

УДК 539.3

МНОГОСЕТОЧНЫЕ КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ В ТРЕХМЕРНОМ АНАЛИЗЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ КОМПОЗИТНЫХ ПАНЕЛЕЙ И ОБОЛОЧЕК С ПОЛОСТЯМИ И ОТВЕРСТИЯМИ

А.Д. Матвеев, А.Н. Гришанов

Аннотация

Представлены процедуры построения криволинейных двухсеточных конечных элементов (ДвКЭ) и сложных многосеточных конечных элементов (МнКЭ) для расчета трехмерных упругих статически нагруженных композитных цилиндрических панелей, оболочек с полостями и отверстиями сложной формы. Базовые дискретные модели трехмерных композитных панелей, оболочек, учитывающие их неоднородную (микронеоднородную) структуру и сложную форму, имеют очень высокую размерность. ДвКЭ и сложные МнКЭ проектируются на основе базовых дискретных моделей панелей и оболочек с применением интерполяционных полиномов и уравнений трехмерной задачи теории упругости, записанных в локальных декартовых системах координат данных элементов. Предлагаемые элементы описывают трехмерное напряженное состояние в композитных панелях и оболочках, учитывают их структуры и порождают дискретные модели малой размерности. Расчеты панелей волокнистой структуры с полостями показывают, что максимальные перемещения и эквивалентные напряжения базовых и двухсеточных (многосеточных) дискретных моделей панелей отличаются на $1 \div 12\%$. Реализация метода конечных элементов для двух- и многосеточных дискретных моделей панелей требует в $10^3 \div 10^4$ раз меньше объема памяти ЭВМ и в $10^2 \div 10^3$ раз меньше временных затрат, чем для базовых.

Ключевые слова: композиты, упругость, цилиндрические оболочки и панели, сложные многосеточные и двухсеточные криволинейные конечные элементы.

Введение

Как известно, общий недостаток теорий деформирования упругих композитных цилиндрических панелей и оболочек заключается в том, что в их основе лежат гипотезы (определяющие законы перемещений и напряжений), которые порождают неустранимую погрешность в приближенных решениях. В частности, существующие теории не учитывают сложный характер закреплений, например частичное закрепление по толщине толстых панелей и оболочек, не всегда достаточно точно описывают деформирование композитных панелей и оболочек с полостями и отверстиями сложной формы при действии локальных нагрузений. С помощью этих теорий затруднительно исследовать напряженное состояние трехмерных композитных панелей и оболочек, которые подкреплены ребрами жесткости, имеют переменную толщину, нерегулярную структуру, малый коэффициент наполнения.

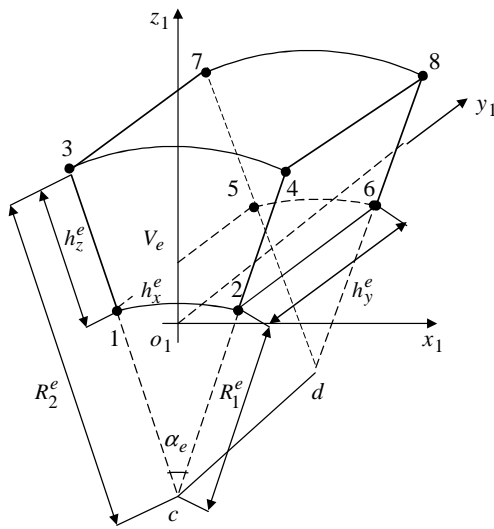
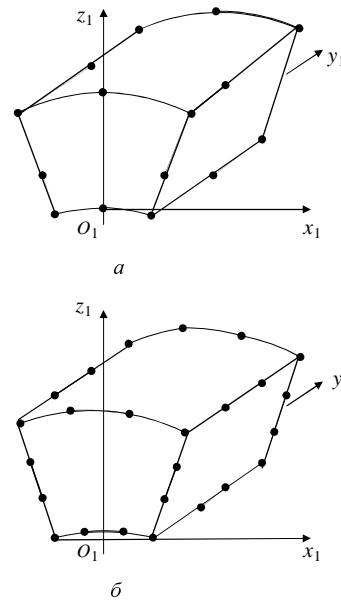
В настоящей работе представлены процедуры построения в локальных декартовых системах координат криволинейных ДвКЭ и сложных МнКЭ, которые используются для расчета по методу конечных элементов (МКЭ) линейно упругих трехмерных композитных цилиндрических панелей и оболочек с полостями и отверстиями сложной формы при статическом нагружении. Сложные МнКЭ и ДвКЭ формы прямоугольного параллелепипеда, применяемые для анализа упругих тел

неоднородной структуры, построены в работах [1–3]. Процедуры построения трехмерных криволинейных композитных ДвКЭ в локальных декартовых системах координат с применением известных интерполяционных полиномов 1-го, 2-го и 3-го порядков изложены в [4, 5]. В отличие от ДвКЭ, рассмотренных в работах [4, 5], здесь рассмотрены процедуры построения криволинейных композитных ДвКЭ, имеющих полости и отверстия сложной формы. Полости и отверстия применяются в панелях и оболочках, например, для уменьшения веса, размещения электронного оборудования, различного рода механизмов и т. д. Как известно, базовые дискретные модели трехмерных композитных панелей и оболочек, которые учитывают их сложную форму, неоднородные и микронеоднородные структуры, имеют очень высокую размерность. Предлагаемые криволинейные элементы проектируются на основе базовых (мелких) разбиений на конечные элементы (КЭ) панелей и оболочек. Для построения композитного криволинейного ДвКЭ, который имеет полости (отверстия), применяем две вложенные криволинейные сетки: мелкую и крупную. Мелкая сетка порождена базовым разбиением ДвКЭ, которое состоит из криволинейных однородных КЭ 1-го порядка, учитывает его неоднородную (микронеоднородную) структуру и сложную форму полостей и отверстий. На мелкой сетке определяем крупную сетку; узлы крупной сетки ДвКЭ расположены вне областей полостей и отверстий. Представлены две процедуры построения трехмерных криволинейных композитных ДвКЭ.

Согласно первой процедуре на базовом разбиении (то есть на мелкой сетке) строим функционал W_a полной потенциальной энергии ДвКЭ V_a в матричной форме [6, 7]. С помощью функций перемещений ДвКЭ V_a , построенных по МКЭ на крупной сетке, узловые перемещения мелкой сетки выражаем через узловые перемещения крупной. Минимизируя функционал W_a по узловым перемещениям крупной сетки, получаем формулы для вычисления матрицы жесткости и вектора узловых сил ДвКЭ V_a .

Суть второй процедуры заключается в следующем. На базовом разбиении ДвКЭ V_b с помощью метода конденсации [6] строим криволинейный суперэлемент. Вершины суперэлемента совпадают с узлами крупной сетки ДвКЭ V_b . Функционал W_b полной потенциальной энергии суперэлемента представляем в матричной форме. С помощью функций перемещений ДвКЭ V_b , построенных по МКЭ на крупной сетке, в функционале W_b узловые перемещения суперэлемента выражаем через узловые перемещения крупной сетки. Из минимизации функционала W_b по узловым перемещениям крупной сетки получаем формулы для вычисления матрицы жесткости и вектора узловых сил ДвКЭ V_b .

Предложена процедура построения криволинейных сложных МнКЭ, которые проектируются с применением композитных криволинейных ДвКЭ. Кратко изложена процедура построения однородных трехмерных криволинейных односеточных КЭ 1-го, 2-го и 3-го порядков в локальных декартовых системах координат. При построении ДвКЭ и сложных МнКЭ используем криволинейные однородные КЭ 1-го порядка. На рис. 1 представлен односеточный однородный криволинейный КЭ V_e 1-го порядка с характерными размерами $h_x^e \times h_y^e \times h_z^e$, где α_e – угол раствора КЭ V_e , $O_1x_1y_1z_1$ – локальная декартова система координат, $z_1O_1y_1$ – плоскость симметрии, cd – ось цилиндрической панели, оболочки, h_z^e – толщина, h_y^e – длина КЭ V_e ; R_1^e, R_2^e – радиусы нижней и верхней поверхностей КЭ V_e , узлы отмечены точками (8 узлов). Прямоугольники размерами $h_z^e \times h_y^e$ есть боковые грани, криволинейные прямоугольники – торцевые грани КЭ V_e . Форма КЭ V_e – прямая призма высотой h_y^e . Отметим, что для учета неоднородной (микронеоднородной) структуры, сложных форм полостей и отверстий необходимо использовать мелкие разбиения панелей и оболочек. Так как при мелком разбиении угол

Рис. 1. КЭ V_e 1-го порядкаРис. 2. КЭ V_e 2-го и 3-го порядков

раствора α_e мал (рис. 1), то форма КЭ V_e мало отличается от формы прямоугольного параллелепипеда.

В связи с этим при построении по МКЭ функций перемещений для однородных криволинейных КЭ V_e 1-го, 2-го и 3-го порядков используем соответственно известные интерполяционные полиномы 1-го, 2-го и 3-го порядков (которые используют при построении функций перемещений для КЭ 1-го, 2-го и 3-го порядков формы прямоугольного параллелепипеда [6, 7]) и уравнения трехмерной задачи теории упругости, записанные в локальных декартовых системах координат $O_1x_1y_1z_1$ данных КЭ (рис. 1, 2). Таким образом, в КЭ V_e реализуется трехмерное напряженное деформированное состояние. Поскольку при построении основных соотношений для криволинейных ДвКЭ и сложных МнКЭ используем КЭ V_e 1-го порядка (рис. 1), то ДвКЭ и сложные МнКЭ также описывают трехмерное напряженное состояние в композитных панелях и оболочках. Матрицы жесткости и векторы узловых сил криволинейных ДвКЭ и сложных МнКЭ определяем в локальных декартовых системах координат, а системы уравнений МКЭ для дискретных моделей оболочек и панелей – в глобальных декартовых системах координат. Связь между локальными и глобальными системами координат осуществляем с помощью матриц вращений [6], которые определяем только для узловых перемещений ДвКЭ и сложных МнКЭ.

1. Односеточные однородные криволинейные конечные элементы

Кратко рассмотрим процедуру построения в локальной декартовой системе координат $O_1x_1y_1z_1$ матрицы жесткости и вектора узловых сил для односеточного однородного криволинейного КЭ V_e 1-го порядка, рис. 1 (который используется при построении мелких разбиений панелей, оболочек). При аппроксимации функций перемещений u_e, v_e, w_e КЭ V_e применяем полиномы 1-го порядка (записанные

в декартовой системе координат $O_1x_1y_1z_1$) вида

$$u_e, v_e, w_e = a_1 + a_2x_1 + a_3y_1 + a_4z_1 + a_5x_1y_1 + a_6z_1x_1 + a_7z_1y_1 + a_8x_1y_1z_1, \quad (1)$$

где $a_i = \text{const}$, $i = 1, \dots, 8$.

Используя (1), с помощью МКЭ [6, 7] строим функции перемещений u_e, v_e, w_e для КЭ V_e , которые запишем в виде

$$u_e = \sum_{i=1}^8 N_i u_i^1, \quad v_e = \sum_{i=1}^8 N_i v_i^1, \quad w_e = \sum_{i=1}^8 N_i w_i^1,$$

где u_i^1, v_i^1, w_i^1 – перемещения i -го узла; N_i – функция формы i -го узла КЭ V_e , $i = 1, \dots, 8$.

Вектор-функцию перемещений $\mathbf{U}_e = \{u_e, v_e, w_e\}^T$ КЭ V_e представим в матричной форме

$$\mathbf{U}_e = [N_e] \delta_e^1, \quad (2)$$

где $[N_e]$ – матрица функций формы КЭ V_e , δ_e^1 – вектор узловых перемещений КЭ V_e .

Вектор δ_e^1 , отвечающий декартовой системе координат $O_1x_1y_1z_1$, представим в форме

$$\delta_e^1 = \{u_1^1, \dots, u_8^1, v_1^1, \dots, v_8^1, w_1^1, \dots, w_8^1\}^T, \quad (3)$$

где индекс T означает транспонирование.

Для полной потенциальной энергии КЭ V_e составим выражение

$$W_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \varepsilon_e^T \sigma_e dV - \int_{V_e} \mathbf{U}_e^T \mathbf{F}_e dV - \int_{S_e} \mathbf{U}_e^T \mathbf{q}_e dS, \quad (4)$$

где $\varepsilon_e = \{\varepsilon_{x_1}, \varepsilon_{y_1}, \varepsilon_{z_1}, \gamma_{x_1y_1}, \gamma_{x_1z_1}, \gamma_{y_1z_1}\}^T$, $\sigma_e = \{\sigma_{x_1}, \sigma_{y_1}, \sigma_{z_1}, \tau_{x_1y_1}, \tau_{x_1z_1}, \tau_{y_1z_1}\}^T$ – вектор-функции деформаций и напряжений (отвечающие трехмерной задаче теории упругости [7]); $\mathbf{F}_e, \mathbf{q}_e$ – векторы объемных и поверхностных сил КЭ V_e ; V_e, S_e – область и поверхность КЭ V_e соответственно.

Соотношения Коши и закон Гука для КЭ V_e имеют вид [7]

$$\varepsilon_e = [B_e] \delta_e^1, \quad \sigma_e = [D_e][B_e] \delta_e^1, \quad (5)$$

где $[B_e], [D_e]$ – матрицы деформаций и модулей упругости КЭ V_e .

Подставляя (2), (5) в функционал (4) и минимизируя его, получаем

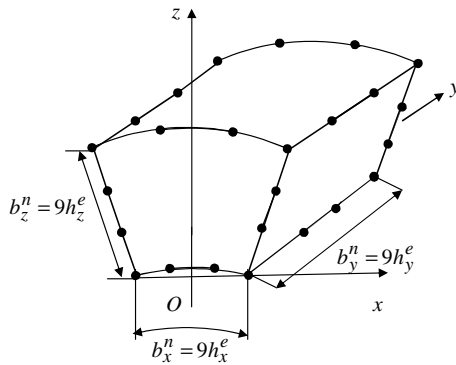
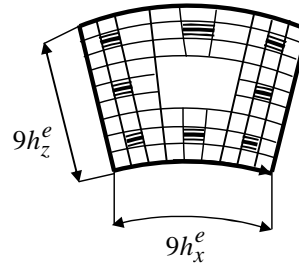
$$[K_e^1] = \int_{V_e} [B_e]^T [D_e][B_e] dV, \quad \mathbf{P}_e^1 = \int_{V_e} [N_e]^T \mathbf{F}_e dv + \int_{S_e} [N_e]^T \mathbf{q}_e dS, \quad (6)$$

где $[K_e^1]$ – матрица жесткости и \mathbf{P}_e^1 – вектор узловых сил КЭ V_e .

Процедуры построения однородных односеточных криволинейных КЭ V_e 2-го и 3-го порядков (рис. 2), имеющих такие же геометрические формы, как и КЭ V_e 1-го порядка (рис. 1), аналогичны вышеописанной.

2. Композитные криволинейные ДвКЭ с полостями и отверстиями

Рассмотрим две процедуры построения в локальных декартовых системах координат основных соотношений (матриц жесткости и узловых усилий) для трехмерных криволинейных композитных ДвКЭ с полостями и отверстиями сложной формы.

Рис. 3. ДвКЭ V_n^a, V_n^b Рис. 4. Сечение ДвКЭ V_n^a, V_n^b (суперэлемента G_α^s)

2.1. Первая процедура построения ДвКЭ. Основные положения первой процедуры (не теряя общности суждений) рассмотрим на примере построения ДвКЭ V_n^a , имеющего полость сложной формы. На рис. 3 показан ДвКЭ V_n^a в локальной декартовой системе координат $Oxyz$ с характерными размерами $b_x^n \times b_y^n \times b_z^n$, где zOy – плоскость симметрии, b_z^n – толщина, b_y^n – длина ДвКЭ V_n^a , $n = 1, \dots, N_0$, N_0 – общее число ДвКЭ V_n^a в дискретной модели панели (оболочки).

Считаем, что ДвКЭ V_n^a армирован непрерывными волокнами, направленными вдоль оси Oy . Между компонентами неоднородной структуры ДвКЭ V_n^a связи идеальны. Компоненты есть изотропные однородные тела. Функции перемещений, напряжений и деформаций компонентов ДвКЭ V_n^a удовлетворяют закону Гука и соотношениям Коши, которые отвечают трехмерной задаче теории упругости. Область ДвКЭ V_n^a представляем базовым разбиением R_a , которое состоит из однородных КЭ V_e 1-го порядка (рис. 1) с характерными размерами $h_x^e \times h_y^e \times h_z^e$, пусть $h_y^e, h_z^e, \alpha_e = \text{const}$, $e = 1, \dots, M$, M – общее число КЭ V_e базового разбиения R_a . Имеем $b_x^n = 9h_x^e$, $b_y^n = 9h_y^e$, $b_z^n = 9h_z^e$. В центре области ДвКЭ V_n^a расположена полость сложной формы с характерными размерами $3h_x^e \times 3h_y^e \times 3h_z^e$, то есть полость имеет форму криволинейного параллелепипеда.

Базовое разбиение R_a учитывает неоднородную (микронеоднородную) структуру ДвКЭ V_n^a , сложную форму полости и порождает мелкую криволинейную трехмерную сетку h_a . Поскольку в КЭ V_e (рис. 1) реализуется трехмерное напряженно-деформированное состояние (см. п. 1), то в области ДвКЭ V_n^a также реализуется трехмерное напряженное состояние. Отметим, что базовые разбиения R_a двухсеточных КЭ V_n^a (которые представляют область панели, оболочки) образуют базовую дискретную модель панели, оболочки. На рис. 4 показано поперечное сечение (при $y = 4h_y^e$) ДвКЭ V_n^a , которое представлено мелкой сеткой базового разбиения, сечения волокон закрашены. На мелкой сетке h_a определяем крупную криволинейную трехмерную узловую сетку H_a . Считаем, что угол раствора ДвКЭ V_n^a мал (что характерно при использовании мелких разбиений R_a или когда ДвКЭ V_n^a представляют пологую панель, оболочку). В этом случае форма ДвКЭ V_n^a (рис. 3) мало отличается от формы прямоугольного параллелепипеда. В связи с этим при построении по МКЭ на крупной сетке H_a функций перемещений для ДвКЭ V_n^a будем использовать известный интерполяционный полином 3-го порядка (который применяют при построении функций перемещений для КЭ 3-го порядка формы прямоугольного параллелепипеда [6, 7]), записанный в декартовой системе координат $Oxyz$, рис. 3. В этом случае ДвКЭ V_n^a будем называть ДвКЭ 3-го порядка, то есть порядок ДвКЭ равен порядку интерполяционного полинома, построенного

на крупной сетке. Крупная сетка H_a по характеру расположения и количеству узлов отвечает сетке КЭ 3-го порядка в виде прямоугольного параллелепипеда [6, 7]. Узлы сетки H_a на рис. 3 отмечены точками (32 узла). На крупной сетке H_a по МКЭ строим функции перемещений u_a, v_a, w_a для ДвКЭ V_n^a , используя интерполяционные полиномы 3-го порядка (записанные в декартовой системе координат $Oxyz$) вида

$$\begin{aligned} u_a, v_a, w_a = & a_1 + a_2x + a_3y + a_4z + a_5xy + a_6zx + a_7zy + a_8xyz + \\ & + a_9x^2 + a_{10}y^2 + a_{11}z^2 + a_{12}x^2y + a_{13}x^2z + a_{14}y^2x + a_{15}y^2z + a_{16}z^2x + \\ & + a_{17}z^2y + a_{18}x^3 + a_{19}y^3 + a_{20}z^3 + a_{21}x^3y + a_{22}x^3z + a_{23}y^3x + a_{24}y^3z + a_{25}z^3x + \\ & + a_{26}z^3y + a_{27}x^2yz + a_{28}y^2xz + a_{29}z^2xy + a_{30}x^3yz + a_{31}y^3xz + a_{32}z^3xy. \end{aligned}$$

Функции перемещений u_a, v_a, w_a представляем в форме

$$u_a = \sum_{i=1}^{32} N_i^a u_i^a, \quad v_a = \sum_{i=1}^{32} N_i^a v_i^a, \quad w_a = \sum_{i=1}^{32} N_i^a w_i^a, \quad (7)$$

где $u_i^a, v_i^a, w_i^a, N_i^a$ – перемещения и функция формы i -го узла крупной сетки H_a , $i = 1, \dots, 32$.

Пусть ось O_1y_1 локальной декартовой системы координат $O_1x_1y_1z_1$ КЭ V_e , см. рис. 1 (расположенного в базовом разбиении R_a ДвКЭ V_n^a), параллельна оси Oy локальной декартовой системы координат $Oxyz$ ДвКЭ V_n^a (рис. 3) и пусть между осями O_1x_1, O_1y_1 угол равен β_e . Обозначим через δ_e вектор узловых перемещений КЭ V_e , $e = 1, \dots, M$, отвечающий декартовой системе координат $Oxyz$. Вектор δ_e представим в виде

$$\delta_e = \{u_1^e, \dots, u_8^e, v_1^e, \dots, v_8^e, w_1^e, \dots, w_8^e\}^T, \quad (8)$$

где u_i^e, v_i^e, w_i^e – перемещения i -го узла КЭ V_e , $i = 1, \dots, 8$, $e = 1, \dots, M$.

Векторы δ_e^1 (см. представление (3)) и δ_e связаны соотношением [6]

$$\delta_e^1 = [T_e] \delta_e. \quad (9)$$

Здесь $[T_e]$ – матрица вращений [6] размерности 24×24 , которая в силу (3), (8) имеет структуру

$$[T_e] = \begin{bmatrix} [E_1] & [E_0] & [E_2] \\ [E_0] & [E] & [E_0] \\ -[E_2] & [E_0] & [E_1] \end{bmatrix},$$

где подматрицы имеют размерность 8×8 ; $[E_0]$ – нулевая и $[E]$ – единичная матрицы, $[E_1] = \cos \beta_e [E]$, $[E_2] = \sin \beta_e [E]$, $e = 1, \dots, M$.

Используя связь (9) между векторами δ_e^1 и δ_e , получим соотношения [7]

$$[K_e] = [T_e]^T [K_e^1] [T_e], \quad \mathbf{P}_e = [T_e]^T \mathbf{P}_e^1,$$

где $[K_e^1], [K_e]$ – матрицы жесткости и $\mathbf{P}_e^1, \mathbf{P}_e$ – векторы узловых сил КЭ V_e , отвечающие соответственно декартовым системам координат $O_1x_1y_1z_1$ и $Oxyz$, $e = 1, \dots, M$.

Полную потенциальную энергию W_a для базового разбиения R_a запишем в форме

$$W_a = \sum_{e=1}^M \left(\frac{1}{2} \delta_e^T [K_e] \delta_e - \delta_e^T \mathbf{P}_e \right), \quad (10)$$

где M – общее число КЭ V_e базового разбиения R_a .

Обозначим через δ_a вектор узловых перемещений крупной сетки H_a (отвечающий декартовой системе координат $Oxyz$, рис. 3). С помощью функции перемещений (7) узловые перемещения (вектора δ_e) КЭ V_e выражаем через узловые перемещения крупной сетки H_a , то есть вектор δ_e представляем через вектор δ_a , в результате получим равенство

$$\delta_e = [A_e^a] \delta_a, \quad (11)$$

где $[A_e^a]$ – прямоугольная матрица размерности 24×96 , $e = 1, \dots, M$.

Подставляем (11) в функционал (10) и, минимизируя его, получаем

$$[K_a] = \sum_{e=1}^M [A_e^a]^T [K_e] [A_e^a], \quad \mathbf{F}_a = \sum_{e=1}^M [A_e^a]^T \mathbf{P}_e,$$

где $[K_a]$ – матрица жесткости, \mathbf{F}_a – вектор узловых сил криволинейного ДвКЭ V_n^a .

2.2. Вторая процедура построения ДвКЭ. Вторую процедуру рассмотрим на примере построения ДвКЭ V_n^b 3-го порядка. Пусть ДвКЭ V_n^b имеет размеры, форму, неоднородную (микронеоднородную) структуру и расположен в локальной декартовой системе координат $Oxyz$ как и ДвКЭ V_n^a (рис. 3). В этой процедуре используем функции перемещений u_a, v_a, w_a вида (7) (см. п. 2.1), базовое разбиение R_a , мелкую h_a и крупную H_a сетки ДвКЭ V_n^a , другими словами $u_a, v_a, w_a, H_a, R_a, \delta_a$ есть функции перемещений, крупная сетка, базовое разбиение и вектор узловых перемещений ДвКЭ V_n^b , которые для удобства изложения обозначим соответственно через $u_b, v_b, w_b, H_b, R_b, \delta_b$. На базовом разбиении R_b с помощью метода конденсации [6] строим криволинейный суперэлемент G_s , полную потенциальную энергию W_s которого запишем в виде

$$W_s = \frac{1}{2} \delta_s^T [K_s] \delta_s - \delta_s^T \mathbf{P}_s, \quad (12)$$

где $[K_s]$, \mathbf{P}_s , δ_s – матрица жесткости, векторы узловых сил и перемещений суперэлемента G_s , определяемые в локальной декартовой системе координат $Oxyz$ ДвКЭ V_n^b .

Используя функции перемещений (7), узловые перемещения суперэлемента G_s выражаем через узловые перемещения крупной сетки H_b , то есть вектор δ_s представляем через вектор δ_b , в результате получим соотношение

$$\delta_s = [A_s^b] \delta_b, \quad (13)$$

где $[A_s^b]$ – прямоугольная матрица.

Подставляем (13) в функционал (12) и, минимизируя его, получаем

$$[K_b] = [A_s^b]^T [K_s] [A_s^b], \quad \mathbf{F}_b = [A_s^b]^T \mathbf{P}_s,$$

где $[K_b]$ – матрица жесткости, \mathbf{F}_b – вектор узловых сил криволинейного ДвКЭ V_n^b .

Замечание 1. Базовые разбиения (мелкие сетки) ДвКЭ V_n^a, V_n^b могут иметь сколь угодно большую размерность. Это связано с тем, что для более точного учета неоднородной (микронеоднородной) структуры ДвКЭ V_n^a, V_n^b , сложных форм полостей и отверстий необходимо использовать мелкие разбиения. Однако если размерность крупной сетки задана, то увеличение размерности мелкой сетки не приводит к увеличению числа узловых неизвестных ДвКЭ V_n^a, V_n^b , то есть в этом случае размерности двухсеточных дискретных моделей не связаны со сложностью форм неоднородных структур панелей и оболочек.

Замечание 2. Если базовое разбиение ДвКЭ V_n^b имеет высокую размерность, то построение суперэлемента G_s затруднительно, поскольку эта процедура связана с обращением матрицы высокого порядка. В этом случае сначала на базовом разбиении строим систему суперэлементов G_α^s ($\alpha = 1, \dots, M_s$, где M_s – общее число суперэлементов), которые покрывают область ДвКЭ V_n^b . Затем, используя суперэлементы G_α^s , строим суперэлемент G_s .

Замечание 3. Расчеты показывают, что процедура, приведенная в п. 2.2, позволяет построить более точное решение, чем решение, полученное с помощью процедуры из п. 2.1. Однако временные затраты на реализацию процедуры п. 2.2 больше, чем процедуры п. 2.1, что связано с необходимостью обращения матриц высокого порядка (в процедуре п. 2.2).

Процедуры построения криволинейных композитных ДвКЭ 1-го и 2-го порядка, имеющих такие же геометрические формы, как ДвКЭ V_n^a (ДвКЭ V_n^b), аналогичны процедурам п. 2.1 и п. 2.2.

2.3. Определение напряжений в ДвКЭ.

2.3.1. Рассмотрим процедуру определения напряжений в ДвКЭ V_n^a (см. п. 2.1). Пусть найден вектор δ_a узловых неизвестных ДвКЭ V_n^a в локальной декартовой системе координат $Oxyz$ (рис. 3). По формуле (11) определяем (в декартовой системе координат $Oxyz$) вектор δ_e узловых перемещений КЭ V_e , то есть $\delta_e = [A_e^a]\delta_a$, $e = 1, \dots, M$. Вектор узловых перемещений δ_e^1 КЭ V_e , отвечающий локальной декартовой системе координат $O_1x_1y_1z_1$ (рис. 1), находим по формуле (9), а именно $\delta_e^1 = [T_e]\delta_e$, $e = 1, \dots, M$. С помощью функций перемещений (2) и соотношений (5) вектор σ_e функций напряжений КЭ V_e определяем по формуле $\sigma_e = [D_e][B_e]\delta_e^1$, $e = 1, \dots, M$. Эквивалентные напряжения для КЭ V_e базового разбиения ДвКЭ V_n^a вычисляем по 4-й теории прочности в их центрах тяжести, $e = 1, \dots, M$.

2.3.2. Рассмотрим процедуру определения напряжений в ДвКЭ V_n^b (см. п. 2.2). Пусть найден вектор δ_b узловых неизвестных ДвКЭ V_n^b , отвечающий декартовой системе координат $Oxyz$ (рис. 3). По формуле (13) определяем (в декартовой системе координат $Oxyz$) вектор δ_s узловых перемещений суперэлемента G_s , то есть $\delta_s = [A_s^b]\delta_b$. Используя вектор δ_s и соответствующие формулы метода конденсации [6], находим перемещения в узлах мелкой сетки, которые лежат внутри области суперэлемента G_s . Затем по алгоритмам, аналогичным п. 2.3.1, находим векторы функций напряжений и эквивалентные напряжения для КЭ V_e базового разбиения ДвКЭ V_n^b , $e = 1, \dots, M$. Так как компоненты композитных панелей и оболочек представляются КЭ V_e базовых разбиений ДвКЭ, то напряжения можно определить в любом компоненте неоднородных структур панелей и оболочек.

3. Криволинейные сложные МнКЭ с полостями и отверстиями

Основные положения процедуры построения композитного криволинейного сложного многосеточного конечного элемента (не теряя общности суждений) рассмотрим на примере построения сложного МнКЭ V_m с характерными размерами $h_x^m \times h_y^m \times h_z^m$, который имеет регулярную систему полостей сложной формы и расположен в локальной декартовой системе координат $Ox_0y_0z_0$ (рис. 5), где h_z^m – толщина, h_y^m – длина МнКЭ V_m . Форма МнКЭ V_m есть прямая призма высотой h_y^m . Область сложного МнКЭ V_m представлена криволинейными композитными ДвКЭ V_n^b 3-го порядка с характерными размерами $b_x^n \times b_y^n \times b_z^n$ (рис. 3), $n = 1, \dots, N$, N – общее число ДвКЭ V_n^b , для рис. 5 имеем $N = 27$. Пусть ДвКЭ V_n^b

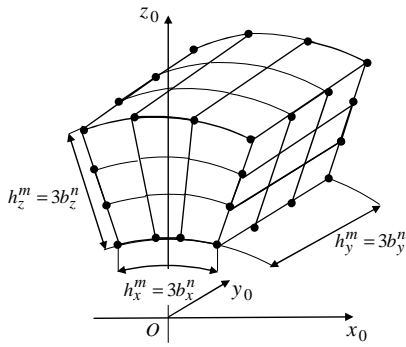


Рис. 5. Сложный МНКЭ V_m

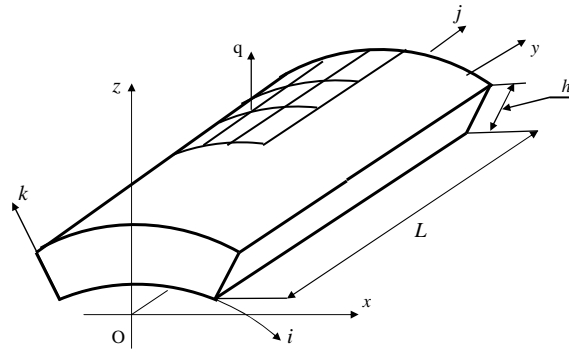


Рис. 6. Панель V_0

построены по процедуре, изложенной в п. 2.2. Базовое разбиение ДвКЭ V_n^b состоит из криволинейных КЭ V_e 1-го порядка с характерными размерами $h_x^e \times h_y^e \times h_z^e$ (рис. 1). Это разбиение учитывает неоднородную (микронеоднородную) структуру и форму ДвКЭ V_n^b (то есть учитывает структуру и сложную форму МНКЭ V_m).

Пусть $h_y^e, h_z^e, \alpha_e = \text{const}$, $e = 1, \dots, N_0$; N_0 – общее число КЭ V_e базового разбиения ДвКЭ V_n^b . ДвКЭ V_n^b расположен в локальной декартовой системе координат $Oxyz$ (рис. 3), где $b_x^n = 9h_x^e$, $b_y^n = 9h_y^e$, $b_z^n = 9h_z^e$. Пусть $b_y^n, b_z^n, \gamma_n = \text{const}$, γ_n – угол раствора ДвКЭ V_n^b , $n = 1, \dots, N$. Имеем $h_x^m = 3b_x^n$, $h_y^m = 3b_y^n$, $h_z^m = 3b_z^n$. ДвКЭ V_n^b армирован непрерывными волокнами с характерным сечением $h_x^e \times h_z^e$, направленными вдоль оси Oy . В центре области ДвКЭ V_n^b расположена полость сложной формы с характерными размерами $3h_x^e \times 3h_y^e \times 3h_z^e$, то есть полость имеет форму криволинейного параллелепипеда. На рис. 4 показано поперечное сечение ДвКЭ V_n^b , сечения волокон закрашены. Отметим, что МНКЭ V_m включает множества криволинейных мелких h_n^b и крупных H_n^b вложенных сеток ДвКЭ V_n^b , $n = 1, \dots, N$. Мелкие сетки h_n^b образуют мелкую сетку h_m сложного МНКЭ V_m . На мелкой сетке h_m определяем крупную сетку H_m сложного МНКЭ V_m . Считаем, что угол раствора МНКЭ V_m мал.

При построении по МКЭ функций перемещений для МНКЭ V_m на крупной сетке H_m используем интерполяционный полином 3-го порядка (см. п. 2.1), записанный в локальной декартовой системе координат $Ox_0y_0z_0$ (рис. 5). В этом случае элемент V_m будем называть сложным МНКЭ 3-го порядка. Узлы крупной сетки H_m МНКЭ V_m на рис. 5 отмечены точками (32 узла). Функции перемещений u_m, v_m, w_m МНКЭ V_m , построенные на крупной сетке H_m , запишем в виде

$$u_m = \sum_{i=1}^{32} N_i^m u_i^m, \quad v_m = \sum_{i=1}^{32} N_i^m v_i^m, \quad w_m = \sum_{i=1}^{32} N_i^m w_i^m, \quad (14)$$

где N_i^m – функция формы i -го узла сетки H_m ; u_i^m, v_i^m, w_i^m – значения перемещений в i -м узле (определяемые в декартовой системе координат $Ox_0y_0z_0$), $i = 1, \dots, 32$.

Обозначим через δ_m вектор узловых неизвестных (размерности 96) крупной сетки H_m , то есть $\delta_m = \{u_1^m, \dots, u_{32}^m, v_1^m, \dots, v_{32}^m, w_1^m, \dots, w_{32}^m\}^T$. Пусть ось Oy локальной декартовой системы координат $Oxyz$ ДвКЭ V_n^b (рис. 3) параллельна оси Oy_0 локальной декартовой системы координат $Ox_0y_0z_0$ МНКЭ V_m (рис. 5) и пусть между осями Ox и Ox_0 угол равен φ_n . Векторы δ_n, δ_n^0 узловых перемещений ДвКЭ V_n^b (рис. 3), отвечающие соответственно декартовым системам координат

$Oxyz$ и $Ox_0y_0z_0$, имеют структуры

$$\begin{aligned}\delta_n &= \{u_1, \dots, u_{32}, v_1, \dots, v_{32}, w_1, \dots, w_{32}\}^T, \\ \delta_n^0 &= \{u_1^0, \dots, u_{32}^0, v_1^0, \dots, v_{32}^0, w_1^0, \dots, w_{32}^0\}^T.\end{aligned}\quad (15)$$

Между векторами δ_n , δ_n^0 имеем связь

$$\delta_n = [T_n^0] \delta_n^0, \quad (16)$$

где $[T_n^0]$ – матрица вращений [6] размерности 96×96 , которая в силу (15) имеет структуру

$$[T_n^0] = \begin{bmatrix} [M_1] & [M_0] & [M_2] \\ [M_0] & [M] & [M_0] \\ -[M_2] & [M_0] & [M_1] \end{bmatrix}.$$

Здесь подматрицы имеют размерность 32×32 ; $[M_0]$ – нулевая и $[M]$ – единичная матрицы, $[M_1] = \cos \varphi_n [M]$, $[M_2] = \sin \varphi_n [M]$.

Используя связь (16) между векторами δ_n и δ_n^0 , получим соотношения [7]

$$[K_n^0] = [T_n^0]^T [K_n] [T_n^0], \quad \mathbf{P}_n^0 = [T_n^0]^T \mathbf{P}_n,$$

где $[K_n]$, $[K_n^0]$ – матрицы жесткости, \mathbf{P}_n , \mathbf{P}_n^0 – векторы узловых сил ДвКЭ V_n^b , отвечающие соответственно декартовым системам координат $Oxyz$ и $Ox_0y_0z_0$.

Полную потенциальную энергию W_m МнКЭ V_m определим выражением

$$W_m = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{2} (\delta_n^0)^T [K_n^0] \delta_n^0 - (\delta_n^0)^T \mathbf{P}_n^0 \right). \quad (17)$$

Используя функции перемещений (14), выражаем узловые перемещения ДвКЭ V_n^b через узловые перемещения крупной сетки H_m , в результате получим соотношение

$$\delta_n^0 = [A_n^m] \delta_m, \quad (18)$$

где $[A_n^m]$ – квадратная матрица размерности 96×96 .

Подставляя (18) в функционал (17) и минимизируя его, получим

$$[K_m] = \sum_{n=1}^N [A_n^m]^T [K_n^0] [A_n^m], \quad \mathbf{F}_m = \sum_{n=1}^N [A_n^m]^T \mathbf{P}_n^0,$$

где $[K_m]$, \mathbf{F}_m – матрица жесткости и вектор узловых сил сложного МнКЭ V_m .

4. Результаты расчетов

В качестве модельной задачи рассмотрим расчет композитной консольной прямоугольной в плане панели V_0 регулярной волокнистой структуры с малым коэффициентом заполнения (рис. 6). Панель V_0 состоит из пластичных материалов, имеет статическое нагружение, регулярную систему полостей сложной формы и расположена в декартовой системе координат $Oxyz$. Левый торец панели жестко закреплен, то есть при $y = 0$ имеем $u, v, w = 0$. Непрерывные волокна параллельны оси Oy . Базовое разбиение панели V_0 , состоящее из однородных криволинейных КЭ V_e 1-го порядка с характерными размерами $h_x^e \times h_y^e \times h_z^e$ (рис. 1), учитывает ее неоднородную структуру, форму и порождает криволинейную мелкую сетку h_a размерности $73 \times 145 \times 19$, где $e = 1, \dots, M$, M – общее число КЭ V_e базового разбиения панели V_0 , $M = 186624$. Пусть $h_y^e, h_z^e, \alpha_e = \text{const}$, $e = 1, \dots, M$. Двухсеточная дискретная модель панели V_0 состоит из криволинейных ДвКЭ V_n^d 3-го

порядка с характерными размерами $18h_x^e \times 18h_y^e \times 18h_z^e$, которые построены по процедуре п. 2.2 и мелкие сетки которых имеют размерность $19 \times 19 \times 19$, $n = 1, \dots, N_0$, N_0 – общее число ДвКЭ V_n^d , для панели V_0 имеем $N_0 = 32$. ДвКЭ V_n^d расположен в локальной декартовой системе координат $O_1x_1y_1z_1$, причем ось O_1y_1 параллельна оси Oy декартовой системы координат $Oxyz$ панели.

Базовые разбиения ДвКЭ V_n^d состоят из КЭ V_e (рис. 1). Область ДвКЭ V_n^d состоит из 8 суперэлементов G_α^s с характерными размерами $9h_x^e \times 9h_y^e \times 9h_z^e$, $\alpha = 1, \dots, 8$. Сначала строим суперэлементы G_α^s . Затем, используя суперэлементы G_α^s , строим суперэлемент G_s для всей области ДвКЭ V_n^d (см. замечание 2). В центре каждого суперэлемента G_α^s расположена полость формы криволинейного параллелепипеда с характерными размерами $3h_x^e \times 3h_y^e \times 3h_z^e$. На рис. 4 представлено сечение суперэлемента G_α^s в плоскости, перпендикулярной оси O_1y_1 , при $y_1 = 4h_y^e$. Сечение представлено сеткой базового разбиения, сечения волокон с характерными размерами $h_x^e \times h_z^e$ заштрихованы. Для узлов мелкой сетки введена целочисленная система координат ijk (рис. 6). В узлах $p(i, j, k)$ мелкой сетки панели, где i, j, k – целочисленные координаты, $k = 19$, $i = 1 + 6(\alpha - 1)$, $j = 73 + 6(\beta - 1)$, $\alpha = 1, \dots, 7$, $\beta = 1, \dots, 13$, действуют вертикальные силы q . На рис. 6 поверхность панели, на которой задано нагружение, заштрихована (1/4 часть верхней поверхности панели).

Модуль Юнга связующего материала равен 1, волокна – 10, коэффициент Пуассона для волокна и связующего материала равен 0.3; $q = 0.1$. Радиус внутренней поверхности панели равен 25, внешней – 30, толщина панели $h = 5$, длина панели $L = 40$ (рис. 6). Угол раствора панели равен $\pi/4$, коэффициент заполнения панели равен 0.31.

Результаты расчетов панели V_0 показывают, что максимальное перемещение (эквивалентное напряжение) двухсеточной дискретной модели \mathbf{R}_h панели V_0 , состоящей из ДвКЭ V_n^d , отличается от максимального перемещения (эквивалентного напряжения) базовой дискретной модели \mathbf{R}_0 на 2.46% (на 8.8%). Размерность базовой модели \mathbf{R}_0 равна 593040, ширина ленты системы уравнений (СУ) МКЭ равна 8448. Двухсеточная модель \mathbf{R}_h имеет 1344 узловых неизвестных (то есть имеет в 440 раз меньше, чем неизвестных в базовой модели \mathbf{R}_0), ширина ленты СУ МКЭ равна 408 (в 20 раз меньше ширины ленты СУ МКЭ модели \mathbf{R}_0). Реализация МКЭ для двухсеточной модели \mathbf{R}_h требует примерно в 9100 раз меньше объема памяти ЭВМ, чем для базовой модели \mathbf{R}_0 . Эквивалентные напряжения определяются по 4-й теории прочности.

Заключение

В работе для расчета трехмерных линейно упругих композитных цилиндрических панелей и оболочек с различными коэффициентами заполнения, имеющие статическое нагружение, полости и отверстия сложной формы, предложены криволинейные ДвКЭ и сложные МнКЭ, при построении которых используются известные интерполяционные полиномы 1-го, 2-го и 3-го порядков и уравнения трехмерной задачи теории упругости, записанные в локальных декартовых системах координат данных элементов. Достоинства предлагаемых элементов состоят в следующем. ДвКЭ и сложные МнКЭ в композитных панелях и оболочках с различными коэффициентами заполнения:

- описывают трехмерное напряженное состояние;
- учитывают неоднородную и микронеоднородную структуры;
- учитывают полости и отверстия сложной формы;
- учитывают сложный характер закреплений.

ДвКЭ и сложные МнКЭ порождают двух- и многосеточные дискретные модели

композитных панелей и оболочек, размерности которых в $10^2 \div 10^4$ раз меньше размерностей базовых моделей, Отметим, что напряжения можно определить в любом компоненте неоднородных структур панелей и оболочек. Реализация МКЭ для двух- и многосеточных дискретных моделей требует в $10^2 \div 10^3$ раз меньше временных затрат, чем для базовых.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00130).

Summary

A.D. Matveev, A.N. Grishanov. Multigrid Curvilinear Elements in the Three-Dimensional Analysis of Composite Cylindrical Panels and Shells with Cavities and Openings.

The paper presents the procedure of construction of curvilinear double-grid finite elements (DgFE) and complex multigrid finite elements (MgFE) for calculating three-dimensional elastic composite cylindrical panels and shells with cavities and openings. The standard discrete models of three-dimensional composite panels and shells, taking into account their inhomogeneous (micro-inhomogeneous) structure and complex form, have very high dimension. DgFE and complex MgFE are built based on the standard discrete models of panels and shells using the interpolating polynomials and equations of the three-dimensional problem of elasticity, written in the local Cartesian coordinate systems of these elements. DgFE and complex MgFE describe the three-dimensional stress state in the composite panels and shells taking into account their structure and thus generating the discrete models of small dimensions. Calculations of panels with fibrous structure demonstrate that the maximum displacement and equivalent stress of the basic and double-grid (multigrid) discrete panel models differ by $1 \div 12\%$. Implementation of the finite element method for two- and multigrid discrete models of panels requires $10^3 \div 10^4$ times less computer memory and $10^2 \div 10^3$ times less time than for the basic model.

Keywords: composites, elasticity, cylindrical shells and panels, complex multigrid and double-grid curvilinear finite elements.

Литература

1. *Матвеев А.Д.* Некоторые подходы проектирования упругих многосеточных конечных элементов. – Красноярск: Ин-т вычисл. моделирования СО РАН. – 2000. – 30 с. – Деп. в ВИНТИ № 2990-В00.
2. *Матвеев А.Д.* Многосеточное моделирование композитов нерегулярной структуры с малым коэффициентом заполнения // Прикл. механика и техн. физика. – 2004. – № 3. – С. 161–171.
3. *Матвеев А.Д.* Построение сложных многосеточных элементов с неоднородной и микронеоднородной структурой // Изв. Алт. гос. ун-та. – 2014. – № 1/1. – С. 80–83.
4. *Матвеев А.Д., Гришанов А.Н.* Двухсеточное моделирование цилиндрических оболочек и панелей переменной толщины // Вестн. Краснояр. гос. аграр. ун-та. – 2014. – № 4. – С. 90–97.
5. *Матвеев А.Д., Гришанов А.Н.* Одно- и двухсеточные криволинейные элементы трехмерных цилиндрических панелей и оболочек // Изв. Алт. гос. ун-та. – 2014. – № 1/1. – С. 84–89.
6. *Норри Д., де Фриз Ж.* Введение в метод конечных элементов. – М.: Мир, 1981. – 304 с.
7. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.

Поступила в редакцию
29.10.14

Матвеев Александр Данилович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник отдела № 5, Институт вычислительного моделирования СО РАН, г. Красноярск, Россия.

E-mail: *mtv@icm.krasn.ru*

Гришанов Александр Николаевич – преподаватель кафедры «Прочность летательных аппаратов», Новосибирский государственный технический университет, г. Новосибирск, Россия.

E-mail: *a_grishanov@ngs.ru*