УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2016, Т. 158, кн. 4 ISSN 1815-6088 (Print)
С. 482–499 ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 519.6

О ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СОВМЕСТНОГО ДВИЖЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ И ПОДЗЕМНЫХ ВОД С ТОЧНОЙ АППРОКСИМАЦИЕЙ ЛИНИИ РАЗРЕЗА

Л.Л. Глазырина, М.Ф. Павлова

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

В работе рассматривается начально-краевая задача для системы двух нелинейных параболических уравнений, одно из которых задано в ограниченной области $\Omega \subset R^2$, второе – вдоль кривой, расположенной в $\overline{\Omega}$. Оба уравнения относятся к классу параболических уравнений с двойным вырождением: вырождение может присутствовать в пространственном операторе, и кроме того, нелинейная функция, стоящая под знаком частной производной по переменной t, может быть не отделена от нуля. Рассматриваемая задача имеет прикладной характер: подобная структура возникает при математическом описании процесса совместного движения поверхностных и подземных вод. В этом случае искомая функция определяет уровень воды над заданным непроницаемым основанием, разрез моделирует русло реки или канала. Для математического описания процесса фильтрации подземных вод в области Ω используется уравнение Буссинеска, на разрезе для описания процесса изменения уровня воды в открытом русле – диффузионный аналог системы Сен-Венана.

Ранее авторами были доказаны теоремы существование и единственности обобщенного решения рассматриваемой задачи из классов функций, которые в литературе получили название усиленных пространств Соболева. При получении этих результатов существенно была использована техника, созданная немецкими математиками Х.В. Альтом (H.W. Alt), С. Лукхаусом (S. Luckhaus) и Ф. Отто (F. Otto) для установления корректности задач с двойным вырождением.

В настоящей работе предлагается и исследуется приближенный метод решения указанной выше задачи, построенный с помощью полудискретизации по переменной t и метода конечных элементов по пространственным переменным. Триангуляция области осуществляется треугольниками, при этом на линии разреза задается сетка. На каждом участке линии разреза, расположенном между соседними точками сетки, с обеих сторон строятся треугольники с общей стороной, совпадающей с выбранным участком линии разреза. Триангуляция оставшейся области проводится традиционно обычными треугольниками. В работе доказаны существование приближенного решения. Получен ряд априорных оценок. Доказана сходимость построенного алгоритма.

Ключевые слова: двойное вырождение, нелокальные краевые условия, метод полудискретизации, метод конечных элементов, обобщенное решение

---

1. Постановка задачи

Пусть Ω – ограниченная область пространства R^2, Γ – граница Ω, Π – разрез, проведенный внутри Ω и делящий ее на две связные области. В области $Q_T = \Omega \times \times (0,T)$ рассмотрим следующую начально-краевую задачу

$$\frac{\partial \varphi_1(u)}{\partial t}(x,t) - \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \big(k_i(x,u(x,t),\nabla u(x,t))\big) = f_1(x,t), \quad x \in \Omega_\Pi, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \varphi_2(u)}{\partial t}(x,t) - \frac{\partial}{\partial s}\Big(k_\Pi\big(x, u(x,t), \frac{\partial u}{\partial s}(x,t)\big)\Big) +$$
$$+ \left[\sum_{i=1}^{2} k_i(x, u(x,t), \nabla u(x,t)) \cos(n, x_i)\right]_\Pi =$$
$$= f_2(x,t), \quad x \in \Pi, \quad t \in (0,T), \quad [u]_\Pi = 0, \quad (2)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \Omega, \quad u(x,t) = 0, \quad x \in \Gamma, \quad t \in (0,T). \quad (3)$$

Здесь $\Omega_\Pi = \Omega \backslash \Pi$, $[\cdot]_\Pi$ – скачок функции при переходе через разрез Π, n – нормаль к Π.

Задача (1)–(3) описывает (см. [1, 2]) процесс совместного движения поверхностных и подземных вод, при этом разрез Π соответствует руслу реки или канала, искомая функция u определяет высоту свободной поверхности воды над непроницаемым основанием.

Будем предполагать, что $\varphi_i(\xi)$, $i = 1, 2$, – абсолютно непрерывные, строго возрастающие функции, удовлетворяющие при любом $\xi \in R^1$ неравенствам

$$b_{0i} \mid \xi \mid^{\alpha_i} - b_{1i} \le \Phi_i(\xi) \equiv \int_0^\xi \varphi_i'(t) t \, dt \le b_{2i} \mid \xi \mid^{\alpha_i} + b_3, \quad \alpha_i > 1, \quad (4)$$

$$\mid \varphi_i(\xi) \mid \le b_{4i} \mid \xi \mid^{\alpha_i - 1} + b_5, \quad (5)$$

где b_{ij} – постоянные, удовлетворяющие условиям

$$b_{0i} > 0, \quad b_{1i} \ge 0, \quad b_{2i} > 0, \quad b_{3i} \ge 0, \quad b_{4i} > 0, \quad b_{5i} \ge 0, \quad i = 1, 2.$$

Функции $k_i(x, \xi_0, \xi)$, $i = 1, 2$, предполагаются непрерывными по ξ_0 и ξ, измеримыми по x и удовлетворяющими при любых $x \in \Omega$, $\xi_0 \in R^1$, $\xi^1, \xi^2, \xi \in R^2$ условиям

$$\mid k_i(x, \xi_0, \xi) \mid \le M_{01} \sum_{j=1}^{2} \mid \xi_i \mid^{p_1 - 1} + M_{11}, \quad M_{01} > 0, \quad M_{11} \ge 0, \quad p_1 > 1, \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^{2} k_i(x, \xi_0, \xi)\xi_i \ge M_{21} \sum_{i=1}^{2} \mid \xi_i \mid^{p_1} - M_{31}, \quad M_{21} > 0, \quad M_{31} \ge 0, \quad (7)$$

$$\sum_{i=1}^{2} (k_i(x, \xi_0, \xi^1) - k_i(x, \xi_0, \xi^2))(\xi_i^1 - \xi_i^2) \ge 0, \quad (8)$$

$$\mid k_\Pi(x, \xi_0, \xi) \mid \le M_{02} \mid \xi \mid^{p_2 - 1} + M_{12}, \quad M_{02} > 0, \quad M_{12} \ge 0, \quad p_2 > 1, \quad (9)$$

$$k_\Pi(x, \xi_0, \xi)\xi \ge M_{22} \mid \xi \mid^{p_2} - M_{32}, \quad M_{22} > 0, \quad M_{32} \ge 0, \quad (10)$$

$$(k_\Pi(x, \xi_0, \xi^1) - k_\Pi(x, \xi_0, \xi^2))(\xi^1 - \xi^2) \ge 0 \quad \forall \xi, \, \xi^1, \, \xi^2 \in R^1. \quad (11)$$

При определении обобщенного решения задачи (1)–(3) используются специальные нормированные пространства, называемые усиленными пространствами Соболева, будем обозначать через $\overset{\circ}{V}$, $\overset{\circ}{V}(0,T)$, $\overset{\circ}{W}(0,T)$ банаховы пространства функций, полученные замыканием $C_0^\infty(\Omega)$ и $C^\infty(0,T; C_0^\infty(\Omega))$ в следующих нормах:

$$\|u\|_{\overset{\circ}{V}} = \|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega)} + \|u\|_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi)},$$

$$\|u\|_{\overset{\circ}{V}(0,T)} = \|u\|_{L_{p_1}(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega))} + \|u\|_{L_{p_2}(0,T;\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi))},$$
$$\|u\|_{\overset{\circ}{W}(0,T)} = \|u\|_{\overset{\circ}{V}(0,T)} + \|u\|_{L_\infty(0,T;L_{\alpha_1}(\Omega))} + \|u\|_{L_\infty(0,T;L_{\alpha_2}(\Pi))}.$$

В работе [3] доказано, что пространство $\overset{\circ}{V}$ совпадает с множеством функций из $\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega)$, след которых на Π принадлежит $\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi)$. Аналогичный результат получен в [4] и для $\overset{\circ}{V}(0,T)$.

Пусть, далее, z – некоторый элемент из $\overset{\circ}{V}(0,T)$. Обозначим через $J(z(t))$ функционал, значение которого при $t \in [0,T]$ на элементах $v \in \overset{\circ}{V}$ определяется по правилу

$$\langle J(z(t)), v\rangle_* = \frac{d}{dt}\Big(\int\limits_\Omega \varphi_1(z(t))v(x)\,dx + \int\limits_\Pi \varphi_2(z(t))v(s)\,ds\Big),$$

здесь и далее $\langle F, v\rangle_*$ – значение функционала $F \in (\overset{\circ}{V})^*$ на элементе $v \in \overset{\circ}{V}$.

Определение 1. Функцию $u \in \overset{\circ}{W}(0,T)$ такую, что

$$u(x,0) = u_0(x) \quad \text{п.в. в } \Omega \text{ и в } \Pi,$$

$$\int\limits_0^T \langle\, J(u)\,, \cdot\,\rangle_*\,dt \in (\overset{\circ}{V}(0,T))^*, \tag{12}$$

назовем обобщенным решением задачи (1)–(3), если для любой функции v из пространства $\overset{\circ}{W}(0,T)$ справедливо интегральное тождество

$$\int\limits_0^T \langle\, J(u)\,,\, v\,\rangle_*\,dt + \int\limits_0^T\!\!\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^2 k_i(x,u,\nabla u)\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx\,dt + \\ + \int\limits_0^T\!\!\int\limits_\Pi k_\Pi\Big(x,u,\frac{\partial u}{\partial s}\Big)\frac{\partial v}{\partial s}\,ds\,dt = \int\limits_0^T \langle f_1, v\rangle\,dt + \int\limits_0^T \langle f_2, v\rangle_\Pi\,dt, \tag{13}$$

где $\langle f, v\rangle$ $(\langle f, v\rangle_\Pi)$ – значение функционала $f \in L_{p_1'}(0,T;W^{-1}_{p_1'}(\Omega))$ (соответственно $f \in L_{p_2'}(0,T;W^{-1}_{p_2'}(\Pi))$) на элементе v из $\overset{\circ}{W}(0,T)$.

Отметим, что в работах [5–7] доказаны теоремы существования и единственности обобщенного решения рассматриваемой задачи, в [8, 9] аналогичные результаты получены для вариационного неравенства, возникающего при моделировании процесса совместного движения поверхностных и грунтовых вод. Проблемы численной реализации моделей, взаимосвязи и организации вычислительного процесса рассмотрены в работах [10–13]. Методы исследований, проводимые в настоящей работе, схожи с [14–16].

2. Описание приближенного метода. Аппriорные оценки

Для задачи (1)–(3) с помощью метода полудискретизации по переменной t и МКЭ по пространственным переменным строится приближенный метод решения. Для этого на $[0,T]$ задается сетка $\bar\omega_\tau = \{0, \tau, \ldots, N\tau = T\}$, где τ – шаг сетки.

Далее, в предположении, что Ω – выпуклая область, определяется вписанный в Ω многоугольник Ω_h с границей Γ_h, удовлетворяющий следующим условиям:

1) для любой точки $x \in \Gamma$ существует точка $\xi \in \Gamma_h$, находящаяся на расстоянии не большем h (h – шаг сетки по пространственным переменным);

2) точки пересечения Γ и Π являются вершинами многоугольника Ω_h.

Триангуляция области Ω_h осуществляется треугольниками по следующему правилу: для каждой из подобластей $\Omega_h^1 \subset \Omega_h$ и $\Omega_h^2 \subset \Omega_h$, на которые разрез Π делит Ω_h, триангуляция проводится автономно, но так, что множества узлов построенных на Ω_h^1 и на Ω_h^2 сеток, принадлежащих Π, совпадают. В окрестности Π элементами триангуляции являются треугольники с одной криволинейной стороной, принадлежащей Π. Обозначим через $\overset{\circ}{V}_h$ множество функций из $\overset{\circ}{V}$, сужение которых на каждый конечный элемент есть образ линейной по каждому из аргументов функции на базисном элементе (см. [17, с. 113], [18, с. 47]).

Определение 2. Функцию $y(t) \in \overset{\circ}{V}_h$ для $t \in \{0, \tau, \dots, T = N\tau\}$ назовем решением полудискретной задачи, если для любой функции $z \in \overset{\circ}{V}_h$ и всех $t \in \{0, \tau, T-\tau\}$ выполнены равенства

$$\int\limits_{\Omega_h} \left(\varphi_{1t}(y(t))\, z(x) \ + \sum_{i=1}^{2} k_i(x, y, \nabla \widehat{y}) \frac{\partial z(x)}{\partial x_i} \right) dx +$$
$$+ \int\limits_{\Pi} \left(\varphi_{2t}(y(t))\, z(s) \ + k_\Pi(x, y, \frac{\partial \widehat{y}}{\partial s}) \frac{\partial z(s)}{\partial s} \right) ds \ =$$
$$= \int\limits_{\Omega_h} \sum_{i=0}^{2} f_{1,\tau}^i(t) \frac{\partial z(x)}{\partial x_i}\, dx + \int\limits_{\Pi} \left(f_{2,\tau}^0(t) z(s) + f_{2,\tau}^1(t) \frac{\partial z(s)}{\partial s} \right) ds, \quad (14)$$

$$y(x, 0) = u_0(x) \ \text{ п.в. в } \ \Omega_h \ \text{ и на } \Pi. \quad (15)$$

Здесь функции f_1^i, f_2^i выбраны так, что

$$f_1 = f_1^0 - \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_i} f_1^i, \quad f_2 = f_2^0 - \frac{\partial}{\partial s} f_2^1,$$

$$f_{j,\tau}^i(x, t) = \frac{1}{\tau} \int\limits_t^{t+\tau} f_j^i(x, \xi)\, d\xi, \quad j = 1, 2, \quad \widehat{y}(t) = y(t + \tau).$$

В дальнейшем будем использовать обозначение $f_1^0 = \partial f_1^0 / \partial x_0$.

Лемма 1. *Если*

$$f_1 \in L_{p_1'}(0, T; W_{p_1'}^{-1}(\Omega)), \quad f_2 \in L_{p_2'}(0, T; W_{p_2'}^{-1}(\Pi)), \quad u_0 \in \ L_{\alpha_1}(\Omega) \bigcap L_{\alpha_2}(\Pi),$$

тогда задача (14)–(15) *разрешима.*

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать, что при известном

$$y(t) \in \ L_{\alpha_1}(\Omega_h) \bigcap L_{\alpha_2}(\Pi)$$

задача (14) разрешима относительно $\widehat{y}(t)$. Для этого (14) запишем в виде

$$\int\limits_{\Omega_h} \left(\varphi_1(\widehat{y})z + \tau \sum_{i=1}^{2} k_i(x, y, \nabla\widehat{y})\,\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)dx +$$

$$+ \int\limits_{\Pi}\left(\varphi_2(\widehat{y})z + \tau k_\Pi\Big(x, y, \frac{\partial\widehat{y}}{\partial s}\Big)\,\frac{\partial z}{\partial s}\right)ds = \int\limits_{\Omega_h}\left(\varphi_1(y)z + \tau\sum_{i=0}^{2} f^i_{1,\tau}(t)\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)dx +$$

$$+ \int\limits_{\Pi}\left(\varphi_2(y)z + \tau f^0_{2,\tau}(t)z + \tau f^1_{2,\tau}(t)\frac{\partial z}{\partial s}\right)ds \quad \forall\, z \in \overset{\circ}{V}_h\,. \qquad (16)$$

Отметим, что задача (16) является системой нелинейных уравнений относительно значений функции $\widehat{y}$ в узлах Ω_h сетки. Обозначим через N число узлов сетки, через $\mathbf{c}(z) \in R^N$ вектор значений функции z в узлах сетки. С помощью формул

$$(\mathbf{c}(z), \mathbf{c}(v))_{R^N} = \int\limits_{\Omega_h} z(x)v(x)\,dx + \int\limits_{\Pi} z(s)v(s)\,ds,$$

$$(F(\mathbf{c}(z)), \mathbf{c}(v))_{R^N} =$$

$$= \int\limits_{\Omega_h}\left((\varphi_1(z) - \varphi_1(y))v + \tau\sum_{i=1}^{2} k_i(x, y, \nabla z)\frac{\partial v}{\partial x_i} - \tau\sum_{i=0}^{2} f^i_{1,\tau}(t)\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)dx +$$

$$+ \int\limits_{\Pi}\left((\varphi_2(z) - \varphi_2(y))v + \tau\, k_\Pi(x, y, \frac{\partial z}{\partial s})\,\frac{\partial v}{\partial s} - \tau f^0_{2,\tau}(t)v - \tau f^1_{2,\tau}(t)\,\frac{\partial v}{\partial s}\right)ds$$

определим скалярное произведение в R^N и оператор $F : R^N \to R^N$, порождаемый задачей (16). Здесь z и v – произвольные элементы из $\overset{\circ}{V}_h$. Разрешимость (16) будет следовать из топологической леммы (см. [19, с. 66]) при условии, что оператор F непрерывен и существует ρ такое, что

$$(F(\mathbf{c}), \mathbf{c})_{R^N} \ge 0 \quad \forall\, \mathbf{c} \in R^N : \ \|\mathbf{c}\|_{R^N} \ge \rho. \qquad (17)$$

Непрерывность оператора F следует из непрерывности функций $k_i(x, \xi_0, \xi)$ и $k_\Pi(x, \xi_0, \xi)$ по аргументу ξ. Докажем справедливость неравенства (17). Используя неравенства (см. [20, с. 1439])

$$(\varphi_i(\xi) - \varphi_i(\eta))\xi \ge \Phi_i(\xi) - \Phi_i(\eta) \quad \forall\, \xi,\, \eta \in R_1, \qquad (18)$$

свойства (4), (7), (10), неравенства Гельдера и ε-неравенство, получим

$$(F(\mathbf{c}(v)), \mathbf{c}(v))_{R^N} =$$

$$= \int\limits_{\Omega_h}\left((\varphi_1(v) - \varphi_1(y))\, v \ + \tau\sum_{i=1}^{2} k_i(x, y, \nabla v)\frac{\partial v}{\partial x_i} - \tau\sum_{i=0}^{2} f^i_{1,\tau}(t)\frac{\partial v}{\partial x_i}\right)dx +$$

$$+ \int\limits_{\Pi}\left((\varphi_2(v) - \varphi_2(y))\, v \ + \tau\, k_\Pi(x, y, \frac{\partial v}{\partial s})\,\frac{\partial v}{\partial s} - \tau\, f^0_{2,\tau}(t)\, v - \tau\, f^1_{2,\tau}(t)\frac{\partial v}{\partial s}\right)ds \ge$$

$$\ge b_{01}\|v\|^{\alpha_1}_{L_{\alpha_1}(\Omega_h)} + b_{02}\|v\|^{\alpha_2}_{L_{\alpha_2}(\Pi)} + \tau(M_{21} - \varepsilon_1^{p_1})\|v\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega_h)} + \tau(M_{22} - \varepsilon_2^{p_2})\|v\|^{p_2}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi)} -$$

$$-\left\{b_{21}\|y\|^{\alpha_1}_{L_{\alpha_1}(\Omega_h)}+b_{22}\|y\|^{\alpha_2}_{L_{\alpha_2}(\Pi)}+\tau\frac{1}{\varepsilon_1^{p_1'}}\sum_{i=0}^{2}\|f^i_{1,\tau}\|^{p_1'}_{L_{p_1'}(\Omega_h)}+\tau\frac{1}{\varepsilon_2^{p_2'}}\sum_{i=0}^{1}\|f^i_{2,\tau}\|^{p_2'}_{L_{p_2'}(\Pi)}+\right.$$
$$\left.+\tau(b_{11}+M_{31})\operatorname{mes}\Omega_h+\tau(b_{12}+M_{32})\operatorname{mes}\Pi\right\}. \quad (19)$$

Из соотношения (19) следует справедливость неравенства (17) при

$$\rho=b_{21}\|y\|^{\alpha_1}_{L_{\alpha_1}(\Omega_h)}+b_{22}\|y\|^{\alpha_2}_{L_{\alpha_2}(\Pi)}+\tau\frac{1}{\varepsilon_1^{p_1'}}\sum_{i=0}^{2}\|f^i_{1,\tau}\|^{p_1'}_{L_{p_1'}(\Omega_h)}+$$
$$+\tau\frac{1}{\varepsilon_2^{p_2'}}\sum_{i=0}^{1}\|f_{2,\tau}\|^{p_2'}_{L_{p_2'}(\Pi)}+\tau(b_{11}+M_{31})\operatorname{mes}\Omega_h+\tau(b_{12}+M_{32})\operatorname{mes}\Pi$$

а значит, разрешимость задачи (16) относительно $\widehat{y}(t)$. Лемма доказана. □

Отметим, что по построению

$$(F(\mathbf{c}(\widehat{y})),\mathbf{c}(v))_{R^N}=0,\quad v\in\overset{\circ}{V}_h\ .$$

Из этого равенства и неравенства (19), очевидно, вытекает оценка

$$b_{21}\big\{\|\widehat{y}(t)\|^{\alpha_1}_{L_{\alpha_1}(\Omega_h)}-\|y\|^{\alpha_1}_{L_{\alpha_1}(\Omega_h)}\big\}+b_{22}\big\{\|\widehat{y}(t)\|^{\alpha_2}_{L_{\alpha_2}(\Pi)}-\|y\|^{\alpha_2}_{L_{\alpha_2}(\Pi)}\big\}+$$
$$+\tau(M_{21}-\varepsilon_1^{p_1})\|\widehat{y}(t)\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega_h)}+\tau(M_{22}-\varepsilon_2^{p_2})\|\widehat{y}(t)\|^{p_2}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi)}\le$$
$$\le\tau\frac{1}{\varepsilon_1^{p_1'}}\sum_{i=0}^{2}\|f^i_{1,\tau}\|^{p_1'}_{L_{p_1'}(\Omega_h)}+\tau\frac{1}{\varepsilon_2^{p_2'}}\sum_{i=0}^{1}\|f^i_{2,\tau}\|^{p_2'}_{L_{p_2'}(\Pi)}+$$
$$+\tau(b_{11}+M_{31})\operatorname{mes}\Omega_h+\tau(b_{12}+M_{32})\operatorname{mes}\Pi. \quad (20)$$

Лемма 2. *Пусть*

$$f_1\in L_{p_1'}(0,T;W^{-1}_{p_1'}(\Omega)),\quad f_2\in L_{p_2'}(0,T;W^{-1}_{p_2'}(\Pi)),\quad u_0\in\ L_{\alpha_1}(\Omega)\bigcap L_{\alpha_2}(\Pi).$$

Тогда для решения задачи (14), (15) *справедливы априорные оценки*

$$\max_{t'\in\bar\omega_\tau}\left\{\|y(t')\|^{\alpha_1}_{L_{\alpha_1}(\Omega_h)}+\|y(t')\|^{\alpha_2}_{L_{\alpha_2}(\Pi)}\right\}\le\mathrm{const}, \quad (21)$$

$$\sum_{t=0}^{t'}\tau\left[\|y(t)\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega_h)}+\|y(t)\|^{p_2}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi)}\right]\le\mathrm{const},\quad t'\in\omega_\tau, \quad (22)$$

$$\frac{1}{k\tau}\sum_{t'=0}^{T-k\tau}\left\{\int\limits_{\Omega_h}\Big[\varphi_1(y(t'+k\tau)-\varphi_1(t')\Big]\Big[y(t'+k\tau)-y(t')\Big]\,dx+\right.$$
$$\left.+\int\limits_{\Pi}\Big[\varphi_2(y(t'+k\tau)-\varphi_1(t')\Big]\Big[y(t'+k\tau)-y(t')\Big]\,ds\right\}\le\mathrm{const}, \quad (23)$$

где $k\in\{1,2,\dots,N\}$.

Доказательство. Для получения оценок (21), (22) просуммируем неравенства (20) по t от 0 до $t'-\tau,\ t'\in\omega_\tau$:

$$\|y(t')\|^{\alpha_1}_{L_{\alpha_1}(\Omega_h)} + \|y(t')\|^{\alpha_1}_{L_{\alpha_2}(\Pi)} + \\ + \tau\frac{(M_{21}-\varepsilon_1^{p_1})}{b}\sum_{t=0}^{t'}\|y(t)\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega_h)} + \tau\frac{(M_{22}-\varepsilon_2^{p_2})}{b}\sum_{t=0}^{t'}\|y(t)\|^{p_2}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi)} \le \\ \le \|y(0)\|^{\alpha_1}_{L_{\alpha_1}(\Omega_h)} + \|y(0)\|^{\alpha_2}_{L_{\alpha_2}(\Pi)} + \frac{1}{\varepsilon_1^{p_1'}b}\sum_{t=0}^{t'}\tau\sum_{i=0}^{2}\|f^i_{1,\tau}\|^{p_1'}_{L_{p_1'}(\Omega_h)} + \\ + \frac{1}{\varepsilon_2^{p_2'}b}\sum_{t=0}^{t'}\tau\sum_{i=0}^{1}\|f^i_{2,\tau}(t)\|^{p_2'}_{L_{p_2'}(\Pi)} + \tau\frac{(b_{11}+M_{31})}{b}\,\mathrm{mes}\,\Omega_h + \\ + \tau\frac{(b_{12}+M_{32})}{b}\,\mathrm{mes}\,\Pi. \quad (24)$$

Здесь $b=\min\{b_{21},b_{22}\}$. Из (24) следуют оценки (21), (22).

Для доказательства оценки (23) просуммируем соотношение (14) по t от t' до $t'+(k-1)\tau$, где t' – произвольная точка из множества $\omega_\tau\cap[0,T-(k-1)\tau]$, затем положим

$$z=\frac{\tau}{k}(y(t'+k\tau)-y(t')),$$

результат просуммируем по t' от 0 до $T-k\tau$. В итоге, обозначив через J правую часть неравенства (23), будем иметь

$$J=-\frac{1}{k}\sum_{t'=0}^{T-k\tau}\sum_{t=t'}^{t'+(k-1)\tau}\tau\Big\{\int\limits_{\Omega_h}\Big(\sum_{i=1}^{2}k_i(x,y(t),\nabla\widehat{y}(t))\frac{\partial}{\partial x_i}\big(y(t'+k\tau)-y(t')\big) - \\ -\sum_{i=0}^{2}f^i_{1,\tau}(t)\frac{\partial}{\partial x_i}\big(y(t'+k\tau)-y(t')\big)\Big)\,dx + \int\limits_{\Pi}\Big(k_\Pi(x,y(t),\frac{\partial\widehat{y}(t)}{\partial s})\frac{\partial}{\partial s}\big(y(t'+k\tau)-y(t')\big) - \\ - f^0_{2,\tau}(t)\big(y(t'+k\tau)-y(t')\big) - f^1_{2,\tau}(t)\frac{\partial}{\partial s}\big(y(t'+k\tau)-y(t')\big)\Big)\,ds\Big\}.$$

Используя условия (6), (9), неравенство Гельдера, нетрудно показать, что

$$J\le\frac{1}{k}\sum_{t'=0}^{T-k\tau}\sum_{t=t'}^{t'+(k-1)\tau}\tau\Big\{\Big(M_{01}\|\widehat{y}(t)\|^{p_1-1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega_h)}+M_{11}\Big)\times \\ \times\Big(\|y(t'+k\tau)\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega_h)}+\|y(t')\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega_h)}\Big)+ \\ +\sum_{i=0}^{2}\|f^i_{1,\tau}(t)\|^{p_1'}_{L_{p_1'}(\Omega_h)}\Big(\|y(t'+k\tau)\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega_h)}+\|y(t')\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega_h)}\Big)+ \\ \Big(M_{02}\|\widehat{y}(t)\|^{p_2-1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi)}+M_{12}\Big)\Big(\|y(t'+k\tau)\|^{p_2}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi)}++\|y(t')\|^{p_2}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi)}\Big)+ \\ +\sum_{i=0}^{1}\|f^i_{2,\tau}(t)\|^{p_2'}_{L_{p_2'}(\Pi)}\Big(\|y(t'+k\tau)\|^{p_2}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi)}+\|y(t')\|^{p_2}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_2}(\Pi)}\Big)\Big\}. \quad (25)$$

Докажем, что правая часть неравенства (25) ограничена постоянной, не зависящей от h и τ. Рассмотрим слагаемое

$$J_1=\frac{1}{k}\sum_{t'=0}^{T-k\tau}\sum_{t=t'}^{t'+(k-1)\tau}\tau M_{01}\|\widehat{y}(t)\|^{p_1-1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega_h)}\|y(t'+k\tau)\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega_h)}.$$

Оценивая его с помощью неравенства Гельдера, нетрудно получить

$$J_1 \le \frac{M_{01}}{k}\left(k\sum_{t=0}^{T-k\tau}\tau\|\widehat{y}(t)\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega_h)}\right)^{1/p_1'}\left(k\sum_{t=0}^{T-k\tau}\tau\|y(t)\|^{p_1}_{\overset{\circ}{W}{}^1_{p_1}(\Omega_h)}\right)^{1/p_1}.$$

Из последнего неравенства, оценки (22) следует ограниченность J_1 сверху постоянной, не зависящей от h и τ. Оценка остальных слагаемых проводится аналогично. Лемма доказана.

□

3. Исследование сходимости метода

Функцию y продолжим нулем на множестве $\Omega\setminus\Omega_h$, сохранив за продолжением то же обозначение. Определим кусочно-постоянные восполнения функции z по формулам

$$\Pi^- z(t') = \{z(t),\ k\tau, \quad (k-1)\tau < t' \le k\tau\},$$
$$\Pi^+ z(t') = \{z(t),\ k\tau, \quad k\tau \le t' \le (k+\tau)\}.$$

Из леммы 2 следуют равномерные по h и τ оценки для кусочно-постоянных восполнений $\Pi^\pm y$ в пространствах $\overset{\circ}{V}(0,T)$, $L_\infty(0,T;L_{\alpha_1}(\Omega))$, $L_\infty(0,T;L_{\alpha_2}(\Pi))$ и справедливость неравенства, аналогичного (23), с интегрированием по Ω. Поэтому найдутся функция $u \in \overset{\circ}{W}(0,T)$ и последовательности $\{h_n\}_{n=0}^\infty$ и $\{\tau_n\}_{n=0}^\infty$ такие, что при $n\to+\infty$ выполняются предельные соотношения

$$\Pi^\pm y_n \rightharpoonup u \ \text{ в } \overset{\circ}{V}(0,T); \tag{26}$$

$$\Pi^\pm y_n \rightharpoonup u \quad *\text{-слабо в } L_\infty(0,T;L_{\alpha_1}(\Omega)); \tag{27}$$

$$\Pi^\pm y_n \rightharpoonup u \quad *\text{-слабо в } L_\infty(0,T;L_{\alpha_2}(\Pi)). \tag{28}$$

Здесь y_n – решение задачи (14)–(15) при $h=h_n,\ \tau=\tau_n$.

Оценки (21)–(23) и теорема компактности (см. [21]) позволяют выделить подпоследовательности $\{h_{n'}\}_{n'=0}^\infty \subset \{h_n\}_{n=0}^\infty$ и $\{\tau_{n'}\}_{n'=0}^\infty \subset \{\tau_n\}_{n=0}^\infty$, для которых наряду с (26)–(28) будет справедливым и предельное соотношение

$$\Pi^\pm y_{n'} \to u \quad \text{п. в. в } Q_T \ \text{ и на } \Pi_T. \tag{29}$$

В силу непрерывности функций $\varphi_i,\ i=1,2,$ из (29) следует, что

$$\Pi^\pm \varphi_1(y_{n'}) \to \varphi_1(u) \quad \text{п. в. в } Q_T; \tag{30}$$

$$\Pi^\pm \varphi_2(y_{n'}) \to \varphi_2(u) \quad \text{п. в. в } \Pi_T. \tag{31}$$

Докажем, что функция, определенная соотношениями (26)–(29), является обобщенным решением задачи (1)–(3).

Из оценки (22) и условий (6), (9) следует равномерная ограниченность последовательностей $\{\Pi^\pm k_i(x,y_{n'},\nabla\widehat{y}_{n'})\}$ в $L_{p_1'}(0,T;L_{p_1'}(\Omega))$ и $\{\Pi^\pm k_\Pi(x,y_{n'},\partial\widehat{y}_{n'}/\partial s)\}$ в $L_{p_2'}(0,T;L_{p_2'}(\Pi))$. Тогда найдутся подпоследовательности $\{h_{n''}\}_{n''=0}^\infty$ и $\{\tau_{n''}\}_{n''=0}^\infty$ указанных последовательностей и функции $K_i \in L_{p_1'}(0,T;L_{p_1'}(\Omega))$, $K_\Pi \in L_{p_2'}(0,T;L_{p_2'}(\Pi))$ такие, что при $n''\to\infty$

$$\Pi^\pm k_i(x,y_{n''},\nabla\widehat{y}_{n''}) \rightharpoonup K_i \quad \text{в } L_{p_1'}(0,T;L_{p_1'}(\Omega)); \tag{32}$$

$$\Pi^\pm K_\Pi\Big(x,y_{n''},\frac{\partial\widehat{y}_{n''}}{\partial s}\Big) \rightharpoonup K_\Pi \quad \text{в } L_{p_2'}(0,T;L_{p_2'}(\Pi)). \tag{33}$$

В дальнейшем за подпоследовательностями $\{h_{n''}\}_{n''=0}^{\infty}$ и $\{\tau_{n''}\}_{n''=0}^{\infty}$, для которых справедливы (26)–(33), сохраним обозначение $\{h_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\tau_n\}_{n=0}^{\infty}$. Пусть v – произвольная функция из пространства $C_0^{\infty}(\Omega)$, $v_h \in \overset{\circ}{V}_h$ – интерполянт функции v. В (14) положим $z = v_h\eta_\tau$, где η_τ – сеточная функция, полученная сносом в точки сетки $\bar{\omega}_\tau$ функции $\eta \in C^{\infty}(0,T)$ такой, что $\eta(T) = 0$. Полученное равенство умножим на τ, просуммируем по t от 0 до $T-\tau$, первое и третье слагаемое преобразуем с помощью формулы суммирования по частям. Результат, используя кусочно-постоянные восполнения, запишем в виде

$$-\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \Pi^+\varphi_1(\widehat{y}_n(t))\,v_h\,\Pi^+(\eta_\tau)_{\bar{t}}\,dx\,dt - \int\limits_\Omega \varphi_1(u_0(x))\,v_h\,\eta(0)\,dx +$$
$$+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{2}\Pi^+k_i(x,y_n,\nabla\widehat{y}_n)\frac{\partial v_h}{\partial x_i}\,\Pi^+\eta_\tau\,dx\,dt-$$
$$-\int\limits_0^T\int\limits_\Pi \Pi^+\varphi_2(\widehat{y}_n(t))\,v_h\,\Pi^+(\eta_\tau)_{\bar{t}}\,ds\,dt - \int\limits_\Pi \varphi_2(u_0(x))\,v_h\,\eta(0)\,ds +$$
$$+\int\limits_0^T\int\limits_\Pi \Pi^+k_\Pi(x,y_n,\frac{\partial\widehat{y}_n}{\partial s})\frac{\partial v_h}{\partial s}\,\Pi^+\eta_\tau ds\,dt\ =$$
$$=\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \sum_{i=0}^{2}f_1^i(t)\frac{\partial v_h}{\partial x_i}\,\Pi^+\eta_\tau\,dx\,dt\ +\int\limits_0^T\int\limits_\Pi\left(f_2^0(t)v_h + f_2^1\frac{\partial v_h}{\partial s}\right)\Pi^+\eta_\tau\,ds\,dt. \quad (34)$$

В равенстве (34) перейдем к пределу при $n\to\infty$. Используя соотношения (29)–(33), гладкость функций v и η, получим следующее равенство:

$$-\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \varphi_1(u(x,t))\,v(x)\,\frac{\partial\eta}{\partial t}(t)\,dx\,dt - \int\limits_\Omega \varphi_1(u_0(x))\,v(x)\,\eta(0)\,dx +$$
$$+\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^{2}K_i\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\,\eta(t)\,dx\,dt - \int\limits_0^T\int\limits_\Pi \varphi_2(u(x,t))\,v(x)\,\frac{\partial\eta}{\partial t}\,ds\,dt-$$
$$-\int\limits_\Pi \varphi_2(u_0(x))\,v(x)\,\eta(0)\,ds\ +\int\limits_0^T\int\limits_\Pi K_\Pi\frac{\partial v}{\partial s}(s)\,\eta(t)\,ds\,dt =$$
$$=\int\limits_0^T\int\limits_\Omega \sum_{i=0}^{2}f_1^i(t)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\eta(t)\,dx\,dt\ +\int\limits_0^T\int\limits_\Pi\left(f_2^0(t)v(s) + f_2^1\frac{\partial v}{\partial s}(s)\right)\eta(t)\,ds\,dt. \quad (35)$$

Из плотности вложения $C_0^{\infty}(\Omega)$ в $\overset{\circ}{V}\bigcap L_{\alpha_1}(\Omega)$ следует справедливость (35) для произвольной функции $v\in\overset{\circ}{V}\bigcap L_{\alpha_1}(\Omega)$. Полагая далее $\eta\in C_0^{\infty}(0,T)$, запишем (35) в виде

$$-\int\limits_0^T\Big[\int\limits_\Omega \varphi_1(u(x,t))\,v(x)\,dx + \int\limits_\Pi \varphi_2(u(s,t))\,v(s)\,ds\Big]\,\frac{\partial\eta}{\partial t}(t)\,dt =$$

$$= \int_0^T \Big[\langle f_1, v\rangle - \int_\Omega \sum_{i=1}^2 K_i \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) \Big] \eta\, dt + \int_0^T \Big[\langle f_2, v\rangle_\Pi - \int_\Pi K_\Pi \frac{\partial v}{\partial s}(s) \Big] \eta\, dt \equiv$$

$$\equiv \int_0^T \langle G(t),\, v\rangle_* \eta\, dt. \quad (36)$$

Из равенства (36) следует, что

$$\langle G(t),\, v\rangle_* = \frac{d}{dt}\Big\{ \int_\Omega \varphi_1(u) v\, dx + \int_\Pi \varphi_2(u) v\, ds \Big\} = \langle J(u(t)), v\rangle_*,$$

и справедливо следующее включение

$$\int_0^T \langle J(u(t)), \cdot\rangle_*\, dt \in \big(\overset{\circ}{V}(0,T)\big)^*.$$

В силу плотности множества функций

$$\Big\{ w(x,t) = \sum_{k=1}^m v_k(x)\eta_k(t),\ v_k \in \overset{\circ}{V},\ \eta_k \in C_0^\infty(0,T),\ m \in N \Big\}$$

в $\overset{\circ}{W}(0,T)$ из (36) и последнего соотношения следует справедливость равенства

$$\int_0^T \langle J(u(t)), w\rangle_*\, dt = \int_0^T \Big[\langle f_1, w\rangle - \int_\Omega \sum_{i=1}^2 K_i \frac{\partial w}{\partial x_i}\, dx \Big] dt +$$

$$+ \int_0^T \Big[\langle f_2, w\rangle_\Pi - \int_\Pi K_\Pi \frac{\partial w}{\partial s}\, ds \Big] dt \quad (37)$$

для любой функции $w \in \overset{\circ}{W}(0,T)$.

Докажем, что $u(x,0) = u_0(x)$ почти всюду в Ω и на Π. Для этого выберем в (37) $w(x,t) = v(x)\eta(t)$, где $v \in \overset{\circ}{V}$, $\eta \in C^\infty(0,T)$, $\eta(T) = 0$; результат, используя равенство (35), запишем в виде

$$\int_0^T \big\langle J(u(t)), v\big\rangle_* \eta\, dt = -\int_0^T \int_\Omega \varphi_1(u(x,t))\, v(x)\, \frac{\partial \eta}{\partial t}(t)\, dx\, dt -$$

$$-\int_\Omega \varphi_1(u_0(x))\, v(x)\, \eta(0)\, dx - \int_\Pi \varphi_2(u(s,t)) v(s)\, \frac{\partial \eta}{\partial t}(t)\, ds\, dt - \int_\Pi \varphi_2(u_0(x))\, v(x)\, \eta(0)\, ds.$$

Из последнего равенства и формулы интегрирования по частям следует, что

$$\int_\Omega \Big(\varphi_1(u_0(x)) - \varphi_1(u(x,0)) \Big) v(x)\eta(0)\, dx +$$

$$+ \int_\Pi \Big(\varphi_2(u_0(s)) - \varphi_2(u(s,0)) \Big) v(s)\eta(0)\, ds = 0 \quad (38)$$

для любой функции v из $\overset{\circ}{V}$. В силу произвольности функции v и взаимооднозначности функций φ_i, $i = 1, 2$ из (38) следует, что $u(x, 0) = u_0(x)$ почти всюду в Ω и на Π.

Осталось доказать, что

$$\int_0^T\int_\Omega \sum_{i=1}^{2} K_i \frac{\partial w}{\partial x_i}\, dx\, dt + \int_0^T\int_\Pi K_\Pi \frac{\partial w}{\partial s}\, ds\, dt =$$

$$= \int_0^T\int_\Omega \sum_{i=1}^{2} k_i(x, u, \nabla u) \frac{\partial w}{\partial x_i}\, dx\, dt + \int_0^T\int_\Pi k_\Pi(s, u, \frac{\partial u}{\partial s}) \frac{\partial w}{\partial s}\, ds\, dt. \quad (39)$$

С этой целью рассмотрим неравенство

$$\int_\Omega \frac{\varphi_1(\widehat{y}_n(t)) - \varphi_1(y_n(t))}{\tau}\, \widehat{y}_n(t)\, dx + \int_\Pi \frac{\varphi_2(\widehat{y}_n(t)) - \varphi_2(y_n(t))}{\tau}\, \widehat{y}_n(t)\, ds +$$

$$+ \int_\Omega \sum_{i=1}^{2} \Big(k_i\big(x, y_n, \nabla \widehat{y}_n\big) - k_i(x, y_h, \nabla \widehat{v}_h) \Big) \frac{\partial(\widehat{y}_n - \widehat{v}_h)}{\partial x_i}\, dx +$$

$$+ \int_\Pi \left(k_\Pi\Big(x, y_n, \frac{\partial \widehat{y}_n}{\partial s}\Big) - k_\Pi\Big(x, y_h, \frac{\partial \widehat{v}_h}{\partial s}\Big) \right) \frac{\partial(\widehat{y}_n - \widehat{v}_h)}{\partial s}\, ds \geq$$

$$\geq \frac{1}{\tau} \int_\Omega \Big(\Phi_1(\widehat{y}_n(t)) - \Phi_1(y_n(t)) \Big)\, dx + \frac{1}{\tau} \int_\Pi \Big(\Phi_2(\widehat{y}_n(t)) - \Phi_2(y_n(t)) \Big)\, ds. \quad (40)$$

Здесь через v_h обозначена функция, определенная на множестве $\overline{\Omega}_h \times \overline{\omega}_\tau$ и являющаяся при $t \in \overline{\omega}_\tau$ интерполянтом из $\overset{\circ}{V}_h$ функции v из $C^\infty(0, T; C_0^\infty(\Omega))$. Справедливость неравенства (40) следует из свойств (8), (11) и соотношения (18).

Используя (14), запишем неравенство (40) в виде

$$\langle f_{1\tau}(t), \widehat{y}_n \rangle + \langle f_{2\tau}(t), \widehat{y}_n \rangle_\Pi -$$

$$- \int_\Omega \sum_{i=1}^{2} k_i(x, y_n, \nabla \widehat{y}_n) \frac{\partial \widehat{v}_h}{\partial x_i}\, dx - \int_\Pi k_\Pi\Big(x, y_n, \frac{\partial \widehat{y}_n}{\partial s}\Big) \frac{\partial \widehat{v}_h}{\partial s}\, ds -$$

$$- \int_\Omega \sum_{i=1}^{2} k_i(x, y_n, \nabla \widehat{v}_h) \frac{\partial(\widehat{y}_n - \widehat{v}_h)}{\partial x_i}\, dx - \int_\Pi k_\Pi\Big(x, y_n, \frac{\partial \widehat{v}_h}{\partial s}\Big) \frac{\partial(\widehat{y}_n - \widehat{v}_h)}{\partial s}\, ds \geq$$

$$\geq \frac{1}{\tau} \int_\Omega \Big(\Phi_1(\widehat{y}_n(t)) - \Phi_1(y_n(t)) \Big)\, dx + \frac{1}{\tau} \int_\Pi \Big(\Phi_2(\widehat{y}_n(t)) - \Phi_2(y_n(t)) \Big)\, ds.$$

Полученное неравенство с помощью кусочно-постоянных восполнений запишем для всех $t \in [0, T]$. Интегрируя результат по отрезку $[0, t_1]$, $t_1 \in [0, T]$, получим

$$I_1 \equiv \int_0^{t_1} \Pi^+ \langle f_{1\tau}(t), \widehat{y}_n \rangle dt + \int_0^{t_1} \Pi^+ \langle f_{2\tau}(t), \widehat{y}_n \rangle_\Pi dt -$$

$$- \int_0^{t_1}\int_\Omega \sum_{i=1}^{2} \Pi^+ k_i(x, y_n, \nabla \widehat{y}_n)\, \Pi^+ \frac{\partial \widehat{v}_h}{\partial x_i}\, dx\, dt - \int_0^{t_1}\int_\Pi \Pi^+ k_\Pi\Big(x, y_n, \frac{\partial \widehat{y}_n}{\partial s}\Big) \Pi^+ \frac{\partial \widehat{v}_h}{\partial s}\, ds\, dt -$$

$$- \int_0^{t_1}\int_\Omega \sum_{i=1}^{2} \Pi^+ k_i(x, y_n, \nabla\widehat{v}_h)\, \Pi^+ \Big(\frac{\partial(\widehat{y}_n - \widehat{v}_h)}{\partial x_i}\Big)\, dx\, dt -$$

$$- \int_0^{t_1}\int_\Pi \Pi^+ k_\Pi(x, y_n, \frac{\partial \widehat{v}_h}{\partial s})\, \Pi^+ \Big(\frac{\partial(\widehat{y}_n - \widehat{v}_h)}{\partial s}\Big)\, ds\, dt \ \geq$$

$$\geq \frac{1}{\tau} \int_{t_1-\tau}^{t_1} \int_\Omega \Phi_1(\Pi^+\widehat{y}_n(t))\, dx\, dt - \int_\Omega \Phi_1(u_0)\, dx +$$

$$+ \frac{1}{\tau} \int_{t_1-\tau}^{t_1} \int_\Pi \Phi_2(\Pi^+\widehat{y}_n(t))\, ds\, dt - \int_\Pi \Phi_2(u_0) ds.$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{\tau} \int_{t_1-\tau}^{t_1} \int_{\Omega_i} \Phi_i(\Pi^+\widehat{y}_n(t))\, dx\, dt \geq \int_{\Omega_i} \Phi_i(\Lambda y_n(t_1))\, dx, \quad i = 1, 2,$$

будем иметь

$$I_1 \geq \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} \Big(\Phi_i(\Lambda y_n(t_1))\, dx - \int_{\Omega_i} \Phi_i(u_0(x))\Big)\, dx, \tag{41}$$

где $\Omega_1 = \Omega,\ \Omega_2 = \Pi,\ \Lambda z$ – линейное восполнение функции z.

В неравенстве (41), используя соотношения (26)–(33), перейдем к пределу при $h, \tau \to 0$. В результате получим

$$\int_0^{t_1} \langle f_1(t), u\rangle\, dt + \int_0^{t_1} \langle f_2(t), u\rangle_\Pi\, dt - \int_0^{t_1}\int_\Omega \sum_{i=1}^{2} K_i\, \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx\, dt -$$

$$- \int_0^{t_1}\int_\Pi K_\Pi \frac{\partial v}{\partial s}\, ds\, dt - \int_0^{t_1}\int_\Omega \sum_{i=1}^{2} k_i(x, u, \nabla v)\, \frac{\partial(u - v)}{\partial x_i}\, dx\, dt -$$

$$- \int_0^{t_1}\int_\Pi k_\Pi(x, u, \frac{\partial v}{\partial s}) \frac{\partial(u - v)}{\partial s}\, ds\, dt \ \geq$$

$$\geq \varliminf_{\tau, h \to 0} \Big\{ \int_\Omega \Phi_1(\Lambda y_n(t_1))\, dx - \int_\Omega \Phi_1(u_0)\, dx + \int_\Pi \Phi_2(\Lambda y_n(t_1))\, ds\, dt - \int_\Pi \Phi_2(u_0)\, ds \Big\}.$$

Последнее неравенство преобразуем, используя (37), следующим образом:

$$I_2(t_1) \equiv \int_0^{t_1} \langle J(u(t)), u\rangle_*\, dt + \int_0^{t_1}\int_\Omega \sum_{i=1}^{2} \Big(K_i - k_i(x, u, \nabla v)\Big)\, \frac{\partial(u - v)}{\partial x_i}\, dx\, dt +$$

$$+ \int_0^{t_1}\int_\Pi \Big(K_\Pi - k_\Pi(x, u, \frac{\partial v}{\partial s})\Big) \frac{\partial(u - v)}{\partial s}\, ds\, dt \ \geq$$

$$\geq \varliminf_{\tau, h \to 0} \Big\{ \int_\Omega \Phi_1(\Lambda y_n(t_1))\, dx - \int_\Omega \Phi_1(u_0)\, dx + \int_\Pi \Phi_2(\Lambda y_n(t_1))\, ds\, dt - \int_\Pi \Phi_2(u_0) ds \Big\}. \tag{42}$$

Проинтегрируем (42) по t_1 от $T-\lambda$ до T, где $\lambda > 0$. В результате будем иметь

$$\int\limits_{T-\lambda}^{T} I_2(t_1)\,dt_1 \ \ge \int\limits_{T-\lambda}^{T} \varliminf_{\tau,h\to 0}\int\limits_{\Omega} \Phi_1(\Lambda y_n(t_1))\,dx\,dt_1 + \\ + \int\limits_{T-\lambda}^{T} \varliminf_{\tau,h\to 0}\int\limits_{\Pi} \Phi_2(\Lambda y_n(t_1))\,ds\,dt_1 \ - \ \lambda\int\limits_{\Omega}\Phi_1(u_0(x))\,dx \ - \ \lambda\int\limits_{\Pi}\Phi_2(u_0(x))\,ds. \quad (43)$$

Из слабой полунепрерывности снизу функционалов $\int\limits_{T-\lambda}^{T}\int\limits_{\Omega_i}\Phi_i(\xi)\,dx\,dt$, $i = 1,2$, в пространстве $L_\infty(0,T;L_{\alpha_i}(\Omega_i))$ вытекает, что

$$\int\limits_{T-\lambda}^{T} \varliminf_{\tau,h\to 0}\int\limits_{\Pi} \Phi_i(\Lambda y_n(t_1))\,ds\,dt_1 \ \ge \int\limits_{T-\lambda}^{T}\int\limits_{\Omega_i}\Phi_i(u(t_1))\,dx\,dt_1, \quad i=1,2. \quad (44)$$

Левую часть неравенства (43) преобразуем с помощью теоремы о среднем значении. Затем получившееся неравенство поделим на λ и перейдем к пределу при $\lambda\to 0$, откуда с учетом оценок (44) вытекает, что

$$\int\limits_0^T \langle J(u(t)),u\rangle_*\,dt \ + \int\limits_0^T\int\limits_{\Omega}\sum_{i=1}^{2}\Big(K_i \ - \ k_i(x,u,\nabla v)\Big)\,\frac{\partial(u-v)}{\partial x_i}\,dx\,dt + \\ + \int\limits_0^T\int\limits_{\Pi}\Big(K_\Pi \ - \ k_\Pi(x,u,\frac{\partial v}{\partial s})\Big)\frac{\partial(u-v)}{\partial s}\,ds\,dt \ \ge \\ \ge \varliminf_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\bigg(\int\limits_{\Omega}\Phi_1(u)\,dx \ - \int\limits_{\Omega}\Phi_1(u_0)\,dx + \int\limits_{\Pi}\Phi_2(u)\,ds \ - \int\limits_{\Pi}\Phi_2(u_0)\,ds\bigg). \quad (45)$$

Используя равенство

$$\int\limits_0^T \langle J(u(t)),u\rangle_*\,dt = \varliminf_{\lambda\to 0}\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{2}\bigg(\int\limits_{\Omega_i}\Phi_i(u)\,dx \ - \int\limits_{\Omega_i}\Phi_i(u_0)\,dx\bigg), \quad (46)$$

справедливость, которого установить нетрудно, следуя доказательству леммы 1.5 работы [21], из (45) имеем

$$\int\limits_0^T\int\limits_{\Omega} \ \sum_{i=1}^{2}\Big(K_i \ - \ k_i(x,u,\nabla v)\Big)\,\frac{\partial(u-v)}{\partial x_i}\,dx\,dt + \\ + \int\limits_0^T\int\limits_{\Pi} \ \bigg(K_\Pi \ - \ k_\Pi\Big(x,u,\frac{\partial v}{\partial s}\Big)\bigg)\frac{\partial(u-v)}{\partial s}\,ds\,dt \ \ge \ 0. \quad (47)$$

Полагая в (47) $v = u-\lambda w$, где λ – произвольное положительное число, w – произвольная функция из $\overset{\circ}{W}(0,T)$, перейдем после деления на λ в полученном неравенстве к пределу при $\lambda \to 0$, в результате будем иметь

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^2 \Big(K_i - k_i(x,u,\nabla u)\Big) \frac{\partial w}{\partial x_i}\, dx\, dt +$$
$$+ \int\limits_0^T \int\limits_\Pi \left(K_\Pi - k_\Pi\Big(x,u,\frac{\partial u}{\partial s}\Big)\right) \frac{\partial w}{\partial s}\, ds\, dt \geq 0.$$

В силу произвольности функции w из последнего неравенства вытекает равенство (39).

Сформулируем основной результат работы.

Теорема 1. *Пусть* Ω *– выпуклая область пространства* R^2, *функции* φ_i, k_i, $i = 1,2$, k_Π *удовлетворяют условиям* (4)–(11),

$$f_1 \in L_{p'_1}(0,T; W^{-1}_{p'_1}(\Omega)), \quad f_2 \in L_{p'_2}(0,T; W^{-1}_{p'_2}(\Pi)), \quad u_0 \in L_{\alpha_1}(\Omega) \cap L_{\alpha_2}(\Pi).$$

Тогда подпоследовательность кусочно-постоянных восполнений решения схемы (14)–(15), *удовлетворяющая соотношениям* (26)–(29), *сходится к обобщенному решению задачи* (1)–(3). *В условиях единственности решения* (см. [6]) *вся указанная последовательность обладает этим свойством.*

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 15-01-05686, 15-41-02315).

Литература

1. *Антонцев С.Н., Мейрманов А.М.* Математические модели совместного движения поверхностных и подземных вод. – Новосибирск: Изд-во НГУ, 1979. – 80 с.
2. *Антонцев С.Н., Епихов Г.Р., Кашеваров А.А.* Системное математическое моделирования процессов водообмена. – Новосибирск: Наука, 1986. – 250 с.
3. *Тимербаев М.Р.* Пространства с нормой графика и усиленные пространства Соболева I // Изв. вузов. Матем. – 2003. – № 5. – С. 55–65.
4. *Тимербаев М.Р.* Пространства с нормой графика и усиленные пространства Соболева II // Изв. вузов. Матем. – 2003. – № 9. – С. 46–53.
5. *Glazyrina, L.L., Pavlova, M.F.* Convergence of implicit difference scheme for the problem of conjunctive ground water and surface flow with an arbitrary channel cross section // J. Math. Sci. – 1994. – V. 71, No 6. – P. 2744–2756
6. *Глазырина Л.Л., Павлова М.Ф.* Теорема о единственности решения одной задачи теории совместного движения русловых и подземных вод // Изв. вузов. Матем. – 2000. – № 11. – С. 11–25.
7. *Глазырина Л.Л., Павлова М.Ф.* Теорема о единственности решения одной задачи теории совместного движения русловых и подземных вод с нестационарными граничными условиями // Исслед. по прикл. матем. и информатике. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2003. – Вып. 24. – С. 31–42.
8. *Глазырина Л.Л., Павлова М.Ф.* О единственности решения вариационного неравенства теории совместного движения русловых и подземных вод при неоднородном ограничении и неоднородных краевых условиях // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2007. – Т. 149, кн. 4. – С. 73–89.

9. *Глазырина Л.Л., Павлова М.Ф.* О разрешимости задачи задачи теории совместного движения поверхностных и подземных вод при неоднородном ограничении на решение // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2012. – Т. 154, кн. 1. – С. 147–161.
10. *Glazyrina L.L., Pavlova M.F.* Numerical solution of the nonstationary problem of conjunctive motion of ground and surface water // J. Sov. Math. – 1992. – V. 61, No 6. – P. 2417–2421.
11. *Glazyrina L.L., Pavlova M.F.* The finite element method explicit scheme for a solution of one problem of surface and ground water combined movement // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. – 2016. – V. 158, No 1. – Art. 012041, P. 1–7.
12. *Кашеваров А.А.* Приближенный учет вертикального потока в гидравлических моделях фильтрации // Краевые задачи фильтрации (Динамика сплошной среды) – Новосибирск: Ин-т гидродинамики СО РАН, 1994. – Вып. 108. – С. 3–13.
13. *Nobi N., Das Gupta A.* Simulation of regional flow and salinity intrusion in an integrated stream-aquifer system in coastal region: Southwest region of Bangladesh // Ground Water. – 1997. – V. 35, No 5. – P. 786–796.
14. *Glazyrina O.V., Pavlova M.F.* Study of the convergence of the finite-element method for solving parabolic equations with a nonlinear nonlocal space operator // Differ. Equations. – 2015. – V. 51, No 7. – P. 876–889. – doi: 10.1134/S001226611507006X.
15. *Glazyrina O.V., Pavlova M.F.* On the solvability of an evolution variational inequality with a nonlocal space operator // Differ. Equations. – 2014. – V. 50, No 7. – P. 873–887. – doi: 10.1134/S0012266114070040.
16. *Pavlova M.F.* On the solvability of nonlocal nonstationary problems with double degeneration // Differ. Equations. – 2011. – V. 47, No 8. – P. 1161–1175. – doi: 10.1134/S0012266111080106.
17. *Даутов Р.З., Карчевский М.М.* Введение в теорию метода конечных элементов. – Казань: Казан. ун-т., 2011. – 240 с.
18. *Корнеев В.Г.* Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности. – Л.: ЛГУ, 1977. – 206 с.
19. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 588 с.
20. *Павлова М.Ф.* Исследование уравнений нестационарной нелинейной фильтрации // Дифференц. уравнения. – 1987. – Т. 23, № 7. – С. 1436–1446.
21. *Alt H.W., Luckhaus S.* Quasilinear elliptic-parabolic differential equation // Mat. Z. – 1983. – Bd. 183, H. 8. – S. 311–341.

Поступила в редакцию
23.08.16

Глазырина Людмила Леонидовна, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры вычислительной математики

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *glazyrina-ludmila@ya.ru*

Павлова Мария Филипповна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *mpavlova@kpfu.ru*

ISSN 1815-6088 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2016, vol. 158, no. 4, pp. 482–499

On an Approximate Solution Method for the Problem of Surface and Groundwater Combined Movement with Exact Approximation on the Section Line

L.L. Glazyrina, M.F. Pavlova***

Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia
E-mail: **glazyrina-ludmila@ya.ru*, ***mpavlova@kpfu.ru*

Received May 12, 2016

Abstract

In this paper, the initial-boundary problem for two nonlinear parabolic combined equations has been considered. One of the equations is set on the bounded domain $\Omega \subset R^2$, another equation is set along the curve lying in $\overline{\Omega}$. Both of the equations are parabolic equations with double degeneration. The degeneration can be present at the space operator. Furthermore, the nonlinear function which is under the sign of partial derivative with respect to the variable t, can be bound to zero. This problem has an applied character: such structure is needed to describe the process of surface and ground water combined movement. In this case, the desired function determines the level of water above the given impenetrable bottom, the section simulates the riverbed. The Bussinesk equation has been used for mathematical description of the groundwater filtration process in the domain Ω; a diffusion analogue of the Saint-Venant's system has been used on the section for description of the process of water level change in the open channel. Earlier, the authors proved the theorems of generalized solution existence and uniqueness for the considered problem from the functions classes which are called strengthened Sobolev spaces in the literature. To obtain these results, we used the technique which was created by the German mathematicians (H.W. Alt, S. Luckhaus, F. Otto) to establish the correctness of the problems with a double degeneration.

In this paper, we have proposed and investigated an approximate solution method for the above-stated problem. This method has been constructed using semidiscretization with respect to the variable t and the finite element method for space variables. Triangulation of the domain has been accomplished by triangles. The mesh has been set on the section line. On each segment of the line section lying between the nearby mesh points, on both side of this segment we have constructed the triangles with a common side which matches with the picked segment of the section line. Triangulation of the rest of domain has been accomplished by triangles as commonly accepted. A list of a priori estimates has been obtained. The convergence of the constructed method has been proved.

Keywords: double degeneration, non-local boundary conditions, method of semidiscretization, finite element method, generalized solution

Acknowledgments. The study was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects nos. 15-01-05686 and 15-41-02315).

References

1. Antontsev S.N., Meirmanov A.M. Mathematical Models of Simultaneous Motions of Surface and Ground Waters. Novosibirsk, Izd. Novosib. Gos. Univ., 1979. 80 p. (In Russian)
2. Antontsev S.N., Epikhov G.R., Kashevarov A.A. Mathematical System Modelling of Water Exchange Processes. Novosibirsk, Nauka, 1986. 250 p. (In Russian)
3. Timerbaev M.R. Spaces with a graph norm and strengthened Sobolev spaces. I. *Russ. Math.*, 2003, vol. 47, no. 5, pp. 52–62.
4. Timerbaev M.R.Spaces with a graph norm and stengthened Sobolev spaces. II. *Russ. Math.*, 2003, vol. 47, no. 9, pp. 43–49.
5. Glazyrina, L.L., Pavlova, M.F. Convergence of implicit difference scheme for the problem of conjunctive ground water and surface flow with an arbitrary channel cross section. *J. Math. Sci.*, 1994, vol. 71, no. 6, pp. 2744–2756.
6. Glazyrina, L.L., Pavlova, M.F. A uniqueness theorem for the solution of a problem in the theory of the joint motion of channel and underground waters. *Russ. Math.*, 2000, no. 11, pp. 10–22.
7. Glazyrina L.L., Pavlova M.F. A uniqueness theorem for the solution of a problem in the theory of the joint motion of channel and underground waters with nonstationary boundary conditions. *Isseld. Prikl. Mat. Inf.*, 2003, no. 24, pp. 31–42. (In Russian)
8. Glazyrina L.L., Pavlova M.F. On uniqueness of the solution of a variational inequality of the coupled movement of the underground and surface waters theory with nonhomogeneous bounds and nonhomogeneous boundary conditions. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2007, vol. 149, no. 4, pp. 73–89. (In Russian)
9. Glazyrina L.L., Pavlova M.F. On the solvability of the problem of the coupled movement of underground and surface waters with nonhomogeneous bounds to the solution. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2012, vol. 154, no. 1, pp. 147–161. (In Russian)
10. Glazyrina L.L., Pavlova M.F. Numerical solution of the nonstationary problem of conjunctive motion of ground and surface water. *J. Sov. Math.*, 1992, vol. 61, no. 6, pp. 2417–2421.
11. Glazyrina L.L., Pavlova M.F. The finite element method explicit scheme for a solution of one problem of surface and ground water combined movement. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2016, vol. 158, no. 1, art. 012041, pp. 1–7.
12. Kashevarov A.A. Boundary Problems of Filtration (Continuous Medium Dynamics) *Priblizhennyi uchet vertikal'nogo potoka v gidravlicheskkh modelyakh fil'tratsii* [Approximated Recording of the Vertical Flow in Hydraulic Filtration Models]. Novosibirsk, Inst. Gidrodin. Sib. Otd. Ross. Akad. Nauk, 1994, no. 108, pp. 3–13. (In Russian)
13. Nobi N., Das Gupta A. Simulation of regional flow and salinity intrusion in an integrated stream-aquifer system in coastal region: Southwest region of Bangladesh. *Ground Water*, 1997, vol. 35, no. 5, pp. 786–796.
14. Glazyrina O.V., Pavlova M.F. Study of the convergence of the finite-element method for solving parabolic equations with a nonlinear nonlocal space operator. *Differ. Equations*, 2015, vol. 51, no. 7, pp. 876–889. doi: 10.1134/S001226611507006X.
15. Glazyrina O.V., Pavlova M.F. On the solvability of an evolution variational inequality with a nonlocal space operator. *Differ. Equations*, 2014, vol. 50, no. 7, pp. 873–887. doi: 10.1134/S0012266114070040.
16. Pavlova M.F. On the solvability of nonlocal nonstationary problems with double degeneration. *Differ. Equations*, 2011, vol. 47, no. 8, pp. 1161–1175. doi: 10.1134/S0012266111080106.
17. Dautov R.Z., Karchevskii M.M. An Introduction to the Theory of Finite Element Methods. Kazan, Kazan. Univ., 2011. 240 p. (In Russian)
18. Korneev V.G. Schemes of the Method of Finite Elements for High Orders of Accuracy. Leningrad, LGU, 1977. 206 p. (In Russian)
19. Lions J.-L. Some Methods of Solving Non-Linear Boundary Value Problems. Moscow, Mir, 1972. 588 p. (In Russian)
20. Pavlova M.F. Investigation of the equations of nonstationary nonlinear filtration. *Differ. Uravn.*, 1987, vol. 23, no. 7, pp. 1436–1446. (In Russian)
21. Alt H.W., Luckhaus S. Quasilinear elliptic-parabolic differential equation. *Mat. Z.*, 1983, Bd. 183, H. 8, S. 311–341.

***Для цитирования*:** *Глазырина Л.Л., Павлова М.Ф.* О приближенном методе решения задачи совместного движения поверхностных и подземных вод с точной аппроксимацией линии разреза // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2016. – Т. 158, кн. 4. – С. 482–499.

***For citation*:** Glazyrina L.L., Pavlova M.F. On an approximate solution method for the problem of surface and groundwater combined movement with exact approximation on the section line. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2016, vol. 158, no. 4, pp. 482–499. (In Russian)