

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Казанский (Приволжский) федеральный университет»**

**ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО**

**КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ И  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ**

Направление: 050201.65 - математика и английский язык

**ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА  
(Дипломная работа)**

Метрические свойства графов

**Работа завершена:**

Студент 05-905 группы

«\_\_»\_\_\_\_\_ 2014 г. \_\_\_\_\_(М.Н. Тюкарева)

**Работа допущена к защите:**

Научный руководитель

к.ф.-м.н., доцент

«\_\_»\_\_\_\_\_ 2014 г. \_\_\_\_\_(А.Н Фролов)

Заведующий кафедрой

доктор ф.-м. н., профессор \_\_\_\_\_(Ю.Г. Игнатъев)

Казань - 2014 г.

## Содержание

Введение .....	3
Глава 1. Основные понятия графов.....	4
Глава 2. Поиск центра, диаметра и радиуса взвешенного графа.....	12
Глава 3. Центры графов .....	17
Глава 4. Абсолютные центры графов .....	22
Заключение.....	30
Список литературы.....	31

## Введение

Данная работа посвящена исследованию метрическим свойствам графов.

Целью данной работы является изучение различных подходов к определению метрики на графов. С этой целью рассматриваются взвешенные неориентированные и ориентированные графы. После определения метрики естественным образом возникает необходимость рассмотреть такие понятия, как центры графа, радиус и диаметр графа, эксцентриситет графа и прочие сопутствующие понятия. Для применения разобранного материала при решении практических задач рассматриваются алгоритмы поиска центров графов, нахождения радиуса и диаметра графа.

## Глава 1. Основные понятия графов

Начало теории графов как математической дисциплины было положено Эйлером в его знаменитом рассуждении о Кёнигсбергских мостах. Однако, эта статья Эйлера 1736 года была единственной в течение почти ста лет. Интерес к проблемам теории графов возродился около середины прошлого столетия и был сосредоточен, главным образом в Англии. Имелось много причин для такого оживления изучения графов. Естественные науки оказали свое влияние на это, благодаря исследованиям электрических сетей, моделей кристаллов и структур молекул. Развитие формальной логики привело к изучению бинарных отношений в форме графов. Большое число популярных головоломок поддавалось формулировкам непосредственно в терминах графов, и это приводило к пониманию, что многие задачи такого рода содержат некоторое математическое ядро, важность которого выходит за рамки конкретного вопроса.

Графы нашли применение практически во всех отраслях научных знаний: физике, биологии, химии, математике, истории, лингвистике, социальных науках, технике и т.п. Наибольшей популярностью теоретико-графовые модели используются при исследовании коммуникационных сетей, систем информатики, химических и генетических структур, электрических цепей и других систем сетевой структуры.

Большинство специалистов по теории графов в книгах, статьях и лекциях используют свою собственную терминологию. На конференциях по теории графов каждый выступающий, чтобы избежать неправильного понимания, считает необходимым определить, прежде всего, язык, которым он будет пользоваться. Некоторые авторы определяют слово «граф» как граф, другие же имеют в виду такие понятия, как мультиграф, псевдограф, ориентированный граф или сеть.

Необходимо сформулировать ряд определений, чтобы в дальнейшем иметь возможность использовать основные понятия и терминологию теории графов.

Прежде чем дать определение графа, обратим внимание на рис.1. На нем изображены 11 графов с четырьмя вершинами.

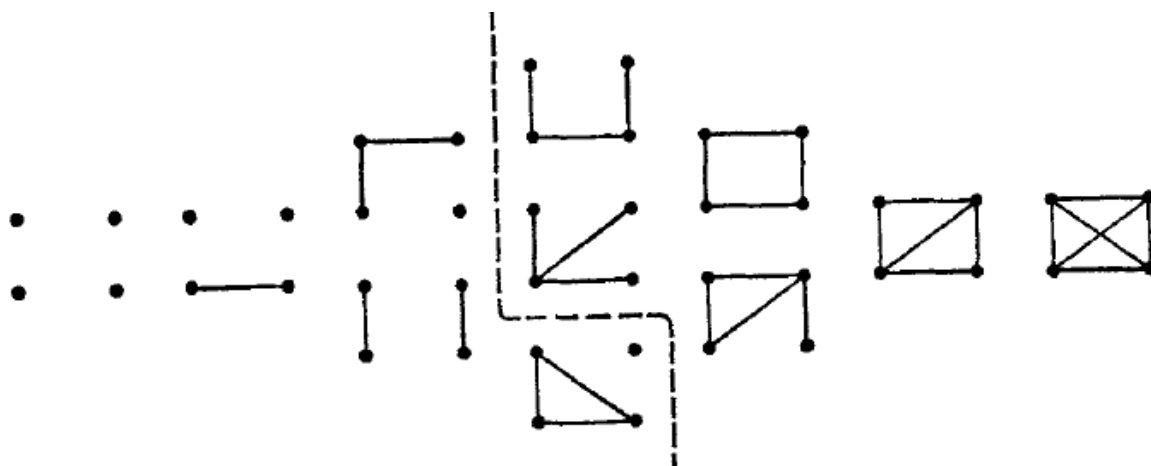


рис.1.

Позже мы увидим, что:

- 1) любой граф с четырьмя вершинами изоморфен одному из них;
- 2) пять графов, которые расположены на рисунке слева от штриховой линии, не связаны;
- 3) шесть графов, расположенные справа от штриховой линии, связаны;
- 4) последний граф – полный;
- 5) первый граф – пустой;
- 6) первый граф с четырьмя ребрами – цикл;
- 7) первый граф с тремя ребрами – простая цепь.

Вместо того чтобы продолжать повествование на интуитивном уровне, вводя различные понятия теории графов перейдем к систематическому введению понятий одно за другим.

Граф  $G$  состоит из конечного непустого множества  $V$ , содержащего  $p$  вершин, и заданного множества  $X$ , содержащего  $q$  неупорядоченных пар различных вершин из  $V$ . Каждую пару  $x=(u, v)$  вершин в  $X$  называют ребром графа  $G$  и говорят, что  $x$  соединяет  $u$  и  $v$ . Мы будем писать  $x=uv$  и говорить, что  $u$  и  $v$  - смежные вершины; вершина  $u$  и ребро  $x$  инцидентны, так же как и  $v$  и  $x$ . Если два ребра  $x$  и  $y$  инцидентны одной и той же вершине, то они называются

смежными. Ребро вида  $(u, u)$  т.е. соединяющее вершину с ней же самой, называют петлей.

Граф  $G$  называется полным, если любые две его вершины смежны. Полный граф порядка  $n$  обозначается  $K_n$ .

Граф называется вырожденным (пустым), если любые две его вершины не смежны (т.е. у него нет ребер).

Имеется несколько типов графов. Из определения вытекает, что в графе не может быть петель, т.е. ребер, соединяющих вершины сами с собой. В мультиграфе не допускаются петли, но пары вершин могут соединяться более чем одним ребром; эти ребра называются кратными. Если допускаются петли и кратные ребра, получаем псевдограф.

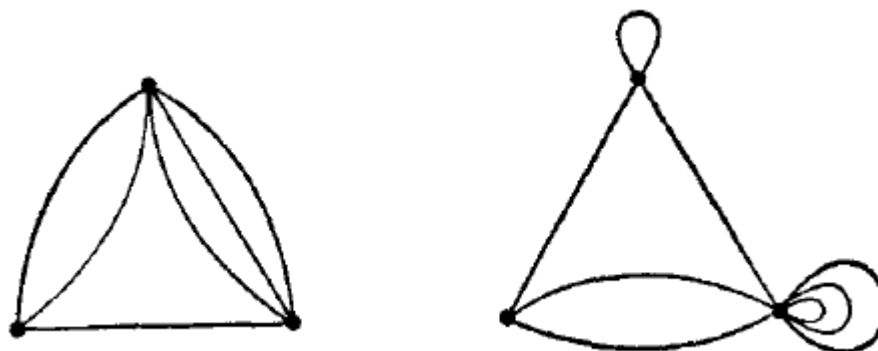


рис.2.

На рис.2. приведены мультиграф и псевдограф, в основе которых «лежит» один и тот же граф – треугольник.

Ориентированный граф, или орграф,  $D$  состоит из конечного непустого множества  $V$  вершин и заданного набора  $X$  упорядоченных пар различных вершин. Элементы из  $X$  называются ориентированными ребрами, или дугами. По определению в орграфе нет петель и кратных дуг. Направленный граф – это орграф, не имеющих симметричных пар ориентированных ребер.

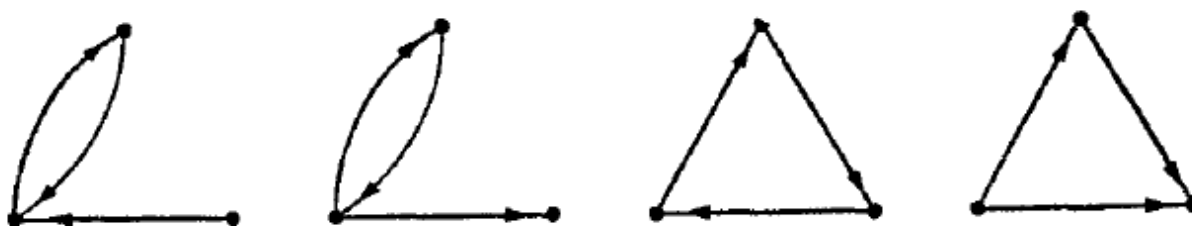


рис.3.

На рис.3. приведены все орграфы с тремя вершинами и тремя дугами; два последних из них – направленные графы.

Существует много способов представить граф, назовем только самые распространенные:

1. Перечисление элементов. Исходя из определения, для того, чтобы задать граф, достаточно перечислить его вершины и ребра (т.е. пары вершин).

2. Изображение. Если граф невелик, его можно нарисовать. В неориентированном графе ребра изображаются линиями, в ориентированном – стрелками.

3. Матрица смежности. Пусть  $G$  – граф с  $n$  вершинами, пронумерованными числами от 1 до  $n$ . Матрица смежности – это таблица с  $n$  строками и  $n$  столбцами, в которой элемент, стоящий на пересечении строки с номером  $i$  и столбца с номером  $j$ , равен 1, если вершины с номерами  $i$  и  $j$  смежны, и 0, если они не смежны.

4. Матрица инцидентности. Пусть  $G$  – граф, вершины которого пронумерованы числами от 1 до  $n$ , а ребра – числами от 1 до  $m$ . В матрице инцидентности строки соответствуют вершинам, а столбцы – ребрам. На пересечении строки с номером  $i$  и столбца с номером  $j$  стоит 1, если вершина с номерами  $i$  инцидентна ребру с номером  $j$  смежны, и 0 в противном случае.

5. Списки смежности. Этот способ часто используется для компьютерного представления графов. Состоит он в том, что для каждой вершины задается список всех смежных с ней вершин. В структурах данных, применяемых в программировании, списки смежности могут быть реализованы как массив линейных списков. При решении задач будем эти списки оформлять так: пишется номер или имя вершины и после двоеточия перечисляются все смежные с ней вершины.

Два графа  $G$  и  $H$  изоморфны, если между их множествами существует взаимно однозначное соответствие, сохраняющее смежность.

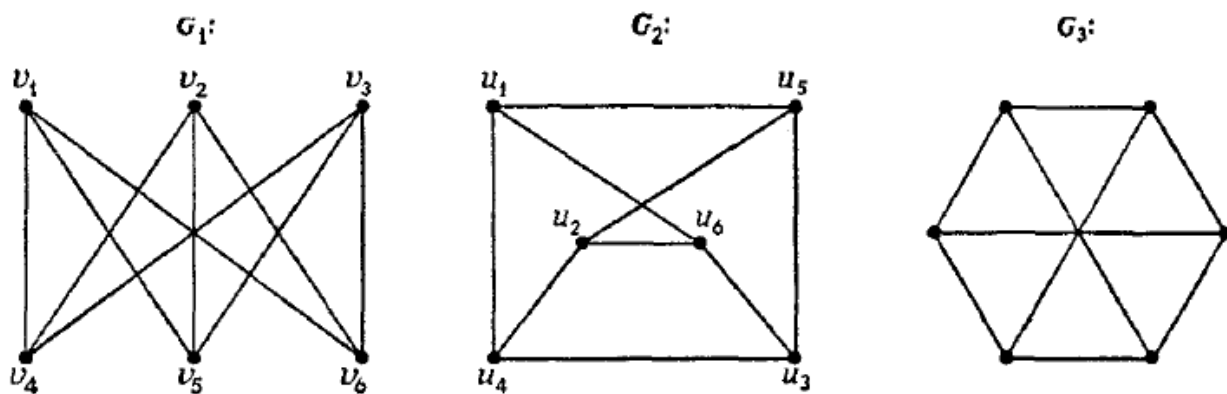


рис.4.

Например,  $G_1$  и  $G_2$  на рис.4. изоморфны при соответствии  $v_i \leftrightarrow u_i$  и чисто случайно оказалось, что граф  $G_3$  изоморфен каждому из них. Совершенно очевидно, что изоморфизм есть отношение эквивалентности на графах.

Подграфом графа  $G$  называется граф, у которого все вершины и ребра принадлежат  $G$ . Если  $G_1$  – подграф графа  $G$ , то  $G$  называется надграфом графа  $G_1$ .

Одно из наиболее простых свойств, которым может обладать граф, это свойство быть связанным. Граф  $G$  называется связанным, если любая пара его вершин соединена простой цепью.

Расстоянием  $d(u, v)$  между двумя вершинами  $u$  и  $v$  графа  $G$  называется длина кратчайшей простой цепи, соединяющей их; если  $u$  и  $v$  не соединены, то полагаем  $d(u, v) = \infty$ . В связанном графе расстояние является метрикой, т.е. удовлетворяют следующим аксиомам (аксиомы метрики): для любых трех вершин  $u, v$  и  $w$ :

- 1)  $d(u, v) \geq 0$  и  $d(u, v) = 0$  тогда и только тогда, когда  $u=v$ ;
- 2)  $d(u, v) = d(v, u)$ ;
- 3)  $d(u, v) + d(v, w) \geq d(u, w)$ .

Кратчайшая простая  $(u, v)$ - цепь часто называется геодезической. Диаметр  $d(G)$  связанного графа  $G$  - это длина самой длинной геодезической. Граф  $G$  на рис.5. имеет обхват  $g=3$ , окружение  $c=4$  и диаметр  $d=2$ .



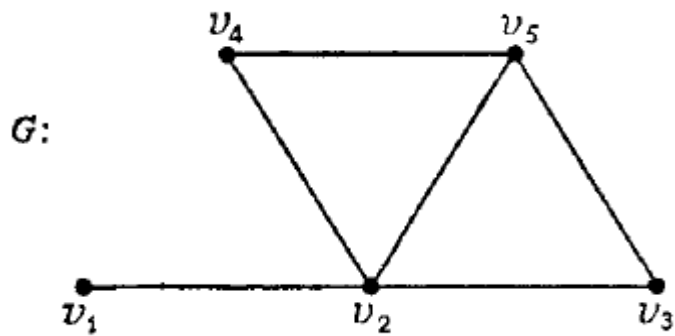


рис.5.

Под степенью (валентностью, кратностью) вершин понимают число инцидентных ей ребер.

Эксцентриситет  $e(x_i)$  вершины в связанном графе  $G$  определяется как  $\max\{d(x_i, x_j)\}$ , где  $x_j$  из  $V$ . Радиусом графа  $r(G)$  называется наименьший из эксцентриситетов вершин. Вершина  $x_i$  называется центральной вершиной графа, если  $e(x_i) = r(G)$ . На рис.6 представлен графы, у которых показан эксцентриситет каждой вершины. [1]

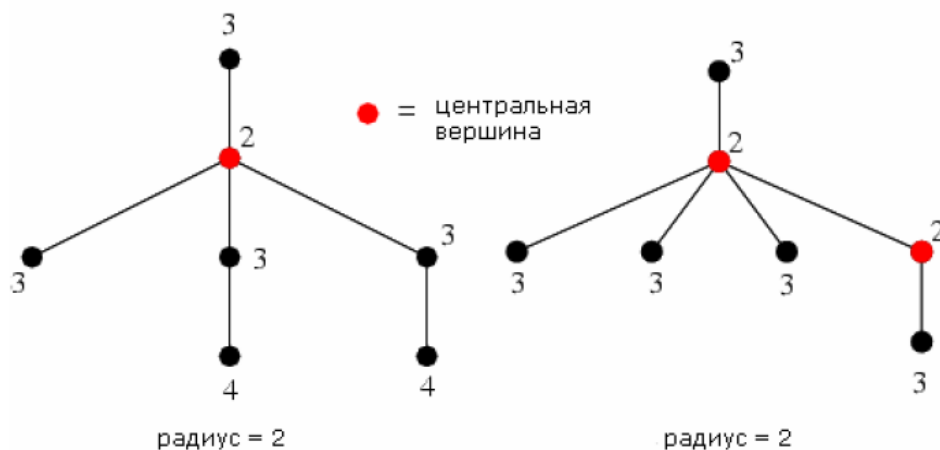


рис.6

На рис.7 представлены пример графов с одной и двумя центральными вершинами

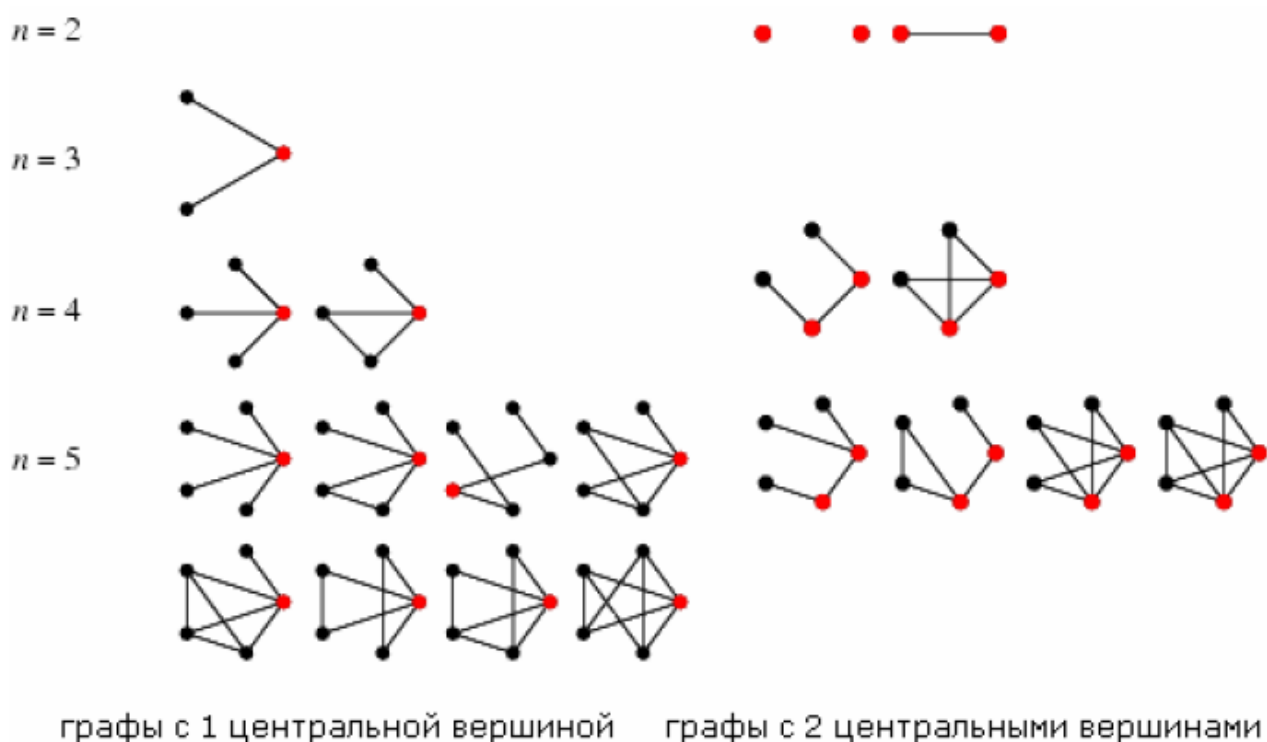


рис.7

Центром графа называется такая вершина, что максимальное расстояние между ней и любой другой вершиной является наименьшим из всех возможных; это максимальное расстояние называется радиусом графа.

Пример нахождения радиуса, диаметра и центра:

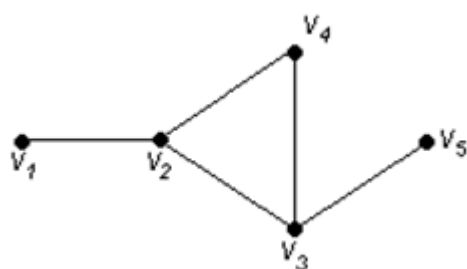


рис 8.

Чтобы определить центры, радиус, диаметр графа  $G$ , изображенного на рисунке 6, найдем матрицу расстояний между вершинами графа, элементами  $d_{ij}$  которой будут расстояния между вершинами  $v_i$  и  $v_j$ . Для этого необходимо воспользоваться графическим представлением графа. Заметим, что матрица

$$D(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$D(G)$  симметрична относительно главной диагонали.

С помощью полученной матрицы для каждой вершины графа  $G$  определим наибольшее удаление из выражения:

$$r(v_i) = \max_j d(v_i, v_j)$$

для  $i, j = 1, 2, \dots, 5$ . В результате получаем:  $r(v_1) = 3$ ,  $r(v_2) = 2$ ,  $r(v_3) = 2$ ,  $r(v_4) = 2$ ,  $r(v_5) = 3$ . Минимальное из полученных чисел является радиусом графа  $G$ , максимальное – диаметром графа  $G$ . Значит,  $R(G) = 2$ ,  $D(G) = 3$ , центром являются вершины  $v_2, v_3, v_4$ .

Граф называется взвешенным или нагруженным, если каждому ребру поставлено в соответствии некоторое число  $w$  (вес). [2]

Матрицей весов называется квадратная матрица размерности  $p \times p$  ( $p$  – количество вершин), элемент которой стоящий в  $i$  строке и  $j$  столбце определяется по правилу:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если вершины } v_i \text{ и } v_j \text{ совпадают,} \\ \infty, & \text{если вершины } v_i \text{ и } v_j \text{ не смежны,} \\ w, & \text{если вершины } v_i \text{ и } v_j \text{ смежны, и } w \text{ – вес ребра } (v_i, v_j). \end{cases}$$

## Глава 2. Поиск центра, диаметра и радиуса взвешенного графа

Рассмотрим алгоритм ускоренного поиска центра и радиуса:

пусть дана матрица кратчайших расстояний  $M = (m_{ij})$  взвешенного неориентированного связанного графа с неотрицательными весами ребер.

**Шаг 1** – подготовка.

Ищется пара вершин  $(x, y)$ , каждая из которых является самой удаленной для другой:

$$m_{xy} = \max_{i=1, n} m_{iy} = \max_{i=1, n} m_{ix}. \quad (1)$$

Для этого выбирается любая вершина графа  $p_1$ , далее ищется вершина  $p_2$ , для которой

$$m_{p_1 p_2} = \max_{i=1, n} m_{p_1 i}.$$

Поиск вершин  $p_j$ ,  $j = 2, 3, \dots$ , продолжается до тех пор, пока не будет выполнено равенство  $p_{j-1} = p_{j+1}$ , тогда  $x = p_j$ ,  $y = p_{j+1}$ .

**Шаг 2** – поиск.

Рассматриваются все вершины, кроме  $x, y$ . Претендент на центр  $c$  ищется как вершина, максимум удаления которой от пары  $(x, y)$  минимален:

$$\max(m_{cx}, m_{cy}) = \min_{i=1, n} (\max(m_{ix}, m_{iy})). \quad (2)$$

После нахождения  $c$  вершина  $r = \max(m_{cx}, m_{cy})$  является первым приближением радиуса графа.

**Шаг 3** - проверка

Ищется периферийная вершина  $z$ , такая, что

$$m_{zc} = \max_{i=1, n} m_{ic}. \quad (3)$$

Если  $m_{zc} = r$ , то, согласно утверждению 1,  $r$  - радиус,  $c$  - один из центров графа. Если  $m_{zc} > r$ , радиус  $R$  графа лежит в пределах  $r \leq R \leq m_{zc}$ , переходим к шагу 4.

**Шаг 4** - попытка замены вершин  $x$  и  $y$

Производится попытка ускорения поиска. Ищется вершина  $t$ , для которой  $m_{zt} > m_{xy}$ . Если такая вершина найдена, то полагаем  $x = z$ ,  $y = t$  и переходим к шагу 2. Иначе переходим к шагу 5.

**Шаг 5.** Поиск нового претендента на центр

Среди нерассмотренных претендентов на центр находится вершина  $d$ , для которой

$$\max(m_{dx}, m_{dy}, m_{dz}) = \min_{i=\overline{1,n}} (\max(m_{ix}, m_{iy}, m_{iz})).$$

Если максимальное расстояние от этой вершины до других меньше, чем текущая верхняя граница радиуса

$$(\max_{i=\overline{1,n}} m_{di} < m_{zc}),$$

то  $d$  - новый претендент на центр; полагаем  $c = d$ , переходим к шагу 3. Если  $\max m_{di} = m_{zc}$ , то  $c$  - центр,  $r$  - радиус. Если

$$\max_{i=\overline{1,n}} m_{di} = m_{zc},$$

то  $c$  – центр,  $r$  – радиус. Если

$$\max_{i=\overline{1,n}} m_{di} > m_{zc},$$

то помечаем вершину  $d$  как рассмотренную и снова выполняем шаг 5.

**Утверждение 1.** Пусть дан взвешенный неориентированный связный граф с  $n$  вершинами и неотрицательными весами рёбер,  $x$  и  $y$  - две его произвольные вершины, вершина  $c$  определяется по (2) и вершина  $z$  определяется по (3). Тогда если  $m_{zc} = r = \max(m_{cx}, m_{cy})$ , то  $r$  - радиус, а  $c$  - один из центров графа.

**Доказательство.** Дано:

$$\max_{i=\overline{1,n}} m_{ic} = r = \min_{i=\overline{1,n}} (\max(m_{ix}, m_{iy})).$$

То есть  $r$  - максимальное расстояние от  $c$  до любой другой вершины, но в то же время  $r$  – минимальное расстояние до одной (а возможно, и обеих) из вершин  $x$ ,  $y$ . Поэтому для любой другой вершины максимум расстояния до вершин из

пары  $(x, y)$  не меньше  $r$ . Следовательно,  $c$  - центр (в общем случае не единственный).

Рассмотрим алгоритм быстрого поиска диаметра:

шаги 1 и 2 алгоритма совпадают с соответствующими шагами алгоритма поиска центра и радиуса.

Входные данные алгоритма: матрица кратчайших расстояний  $M = (m_{ij})$  взвешенного неориентированного связного графа с неотрицательными весами рёбер.

**Шаг 1** - подготовка

Ищется пара вершин  $(x, y)$ , удовлетворяющая (1). Величина  $d = m_{xy}$  при этом является текущим претендентом на диаметр.

**Шаг 2** - поиск опорной вершины

Ищется вершина  $c$ , удовлетворяющая (2).

**Шаг 3** - поиск диаметра

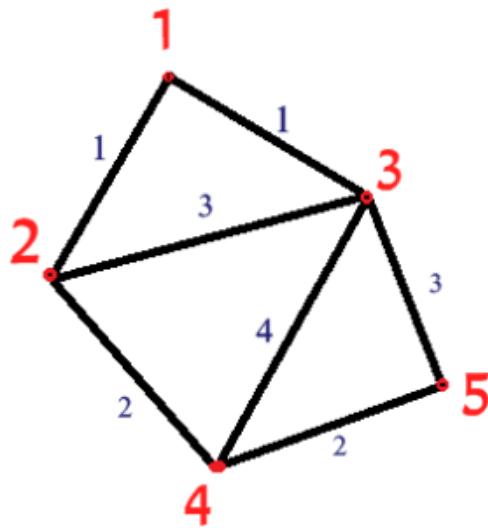
Выполняется поиск диаметра в столбцах матрицы, соответствующих только тем вершинам  $i$ , для которых выполнено неравенство  $m_{ci} > d/2$ .

**Утверждение 2.** Пусть дан взвешенный неориентированный связный граф с неотрицательными весами рёбер, вершины  $x, y$  определяются по (1), вершина  $c$  определяется по (2) и  $d = m_{xy}$ . Тогда диаметр графа равен  $d$  или находится в столбцах матрицы кратчайших расстояний тех вершин  $i$ , для которых выполнено неравенство  $m_{ci} > d/2$ .

**Доказательство.** Если  $d = m_{xy}$  не является диаметром графа, то существует пара вершин  $z, t$ , такая, что  $m_{zt} > m_{xy}$ . Для матрицы кратчайших расстояний справедливо  $m_{zt} \leq m_{zc} + m_{ct}$ . Следовательно,  $m_{xy} = d < m_{zc} + m_{ct}$ , откуда  $m_{zc} > d/2$  или  $m_{ct} > d/2$ . [3]

### Пример.

Пусть дан взвешенный граф G:



Составляем матрицу кратчайших путей:

$m_{ij}$	1	2	3	4	5
1	0	1	1	3	4
2	1	0	3	2	4
3	1	3	0	4	3
4	3	2	4	0	2
5	4	4	3	2	0

**Шаг 1.** Находим пару вершин  $(x, y)$ , каждая из которых является самой удаленной для другой:

$$x = 1, y = 5$$

**Шаг 2.** - поиск

Рассмотрим все вершины, кроме  $x$  и  $y$ : 2, 3, 4.

Претендент на центр  $c$  :

$$\max(m_{cx}, m_{cy}) = \min_{i=1, n} (\max(m_{ix}, m_{iy})). \quad (2)$$

$$\begin{array}{l} i = 2 \quad \max(1,4) = 4 \\ i = 3 \quad \max(1,3) = 3 \\ i = 4 \quad \max(3,2) = 3 \end{array} \left| \Rightarrow \min = 3; \right.$$

$c: \max(m_{cx}, c_{cy}) = 3$ . Пусть  $c = 3$ .

Приближенный радиус графа:

$$r = \max(m_{cx}, m_{cy}) = 3$$

**Шаг 3.** – проверка.

Найдем периферийную вершину  $z$

$$m_{zc} = \max_{i=1, n} m_{ic}. \quad (3)$$

$$\max(1, 3, 0, 4, 3) = 4;$$

$z = m_{zc} > r = 3$ , отсюда, радиус  $R$  графа лежит в пределах  $3 \leq R \leq 4$ .

**Шаг 4** - попытка замены вершин  $x$  и  $y$ .

Найдем  $t$ :

$m_{zt} > m_{xy} = 4$ , такого  $t$  нет, переходим к шагу 5.

**Шаг 5.** Поиск нового претендента на центр

Среди нерассмотренных претендентов на центр найдем такую вершину  $d$ , для которой

$$\max(m_{dx}, m_{dy}, m_{dz}) = \min_{i=1, n} (\max(m_{ix}, m_{iy}, m_{iz})).$$

$$x = 1, y = 5, z = 4$$

$$\begin{array}{l|l} i = 1 & \max(0, 3, 4) = 4 \\ i = 2 & \max(1, 2, 4) = 4 \\ i = 3 & \max(1, 4, 3) = 3 \\ i = 4 & \max(3, 0, 2) = 3 \\ i = 5 & \max(4, 2, 0) = 4 \end{array} \Rightarrow \min = 3;$$

Найдем  $d$ :

$$\max(m_{dx}, m_{dy}, m_{dz}) = \max(3, 2, 0) = 3, \text{ при } d = 4,$$

$m_{zc} = 4$ , переходим к шагу 3.

**Шаг 3.**  $\max_{di} = \max(3, 2, 4, 0, 2) = 4$ , следовательно,  $c$  – центр, равный 4.  $r$  – радиус равен 3, а  $d$  – наибольшее расстояние, равный 4.



### Глава 3. Внешний и внутренний центр графа

Рассмотрим несколько задач на графах:

1) В небольшом городе строится пожарная часть. Каким образом выбрать место для строительства, что бы время, за которое пожарники доедут в самый дальний от части район города, было минимальным?

2) Как создать сеть ресторанов, чтобы из любой точки города можно было приехать в один из таких ресторанов менее чем за 10 минут? (Ответом на данную задачу будет минимальное число ресторанов и места их расположения.)

3) Как наиболее оптимально разместить 5 служб доставки пиццы на дом, что максимальное время пути курьера до любого дома было минимально.

4) Где установить сетевой хаб, чтобы длина самого длинного провода была минимальна?

Заметим, что все эти задачи можно свести к поиску некоторой точки (или точек) в графе, где вершины соответствуют районам города (или компьютерам в сети), а ребра — дороги (или провода). Во всех этих задачах требуется оптимизировать "наихудший вариант", т. е., к примеру, найти такое место для хаба, что бы длина самого длинного провода была минимальна. Такие задачи часто встречаются при размещении аварийных служб, бомбоубежищ, станций метро, автомастерских и т. п. Цель таких задач — разместить некоторые объекты так, чтобы минимизировать максимальное из расстояний (или время проезда) от этого объекта до какого-то здания (района, компьютера и т. п.). Именно поэтому этот класс задач принято называть минимаксными задачами размещения. Если же в задаче требуется минимизировать максимальную сумму расстояний (или суммарное время) от объекта и обратно, то эта задача относится к другому классу задач — минисуммным задачам размещения.

Договоримся, что будем всегда рассматривать ориентированные сильно связные графы, если не оговорено обратного. Граф  $G$  задается двумя множествами: множеством вершин  $V$  и множеством ребер  $E$ . [4]

Каждому ребру соответствуют некоторое неотрицательное число, которое имеет смысл длины этого ребра (или времени проезда по нему). Расстояние от вершины  $x_i$  до вершины  $x_j$  обозначается  $d(x_i, x_j) = d_{ij}$  и равняется минимальной из сумм длин ребер всех путей между этими вершинами. Будем считать, что длина ребра обладает аддитивностью. Это означает, что если поделить ребро некоторой точкой, то сумма длин получившихся отрезков равна длине ребра.

Каждой вершине  $x_i$  сопоставим некоторое положительное число  $v_i$ , которое имеет смысл важности или приоритета. Тогда взвешенным расстоянием между двумя вершинами  $x_i$  и  $x_j$  будем называть число

$$l_{ij} = l(x_i, x_j) := v_j d(x_i, x_j) = v_j d_{ij}.$$

Заметим, что взвешенное расстояние не симметрично даже в случае неориентированного графа, т. е.  $l_{ij} \neq l_{ji}$ . Точно так же определяется взвешенный путь между некоторой точкой  $e_{ij}$ , лежащей на ребре  $(x_i, x_j)$  и вершиной  $x_k$ :  $l(x_i, x_j) := v_k d(e_{ij}, x_k)$ . Будем говорить, что точка  $y_2$  достижима из точки  $y_1$  не более чем за  $\lambda$ , если  $l(y_1, y_2) \leq \lambda$ . [4] В дальнейшем всегда будем говорить о взвешенном расстоянии, дополнительно это не оговаривая.

Рассмотрим некоторый граф  $G=(V, E)$ . Введем два множества:

$$R_\lambda^o(x_i) := \{x_j \mid l_{ij} \leq \lambda, x_j \in V\},$$

$$R_\lambda^t(x_i) := \{x_j \mid l_{ji} \leq \lambda, x_j \in V\}.$$

$R_\lambda^o(x_i)$  — это множество всех вершин, расстояние от  $x_i$  до которых не больше  $\lambda$ , а  $R_\lambda^t(x_i)$  — множество всех вершин, расстояние от которых до  $x_i$  не больше  $\lambda$ . Очевидно, что существуют такие  $\lambda$ , что эти множества не пусты (конечно, если в графе больше одной вершины).

Для каждой вершины определим два числа:

$$s_o(x_i) := \max(l_{ij}), x_j \in V,$$

$$s_t(x_i) := \max(l_{ji}), x_j \in V.$$

$s_o(x_i)$  и  $s_t(x_i)$  называют соответственно внешним и внутренним разделением для вершины  $x_i$ .

Пусть  $\lambda_o$  — наименьшая  $\lambda$  такая, что для некоторой  $x_i$   $R_\lambda^o(x_i) = V$ , т. е. длина пути до любой вершины графа не превосходит  $\lambda_o$ . Тогда  $s_o(x_i) = \lambda_o$  (напрямую следует из определений  $R_\lambda^o(x_i)$  и  $s_o(x_i)$ ).

Аналогично,  $\lambda_t$  — наименьшая  $\lambda$  такая, что для некоторой  $x_i$

$$R_\lambda^t(x_i) = V,$$

т. е. длина пути от любой вершины графа до  $x_i$  не превосходит  $\lambda_t$ . Тогда  $s_t(x_i) = \lambda_t$ .

Стоит заметить, что если бы граф не был сильно связан, то хотя бы одно из чисел  $\lambda_o, \lambda_t$  равнялось  $\infty$ .

Вершина  $x_o^*$  такая, что

$$s_o(x_o^*) = \min[s_o(x_i)], x_i \in V$$

называется внешним центром графа  $G$ . Аналогично, вершина  $x_t^*$  такая, что

$$s_t(x_t^*) = \min[s_t(x_i)], x_i \in V$$

называется внутренним центром.

Значения  $s_o(x_o^*)$  и  $s_t(x_t^*)$  называются соответственно внешним и внутренним радиусами графа  $G$ . Обозначаются  $\rho_o$  и  $\rho_t$ . Можно так же определить внешне-внутренние разделение:

$$s_{ot}(x_i) = \max\{v_j [d(x_i, x_j) + d(x_j, x_i)]\}, x_i \in V,$$

и внешне-внутренний центр, как вершину, на которой достигается минимум внешне-внутреннего разделения. [5]

Можно интерпретировать внешний центр как пожарный участок (минимально время на дорогу от участка к месту пожара), внутренний как бомбоубежище (человеку требуется минимальное время на дорогу туда), внешне-внутренний как служба скорой помощи (минимально время на путь туда и обратно).

Приведем алгоритм поиска внешнего центра. Для начала построим матрицу  $A_{n \times n}$  ( $n$  — мощность множества  $V$ ), где  $a_{ij} = l_{ij}$ , то есть ее матрицу кратчайших путей. Для ее построения можно воспользоваться алгоритмом

Флойда-Уоршалла или Дейкстры. Алгоритм Флойда-Уоршалла применяется для нахождения кратчайших расстояний между всеми вершинами взвешенного ориентированного графа:

пусть вершины графа  $G = (V, E)$ ,  $|V| = n$  пронумерованы от 1 до  $n$  и введено обозначение  $d_{ij}^k$  для длины кратчайшего пути от  $i$  до  $j$ , который кроме самих вершин  $i, j$  проходит только через вершины  $1 \dots k$ . Очевидно, что  $d_{ij}^0$  — длина (вес) ребра  $(i, j)$ , если таковое существует (в противном случае его длина может быть обозначена как  $\infty$ ).

Существует два варианта значения  $d_{ij}^k$ ,  $k \in (1, \dots, n)$ .

1. Кратчайший путь между  $i, j$  не проходит через вершину  $k$ , тогда  $d_{ij}^k = d_{ij}^{k-1}$
2. Существует более короткий путь между  $i, j$ , проходящий через  $k$ , тогда он сначала идёт от  $i$  до  $k$ , а потом от  $k$  до  $j$ . В этом случае, очевидно,  $d_{ij}^k = d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1}$

Таким образом, для нахождения значения функции достаточно выбрать минимум из двух обозначенных значений.

Тогда рекуррентная формула для  $d_{ij}^k$  имеет вид:

$d_{ij}^0$  — длина ребра  $(i, j)$ ;

$$d_{ij}^k = \min(d_{ij}^{k-1}, d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1}).$$

Алгоритм Флойда-Уоршелла последовательно вычисляет все значения  $d_{ij}^k, \forall i, j$  для  $k$  от 1 до  $n$ . Полученные значения  $d_{ij}^n$  являются длинами кратчайших путей между вершинами  $i, j$ .

Далее умножим каждый  $j$ -ый столбец матрицы  $A$  на  $v_j$ . Тогда внешнее разделение для вершины с номером  $i$  — это максимальное значение в  $i$ -ой строчке матрицы  $A$ . Посчитаем максимум в каждой строчке. Таким образом,

получим массив длины  $n$ , где  $i$ -ый элемент — внешнее разделение  $i$ -ой вершины.

Найдем наименьший элемент в этом массиве. Это будет наименьшее из внешних разделений. Вершина с таким разделением и есть внешний центр. В том случае, если вершин с таким разделением несколько, то все они — внешние центры.

Алгоритм поиска внутреннего центра отличается лишь на первом шаге: каждая  $j$ -ая строка матрицы  $A$  умножается на  $v_j$ . [6]

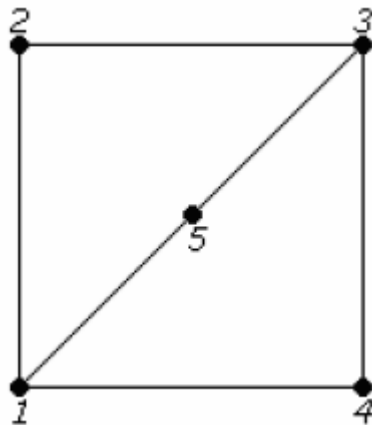
#### Глава 4. Абсолютные центры графа

Если предположить, что пожарный участок (бомбоубежище, метро) может находиться не только в каком-то районе, т. е. вершине, а вообще в любой точке графа, то нужно немного модифицировать данные выше определения. Для начала распространим понятия разделений на точки ребер графа. При этом в самих определениях фактически ничего не изменится. К примеру, так будет выглядеть определение внешнего разделения для произвольной точки графа:

$$s_o(y) := \max[v_i d(y, x_i)], x_i \in V, y \in G$$

Используя это расширенное определения разделений, определим абсолютный внешний и внутренний центры. Абсолютный внешний центр — это такая точка  $y_o^* \in G$ , у которой внешнее разделение минимально. Аналогично, абсолютный внутренний центр — это такая точка  $y_i^* \in G$ , у которой внутреннее разделение минимально.

Абсолютные радиусы определяются как значения разделений соответствующих абсолютных центров. Обозначаются  $r_o$  и  $r_i$ .

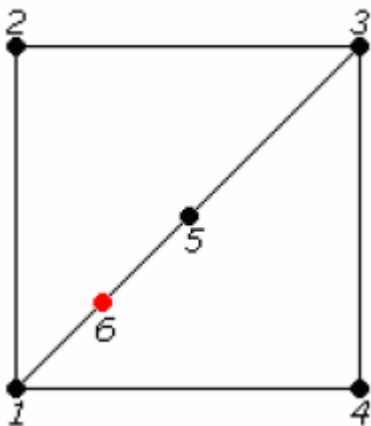


Например:

Весы ребер и вершин равняются единице, центром является каждая вершина. В неориентированном графе внешние и внутренние центры совпадают. Матрица расстояний имеет вид:

0	1	2	1	1
1	0	1	2	2
2	1	0	1	1
1	2	1	0	2
1	2	1	2	0

При добавлении красной точки в середину ребра 1-5, она становится абсолютным центром.



Для нее матрица расстояний выглядит так:

0.5	1.5	1.5	1.5	0.5	0
-----	-----	-----	-----	-----	---

Таким образом, точка 6 более «центральна», чем любая из вершин этого графа.

## Алгоритм поиска

Отметим, что приведенный выше алгоритм поиска центра здесь использовать невозможно, т. к. количество "потенциальных абсолютных центров" бесконечно, а следовательно невозможно посчитать разделение каждой такой точки.

В ориентированном графе абсолютные центры не могут лежать на ориентированном ребре. Поэтому будем рассматривать неориентированный граф (в случае ориентированного графа можно выбросить из рассмотрения все направленные ребра, и тогда задача сведется к поиску абсолютного центра в неориентированном). В этом случае абсолютные внешний и внутренний центры совпадают. Поэтому нет смысла уточнять какой именно центр мы ищем.

Имеет смысл рассмотреть два принципиально разных алгоритма: метод Хакими и итерационный алгоритм.

Метод Хакими - это алгоритм, позволяющий найти точное расположение абсолютного центра и значение его разделения (радиус). Он состоит всего из двух шагов:

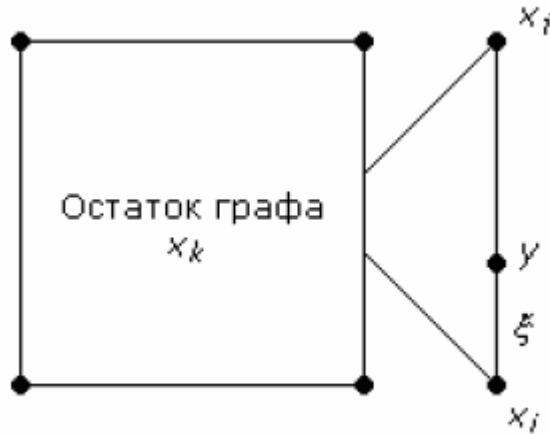
- 1) для каждого ребра найти точку с наименьшим разделением.
- 2) из всех этих точек выбрать точку с наименьшим разделением — она и будет абсолютным центром.

Второй шаг алгоритма очевиден. Первый же на порядок сложнее. Он осуществляется следующим образом.

Возьмем ребро  $e_{ij}$ . Для любой точки  $y \in e_{ij}$  верно следующее

$$s(y) = \max[v_k d(y, x_k)] = \max[v_k \min\{d(y, x_i) + d(x_i, x_k), d(y, x_j) + d(x_j, x_k)\}]$$





Построим на одном графике две зависимости  $v_k\{d(y,x_i)+d(x_i,x_k)\}$  и  $v_k\{d(y,x_j)+d(x_j,x_k)\}$  от положения точки  $y$  на ребре. Нижняя огибающая этих графиков — это график зависимости  $v_k d(y,x_k)$  от положения точки  $y$ . Если построить на этом же графике такие зависимости для всех других  $x_k \in V$ , то верхняя огибающая этих графиков будет графиком зависимости  $s(y)$  от положения точки  $y$ . В общем случае это кусочно-линейная функция. Ее абсолютный минимум (или минимумы) — точка(и) с наименьшим разделением на данном ребре.

Алгоритм Хаками можно значительно оптимизировать. Идея состоит в том, чтобы заранее оценить значение абсолютного радиуса и не рассматривать те ребра, на которых, исходя из этих оценок, абсолютного центра быть не может.

Предположим, что абсолютный центр графа лежит на ребре  $e_{ij}$ , тогда значение абсолютного радиуса не меньше, чем

$$p_{ij} = \max[v_k \min\{d(x_i, x_k), d(x_j, x_k)\}], x_k \in V.$$

Следовательно,

$$P = \min(p_{ij}), e_{ij} \in E$$

— обоснованная нижняя оценка для абсолютного радиуса.

Пусть теперь абсолютный центр лежит в середине ребра  $e_{ij}$ , тогда абсолютный радиус

$$r = p_{ij} + v_k^* d(x_i, x_j)/2,$$

где  $v_k^*$  — вес той вершины, в которой достигается

$$\max[v_k \min\{d(x_i, x_k), d(x_j, x_k)\}]$$

(т.е. той, которая определяет значение  $p_{ij}$ ). Исходя из этого,

$$H = \min[p_{ij} + v_k^* d(x_i, x_j)/2]$$

— обоснованная верхняя оценка для абсолютного радиуса.

Таким образом, всякое ребро  $e_{ij} \in E$ , для которого  $p_{ij} \geq H$ , можно не рассматривать.[7]

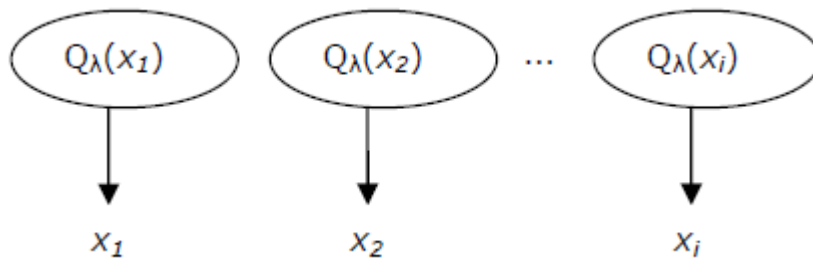
### Итерационный алгоритм

Этот алгоритм не дает точное расположение абсолютного центра и значение абсолютного радиуса. Результат его работы — некоторая область, в которой лежит абсолютный центр и, соответственно, примерное значение абсолютного радиуса.

Его суть состоит в следующем:

- 1) Выбираем некоторое  $\delta > 0$ . Пусть  $\lambda$  изначально равна  $\delta$ .
- 2) Найдем пересечение всех таких областей

$$Q_\lambda(x_i) = \{y \in G: l(y, x_i) \leq \lambda\}.$$



- 3) Если это пересечение непустое, то центр находится в нем.

Если же оно пустое, то увеличим  $\lambda$  на  $\delta$  и вернемся к шагу 2.

Заметим, что размер полученной области зависит от  $\delta$ . Другими словами, чем меньше мы возьмем  $\delta$ , тем будет больше точность полученного результата. Если все же нужно точное значение, то можно совместить этот алгоритм с методом Хаками: сначала найти область, в которой лежит центр, а потом рассмотреть только те ребра, части которых лежат в этой области.[7]

### Кратные центры (p-центры)

В том случае, когда нам нужно разместить несколько объектов (как в задаче номер 3, приведенной в начале статьи), то можно рассматривать некоторое обобщение центра графа: не одну точку, а некоторое множество  $X_p$  состоящее из  $p$  точек, называемое кратным центром ( $p$ -центром). Тогда

$$d(X_p, x_i) = \min[d(x_j, x_i)], x_j \in X_p,$$

$$d(x_i, X_p) = \min[d(x_i, x_j)], x_j \in X_p.$$

Исходя из этого, дадим следующие определения: внешнее разделение множества вершин  $X_p$

$$s_o(X_p) = \min[d(X_p, x_i)], x_i \in V,$$

аналогично, внутреннее разделение множества вершин  $X_p$

$$s_i(X_p) = \min[d(x_i, X_p)], x_i \in V.$$

Множество вершин  $X_{po}^*$  такое, что

$$s_o(X_{po}^*) = \min[s_o(X_p)], X_p \subseteq V.$$

называется внешним  $p$ -центром. Аналогично определяется внутренний  $p$ -центр.[8]

### Алгоритм поиска

Отметим, что здесь можно было бы воспользоваться алгоритмом, который перебирает все возможные множества из  $p$  вершин и сравнивает их. Но такой алгоритм потребовал бы от нас  $p(n-p)C_n^p$  операций, что при  $n=100$  и  $p=5$  примерно  $3,6 \cdot 10^{20}$ . Такое решение потребует очень много времени и больших вычислительных мощностей. Поэтому здесь лучше использовать итерационный алгоритм. Он будет приведен далее для абсолютных  $p$ -центров.[7]

## Абсолютные $p$ -центры

Определения:

Аналогично тому, как мы построили определения абсолютных центров, определим абсолютные  $p$ -центры. Пусть  $X_p \subset G$ , т. е. точки множества  $X_p$  могут лежать в любой точке графа: и на ребре, и в вершине.

Тогда

$$d(X_p, x_i) = \min[d(y_j, x_i)], y_j \in X_p$$

$$d(x_i, X_p) = \min[d(x_i, y_j)], y_j \in X_p$$

Отсюда, внешнее разделение множества точек  $X_p$

$$s_o(X_p) = \min[d(X_p, x_i)], x_i \in V,$$

аналогично, внутреннее разделение множества точек  $X_p$

$$s_i(X_p) = \min[d(x_i, X_p)], x_i \in V.$$

Множество точек  $X_{po}^*$  такое, что

$$s_o(X_{po}^*) = \min[s_o(X_p)], X_p \subseteq G.$$

называется абсолютным внешним  $p$ -центром. Аналогично определяется абсолютным внутренним  $p$ -центр.[8]

## Алгоритм поиска

Решение задачи о поиске абсолютного  $p$ -центра намного сложнее, чем задача о поиске абсолютного центра. Метод Хакими, предложенный выше, невозможно обобщить на случай абсолютных  $p$ -центров. Существует эвристический метод Сингера, дающий точное решение, но мы остановимся на итерационном алгоритме.[9]

## Итерационный алгоритм

Рассмотрим итерационный алгоритм поиска абсолютных  $p$ -центров. Как и ранее будем рассматривать неориентированный граф. Идея этого алгоритма состоит в построении специальных областей  $\Phi_\lambda(V_k)$ , где  $V_k \in V$  — множество из  $k$  вершин, таких, что любая вершина  $v_i \in V_k$  достижима из любой точки этой

области путем, длина которого не превосходит  $\lambda$ , а если  $v_i \notin V_k$ , то ни для какой точки  $\Phi_\lambda(V_k)$  это не выполняется (другими словами области не пересекаются).

Любая точка графа попадает в некоторую область

$\Phi_\lambda(\emptyset) = \{y \in G: \forall X \subseteq V \ y \notin \Phi_\lambda(X)\}$  — область, из которой ни одна вершина не доступна путем не превосходящим  $\lambda$ .

Для того, что бы построить эти области, сначала строят множества  $Q_\lambda(x_i) = \{y \in G: l(y, x_i) \leq \lambda\}$ , т. е. множество всех точек, из которых  $x_i$  достижима не более чем за  $\lambda$ . Тогда  $\Phi_\lambda(V_k)$  можно выразить как через  $Q_\lambda(x_i)$  следующим образом

$$\Phi_\lambda(V_k) = (\bigcap Q_\lambda(x_i)) \setminus (\bigcup Q_\lambda(x_j)),$$

где  $x_i \in V_k$ , а  $x_j \notin V_k$ .

Выберем некоторое  $\delta > 0$ . Положим  $\lambda = \delta$ .

Построим множества  $Q_\lambda(x_i)$  для всех  $x_i$ .

При помощи  $Q_\lambda(x_i)$  построим области  $\Phi_\lambda(V_k)$ .

Построим двудольный граф  $G' = (V' \cup V, E')$ , где  $V'$  — множество вершин, каждая из которых соответствует некоторой области  $\Phi_\lambda(V_k)$ , а  $E'$  — множество дуг, такое, что дуга между вершиной-областью и вершиной  $x_i$  существует тогда и только тогда, когда  $x_i$  может быть достигнута из этой области.

Найти наименьшее доминирующее множество графа  $G'$ .

Если число областей в этом множестве больше, чем  $p$ , то увеличить  $\lambda$  на  $\delta$  и вернуться к шагу 2; в противном случае остановиться. Области этого множества образуют абсолютный  $p$ -центр графа  $G$ , а  $\lambda$  является абсолютным  $p$ -радиусом.

Погрешность в определении центра и соответствующей  $\lambda$  линейно зависит от  $\delta$ . В процессе работы этого алгоритма будут также найдены абсолютные  $(n-1)$ -,  $(n-2)$ - и т. д. центры.

Определим множества  $Q_\lambda(x_i)$  как множества вершин, из которых  $x_i$  достижима не более чем за  $\lambda$ , а области  $\Phi_\lambda(V_k)$  как множество вершин такое, что любая вершина из  $V_k$  достигается из любой вершины  $\Phi_\lambda(V_k)$  не более чем за  $\lambda$ , и нет такой вершины  $x_j \in \Phi_\lambda(V_k)$ , из которой достижима менее чем за  $\lambda$  вершина не

принадлежащая  $V_k$ . Тогда результатом работы данного алгоритма будет обычный (не абсолютный)  $p$ -центр.

Заметим, что подобным алгоритмом можно решать сходную задачу: по заданному  $\lambda$  найти абсолютный кратный центр с наименьшим  $p$ .

О некоторых вычислительных аспектах данного алгоритма, которые могут помочь в его программировании, можно прочитать в [5, глава 5 § 8.2.].

## Заключение

В данной работе были изучены различные подходы к определению метрики на графов, были рассмотрены взвешенные неориентированные и ориентированные графы. После определения метрики так же были изучены такие понятия, как центры графа, радиус и диаметр графа, эксцентриситет графа и прочие сопутствующие понятия. Для применения разобранного материала при решении практических задач были рассмотрены алгоритмы поиска центров графов, нахождения радиуса и диаметра графа и разобраны соответствующие примеры.

Список литературы:

- [1] Ф.Харари «Теория графов», Москва: Мир, 1973.— 301 стр.
- [2] А.Р Ураков, Т.В. Тимеряев «Использование особенностей взвешенных графов для более быстрого определения их характеристик» // Прикладная Дискретная Математика.- 2012, - №2 (16), стр.95-100.
- [3] Ф.Харари «Теория графов», Москва: Мир, 1973.— 476 стр.
- [4] Н.Кристофидес «Теория графов. Алгоритмический подход» - Москва: Мир, 1978. – стр 45-96.
- [5] Берж К. «Теория графов и ее применения». – Москва: Иностранная литература, 1962. – 75 стр.
- [6] В.А.Емеличев, О.И.Мельников «Лекции по теории графов» //, Москва: Наука, 1990. 383с.
- [7] С.Ю.Белецкая «Комбинаторика. Графы. Алгоритмы»: Учеб.пособие. – Воронеж: ВГТУ, 2003.
- [8] Л.Ю.Березина «Графы и их применение» - Москва: Просвещение, 1979. - 142 стр.
- [9] О.И. Мельников «Графы в обучении математике» // Математика в школе. - 2003. - №8, стр. 23-26.