

УДК 532.546

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ В БЕСКОНЕЧНОМ ПОРИСТОМ МАССИВЕ С ДВУМЯ КРУГОВЫМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ

Ю.В. Обносов

Аннотация

В работе дается замкнутое решение задачи о распределении двумерного фильтрационного поля в гетерогенной трехкомпонентной среде, представляющей из себя однородный бесконечный пористый массив с двумя изотропными круговыми включениями, расположенными внутренним или внешним по отношению друг к другу образом. Рассматриваются случаи внутреннего и внешнего касания включений и случай вырождения одного из кругов в полуплоскость. Для всех таких структур решение получено в виде бесконечных рядов, для каждого из которых исследован вопрос о скорости его сходимости и найдена оценка остаточного члена. В некоторых случаях, когда проводимость круговых включений достигает своих предельных значений ($0, \infty$), соответствующие ряды просуммированы и решение выражено через элементарные функции.

В монографии П.Я. Полубариновой-Кочиной [1] задачи теории фильтрации в плоскопараллельном установленном случае ставятся и решаются на языке комплексного анализа. Так, задача о распределении поля скоростей фильтрации в кусочно-однородной пористой среде с учетом закона Дарси сводится [1, с. 50] к построению голоморфной в каждом изотропном компоненте S_j рассматриваемой среды функции $v(z) = v_x - i v_y = v_j(z)$ ($v(z) = dw(z)/dz$, где $w(z) = \varphi + i\psi$ – комплексный потенциал течения и, следовательно, функция $v(z)$ комплексно сопряжена с вектором скорости $\mathbf{v} = (v_x, v_y)$, если последний интерпретировать как комплекснозначную функцию $\mathbf{v} = v_x + i v_y$). На линиях контакта разнородных компонент нормальные компоненты скорости непрерывны ($\mathbf{v}_{jn} = \mathbf{v}_{mn}$), а касательные – пропорциональны ($k_m \mathbf{v}_{j\tau} = k_j \mathbf{v}_{m\tau}$, k_j – постоянный в компоненте S_j коэффициент фильтрации).

В настоящей работе описанная выше проблема решается для трехфазных гетерогенных бесконечных сред, компонентами которых являются части, на которые вся плоскость разбивается двумя непересекающимися окружностями (в частности, окружностью и прямой). Различные частные случаи таких кусочно-однородных структур изучались в работах [3–12]. Г.А. Голузин [13, 14] предложил метод, позволяющий свести исследуемую краевую задачу к системе функциональных уравнений. Идеи и методика Голузина были развиты и обобщены в работах [15–17] на случай произвольного числа граничных окружностей, расположенных произвольным образом относительно друг друга (исключается лишь возможность их пересечения).

Используемый в работе метод исследования состоит в приведении поставленной задачи к однородной задаче \mathbb{R} -линейного сопряжения ([18])

$$v_j(t) = A_{jm} v_m(t) - B_{jm} [t'(s)]^{-2} \overline{v_m(s)}, \quad t \in \partial S_j \cap \partial S_m, \quad (0.1)$$

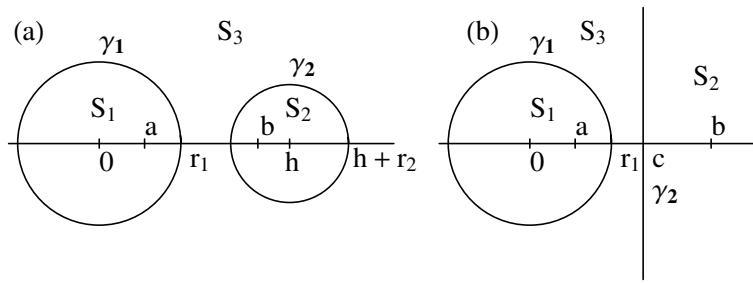


Рис. 1. Среда с двумя круговыми включениями (a) и круговое включение в одной из двух разнородных полуплоскостей (b)

где $t'(s)$ – производная функции точки контура $\partial S_j \cap \partial S_m$ по натуральному параметру,

$$A_{jm} = (k_m + k_j)/(2k_m), \quad B_{jm} = (k_m - k_j)/(2k_m). \quad (0.2)$$

Несколько обобщая постановку, с учетом междисциплинарных аналогий, будем считать, что коэффициенты краевого условия (0.1) имеют вид

$$A_{jm} = \frac{\rho_j + \rho_m}{2\rho_j} - i \frac{\rho_j \beta_j - \rho_m \beta_m}{2\rho_j}, \quad B_{jm} = \frac{\rho_j - \rho_m}{2\rho_j} - i \frac{\rho_j \beta_j - \rho_m \beta_m}{2\rho_j}. \quad (0.3)$$

Именно к задаче (0.1), (0.3) сводится в электродинамике проблема расчета вектора плотности электрического тока в среде с коэффициентом сопротивления $\rho(z) \equiv \rho_j = 1/k_j \geq 0$ для $z \in S_j$ при учете влияния однородного электромагнитного поля ($\beta(z) \equiv \beta_j$ – параметр Холла компонента S_j).

Краевая задача (0.1), (0.3) с помощью методов симметрии и аналитического продолжения приводится к функциональному уравнению. Последнее, в отличие от работ [13, 14], удается решить явным, а не приближенным образом.

Сначала исследуется случай, когда окружности, разделяющие разнородные компоненты, расположены друг относительно друга внешним образом. При этом впервые решение в касательном случае и при вырождении одного из круговых включений в полуплоскость будет получено соответствующим предельным переходом.

1. Задача о двух круговых включениях

Не уменьшая общности, можно считать, что центры обеих окружностей лежат на оси x , один из них – в начале координат, а другой – на положительной полусоси: $S_1 = \{z : |z| < r_1\}$, $S_2 = \{z : |z - h| < r_2\}$ и $S_3 = \{z : |z| > r_1, |z - h| > r_2\}$. Пусть сначала $r_1 + r_2 < h$, то есть окружности $\gamma_1 = \partial S_1$, $\gamma_2 = \partial S_2$ не касаютсяся (рис. 1, a).

Ясно, что $t'(s) = it/r_1$ для $t \in \gamma_1$ и $t'(s) = i(t-h)/r_2$ при $t \in \gamma_2$. Следовательно, в силу (0.1), функция $v(z)$ удовлетворяет граничным условиям вида

$$\begin{cases} v_3(t) = A_{31}v_1(t) + B_{31}r_1^2t^{-2}\overline{v_1(t)}, & t \in \gamma_1, \\ v_3(t) = A_{32}v_2(t) + B_{32}r_2^2(t-h)^{-2}\overline{v_2(t)}, & t \in \gamma_2. \end{cases} \quad (1.1)$$

На бесконечности течение – равномерно поступательное, то есть

$$v_3(\infty) = V_0. \quad (1.2)$$

Задача (1.1), (1.2) в эллиптическом случае ($|A_{3j}| > |B_{3j}|$) имеет [19, теорема 4.1.2] единственное решение при произвольных комплексных коэффициентах A_{3j}, B_{3j} . Мы ограничимся коэффициентами вида (0.3), полагая для краткости

$$A_j = A_{3j}, \quad B_j = B_{3j}, \quad \Delta_j = \overline{B}_j/A_j, \quad j = 1, 2. \quad (1.3)$$

Пусть сначала $\rho_j \neq 0, \infty$, тогда коэффициенты (1.3) удовлетворяют условию эллиптичности задачи (1.1). Некоторые частные случаи обращения ρ_j в нуль или бесконечность будут изучены в качестве предельных.

Пусть

$$\zeta = T^{-1}(z) = (z - a)/(z - b), \quad z = T(\zeta) = (b\zeta - a)/(\zeta - 1), \quad (1.4)$$

где точки a, b симметричны относительно обеих окружностей γ_1, γ_2 одновременно. Следовательно, $ab = r_1^2$, $(h - a)(h - b) = r_2^2$ и

$$a, b = \left(h^2 + r_1^2 - r_2^2 \mp \sqrt{(h^2 - r_1^2 - r_2^2)^2 - 4r_1^2 r_2^2} \right) / (2h). \quad (1.5)$$

Первая из функций (1.4) отображает асимметричное «кольцо» S_3 на концентрическое $S_3^* = \{\zeta : r < |\zeta| < R\}$, при этом круги S_1, S_2 переходят, соответственно, в $S_1^* = \{\zeta : |\zeta| < r\}$ и $S_2^* = \{\zeta : |\zeta| > R\}$. Радиусы окружностей $\gamma = \{\zeta : |\zeta| = r\}$ и $\Gamma = \{\zeta : |\zeta| = R\}$ на основании (1.4), (1.5) определяются равенствами

$$r = a/r_1 = r_1/b, \quad R = (h - a)/r_2 = r_2/(h - b), \quad (0 < r < 1 < R). \quad (1.6)$$

С учетом равенств (1.6) преобразование $T(\zeta)$, определяемое вторым соотношением (1.4), и преобразование $T(\zeta) - h$ удобно записать в виде

$$T(\zeta) = b \frac{\zeta - r^2}{\zeta - 1} = T_1(\zeta), \quad T(\zeta) - h = (b - h) \frac{\zeta - R^2}{\zeta - 1} = (b - h)T_2(\zeta). \quad (1.7)$$

Новая неизвестная кусочно-голоморфная функция

$$V(\zeta) = V_j(\zeta) = v_j(T(\zeta)), \quad \zeta \in S_j^*, \quad j = 1, 2, 3, \quad (1.8)$$

на основании (1.1), (1.2), (1.6), (1.7) будет удовлетворять условиям

$$\begin{cases} V_3(\tau) = A_1 V_1(\tau) + B_1 r^2 [T_1(\tau)]^{-2} \overline{V_1(\tau)}, & \tau \in \gamma, \\ V_3(\tau) = A_2 V_2(\tau) + B_2 R^2 [T_2(\tau)]^{-2} \overline{V_2(\tau)}, & \tau \in \Gamma, \end{cases} \quad (1.9)$$

$$V_3(1) = V_0. \quad (1.10)$$

Решение задачи (1.9), (1.10) следует отыскивать в классе функций, ограниченных на бесконечности, так как $V(\infty) = V_2(\infty) = v_2(b)$.

В силу (1.10) и теоремы Лорана голоморфная в кольце S_3^* функция $V_3(\zeta)$ единственным образом представима в виде

$$V_3(\zeta) = V_3^+(\zeta) + V_3^-(\zeta), \quad V_3^-(1) = 0, \quad V_3^+(1) = V_0, \quad (1.11)$$

где функции $V_3^+(\zeta)$ и $V_3^-(\zeta)$ голоморфны при $|\zeta| < R$ и $|\zeta| > r$ соответственно. Введем функции:

$$\Phi(\zeta) = \begin{cases} V_3^+(\zeta) - A_1 V_1(\zeta), & |\zeta| \leq r, \\ B_1 r^2 [T_1(\zeta)]^{-2} \overline{V_1(r^2/\bar{\zeta})} - V_3^-(\zeta), & |\zeta| \geq r, \end{cases} \quad (1.12)$$

$$\Psi(\zeta) = \begin{cases} V_3^+(\zeta) - B_2 R^2 [T_2(\zeta)]^{-2} \overline{V_2(R^2/\bar{\zeta})}, & |\zeta| \leq R, \\ A_2 V_2(\zeta) - V_3^-(\zeta), & |\zeta| \geq R. \end{cases} \quad (1.13)$$

Функция (1.12) голоморфна в области S_1^* . Ввиду (1.6), (1.7) она голоморфна и в области $\{\zeta : |\zeta| > r\}$. Из (1.9), (1.11) вытекает непрерывность $\Phi(\zeta)$ при $|\zeta| = r$. Следовательно, исследуемая функция голоморфна в расширенной плоскости $\bar{\mathbb{C}}$. На основании теоремы Лиувилля, (1.7) и (1.11) $\Phi(\zeta) \equiv \Phi(1) = V_3^-(1) = 0$.

Аналогично, $\Psi(\zeta) \in \mathcal{H}(\bar{\mathbb{C}})$, и из теоремы Лиувилля и представлений (1.7), (1.11), (1.13) следует $\Psi(\zeta) \equiv \Psi(1) = V_3^+(1) = V_0$.

Итак,

$$\begin{cases} V_3^+(\zeta) - A_1 V_1(\zeta) \equiv 0, & |\zeta| \leq r, \\ V_3^-(\zeta) - B_1 r^2 [T_1(\zeta)]^{-2} \overline{V_1(r^2/\bar{\zeta})} \equiv 0, & |\zeta| \geq r, \\ V_3^+(\zeta) - B_2 R^2 [T_2(\zeta)]^{-2} \overline{V_2(R^2/\bar{\zeta})} \equiv V_0, & |\zeta| \leq R, \\ A_2 V_2(\zeta) - V_3^-(\zeta) \equiv V_0, & |\zeta| \geq R. \end{cases} \quad (1.14)$$

Исключая из первой пары уравнений (1.14) функцию $V_1(\zeta)$, а из второй – функцию $V_2(\zeta)$, с учетом обозначений (1.3) найдем

$$\begin{cases} \Delta_1 \frac{T_1^2(\zeta)}{r^2} V_3^+(\zeta) - \overline{V_3^-(r^2/\bar{\zeta})} \equiv 0, & |\zeta| \leq r, \\ V_3^+(\zeta) - \overline{\Delta_2} \frac{R^2}{[T_2(\zeta)]^2} \overline{V_3^-(R^2/\bar{\zeta})} \equiv V_0 + \overline{\Delta_2} \frac{R^2}{[T_2(\zeta)]^2} \overline{V_0}, & |\zeta| \leq R. \end{cases} \quad (1.15)$$

При выводе последних соотношений и в последующем полезно учитывать вытекающие из (1.7) тождества

$$r^2 \overline{[T_1(r^2/\bar{\zeta})]}^{-2} \equiv r^{-2} [T_1(\zeta)]^2, \quad R^2 \overline{[T_2(R^2/\bar{\zeta})]}^{-2} \equiv R^{-2} [T_2(\zeta)]^2. \quad (1.16)$$

Исключая V_3^- из (1.15), получим

$$V_3^+(\zeta) = V_0 + \overline{V_0} \overline{\Delta_2} \frac{R^2}{[T_2(\zeta)]^2} + g\delta \left(\frac{1-\zeta}{1-g\zeta} \right)^2 V_3^+(g\zeta), \quad |\zeta| \leq R, \quad (1.17)$$

где

$$g = r^2/R^2 < 1; \quad \delta = \Delta_1 \overline{\Delta_2}, \quad |\delta| < 1. \quad (1.18)$$

Последовательно заменяя в (1.17) ζ на $g^j \zeta$, $j = 1, 2, \dots$, придем к бесконечной системе, исключая из которой $V_3^+(g\zeta)$, $V_3^+(g^2\zeta)$, …, после N шагов найдем

$$V_3^+(\zeta) = (1-\zeta)^2 \sum_{j=0}^N (g\delta)^j \left[\frac{V_0}{(1-g^j\zeta)^2} + \frac{\overline{\Delta_2} R^2 \overline{V_0}}{(g^j\zeta - R^2)^2} \right] + r_N(z), \quad (1.19)$$

где $r_N(z) = (g\delta)^{N+1} [(1-\zeta)/(1-g^{N+1}\zeta)]^2 V_3^+(g^{N+1}\zeta)$ стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$, а сумма дает в пределе ряд, равномерно и абсолютно сходящийся, так как в силу (1.18) абсолютно сходится мажорирующий его ряд с общим членом

$$|V_0| ((1-gR)^{-2} + |\Delta_2|(R-g)^{-2})^2 |g\delta|^j.$$

Таким образом, при $N \rightarrow \infty$ из (1.19) следует

$$V_3^+(\zeta) = V_0 + \overline{\Delta_2} R^2 \overline{V_0} + (1-\zeta)^2 \sum_{j=1}^{\infty} (g\delta)^j \left[\frac{V_0}{(1-g^j\zeta)^2} + \frac{\overline{\Delta_2} R^2 \overline{V_0}}{(g^j\zeta - R^2)^2} \right]. \quad (1.20)$$

Из первого уравнения (1.15), (1.16) и (1.20) находим

$$V_3^-(\zeta) = \frac{\overline{\Delta}_1 r^2 \overline{V}_0}{[T_1(\zeta)]^2} + (1 - \zeta)^2 \sum_{j=1}^{\infty} (g\bar{\delta})^j \left[\frac{V_0}{(\zeta - g^j)^2} + \frac{\overline{\Delta}_1 r^2 \overline{V}_0}{(\zeta - r^2 g^j)^2} \right]. \quad (1.21)$$

С помощью (1.20), (1.21) решение задачи (1.9), (1.10) выписывается по формулам

$$V_1(\zeta) = V_3^+(\zeta)/A_1, \quad V_2(\zeta) = (V_0 + V_3^-(\zeta))/A_2, \quad V_3(\zeta) = V_3^+(\zeta) + V_3^-(\zeta),$$

вытекающим из (1.11), (1.14).

Справедлива

Теорема 1. Задача (1.1), (1.2) безусловно разрешима, если $\rho_j \neq 0, \infty$ и $\rho_j \neq \rho_m$ при $j \neq m$, $j, m = 1, 2, 3$. Ее единственное решение $v(z) = v_j(z)$, $z \in S_j$, имеет вид

$$\begin{aligned} v_1(z) &= (1 + \Delta_1) (V_0 + \overline{V}_0 \overline{\Delta}_2 r_2^2 (z-h)^{-2} + \sigma_1(z)), \\ v_2(z) &= (1 + \Delta_2) (V_0 + \overline{V}_0 \overline{\Delta}_1 r_1^2 z^{-2} + \sigma_2(z)), \\ v_3(z) &= V_0 + \overline{V}_0 (\overline{\Delta}_1 r_1^2 z^{-2} + \overline{\Delta}_2 r_2^2 (z-h)^{-2}) + \sigma_1(z) + \sigma_2(z), \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} \sigma_1(z) &= (b-a)^2 \sum_{j=1}^{\infty} \delta^j (V_0 \Lambda_{1j}/(z-b_j^1)^2 + \overline{\Delta}_2 \overline{V}_0 \Lambda_{2j}^*/(z-b_j^2)^2), \\ \sigma_2(z) &= (b-a)^2 \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\delta}^j (V_0 \Lambda_{1j}/(z-a_j^1)^2 + \overline{\Delta}_1 \overline{V}_0 \Lambda_{2j}/(z-a_j^2)^2), \end{aligned} \quad (1.23)$$

$$\text{где } \delta = \Delta_1 \overline{\Delta}_2, \quad g = r^2/R^2,$$

$$a_j^1 = T(g^j), \quad a_j^2 = T(r^2 g^j), \quad b_j^1 = T(g^{-j}), \quad b_j^2 = T(R^2 g^{-j}), \quad (1.24)$$

$$\Lambda_{1j} = \chi(g^j), \quad \Lambda_{2j} = \chi(r^2 g^j), \quad \Lambda_{2j}^* = \chi(R^{-2} g^j), \quad \chi(x) = x/(1-x)^2, \quad (1.25)$$

а остальные параметры определяются по формулам (1.4)–(1.6).

Доказательство. Доказательство теоремы сводится к простому счету по формулам (1.20), (1.21), (1.4). При этом последовательно показывается, что

$$\begin{aligned} \frac{g^j(1-\zeta)^2}{(1-g^j\zeta)^2} &= \frac{g^j}{(1-g^j)^2} \frac{(b-a)^2}{(z-T(g^{-j}))^2}, \\ \frac{g^j(1-\zeta)^2}{(\zeta-g^j)^2} &= \frac{g^j}{(1-g^j)^2} \frac{(b-a)^2}{(z-T(g^j))^2}, \\ \frac{R^2 g^j (1-\zeta)^2}{(R^2-g^j\zeta)^2} &= \frac{R^2 g^{-j}}{(1-R^2 g^{-j})^2} \frac{(b-a)^2}{(z-T(R^2 g^{-j}))^2}, \\ \frac{r^2 g^j (1-\zeta)^2}{(\zeta-r^2 g^j\zeta)^2} &= \frac{r^2 g^j}{(1-r^2 g^j)^2} \frac{(b-a)^2}{(z-T(r^2 g^j))^2}. \end{aligned}$$

Ввиду (1.4), (1.7) имеем $R^2/[T_2(\zeta)]^2 = r_2^2/(z-h)^2$, $r^2/[T_1(\zeta)]^2 = r_1^2/z^2$, что и приводит к формулам (1.22)–(1.25). \square

Замечание 1. Решение задачи (1.1), (1.2) с вещественными коэффициентами (0.2) выписывается по формулам (1.23)–(1.25), над всеми элементами которых (кроме V_0) надо убрать знак комплексного сопряжения.

Замечание 2. В вырожденной ситуации ($\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$) из (1.23) следует $v(\zeta) \equiv \equiv V_0$.

Замечание 3. При $\rho_2 = \rho_3$, $\beta_2 = \beta_3$ из (1.3), (1.18) следует $\Delta_2 = 0$, $\delta = 0$, $A_2 = 1$. Соответствующий предельный переход в формулах (1.23) приводит к хорошо известному решению задачи о круговом включении.

Замечание 4. Из (1.18), (1.24) и свойства сохранения симметричных точек следует, что, во-первых, точка a является предельной для последовательностей $\{a_j^{1,2}\}_1^\infty$, а к точке b сходятся обе последовательности $\{b_j^{1,2}\}_1^\infty$; во-вторых, первые две последовательности являются монотонно возрастающими, а две другие – монотонно убывающими, причем $a_j^1 < a_j^2$, $b_j^1 > b_j^2$; в-третьих, точки четырех перечисленных семейств симметричны друг с другом относительно окружностей γ_1 , γ_2 . Именно,

$$(a_j^1)_1^* = b_{j-1}^2, \quad (a_j^1)_2^* = b_j^2, \quad (a_j^2)_1^* = b_j^1, \quad (a_j^2)_2^* = b_{j+1}^1,$$

где введено обозначение $(c)_k^*$ для точки, симметричной с точкой c относительно окружности γ_k . Последние соотношения с учетом равенств $a_0^1 = \infty$, $a_0^2 = 0$, $b_0^1 = \infty$, $b_0^2 = h$ дают $a_1^1 = r_1^2/h$, $a_1^2 = hr_1^2/(h^2 - r_2^2)$, $b_1^1 = (h^2 - r_2^2)/h$, $b_1^2 = h - hr_2^2/(h^2 - r_1^2)$, ...

Замечание 5. Из всех предельных возможностей ($\rho_j \rightarrow 0$ или ∞) рассмотрим лишь две: идеально проводящее «кольцо» S_3 и случай абсолютно непроводящих включений S_1 , S_2 для вещественных коэффициентов (1.3) ($\beta_j = 0$, $j = 1, 2, 3$). В обоих случаях, как при $\rho_2 = 0$, так и при $\rho_1 = \rho_2 = \infty$, из (1.3), (1.18) следует $A_1 = A_2 = \infty$, $\Delta_1 = \Delta_2 = -\delta = -1$. Ввиду (1.22), (1.23) $v_1(z) \equiv v_2(z) \equiv 0$, а соответствующая функция $v_3(z)$ дает решение задачи об обтекании двух непроницаемых круговых цилиндров.

Замечание 6. На практике при вычислении функций (1.22) приходится ограничиваться отрезками из первых $N - 1$ членов рядов (1.23). Пусть $v_{jN}(z)$ – соответствующее приближенное решение, а $r_{jN}(z) = v_j(z) - v_{jN}(z)$, тогда

$$\begin{aligned} |r_{1N}(z)| &\leq \delta^N g^{N-1} r_1^2 \frac{|V_0|}{|A_1|} \frac{r_2^2 h^{-2} + g|\Delta_2|}{(1 - |\delta|g)(b - r_1)^2}, \\ |r_{2N}(z)| &\leq \delta^N g^{N-1} r_2^2 \frac{|V_0|}{|A_2|} \frac{r_1^2 h^{-2} + g|\Delta_1|}{(1 - |\delta|g)(h - r_2 - a)^2}, \\ |r_{3N}(z)| &\leq \delta^{N-1} g^N \frac{|V_0|}{1 - |\delta|g} \left(\frac{8|\delta|}{(1 - g)^2} + \frac{(r_1^2|\Delta_1| + r_2^2|\Delta_2|)^3}{(b - a)^2} \right). \end{aligned} \quad (1.26)$$

Первые две оценки (1.26) являются следствием неравенств

$$\min_{z \in S_1} |z - b_j^{1,2}| > b - r_1, \quad \min_{z \in S_2} |z - a_j^{1,2}| > h - r_2 - a, \quad (1.27)$$

$$\Lambda_{1j} \leq g^{j-1} \frac{r_1^2 r_2^2}{h^2(b-a)^2}, \quad \Lambda_{2j} \leq g^j \frac{r_1^2}{(b-a)^2}, \quad \Lambda_{2j}^* \leq g^j \frac{r_2^2}{(b-a)^2}, \quad (1.28)$$

справедливых в связи с замечанием 4 (см. рис. 1, a) и соотношений (1.6), (1.18), (1.25). Чтобы получить оценку для $|r_{3N}(z)|$, надо доказать, что

$$\begin{aligned} M_j^1 &= \Lambda_{1j} \max_{z \in S_3} \left(\frac{1}{|z - a_j^1|^2} + \frac{1}{|z - b_j^1|^2} \right) < \frac{8g^j}{(1 - g)^2(b - a)^2}, \\ M_j^2 &= \max_{z \in S_3} \left(\frac{\Lambda_{2j}|\Delta_1|}{|z - a_j^2|^2} + \frac{\Lambda_{2j}^*|\Delta_2|}{|z - b_j^2|^2} \right) < \frac{g^j}{|\delta|} \frac{(r_1^2|\Delta_1| + r_2^2|\Delta_2|)^3}{(b - a)^4}. \end{aligned}$$

Стандартным образом доказывается, что максимум

$$M_0 = \max_{z \in S_3} \left(\frac{C}{|z - \alpha|^2} + \frac{D}{|z - \beta|^2} \right) = \frac{(C + D)^3}{CD(\beta - \alpha)^2} \quad (1.29)$$

при выполнении условий $C > 0$, $D > 0$, $0 < \alpha < a$, $b < \beta < h$, достигается в точке $x_0 = (C\beta + D\alpha)/(C + D)$, ($\alpha < x_0 < \beta$). Остается лишь учесть, что $b_j^1 - a_j^1 > (b - a)$ и $b_j^2 - a_j^2 > b - a$ для всех $j \geq 1$.

Рассмотрим задачу (1.1), (1.2) для структуры, изображенной на рис. 1, б. Здесь $S_2 = \{z : \operatorname{Re} z > c > r_1\}$, $S_3 = \{z : |z| > r_1, \operatorname{Re} z < c\}$, а S_1 – круг радиуса r_1 с центром в нуле. Дополнительное условие (1.2) в данном случае задается на линии раздела компонентов S_2 , S_3 , этот факт требует внесения некоторых изменений в ранее проделанной цепочке построений. Именно, если положить $h = c + r_2$ и рассмотреть предел при $r_2 \rightarrow \infty$ (при таком предельном переходе изученная выше структура переходит в рассматриваемую), то вместо второго условия (1.1) получится

$$v_3(t) = A_2 v_2(t) + B_2 \overline{v_2(t)}, \quad t \in \gamma_2 = \{t : \operatorname{Re} t = c\}.$$

Из соотношений (1.5), (1.6), (1.7) при этом следует

$$a, b = c \mp \sqrt{c^2 - r_1^2}, \quad r = \left(c - \sqrt{c^2 - r_1^2} \right) / r_1, \quad R = 1, \quad T_2(\zeta) \equiv 1.$$

С учетом последних равенств доказывается справедливость представления $\Psi(\zeta) \equiv A_2 V_2(1) = V_0 - B_2 \overline{V_2(1)}$ для функции (1.13), а значит $V_2(1) = (\overline{A}_2 V_0 - B_2 \overline{V}_0) / (|A_2|^2 - |B_2|^2)$. Таким образом, в силу (1.3), (0.3) имеем

$$\Psi(\zeta) \equiv A_2 (A_{23} V_0 + B_{23} \overline{V}_0). \quad (1.30)$$

Учитывая то, что $g = r^2$, в силу определения (1.18), из (1.24), (1.25) при $h = c + r_2$ и $r_2 \rightarrow \infty$ найдем

$$a_j^1 = a_{j-1}^2 = T(r^{2j}) = a_j, \quad b_j^1 = b_j^2 = T(r^{-2j}) = b_j, \quad a_j = (b_{j-1})_1^* = (b_j)_2^*,$$

$$\Lambda_{1j} = \Lambda_{2j-1}^2 = \Lambda_{2j}^* = r^{2j} (1 - r^{2j})^{-2} = \Lambda_j \leq r_1^2 r^{2(j-1)} / [4(c^2 - r_1^2)].$$

С помощью последних двух групп соотношений требуемое решение может быть выписано по формулам (1.22), (1.23), в которых надо заменить V_0 на выражение, стоящее в правой части тождества (1.30). При этом сумма $V_0 + \overline{\Delta}_2 \overline{V}_0$ должна заменяться на V_0 . Тем самым доказана

Теорема 2. Для гетерогенной структуры, изображенной на рис. 1, б, решение задачи (1.1), (1.2) при $\rho_j \neq 0, \infty$ и $\rho_j \neq \rho_m$ ($j \neq m$) имеет вид

$$\begin{aligned} v_1(z) &= \frac{V_0}{A_1} + V_0 \frac{4(c^2 - r_1^2)}{A_1} \sum_{j=1}^{\infty} \delta^j \frac{\Lambda_j}{(z - b_j)^2}, \\ v_2(z) &= A_{23} V_0 + B_{23} \overline{V}_0 + \overline{V}_0 \frac{4(c^2 - r_1^2)}{\overline{B}_2} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\delta}^j \frac{\Lambda_j}{(z - a_j)^2}, \\ v_3(z) &= V_0 + 4(c^2 - r_1^2) \left\{ \frac{\overline{V}_0}{\Delta_2} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{\delta}^j \frac{\Lambda_j}{(z - a_j)^2} + V_0 \sum_{j=1}^{\infty} \delta^j \frac{\Lambda_j}{(z - b_j)^2} \right\}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Для остаточных членов рядов (1.31) справедливы оценки

$$\begin{aligned} |r_{jN}(z)| &\leq \frac{|\delta|^N r^{2(N-1)}}{(1 - |\delta|r^2)} C_j, \\ C_1 &= \frac{|V_0|r_1^2}{|A_1|(b - r_1)^2}, \quad C_2 = \frac{|V_0|r_1^2}{|B_2|(c^2 - r_1^2)}, \quad C_3 = \frac{|V_0|r_1^2}{(c^2 - r_1^2)} \frac{(1 + |\Delta_2|)^3}{|\Delta_2|^2}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Неравенства (1.32) легко устанавливаются с помощью (1.29).

Предельная ситуация, когда расстояние $l = h - r_1 - r_2 \rightarrow 0$, приводит к случаю касающихся круговых включений S_1, S_2 (рис. 1, а), или кругового включения S_1 , примыкающего к полуплоскости S_2 (рис. 1, б).

Имеет место

Теорема 3. Задача (1.1), (1.2) в случае касающихся круговых включений ($h = r_1 + r_2$) имеет при $\rho_j \neq 0, \infty$ и $\rho_j \neq \rho_m$ при $j \neq m$, $j, m = 1, 2, 3$, единственное решение $v(z) = v_j(z)$, $z \in S_j$, $j = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} v_1(z) &= (1 + \Delta_1) (V_0 + \overline{V_0} \Delta_2 r_2^2 (z - h)^{-2} + \sigma_1(z)), \\ v_2(z) &= (1 + \Delta_2) (V_0 + \overline{V_0} \Delta_1 r_1^2 z^{-2} + \sigma_2(z)), \\ v_3(z) &= V_0 + \overline{V_0} (\overline{\Delta}_1 r_1^2 z^{-2} + \overline{\Delta}_2 r_2^2 (z - h)^{-2}) + \sigma_1(z) + \sigma_2(z), \end{aligned} \quad (1.33)$$

$$\begin{aligned} \sigma_1(z) &= \frac{r_1^2 r_2^2}{h^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta^j}{j^2} \left(\frac{V_0}{(z - b_j^1)^2} + \overline{\Delta}_2 \frac{\overline{V_0} \Lambda_{2j}}{(z - b_j^2)^2} \right), \\ \sigma_2(z) &= \frac{r_1^2 r_2^2}{h^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\overline{\delta}^j}{j^2} \left(\frac{V_0}{(z - a_j^1)^2} + \overline{\Delta}_1 \frac{\overline{V_0} \Lambda_{1j}}{(z - a_j^2)^2} \right), \end{aligned} \quad (1.34)$$

$$\text{где } \delta = \Delta_1 \overline{\Delta}_2, \quad T(\zeta) = r_1(\zeta + 1)/(\zeta - 1), \quad g_j = 2j(r_1/r_2 + 1),$$

$$\Lambda_{1j} = \left(\frac{r_1 + r_2}{r_2 + r_1 + r_2/j} \right)^2, \quad \Lambda_{2j} = \left(\frac{r_1 + r_2}{r_2 + r_1 + r_1/j} \right)^2, \quad (1.35)$$

$$a_j^1 = T(1 - g_j), \quad a_j^2 = T(-1 - g_j), \quad b_j^1 = T(1 + g_j), \quad b_j^2 = T(g_{j+1} - 1). \quad (1.36)$$

Доказательство. Решение (1.33), (1.34) проще всего получить предельным переходом при $h \rightarrow r_1 + r_2$ ($l \rightarrow 0$) в формулах (1.22)–(1.25). При этом из (1.5), (1.6), (1.18) следует: $a, b \rightarrow r_1$, $r, R \rightarrow 1$ и $g \rightarrow 1$. Далее, с учетом (1.6) можно установить, что

$$\begin{aligned} \lim_{l \rightarrow 0} a_j^1 &= \lim_{l \rightarrow 0} \frac{bg^j - a}{g^j - 1} = \lim_{l \rightarrow 0} \left(b + \frac{b - a}{g^j - 1} \right) = r_1 - \frac{r_1 r_2}{j(r_1 + r_2)}, \\ \lim_{l \rightarrow 0} b_j^1 &= \lim_{l \rightarrow 0} \frac{b - ag^j}{1 - g^j} = \lim_{l \rightarrow 0} \left(a + \frac{b - a}{1 - g^j} \right) = r_1 + \frac{r_1 r_2}{j(r_1 + r_2)}. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\lim_{l \rightarrow 0} a_j^2 = r_1 - \frac{r_1 r_2}{j(r_1 + r_2 + r_2/j)}, \quad \lim_{l \rightarrow 0} b_j^2 = r_1 + \frac{r_1 r_2}{j(r_1 + r_2 + r_1/j)}.$$

С помощью найденных четырех пределов после элементарных преобразований нетрудно прийти к представлениям (1.36), а также к следующим равенствам:

$$\begin{aligned}\lim_{l \rightarrow 0} [(b-a)^2 \Lambda_{1j}] &= j^{-2} [r_1 r_2 / (r_1 + r_2)]^2, \\ \lim_{l \rightarrow 0} [(b-a)^2 \Lambda_{2j}] &= j^{-2} [r_1 r_2 / (r_1 + r_2 + r_2/j)]^2, \\ \lim_{l \rightarrow 0} [(b-a)^2 \Lambda_{2j}^*] &= j^{-2} [r_1 r_2 / (r_1 + r_2 + r_1/j)]^2.\end{aligned}$$

Последним завершается доказательство теоремы, так как формулы (1.33)–(1.36) с очевидностью теперь вытекают из (1.22)–(1.25). \square

Теорема 4. *Если круговое включение расположено на границе сопряжения двух полуплоскостей, то единственное решение задачи (1.1), (1.2) имеет вид*

$$\begin{aligned}v_1(z) &= \frac{V_0}{A_1} + \frac{V_0}{A_1} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta^j}{j^2} \frac{r_1^2}{(z - b_j)^2}, \\ v_2(z) &= A_{23} V_0 + B_{23} \overline{V_0} + \frac{\overline{V_0}}{\overline{B}_2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\overline{\delta}^j}{j^2} \frac{r_1^2}{(z - a_j)^2}, \\ v_3(z) &= V_0 + \frac{\overline{V_0}}{\Delta_2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\overline{\delta}^j}{j^2} \frac{r_1^2}{(z - a_j)^2} + V_0 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta^j}{j^2} \frac{r_1^2}{(z - b_j)^2},\end{aligned}\tag{1.37}$$

где $\delta = \Delta_1 \overline{\Delta}_2$, $a_j = r_1 - r_1/j$, $b_j = r_1 + r_1/j$.

Доказательство. Справедливость представления (1.37) устанавливается путем предельного перехода при $r_2 \rightarrow \infty$ в формулах (1.33)–(1.36). При этом точно так же, как и при получении решения (1.33) из (1.22), надо заменить V_0 на константу, стоящую в правой части равенства (1.30), а $V_0 + \overline{\Delta}_2 \overline{V_0}$ – на V_0 . Заметим, что к решению (1.37) можно также прийти, если устремить к r_1 величину c в формулах (1.31). \square

Ясно, что первые четыре замечания к теореме 1 в полной мере относятся и к теоремам 2–4. Отметим также

Замечание 1. Остаточные члены рядов (1.33), (1.37) оцениваются просто, так как, очевидно, каждое слагаемое этих рядов достигает своего максимума (по модулю) в точке $z = r_1$. С учетом (1.35), (1.36) получим оценки

$$\begin{aligned}|r_{1N}(z)| &\leq |\delta|^N \frac{|V_0|}{|A_1|} \frac{(1 + |\Delta_2|)}{(1 - |\delta|)}, \quad |r_{2N}(z)| \leq |\delta|^N \frac{|V_0|}{|B_2|} \frac{(1 + |\Delta_1|)}{(1 - |\delta|)}, \\ |r_{3N}(z)| &\leq |\delta|^N |V_0| \frac{2 + |\Delta_1| + |\Delta_2|}{(1 - |\delta|)}\end{aligned}\tag{1.38}$$

для решения (1.33) и

$$\begin{aligned}|r_{1N}(z)| &\leq \frac{|\delta|^N}{1 - |\delta|} \frac{|V_0|}{|A_1|}, \quad |r_{2N}(z)| \leq \frac{|\delta|^N}{1 - |\delta|} \frac{|V_0|}{|B_2|}, \\ |v_3(z) - v_{3N}(z)| &\leq \frac{|\delta|^N}{1 - |\delta|} |V_0| \frac{1 + |\Delta_2|}{|\Delta_2|}\end{aligned}\tag{1.39}$$

для решения (1.37).

Замечание 2. Рассмотрим решение (1.33), предварительно заменив в нем z на $z + r_1$, в вещественном случае ($\beta_j = 0$, $j = 1, 2, 3$), когда $\rho_1 = \rho_2 = \infty$. На основании соотношений (1.33)–(1.36) решением задачи об обтекании двух непроницаемых цилиндров, касающихся друг друга в начале координат, будет

$$v_3(z) = V_0 \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(r_1\theta)^2}{(r_1\theta + jz)^2} - \overline{V_0} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(r_1\theta)^2}{(r_1\theta + (j+\theta)z)^2}, \quad (1.40)$$

где $\theta = r_2/(r_1 + r_2)$.

К решению (1.40) можно прийти и другим путем. Ясно, что в рассматриваемой ситуации граница области S_3 будет линией тока: $\psi(z) = c \equiv \text{const}$, $(w(z) = \varphi(z) + i\psi(z)$ – комплексный потенциал равномерного на бесконечности потока с заданной главной частью, равной $V_0 z$). Искомый комплексный потенциал может быть получен с помощью соответствующего конформного отображения:

$$w(z) = \frac{\pi\theta r_1}{\sin \pi\theta} \left(V_0 \frac{\sin[\pi\theta(r_1/z + 1)]}{\sin(\pi\theta r_1/z)} + \overline{V_0} \frac{\sin(\pi\theta r_1/z)}{\sin[\pi\theta(r_1/z + 1)]} \right).$$

Соответственно,

$$v_3(z) = \frac{dw(z)}{dz} = \left(\frac{\pi\theta r_1}{z} \right)^2 \left(\frac{V_0}{\sin^2(\pi\theta r_1/z)} - \frac{\overline{V_0}}{\sin^2[\pi\theta(r_1/z + 1)]} \right). \quad (1.41)$$

Отсюда, в частности, при $r_1 = r_2 = r$ получим

$$v_3(z) = (\pi r/(2z))^2 (V_0 \operatorname{cosec}^2[\pi r/(2z)] - \overline{V_0} \sec^2[\pi r/(2z)]).$$

В силу теоремы единственности решения (1.40) и (1.41) совпадают. Из (1.41) следует, что при $z \rightarrow 0$ из области S_3 предел функции $v_3(z)$ существует и равен нулю.

Для идеально проводящих включений ($\rho_1 = \rho_2 = 0$) соответствующие решения в области S_3 будут отличаться лишь знаком перед $\overline{V_0}$ от тех, что выписаны выше, так как здесь $\Delta_{31} = \Delta_{32} = 1$. Так, например, когда внешний поток ориентирован перпендикулярно оси, проходящей через центры включений ($V_0 \sim iV_0$, $\operatorname{Im} V_0 = 0$), соответствующий комплексный потенциал выглядит особенно просто

$$w(z) = i\pi r V_0 \operatorname{cosec}(\pi r/z).$$

Последний результат совпадет (если развернуть плоскость z на угол $\pi/2$) с полученным в [22].

Замечание 3. Рассмотрим аналогичную предельную ситуацию для структуры, отличающуюся от изображенной на рис. 1, *b* поворотом системы координат на угол $-\pi/2$ и переносом точки касания областей S_1 , S_2 в начало координат. Соответствующим образом видоизмененные формулы (1.39) в этом случае дадут решение задачи гидродинамики об обтекании круглого непроницаемого цилиндра, лежащего на непроницаемом основании. Именно, после замены $z - r_1$ на iz , V_0 на iV_0 , $v(z)$ на $iv(z)$, из (1.37) в пределе при $\rho_1, \rho_2 \rightarrow \infty$ и $\beta_j = 0$, $j = 1, 2, 3$, получим

$$v_3(z) = V_0 - V_0 r_1^2 \sum_{j=1}^{\infty} [(zj - ir_1)^{-2} + (zj + ir_1)^{-2}], \quad (1.42)$$

где, в соответствии с физическим смыслом задачи, величина V_0 является вещественной.

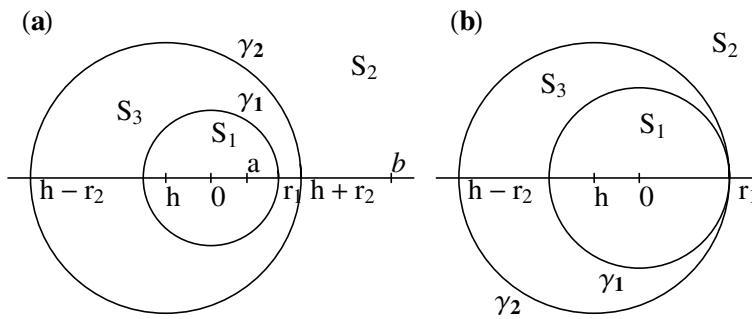


Рис. 2. Асимметричное кольцо

Точно так же, как и выше, к решению (1.42) можно прийти, построив комплексный потенциал соответствующего течения [20, с. 173]

$$w(z) = V_0 \pi r_1 \coth(\pi r_1 / z).$$

Отсюда

$$v_3(z) = \frac{dw(z)}{dz} = V_0 \left(\frac{z}{\pi r_1} \sinh \frac{\pi r_1}{z} \right)^{-2} \quad (1.45).$$

В том, что решения (1.42), (1.43) совпадают, легко убедиться с помощью известного [21, с. 392] представления функции $\coth z$ в виде суммы простых дробей.

Начало координат, как следует из (1.42) и (1.43), является точкой сгущения полюсов, а значит, предел $v_3(z)$ при $z \rightarrow 0$, вообще говоря, неопределен. Однако, если устремить точку z к нулю из области S_3 , то есть по путям, касающимся вещественной оси, то на основании представления (1.43) находится $v_3(0) = 0$.

Следует отметить, что в работе [22] ошибочно утверждается, что приведенный в этом замечании комплексный потенциал соответствует случаю обтекания двух круговых цилиндров.

2. Задача об асимметричном кольце

В этом разделе будет получено решение задачи (1.1), (1.2) для внутреннего расположения окружностей γ_1, γ_2 как в некасательном (рис. 2, a), так и в касательном (рис. 2, b) случаях. Пусть для определенности, как и раньше, $S_1 = \{z : |z| < r_1\}$, а $S_2 = \{z : |z - h| > r_2\}$, причем здесь $h < 0$, $h + r_2 \geq r_1$, S_3 – асимметричное кольцо $= \mathbb{C} \setminus \{\overline{S}_1 \cup \overline{S}_2\}$. В данном случае задача (1.1) будет решаться при дополнительном условии

$$V_2(\infty) = V_0 \quad (2.1)$$

вместо (1.2). Справедливо следующее утверждение

Теорема 5. Единственное решение задачи (1.1), (2.1) для структуры, изображенной на рис. 2, a, в непредельных ситуациях может быть записано в виде

$$v_1(z) = \frac{V_0}{A_1 A_{23}} \left\{ 1 + (b - a)^2 \sum_{j=1}^{\infty} \delta^j \frac{\Lambda_{1j}}{(z - b_j)^2} \right\},$$

$$v_2(z) = V_0 - \overline{V_0} \frac{B_2 r_2^2}{A_2 (z - h)^2} + \frac{\overline{V_0} \Delta_1}{A_2 \overline{A}_{23}} \left\{ \frac{r_1^2}{z^2} + (b - a)^2 \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\delta}^j \frac{\Lambda_{2j}}{(z - a_j)^2} \right\}, \quad (2.2)$$

$$v_3(z) = A_1 v_1(z) + \frac{\overline{V_0 \Delta_1}}{\overline{A_{23}}} \left\{ \frac{r_1^2}{z^2} + (b-a)^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\bar{\delta}^j \Lambda_{2j}}{(z-a_j)^2} \right\},$$

где величины $a_j = a_j^2$, $b_j = b_j^1$ и Λ_{1j} , Λ_{2j} определяются соотношениями (1.4), (1.24) и (1.25) соответственно.

Доказательство. Доказательство высказанного утверждения в целом повторяет доказательство теоремы 1. Остановимся лишь на отличиях. Для точек $a \in S_1$, $b \in S_2$, симметричных относительно обеих окружностей γ_1 , γ_2 , в рассматриваемом случае получим то же представление (1.5), но здесь следует брать знак «плюс» перед радикалом для a и «минус» – для b . Как и раньше, первое преобразование (1.4) отобразит асимметричное кольцо S_3 на концентрическое с радиусами, определяемыми по формулам (1.5), (1.6). В отличие от предыдущего, эти радиусы будут связаны соотношениями $0 < r < R < 1$. При переходе к задаче (1.9) вместо дополнительного условия (1.10) получается $V_2(1) = V_0$. Представление (1.11) для функции $V_3(\zeta)$ берется со старой нормировкой $V_3^-(1) = 0$ (естественно, что теперь значение $V_3^+(1)$ выбранной нормировкой не определяется, можно лишь сказать, что оно ограничено). Рассматривая функции (1.12), (1.13), можно доказать, что $\Phi(\zeta) \equiv 0$, а $\Psi(\zeta)$ – полином второго порядка относительно $(\zeta - R^2)^{-1}$. Чтобы определить коэффициенты этого полинома, надо переписать второе условие (1.9) в эквивалентной форме

$$V_2(\tau) = A_{23} V_3(\tau) + B_{23} R^2 [T_2(\tau)]^{-2} \overline{V_3(\tau)}, \quad \tau \in \Gamma.$$

С помощью последнего равенства, теоремы о непрерывном аналитическом продолжении и обобщенной теоремы Лиувилля легко доказать, что функция

$$W(z) = \begin{cases} A_{23} V_3^+(\zeta) + B_{23} R^2 [T_2(\zeta)]^{-2} \overline{V_3^-(R^2/\bar{\zeta})}, & |\zeta| \leq R, \\ V_2(\zeta) - A_{23} V_3^-(\zeta) - B_{23} R^2 [T_2(\zeta)]^{-2} \overline{V_3^+(R^2/\bar{\zeta})}, & |\zeta| \geq R \end{cases}$$

голоморфна в расширенной плоскости и с учетом (1.7), (2.1) тождественно равна $V_2(1) = V_0$. Если исключить из двух полученных таким образом тождеств V_3^+ , то с учетом второго тождества (1.16), обозначений (1.3), (0.3) можно получить

$$\Psi(\zeta) = A_2 V_2(\zeta) - V_3^-(\zeta) = A_2 V_0 - B_2 R^2 [T_2(\zeta)]^{-2} \overline{V_0}.$$

Исключая теперь из системы (1.14) (предварительно заменив там V_0 на выражение, стоящее в правой части последнего равенства) функции V_1 , V_2 , V_3^- , относительно V_3^+ приедем к функциональному уравнению

$$V_3^+(\zeta) = V_0 A_{23}^{-1} + g \delta [(1-\zeta)/(1-g\zeta)]^2 V_3^+(g\zeta), \quad |\zeta| < R.$$

Решение выписанного уравнения имеет вид

$$V_3^+(\zeta) = (V_0/A_{23}) \sum_{j=0}^{\infty} (\delta g)^j \left[(1-\zeta)/(1-g^j \zeta) \right]^2,$$

где для δ , g сохранены старые обозначения (1.18). Далее, с учетом соответствующим образом видоизмененной системы (1.14), последовательно находятся V_3^- , V_1 , V_2 и V_3 . Возврат в плоскость комплексного переменного z приводит к решению (2.2). \square

Замечание 1. Для остаточных членов рядов (2.2) справедливы оценки

$$\begin{aligned} |r_{jN}(z)| &\leq \frac{|\delta|^N g^{N-1}}{(1-|\delta|g)} C_j, \\ C_1 &= \frac{|V_0||1+\Delta_1|r_1^2 r_2^2}{|A_{23}|h^2(b-r_1)^2}, \quad C_2 = \frac{|V_0\Delta_1||1+\Delta_2|r_1^2}{|A_{23}|(r_2+h-a)^2}, \\ C_3 &= \frac{|V_0|r_1^2}{(c^2-r_1^2)} \frac{(1+|\Delta_1|)^3}{(1-g)|\Delta_1|}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

При получении последней из этих трех оценок используется очевидное неравенство

$$\Lambda_{2j} = r^2 g^j / (1 - r^2 g^j)^2 < g^j / (1 - g^j)^2 = \Lambda_{1j} \leq g^j / (1 - g)^2$$

и соотношение (1.29).

Замечание 2. Можно показать, что при $h = c - r_2$ и фиксированном c решение (2.2) в пределе при $r_2 \rightarrow \infty$ дает решение (1.37), если предварительно, в соответствии с разницей в нормировке (1.2) и (2.1), заменить V_0 на $A_{23}V_0$.

Для структуры, изображенной на рис. 2, b , имеет место

Теорема 6. Задача (1.1), (2.1) для $\rho_j \neq 0, \infty$ и $\rho_j \neq \rho_m$ при $j \neq m$ в случае внутреннего касания окружностей γ_1, γ_2 имеет единственное решение вида

$$\begin{aligned} v_1(z) &= \frac{V_0}{A_1 A_{23}} \left\{ 1 + \frac{r_1^2 r_2^2}{(r_2 - r_1)^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\delta^j}{j^2} \frac{1}{(z - b_j)^2} \right\}, \\ v_2(z) &= V_0 - \frac{\overline{V_0 \Delta}_{23} A_{32}^{-1} r_2^2}{(z - r_1 + r_2)^2} + \frac{\overline{V_0 \Delta}_{31}}{A_{32} \overline{A}_{23}} \left\{ \frac{r_1^2}{z^2} + \frac{r_1^2 r_2^2}{(r_2 - r_1)^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\bar{\delta}^j}{j^2} \frac{\Lambda_j}{(z - a_j)^2} \right\}, \\ v_3(z) &= A_1 v_1(z) + \frac{\overline{V_0 \Delta}_{31}}{\overline{A}_{23}} \left\{ \frac{r_1^2}{z^2} + \frac{r_1^2 r_2^2}{(r_2 - r_1)^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\bar{\delta}^j}{j^2} \frac{\Lambda_j}{(z - a_j)^2} \right\}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$zde \quad T(\zeta) = r_1(\zeta + 1)/(\zeta - 1) \quad u$$

$$\Lambda_j = [(r_2 - r_1)/(r_2 - r_1 + r_2/j)]^2, \quad (2.5)$$

$$a_j = r_1 g_j / (2 + g_j), \quad b_j = r_1 (2 + g_j) / g_j, \quad g_j = 2j(1 - r_1/r_2). \quad (2.6)$$

Доказательство. При $l = h + r_2 - r_1 \rightarrow 0$ в пределе получим $a, b = r_1$, $r, R = 1$ и $g = 1$. С учетом соотношений (1.6), (1.25) последовательно доказываются равенства

$$\lim_{l \rightarrow 0} [(b - a)^2 \Lambda_{1j}] = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{(b - a)^2 g^j}{(1 - g^j)^2} = \frac{1}{j^2} \lim_{l \rightarrow 0} \left(\frac{b - a}{1 - g} \right)^2 = \frac{1}{j^2} \left(\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \right)^2,$$

$$\lim_{l \rightarrow 0} b_j = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{b - ag^j}{1 - g^j} = \lim_{l \rightarrow 0} \left(a + \frac{b - a}{1 - g^j} \right) = r_1 + \frac{r_1 r_2}{j(r_2 - r_1)},$$

$$\lim_{l \rightarrow 0} [(b - a)^2 \Lambda_{2j}] = \lim_{l \rightarrow 0} \left(\frac{(b - a)b}{b - ag^j} \right)^2 = \frac{1}{j^2} \left(\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1 + r_2/j} \right)^2,$$

$$\lim_{l \rightarrow 0} a_j = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{br^2 g^j - a}{r^2 g^j - 1} = r_1^2 \lim_{l \rightarrow 0} \frac{1 - g^j}{b - ag^j} = r_1 - \frac{r_1 r_2}{j(r_2 - r_1)}.$$

Утверждение теоремы устанавливается предельным переходом в формулах (2.2) с помощью найденных соотношений. \square

Замечание. Из (2.5), (2.6) следует

$$\Lambda_j < 1 \quad \forall j \geq 1, \quad r_1 - a_j = b_j - r_1 = r_1 r_2 / [j(r_2 - r_1)]$$

и для остаточных членов решения (2.4), максимум которых, очевидно, достигается в точке r_1 , имеет место оценка

$$|r_{jN}(z)| \leq \frac{|\delta|^N}{1 - |\delta|} \frac{(1 + \delta_3^j |\Delta_1|) |V_0|}{|A_{3j} A_{23}|}, \quad j = 1, 2, 3,$$

где δ_3^j – символ Кронекера.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 06-01-81019-Бел-а).

Summary

Yu. V. Obnosov. Solution of a problem of a seepage fields distribution into infinite porous massif with two circular inclusions.

A closed solution to the problem on 2-D seepage flow in a heterogeneous three-component porous medium is presented. The medium is composed of an infinite matrix and two isotropic circular inclusions, placed in the medium without intersections of the corresponding circumferences. The limiting cases of touching circumferences as well as the degeneration of one circumference into a straight line are studied. The solutions are obtained in the form of infinite series, whose convergence is investigated and the truncated terms are estimated. Summation of the series is carried out in the form of elementary functions for the limiting cases when the inclusion hydraulic conductivity is 0 or ∞ .

Литература

1. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. – М.: Наука, 1977. – 664 с.
2. Budiansky B., Carrier G.F. High shear stress in stiff-fiber composites // J. Appl. Mech. – 1984. – V. 51. – P. 733–735.
3. Goree J.G., Wilson H.B. Transverse shear loading in an elastic matrix containing two circular cylindrical inclusions // J. Appl. Mech. – 1967. – June. – P. 511–513.
4. Dhondt G., Köhl M. On the force between a dielectric cylinder in a constant electric field and a conducting half space // Quart. Appl. Math. – 1997. – V. 55, No 2. – P. 337–359.
5. Емец Ю.П., Обносов Ю.В. Электрическое поле в слоистом круговом включении с эффектом Холла // Техн. электродинамика. АН Укр. – 1987. – № 3. – С. 3–8.
6. Емец Ю.П., Обносов Ю.В. Взаимное влияние неоднородных включений в полевых задачах дисперсных сред // Докл. АН УкрССР. Сер. А. – 1988. – № 2. – С. 74–78.
7. Емец Ю.П., Обносов Ю.В. Краевая задача для слоистого неконцентрического кругового включения при анизотропной проводимости среды // Техн. электродинамика. АН Укр. – 1988. – № 1. – С. 3–7.
8. Емец Ю.П., Обносов Ю.В. Точно разрешимая задача о взаимном влиянии включений в теории гетерогенных сред // ПМТФ. – 1990. – № 1. – С. 20–29.

9. Емец Ю.П., Обносов Ю.В., Онофрийчук Ю.П. Взаимодействие между касающимися круговыми диэлектрическими цилиндрами в однородном электрическом поле // ЖКТФ. – 1993. – Т. 63, № 12. – С. 12–24.
10. Емец Ю.П., Обносов Ю.В., Онофрийчук Ю.П. Электрические силы в диэлектрическом двухслойном цилиндре с неконцентрическим расположением слоев // ПМТФ. – 1996. – Т. 37, № 1. – С. 3–14.
11. Kacimov A.R., Obnosov Yu. V. Minimization of ground water contamination by lining of a waste repository // Proc. Indian Nat. Sci. Acad. A. – 1994. – V. 60, No 6. – P. 783–792.
12. Steif Paul S. Shear stress concentration between holes // J. Appl. Mech. – 1989. – V. 56. – P. 719–721.
13. Голузин Г.М. Решение основных плоских задач математической физики для случая уравнения Laplace'a и многосвязных областей, ограниченных окружностями (метод функциональных уравнений) // Матем. сб. – 1934. – Т. 41, № 2. – С. 236–276.
14. Голузин Г.М. Решение плоской задачи теплопроводности для многосвязных областей, ограниченных окружностями, в случае наличия изолирующего слоя // Матем. сб. – 1935. – Т. 42, № 2. – С. 191–198.
15. Митюшев В.В. О решении общей краевой задачи линейного сопряжения для нескольких концентрических окружностей // Рукопись предст. ред. журн. «Весні АН БССР». – Деп. в ВИНТИ 29.04.83, № 2279-83.
16. Mityushev V.V. Plane problem for the steady heat conduction of material with circular inclusions // Arch. Mech. – 1993. – V. 45, No 2. – P. 201–215.
17. Mityushev V.V. Transport properties of double-periodic arrays of circular cylinders // Z. angew. Math. Mech. – 1997. – V. 77, No 2. – P. 115–120.
18. Обносов Ю.В. Фильтрационная рефракция на полуциркульной линзе, сопряженной с двумя пористыми массивами // ПММ. – 1998. – Т. 62, Вып. 5. – С. 810–824.
19. Михайлов Л.Г. Новый класс особых интегральных уравнений и его приложение к дифференциальному уравнению с сингулярными коэффициентами. – Душанбе, 1963. – 183 с.
20. Милн-Томпсон Л.М. Теоретическая гидродинамика. – М.: Мир, 1964. – 655 с.
21. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.
22. Ярмицкий А.Г. Фильтрационная теорема о двух окружностях // Изв. АН СССР. МЖГ. – 1986. – № 4. – С. 76–82.

Поступила в редакцию
14.04.06

Обносов Юрий Викторович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой дифференциальных уравнений; ведущий научный сотрудник отдела математического анализа НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарева Казанского государственного университета.

E-mail: *Yuriy.Obnosov@ksu.ru*