*Известия вузов. Математика*
*2018, № 6, с. 78–84*

*http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/*
*e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru*

*Краткое сообщение*

*А.В. ЗВЯГИН, В.Г. ЗВЯГИН, Д.М. ПОЛЯКОВ*

# О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОЙ АЛЬФА-МОДЕЛИ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ С ПАМЯТЬЮ

*Аннотация.* В работе исследуется существование слабых решений одной альфа-модели неньютоновской гидродинамики. Если параметр альфа равен нулю, то указанная альфа-модель совпадает с классической моделью, описывающей движение жидкости с памятью. Данная модель учитывает память среды вдоль траектории движения. Кроме того, устанавливается, что при стремлении параметра альфа к нулю решения рассматриваемой альфа-модели стремятся к решениям классической модели.

*Ключевые слова*: неньютоновская гидродинамика, альфа-модель, жидкость с памятью, теорема существования, регулярный лагранжевый поток.

*УДК*: 517.958

В последние годы стали интенсивно изучаться альфа-модели гидродинамики. В отличие от классических моделей они представляют собой своего рода регуляризованные приближенные системы, которые зависят от некоторого положительного параметра $\alpha$. Эти системы, как правило, рассматриваются как независимые, корректно определенные системы уравнений. В силу этого проводить их исследование значительно проще как аналитически, так и численно. Отдельный интерес вызывают вопросы связи альфа-моделей с классическими моделями, когда параметр $\alpha$ стремится к нулю.

Отметим, что большая часть работ по изучению альфа-моделей посвящена моделям движения идеальной или ньютоновской жидкости. Однако в последнее время появились работы, связанные с альфа-моделями для неньютоновской жидкости [1], [2]. Данная работа продолжает исследования в этом направлении. Основная цель данной статьи — исследовать слабую разрешимость альфа-модели движения вязкоупругой жидкости с памятью, а также поведение слабых решений этой системы при $\alpha \to 0$.

Поступила 04.12.2017

Благодарности. Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации по Программе повышения конкурентоспособности РУДН “5-100”среди ведущих мировых научно-образовательных центров на 2016-2020 гг. (соглашение № 02.A03.21.0008). Работа второго автора выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (проект № 14.Z50.31.0037). Работа третьего автора выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 16-01-00370.

Пусть $\Omega$ — ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$. В $Q_T = [0, T] \times \Omega$ рассмотрим следующую начально-краевую задачу:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu_0 \Delta v - \mu_1 \mathrm{Div} \int_0^t e^{(s-t)/\lambda} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x))\, ds + \nabla p = f, \quad (t, x) \in Q_T; \quad (1)$$

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s; t, x))\, ds, \quad (t, x) \in Q_T, \quad \tau \in [0, T]; \quad (2)$$

$$v = (I - \alpha^2 \Delta) u, \quad (t, x) \in Q_T; \quad \operatorname{div} v(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q_T; \quad (3)$$

$$v|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0, \quad v|_{t=0} = a, \quad x \in \Omega. \quad (4)$$

Здесь $v$ — вектор-функция скорости движения частицы жидкости, $u$ — вектор-функция модифицированной скорости движения частицы жидкости, $z$ — вектор-функция траектории движения частицы жидкости, $p$ — функция давления, $f$ — вектор-функция плотности внешних сил. Обозначим через $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ij}(v))$, $\mathcal{E}_{ij}(v) = 1/2(\partial v_i/\partial x_j + \partial v_j/\partial x_i)$, $i, j = 1, \ldots, n$, тензор скоростей деформации. Пусть $\alpha > 0$ — скалярный параметр, который является длиной подсеточного (фильтрующего) масштаба модели, $\mu_0$, $\mu_1 > 0$ суть константы. Отметим, что при $\alpha = 0$ начально-краевая задача (1)–(4) описывает классическую математическую модель движения жидкости с памятью.

Исследование слабых решений моделей движения жидкости с памятью вдоль траектории движения частиц жидкости наталкивается на трудность, связанную с тем, что поле скоростей однозначно не определяет траекторий движения частиц, т. е. не удается однозначно решить уравнение (2). Одним из возможных выходов из этой ситуации является регуляризация поля скоростей и определение траекторий $z = Z_\delta(v)$ для сглаженного поля скоростей $S_\delta(v)$. Регуляризованная классическая модель движения жидкости с памятью вдоль траектории движения частиц была исследована в работах [3], [4]. Сравнительно недавно [5], [6] была исследована разрешимость уравнения (2) в случае $v$ из пространств Соболева и установлены существование, единственность и устойчивость регулярных лагранжевых потоков — обобщения понятия классического решения. В работе [7] это позволило отказаться от условия регуляризации $v$ в теореме о существовании слабых решений классической модели вязкоупругой жидкости с памятью вдоль траектории движения частиц. Конструкцию такого решения используем в данной работе для исследуемой альфа-модели (1)–(4).

Рассмотрим задачу Коши (2). В случае, если функция $v$ является суммируемой, то эта задача не является нелокально однозначно разрешимой. В связи с этим будем использовать более общее понятие решения задачи (2).

**Определение 1** ([5], [6]). *Регулярным лагранжевым потоком* (РЛП), порожденным $v$, называется функция $z(\tau; t, x)$, $(\tau; t, x) \in [0, T] \times [0, T] \times \overline{\Omega}$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) для почти всех (п. в.) $x$ и $t \in [0, T]$ функция $\gamma(\tau) = z(\tau; t, x)$ абсолютно непрерывна и удовлетворяет уравнению (2);

2) для любых $t, \tau \in [0, T]$ и произвольного измеримого по Лебегу множества $B$ с мерой Лебега $m(B)$ справедливо равенство $m(z(\tau; t, B)) = m(B)$;

3) для всех $t_i \in [0, T]$, $i = \overline{1, 3}$, и п. в. $x \in \overline{\Omega}$ справедливо $z(t_3; t_1, x) = z(t_3; t_2, z(t_2; t_1, x))$.

**Теорема 1** ([6]). *Пусть $v \in L_1(0, T; W_p^1(\Omega))$, $1 \le p \le \infty$, $\operatorname{div} v(t, x) = 0$, $(t, x) \in [0, T] \times \Omega$ и $v|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0$. Тогда существует единственный РЛП $z$, порожденный $v$. Более того, $z(s; t, \cdot) \in W_1^1(\Omega)$, $\frac{\partial}{\partial\tau} z(\tau; t, x) = v(\tau, z(\tau; t, x))$, $t, \tau \in [0, T]$, при п. в. $x \in \Omega$ и $z(\tau; t, \overline{\Omega}) \subset \overline{\Omega}$ с точностью до множества меры нуль.*

Таким образом, в силу теоремы 1 для каждого $v \in L_2(0,T;V^1)$ уравнение (2) имеет единственное решение $Z(v) = z(\tau;t,x)$ в классе РЛП для п. в. $x \in \Omega$.

Вернемся к исследованию начально-краевой задачи (1)–(4).

Введем шкалу пространств $V^\beta$, $\beta \in \mathbb{R}$ ([8], § 4.2). Кроме того, через $D'(0,T;V^\beta)$, $\beta < 0$, обозначим пространство обобщенных функций. Символами $C$ с индексами внизу будут обозначаться различные положительные константы. Разрешимость изучаемой задачи будет исследована в пространстве

$$W_1 = \{v \in L_2(0,T;V^1) \cap L_\infty(0,T;V^0),\ v' \in L_{4/3}(0,T;V^{-1})\}$$

с нормой $\|v\|_{W_1} = \|v\|_{L_2(0,T;V^1)} + \|v\|_{L_\infty(0,T;V^0)} + \|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}$.

Обозначим через $A : V^\beta \to V^{\beta-2}$, $\beta > -1/2$, оператор $A = -\pi\Delta$ и через $\Delta_\alpha : V^\beta \to V^{\beta-2}$ — оператор $\Delta_\alpha = (J+\alpha^2 A)$, где $J = \pi I$. В силу ([9], с. 177, лемма 4.4.4) оператор $\Delta_\alpha$ обратим. Применив проектор Лере $\pi : L_2(\Omega) \to V^0$ к обеим частям равенства $v = (I - \alpha^2\Delta)u$ для $\beta = 3$, в силу принадлежности $v(t) \in V^1$ при п. в. $t \in [0,T]$ получим $v = \Delta_\alpha u$. Из последнего равенства выразим $u = (J + \alpha^2 A)^{-1} v = \Delta_\alpha^{-1} v$, отсюда $u(t) \in V^3$ при п. в. $t \in [0,T]$.

**Определение 2.** Пусть $f \in L_2(0,T;V^{-1})$, $a \in V^0$. Функция $v \in W_1$ называется слабым решением начально-краевой задачи (1)–(4), если для всех $\varphi \in V^1$ при п. в. $t \in (0,T)$ она удовлетворяет равенству

$$\langle v', \varphi\rangle - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1} v)_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx + \mu_0 \int_\Omega \nabla v : \nabla\varphi\, dx + \\ + \mu_1 \left( \int_0^t e^{(s-t)/\lambda} \mathcal{E}(v)(s, Z(v)(s;t,x))\, ds, \mathcal{E}(\varphi) \right) = \langle f, \varphi\rangle \quad (5)$$

и начальному условию (4). Здесь $Z(v)$ — РЛП, порожденный $v$.

Известно ([10], гл. III, лемма 1.1, лемма 1.4), что $W_1 \subset C_w([0,T];V^0)$. Следовательно, начальное условие (4) имеет смысл.

Основным результатом данной статьи является

**Теорема 2.** *Пусть $f \in L_2(0,T;V^{-1})$, $a \in V^0$. Тогда начально-краевая задача* (1)–(4) *имеет хотя бы одно слабое решение $v \in W_1$. Кроме того, решение $v$ начально-краевой задачи* (1)–(4) *стремится к решению классической модели движения жидкости с памятью при $\alpha \to 0$ в пространстве $D'(0,T;V^{-2})$.*

Схема доказательства распадается на две части.

I) Разрешимость начально-краевой задачи (1)–(4) основана на аппроксимационно-топологическом подходе [9], [11], идея которого заключается в следующем. В пространстве $W_2 = \{v \in C([0,T];V^3), v' \in L_2(0,T;V^3)\}$ с нормой $\|v\|_{W_2} = \|v\|_{C([0,T];V^3)} + \|v'\|_{L_2(0,T;V^3)}$ рассматривается семейство ($0 \leqslant \xi \leqslant 1$) вспомогательных задач с малым параметром $\varepsilon > 0$:

$$\varepsilon \frac{\partial \Delta^2 v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial t} + \xi \sum_{i=1}^n (\Delta_\alpha^{-1} v)_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \mu_0 A v - \\ - \mu_1 \xi \mathrm{Div} \int_0^t e^{(s-t)/\lambda} \mathcal{E}(v)(s, z(s;t,x))\, ds = \xi f, \quad (t,x) \in Q_T; \quad (6)$$

$$z(\tau;t,x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s;t,x))\, ds, \quad t,\tau \in [0,T], \quad x \in \Omega; \quad (7)$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad (t,x) \in Q_T; \quad v|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0; \quad Av|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0; \quad v|_{t=0} = a, \quad x \in \Omega. \tag{8}$$

Уравнение (6) включает интеграл, вычисляемый вдоль траекторий движения частиц жидкости. Поэтому необходимо, чтобы траектории однозначно определялись полем скоростей $v(t,x)$. Поскольку $v \in W_2$, то задача Коши (7) нелокально однозначно разрешима.

Для доказательства разрешимости начально-краевой задачи (6)–(8) при $\xi = 1$ и последующего предельного перехода устанавливается

**Лемма 1.** *Пусть $f \in L_2(0,T;V^{-1})$, $a \in V^3$. Тогда для любого решения $v \in W_2$ начально-краевой задачи* (6)–(8) *имеют место оценки*

$$\|v\|_{L_2(0,T;V^1)} + \|v\|_{L_\infty(0,T;V^0)} + \|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} \leqslant C_1(\|a\|_{V^0} + \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})})^2, \tag{9}$$

$$\|v\|_{C([0,T];V^3)} + \varepsilon\|v'\|_{L_2(0,T;V^3)} \leqslant C_2(\varepsilon)(\|a\|^2_{V^0} + \|a\|^2_{V^3} + \|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}), \tag{10}$$

*где постоянная $C_1 > 0$ не зависит от $\varepsilon$.*

На основе полученных априорных оценок (10) решений вспомогательных задач (6)–(8) и теории топологической степени уплотняющих векторных полей доказывается разрешимость вспомогательной задачи при $\xi = 1$. Таким образом, справедлива

**Лемма 2.** *Пусть $f \in L_2(0,T;V^{-1})$ и $a \in V^3$. Тогда существует по крайней мере одно решение $v \in W_2$ вспомогательной задачи* (6)–(8) *при $\xi = 1$.*

Наконец, на основе оценок (9) решений вспомогательной задачи (6)–(8) при $\xi = 1$ с помощью предельного перехода доказывается разрешимость исходной начально-краевой задачи (1)–(4).

II) Для доказательства сходимости полученных решений к решениям класссической модели рассматривается вспомогательная задача

$$\frac{\partial v^m}{\partial t} + \sum_{i=1}^n u_i^m \frac{\partial v^m}{\partial x_i} + \mu_0 A v^m - \mu_1 \operatorname{Div} \int_0^t e^{(s-t)/\lambda} \mathcal{E}(v^m)(s, z^m(s;t,x))\, ds = f; \tag{11}$$

$$z^m(\tau;t,x) = x + \int_t^\tau v^m(s, z^m(s;t,x))\, ds, \quad (t,x) \in Q_T, \quad \tau \in [0,T]; \tag{12}$$

$$u^m = \Delta_\alpha^{-1} v^m, \quad (t,x) \in Q_T; \quad \operatorname{div} v^m = 0, \quad (t,x) \in Q_T; \tag{13}$$

$$v^m|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0, \quad v^m|_{t=0} = a, \quad x \in \Omega. \tag{14}$$

По части I) при каждом $\alpha_m \to 0$ существует решение $v^m \in W_1$ вспомогательной задачи (11)–(14). Тогда для всех $\varphi \in V^2$ при п. в. $t \in (0,T)$ имеет место равенство

$$\langle (v^m)', \varphi\rangle - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n (\Delta_\alpha^{-1} v^m)_i v_j^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx + \mu_0 \int_\Omega \nabla v^m : \nabla\varphi\, dx +$$
$$+ \mu_1 \left( \int_0^t e^{(s-t)/\lambda} \mathcal{E}(v^m)(s, z^m(s;t,x))\, ds, \mathcal{E}(\varphi) \right) = \langle f, \varphi\rangle. \tag{15}$$

В силу выбора $\alpha_m \to 0$ при $m \to \infty$. Из оценок (9) следует $v^m \to v^*$ слабо в $L_2(0,T;V^1)$, $(v^m)' \to (v^*)'$ слабо в $L_{4/3}(0,T;V^{-1})$ при $m \to \infty$. Используя эти сходимости, перейдем к пределу в равенстве (15). Отдельно рассмотрим второе слагаемое. Введем оператор $B : L_4(\Omega) \to V^{-1}$ вида

$$\langle B(v), \varphi\rangle = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n u_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\, dx, \quad v \in L_4(\Omega), \quad u \in V^3, \quad \varphi \in V^2, \quad u = \Delta_\alpha^{-1} v.$$

Тогда имеют место соотношения

$$|\langle B(v^m),\varphi\rangle - \langle B(v^*),\varphi\rangle| = \left|\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n u_i^m v_j^m \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i^* v_j^* \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx\right| =$$

$$= \left|\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n \Big((u_i^m - v_i^m)v_j^m + (v_i^m - v_i^*)v_j^m + (v_j^m - v_j^*)v_i^*\Big)\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n (u_i^m - u_i^m - \alpha_m^2 A u_i^m)v_j^m \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx\right| + \left|\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n (v_i^m - v_i^*)v_j^m \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx\right| +$$

$$+ \left|\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n (v_j^m - v_j^*)v_i^* \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\,dx\right|.$$

Используя неравенство Гёльдера, а также вполне непрерывность вложения $V^1 \subset L_4(\Omega)$ (при $n = 2, 3$), для всех $\varphi \in V^2$ получим

$$|\langle B(v^m),\varphi\rangle - \langle B(v^*),\varphi\rangle| \leqslant C_3(\alpha_m\|\alpha_m A u^m\|_{V^0}\|v^m\|_{V^1} +$$
$$+ \|v^m - v^*\|_{L_4(\Omega)}\|v^m\|_{V^1} + \|v^m - v^*\|_{L_4(\Omega)}\|v^*\|_{V^1})\|\varphi\|_{V^2}.$$

Проинтегрируем обе части последнего неравенства по $t$ в пределах от 0 до $T$. Вновь применяя неравенство Гёльдера, заключаем

$$\int_0^T \|B(v^m) - B(v^*)\|_{V^{-2}}\,dt \leqslant \alpha_m C_3 \int_0^T \|\alpha_m A u^m\|_{V^0}\|v^m\|_{V^1}\,dt +$$
$$+ C_3\int_0^T \|v^m - v^*\|_{L_4(\Omega)}\|v^m\|_{V^1}\,dt + C_3\int_0^T \|v^m - v^*\|_{L_4(\Omega)}\|v^*\|_{V^1}\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \alpha_m C_3\left(\int_0^T \|\alpha_m A u^m\|_{V^0}^2\,dt\right)^{1/2}\left(\int_0^T \|v^m\|_{V^1}\,dt\right)^{1/2} +$$
$$+ C_3\|v^m - v^*\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))}\|v^m\|_{L_2(0,T;V^1)} + C_3\|v^m - v^*\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))}\|v^*\|_{L_2(0,T;V^1)}. \quad (16)$$

Так как $v^m \to v^*$ слабо в $L_2(0,T;V^1)$, то в силу теоремы Обена–Симона ([9], теорема C.4.1) получим $v^m \to v^*$ сильно в $L_2(0,T;L_4(\Omega))$. Значит, из оценки (9) следует, что последние два слагаемых в последнем неравенстве стремятся к нулю. Напомним, что

$$\|v^m\|_{V^1}^2 = \|u^m + \alpha_m^2 A u^m\|_{V^1}^2 = \|u^m\|_{V^1}^2 + 2\alpha_m^2\|A u^m\|_{V^0}^2 + \alpha_m^4\|u^m\|_{V^3}^2.$$

Поэтому в силу оценки (9) имеем

$$\int_0^T \|\alpha_m A u^m\|_{V^0}^2\,dt \leqslant \int_0^T \|v^m\|_{V^1}^2\,dt \leqslant C_1^2(\|a\|_{V^0}^2 + \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2). \quad (17)$$

Таким образом, из неравенств (16) и (17), а также из указанных сходимостей, получим

$$\int_0^T \|B(v^m) - B(v^*)\|_{V^{-2}}\,dt \leqslant \alpha_m C_3 C_1^2(\|a\|_{V^0}^2 + \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2) \to 0$$

при $\alpha_m \to 0$. Следовательно, $B(v^m) \to B(v^*)$ сильно в $L_1(0,T;V^{-2})$, а значит, и в пространстве $D'(0,T;V^{-2})$.

Для установления сходимостей в остальных слагаемых равенства (15) полностью повторим рассуждения, которые были проведены при доказательстве предельного перехода части I). Таким образом, переходя в равенстве (15) к пределу при $m \to \infty$, получаем, что

предельная функция $v^*$ в пространстве $D'(0,T;V^{-2})$ удовлетворяет равенству

$$\langle (v^*)', \varphi\rangle - \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i^* v_j^* \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}\,dx + \mu_0 \int_\Omega \nabla v^* : \nabla\varphi\,dx + \\ + \mu_1 \left( \int_0^t e^{(s-t)/\lambda} \mathcal{E}(v^*)(s, Z(v^*)(s;t,x))\,ds, \mathcal{E}(\varphi) \right) = \langle f, \varphi\rangle,$$

что соответствует слабому решению классической модели жидкости с памятью в пространстве $D'(0,T;V^{-2})$.

## Литература


[1] Vorotnikov D.A. *Global generalized solutions for Maxwell-alpha and Euler-alpha equations*, Nonlinearity **25** (2), 309–327 (2012).

[2] Звягин А.В., Поляков Д.М. *О разрешимости альфа-модели Джеффриса–Олдройда*, Дифференц. уравнения **52**(6), 782–787 (2016).

[3] Звягин В.Г., Дмитриенко В.Т. *О слабых решениях начально-краевой задачи для уравнения движения вязкоупругой жидкости*, Докл. РАН **380** (3), 308–311 (2001).

[4] Звягин В.Г., Дмитриенко В.Т. *О слабых решениях регуляризованной модели вязкоупругой жидкости*, Дифференц. уравнения **38** (12), 1633–1645 (2002).

[5] Crippa G., de Lellis C. *Estimates and regularity results for the diPerna–Lions flow*, J. Reine Angew. Math. **616**, 15–46 (2008).

[6] DiPerna R.J., Lions P.L. *Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces*, Invent. Math. **98**, 511–547 (1989).

[7] Звягин В.Г., Орлов В.П. *О слабой разрешимости задачи вязкоупругости с памятью*, Дифференц. уравнения **53** (2), 215–220 (2017).

[8] Фурсиков А.В. *Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения* (Научная книга, Новосибирск, 1999).

[9] Звягин В.Г., Турбин М.В. *Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред* (КРАСАНД УРСС, М., 2012).

[10] Темам Р. *Уравнения Навье–Стокса. Теория и численный анализ* (Мир, М., 1971).

[11] Zvyagin V.G. *Topological approximation approach to study of mathematical problems of hydrodynamics*, J. Math. Sci. **201** (6), 830–858 (2014).



*Андрей Викторович Звягин*
*Российский университет дружбы народов,*
*ул. Миклухо-Маклая, д. 6, г. Москва, 117198, Россия;*
*Воронежский государственный университет,*
*Университетская пл., д. 1, г. Воронеж, 394018, Россия,*
e-mail: zvyagin.a@mail.ru

*Виктор Григорьевич Звягин*
*Воронежский государственный университет,*
*Университетская пл., д. 1, г. Воронеж, 394018, Россия,*
e-mail: zvg_vsu@mail.ru

*Дмитрий Михайлович Поляков*
*Южный математический институт,*
*филиал Владикавказского научного центра Российской академии наук,*
*ул. Маркуса, д. 22, г. Владикавказ, 362027, Россия;*
*Воронежский государственный университет,*
*Университетская пл., д. 1, г. Воронеж, 394018, Россия,*
e-mail: DmitryPolyakow@mail.ru

*A.V. Zvyagin, V.G. Zvyagin and D.M. Polyakov*

**On solvability of one alpha-model of fluid motion with memory**

*Abstract.* We study a weak solvability of one alpha-model for non-Newtonian hydrodynamics. If the parameter alpha equals zero, then the considered alpha-model coincides with the classical model describing the motion of a fluid with memory. This model takes into account the fluid's memory along the trajectory. Additionally, we show that solutions of the alpha-model tend to solutions to the classical model as the parameter alpha tends to zero.

*Keywords*: non-Newtonian hydrodynamics, alpha-model, fluid with memory, existence theorem, regular lagrangian flow.

*Andrei Viktorovich Zvyagin*

*Peoples Friendship University of Russia,*
*6 Miklukho-Maklaya str., Moscow, 117198 Russia;*
*Voronezh State University,*
*1 Universitetskaya sq., Voronezh, 394018 Russia,*

`e-mail:` zvyagin.a@mail.ru

*Viktor Grigor'evich Zvyagin*

*Voronezh State University,*
*1 Universitetskaya sq., Voronezh, 394018 Russia,*

`e-mail:` zvg_vsu@mail.ru

*Dmitrii Mikhailovich Polyakov*

*Southern Mathematical Institute,*
*Vladikavkaz Scientific Center of Russian Academy of Sciences,*
*22 Markusa str., Vladikavkaz, 362027 Russia;*
*Voronezh State University,*
*1 Universitetskaya sq., Voronezh, 394018 Russia,*

`e-mail:` DmitryPolyakow@mail.ru