monitoring networks // J. Geodesy. – 2018. – V. 88, No 8. – P. 749–764. – doi: 10.1007/s00190-014-0719-7.
9. Wisniewski Z. Estimation of parameters in a split functional model of geodetic observations (M_{split} estimation) // J. Geodesy. – 2009. – V. 83, No 2. – P. 105–120. – doi: 10.1007/s00190-008-0241-x.
10. Huber P.J. Robust estimation of a location parameter // Kotz S., Johnson N.L. (Eds.) Breakthroughs in Statistics. – N. Y.: Springer, 1992. – P. 492–518.
11. Williams J.G., Konopliv A.S., Boggs D.H., Park R.S., Yuan D.-N., Lemoine F.G., Goossens S., Mazarico E., Nimmo F., Weber R.C., Asmar S.W., Melosh H.J., Neumann G.A., Phillips R.J., Smith D.E., Solomon S.C., Watkins M.M., Wieczorek M.A., Andrews-Hanna J.C., Head J.W., Kiefer W.S., Matsuyama I., McGovern P.J., Taylor G.J., Zuber M.T. Lunar interior properties from the GRAIL mission // J. Geophys. Res.: Planets. – 2014. – V. 119, No 7. – P. 1546–1578. – doi: 10.1002/2013JE004559.
12. Petrova N.K., Nefedyev Yu.A., Zagidullin A.A., Andreev A.O. Use of an analytical theory for the physical libration of the Moon to detect free nutation of the lunar core // Astron. Rep. – 2018. – V. 62, No 12. – P. 1021–1025. – doi: 10.1134/S1063772918120120.
13. Van Brussel H., Wyns J., Valckenaers P., Bongaerts L., Peeters P. Reference architecture for holonic manufacturing systems PROSA // Computers in Industry. – 1998. – V. 37, No 3. – P. 255–274. – doi: 10.1016/S0166-3615(98)00102-X.
14. Petrova N.K., Nefedyev Yu.A., Andreev A.O., Zagidullin A.A. Lunar-based measurements of the Moon's physical libration: Methods and accuracy estimates // Astron. Rep. – 2020. – V. 64, No 12. – P. 1078–1086. – doi: 10.1134/S1063772920120094.
15. Bianco A.M., Garcia Ben M., Yohai V.J. Robust estimation for linear regression with asymmetric errors // Canad. J. Statistics. – 2005. – V. 33, No 4. – P. 511–528.
16. Kronrod E.V., Kronrod V.A., Kuskov O.L., Nefedyev Yu.A. Geochemical constraints for the bulk composition of the Moon // Dokl. Earth Sci. – 2018. – V. 483, No 1. – P. 1475–1479. – doi: 10.1134/S1028334X18110211.
17. Zagidullin A.A., Usanin V.S., Petrova N.K., Nefedyev Yu.A., Andreev A.O., Gudkova T.V. Physical libration of the Moon: An extended problem // Astron. Rep. – 2020. – V. 64, No 12. – P. 1093–1106. – doi: 10.1134/S1063772921010066.
18. Varaksina N.Y., Nefedyev Y.A., Churkin K.O., Zabbarova R.R., Demin S.A. Selenocentric reference coordinates net in the dynamic system // J. Phys.: Conf. Ser. – 2015. – V. 661, No 1. – Art. 012014, P. 1–4. – doi: 10.1088/1742-6596/661/1/012014.

Поступила в редакцию
25.05.2020

Нефедьев Юрий Анатольевич, доктор физико-математических наук, профессор, директор Астрономической обсерватории им. В.П. Энгельгардта

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: star1955@yandex.ru

Андреев Алексей Олегович, младший научный сотрудник Института физики

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: alexey-andreev93@mail.ru

Демина Наталия Юрьевна, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института физики

Казанский (Приволжский) федеральный университет

ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия

E-mail: *vnu_357@mail.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2020, vol. 162, no. 4, pp. 481–491

doi: 10.26907/2541-7746.2020.4.481-491

**The Study of Selenophysical Parameters
with the Use of the Noise-Immune Method of Robust Estimates**

*Yu.A. Nefedev**, *A.O. Andreev***, *N.Yu. Demina****

Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia

E-mail: **star1955@yandex.ru*, ***alexei-andreev93@mail.ru*,

****vnu_357@mail.ru*

Received May 25, 2020

Abstract

This work is dedicated to the issues of reducing long-period series of astronomical observations. Such series contain both unequal and erroneous observations. Determination of the desired parameters from such observations is, thus, a rather complicated task. The main challenge is fair assessment of the accuracy of results produced. There are a number of methods for solving this problem, but the most suitable one for determining noise-immune estimates is the Huber M -estimator method (NIHEM). The selenophysical parameters were found by the analysis of measurements of the Mösting A crater from the Kaguya and Apollo lunar missions and from the heliometric observations. Such observations have a complex internal structure, and their analysis with the use of the method of least squares makes it impossible to either assess and eliminate erroneous measurements or take into account the unequal accuracy of the observations taken. Hence, to derive the desired selenophysical parameters, the NIHEM approach was used. As a result, the values and estimates of the Mösting A crater's radius-vector, its selenographic longitude and latitude, lunar obliquity, values of harmonics in the expansion of physical libration into longitude, and corrections to the mean radius of the Moon were obtained.

Keywords: M -estimator method, noise-immune robust analysis, selenographic observations, planetary parameters

Acknowledgments. The study was supported in part by the Russian Science Foundation (project no. 20-12-00105 – the method of data analysis was developed and numerical calculations were performed), as well as by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-32-90024), and Theoretical Physics and Mathematics Advancement Foundation “BASIS”. The work is performed according to the Russian Government Program of Competitive Growth of Kazan Federal University.

References

1. Nefedjev Yu.A., Rizvanov N.G. The results of an accurate analysis of EAO charts of the Moon marginal zone constructed on the basis of lunar occultations. *Astron. Nachr.*, 2002, vol. 323, no. 2, pp. 135–138. doi: 10.1002/1521-3994(200207)323:2;135::AID-ASNA135;3.0.CO;2-8.
2. Huber P.J., Kleiner B., Gasser T., Dumermuth G. Statistical methods for investigating phase relations in stationary stochastic processes. *IEEE Trans. Audio Electroacoust.*, 1971, vol. 19, no. 1, pp. 78–86. doi: 10.1109/TAU.1971.1162163.
3. Andreev A.O., Nefedyev Yu.A., Nefediev L.A., Ahmedshina E.N., Demina N.Yu., Zagidullin A.A. The use of multi-parameter analysis and fractal geometry for investigating the structure of the lunar surface. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2020, vol. 162, no. 2, pp. 223–236. doi: 10.26907/2541-7746.2020.2.223-236.
4. Duchnowski R. Sensitivity of robust estimators applied in strategy for testing stability of reference points. *Geod. Cartogr.*, 2011, vol. 60, no. 2, pp. 123–134. doi: 10.2478/v10277-012-0011-z.
5. Andreev A.O., Nefedyev Yu.A., Demina N.Yu., Nefediev L.A., Petrova N.K., Zagidullin A.A. Development of methods for navigational referencing of circumlunar spacecrafts to the selenocentric dynamic coordinate system. *Astron. Rep.*, 2020, vol. 64, no. 9, pp. 795–803. doi: 10.1134/S1063772920100017.
6. Yang Y., Cheng M.K., Shum C.K., Tapley B.D. Robust estimation of systematic errors of satellite laser range. *J. Geod.*, 1999, vol. 73, no. 7, pp. 345–349. doi: 10.1007/s001900050252.
7. Nefedyev Yu.A., Andreev A.O., Petrova N.K., Demina N.Yu., Zagidullin A.A. Creation of a global selenocentric coordinate reference frame. *Astron. Rep.*, 2018, vol. 62, no. 12, pp. 1016–1020. doi: 10.1134/S1063772918120119.
8. Nowel K., Kamiński W. Robust estimation of deformation from observations' differences (REDOD) for free monitoring networks. *J. Geod.*, 2018, vol. 88, no. 8, pp. 749–764. doi: 10.1007/s00190-014-0719-7.
9. Wisniewski Z. Estimation of parameters in a split functional model of geodetic observations (M_{split} estimation). *J. Geod.*, 2009, vol. 83, no. 2, pp. 105–120. doi: 10.1007/s00190-008-0241-x.
10. Huber P.J. Robust estimation of a location parameter. In: Kotz S., Johnson N.L. (Eds.) *Breakthroughs in Statistics*. New York, Springer, 1992, pp. 492–518.
11. Williams J.G., Konopliv A.S., Boggs D.H., Park R.S., Yuan D.-N., Lemoine F.G., Goossens S., Mazarico E., Nimmo F., Weber R.C., Asmar S.W., Melosh H.J., Neumann G.A., Phillips R.J., Smith D.E., Solomon S.C., Watkins M.M., Wieczorek M.A., Andrews-Hanna J.C., Head J.W., Kiefer W.S., Matsuyama I., McGovern P.J., Taylor G.J., Zuber M.T. Lunar interior properties from the GRAIL mission. *J. Geophys. Res.: Planets*, 2014, vol. 119, no. 7, pp. 1546–1578. doi: 10.1002/2013JE004559.
12. Petrova N.K., Nefedyev Yu.A., Zagidullin A.A., Andreev A.O. Use of an analytical theory for the physical libration of the Moon to detect free nutation of the lunar core. *Astron. Rep.*, 2018, vol. 62, no. 12, pp. 1021–1025. doi: 10.1134/S1063772918120120.
13. Van Brussel H., Wyns J., Valckenaers P., Bongaerts L., Peeters P. Reference architecture for holonic manufacturing systems PROSA. *Comput. Ind.*, 1998, vol. 37, no. 3, pp. 255–274. doi: 10.1016/S0166-3615(98)00102-X.

14. Petrova N.K., Nefedyev Yu.A., Andreev A.O., Zagidullin A.A. Lunar-based measurements of the Moon's physical libration: Methods and accuracy estimates. *Astron. Rep.*, 2020, vol. 64, no. 12, pp. 1078–1086. doi: 10.1134/S1063772920120094.
15. Bianco A.M., Garcia Ben M., Yohai V.J. Robust estimation for linear regression with asymmetric errors. *Can. J. Stat.*, 2005, vol. 33, no. 4, pp. 511–528.
16. Kronrod E.V., Kronrod V.A., Kuskov O.L., Nefedyev Yu.A. Geochemical constraints for the bulk composition of the Moon. *Dokl. Earth Sci.*, 2018, vol. 483, no. 1, pp. 1475–1479. doi: 10.1134/S1028334X18110211.
17. Zagidullin A.A., Usanin V.S., Petrova N.K., Nefedyev Yu.A., Andreev A.O., Gudkova T.V. Physical libration of the Moon: An extended problem. *Astron. Rep.*, 2020, vol. 64, no. 12, pp. 1093–1106. doi: 10.1134/S10637729201010066.
18. Varaksina N.Y., Nefedyev Y.A., Churkin K.O., Zabbarova R.R., Demin S.A. Selenocentric reference coordinates net in the dynamic system. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2015, vol. 661, no. 1, art. 012014, pp. 1–4. doi: 10.1088/1742-6596/661/1/012014.

Для цитирования: Неведьев Ю.А., Андреев А.О., Демина Н.Ю. Исследование селенофизических параметров на основе метода робастных оценок // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2020. – Т. 162, кн. 4. – С. 481–491. – doi: 10.26907/2541-7746.2020.4.481-491.

For citation: Nefedyev Yu.A., Andreev A.O., Demina N.Yu. The study of selenophysical parameters with the use of the noise-immune method of robust estimates. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2020, vol. 162, no. 4, pp. 481–491. doi: 10.26907/2541-7746.2020.4.481-491. (In Russian)