Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2010, № 2, с. 39–52 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421000123\0012*

В.П. КУРДЮМОВ, А.П. ХРОМОВ

О БАЗИСАХ РИССА ИЗ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРЫ

Аннотация. Для функционально-дифференциального оператора переменной структуры с интегральным краевым условием доказана базисность Рисса со скобками его собственных и присоединенных функций в пространстве $L_2^3[0,1]$.

Ключевые слова: базис Рисса, резольвента, собственная функция, краевое условие, регулярность.

УДК: 517.984

Abstract. We consider a functional differential operator of variable structure with an integral boundary condition. We prove that its eigen and associated functions form a Riesz basis with brackets in the space $L_2^3[0,1]$.

Keywords: Riesz basis, resolvent, eigenfunction, boundary condition, regularity.

Рассмотрим функционально-дифференциальный оператор

$$Ly = l[y] = \alpha_j y'(x) + \beta_j y'(\gamma_{j-1} + \gamma_j - x) + p_{j1}(x)y(x) + p_{j2}(x)y(\gamma_{j-1} + \gamma_j - x), \tag{1}$$
$$x \in [\gamma_{j-1}, \gamma_j] \quad (j = 1, 2, 3), \quad 0 = \gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3 = 1,$$
$$\int_0^1 y(t)\, d\sigma(t) = 0. \tag{2}$$

Требования на параметры будут даны ниже.

Данной работой продолжаются исследования функционально-дифференциальных и интегральных операторов с операторами отражения, которые имеют давнюю историю и интенсивно развиваются ([1]–[7]). В статье изучается вопрос о базисах Рисса со скобками из собственных и присоединенных функций (с. п. ф.) оператора (1)–(2). Большие успехи в этой важной задаче принадлежат отечественным математикам ([8]–[12]). Случай дифференциальных и интегродифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями изучался в [13], [14].

Поступила 03.10.2007

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 06-01-00003).

Нам удобно заменой отрезков $[\gamma_{j-1},\gamma_j]$ на $[0,1]$ привести очевидным образом (1)–(2) к следующему оператору в пространстве вектор-функций размерности 3:

$$Ly=l[y]=\begin{pmatrix}\alpha_1y_1'(x)+\beta_1y_1'(1-x)+p_{11}(x)y_1(x)+p_{12}(x)y_1(1-x)\\ \alpha_2y_2'(x)+\beta_2y_2'(1-x)+p_{21}(x)y_2(x)+p_{22}(x)y_2(1-x)\\ y_3'(x)+p(x)y_3(x)\end{pmatrix},\tag{3}$$

$$y_1(0)=y_3(1),\quad y_2(1)=y_3(0),\tag{4}$$

$$\int_0^1 y_1(t)\,d\sigma_1(t)+\int_0^1 y_2(t)\,d\sigma_2(t)+\int_0^1 y_3(t)\,d\sigma_3(t)=0.\tag{5}$$

Здесь $y(x)=(y_1(x),y_2(x),y_3(x))^\top$ ($\top$ — знак транспонирования), α_j, β_j, $p_{ij}(x)$ имеют новый смысл. На одном из участков $[\gamma_{j-1},\gamma_j]$ взяли чистый дифференциальный оператор первого порядка (для определенности на $[\gamma_2,\gamma_3]$). Предполагаем, что в (3) $\alpha_j^2\ne\beta_j^2$, $\beta_j\ne 0$, $p(x)$ и $p_{ij}(x)\in C^1[0,1]$ $(i,j=1,2)$, $\sigma_j(x)$ $(j=1,2,3)$ — функции ограниченной вариации, имеющие скачки в точках 0 и 1.

1. Пусть $y=R_\lambda f$, где $R_\lambda=(L-\lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора L (λ — спектральный параметр, E — единичный оператор), $f(x)=(f_1(x),f_2(x),f_3(x))^\top$. Тогда y удовлетворяет системе

$$\begin{gathered}\alpha_1y_1'(x)+\beta_1y_1'(1-x)+p_{11}(x)y_1(x)+p_{12}(x)y_1(1-x)=\lambda y_1(x)+f_1(x),\\ \alpha_2y_2'(x)+\beta_2y_2'(1-x)+p_{21}(x)y_2(x)+p_{22}(x)y_2(1-x)=\lambda y_2(x)+f_2(x),\\ y_3'(x)+p(x)y_3(x)=\lambda y_3(x)+f_3(x)\end{gathered}$$

и условиям (4)–(5).

Рассмотрим краевую задачу

$$Qz'(x)+\widetilde{P}(x)z(x)=\lambda z(x)+m(x),\tag{6}$$

$$M_0z(0)+M_1z(1)=0,\tag{7}$$

$$\int_0^1 z_1(t)\,d\sigma_1(t)+\int_0^1 z_3(t)\,d\sigma_2(t)+\int_0^1 z_5(t)\,d\sigma_3(t)=0,\tag{8}$$

где $z=(z_1,\dots,z_5)^\top$, $Q=\operatorname{diag}(Q_1,Q_2,Q_3)$, $Q_k=\begin{pmatrix}\alpha_k&-\beta_k\\ \beta_k&-\alpha_k\end{pmatrix}$ $(k=1,2)$, $Q_3=(1)$, $P_k(x)=\begin{pmatrix}p_{k1}(x)&p_{k2}(x)\\ p_{k2}(1-x)&p_{k1}(1-x)\end{pmatrix}$ $(k=1,2)$, $P_3=(p(x))$, $m(x)=(m_1(x),\dots,m_5(x))^\top$, $m_1(x)=f_1(x)$, $m_2(x)=f_1(1-x)$, $m_3(x)=f_2(x)$, $m_4(x)=f_2(1-x)$, $m_5(x)=f_3(x)$, M_k $(k=0,1)$ — матрица размерности 4×5 с элементами $m_{ij}^{(k)}$, $m_{11}^{(0)}=m_{34}^{(0)}=m_{44}^{(0)}=m_{22}^{(1)}=1$, $m_{35}^{(0)}=m_{15}^{(1)}=m_{25}^{(1)}=m_{43}^{(1)}=-1$, $m_{ij}^{(k)}=0$ при остальных i, j и $k=0$, 1.

Нетрудно получается

Лемма 1. *Если λ таково, что R_λ существует и $y=R_\lambda f$, то $z(x)=(z_1(x),\dots,z_5(x))^\top$, где $z_1(x)=y_1(x)$, $z_2(x)=y_1(1-x)$, $z_3(x)=y_2(x)$, $z_4(x)=y_2(1-x)$, $z_5(x)=y_3(x)$, является решением* (6)–(8).

Обратно, если $z(x)$ удовлетворяет системе (6)–(8) *и соответствующая однородная задача имеет только тривиальное решение, то R_λ существует и $R_\lambda f(x)=(y_1(x),y_2(x),y_3(x))^\top$, где $y_1(x)=z_1(x)$, $y_2(x)=z_3(x)$, $y_3(x)=z_5(x)$.*

Рассмотрим также краевую задачу

$$u'+\widetilde{P}(x)u-\lambda Du=\widetilde{m}(x),\tag{9}$$

$$\widetilde{M}_0u(0)+\widetilde{M}_1u(1)=0,\tag{10}$$

$$\int_0^1 (u_1(t) + b_1 u_2(t))\, d\sigma_1(t) + \int_0^1 (u_3(t) + b_2 u_4(t))\, d\sigma_2(t) + \int_0^1 u_5(t)\, d\sigma_3(t) = 0, \qquad (11)$$

где $u = (u_1, \ldots, u_5)^\top$, $\widetilde{P}(x) = \mathrm{diag}(B_1^{-1}Q_1^{-1}P_1(x)B_1, B_2^{-1}Q_2^{-1}P_2(x)B_2, B_3^{-1}Q_3^{-1}P_3(x)B_3)$, $D = \mathrm{diag}(D_1, D_2, D_3)$, $D_k = \mathrm{diag}(i\sqrt{d_k}, -i\sqrt{d_k})$ $(k = 1, 2)$, $D_3 = (1)$, $d_k = \beta_k^2 - \alpha_k^2$ $(k = 1, 2)$, $\widetilde{m}(x) = \mathrm{diag}(B_1^{-1}Q_1^{-1}, B_2^{-1}Q_2^{-1}, B_3^{-1}Q_3^{-1})m(x)$, $\widetilde{M}_0 = M_0 B$, $\widetilde{M}_1 = M_1 B$, $B = \mathrm{diag}(B_1, B_2, B_3)$, $B_k = \begin{pmatrix} 1 & b_k \\ b_k & 1 \end{pmatrix}$ $(k = 1, 2)$, $b_k = \beta_k^{-1}(i\sqrt{d_k} + \alpha_k)$ $(k = 1, 2)$, $B_3 = (1)$.

Легко убедиться в справедливости следующего утверждения.

Лемма 2. *Если $u(x, \lambda)$ — решение задачи* (9)–(11)*, то $z(x) = Bu(x, \lambda)$ — решение задачи* (6)–(8).

2. При исследовании асимптотического поведения решения задачи (9)–(11) возникают трудности, связанные с наличием ненулевой матрицы $\widetilde{P}(x)$. Поэтому далее приводится ее преобразование, заменяющее $\widetilde{P}(x)$ на матрицу с элементами $O(\lambda^{-1})$ ([15], с. 48–58; [16]).

Пусть $H_0(x) = (H_{01}(x), H_{02}(x), H_{03}(x))$, где $H_{01}(x) = \mathrm{diag}(h_1(x), h_2(x))$, $H_{02}(x) = \mathrm{diag}(h_3(x), h_4(x))$, $H_{03}(x) = (h_5(x))$, $h_i(x) = \exp\Big(-\int\limits_0^x \widetilde{p}_{ii}(t)\, dt\Big)$, $\widetilde{p}_{ii}(x)$ — диагональные элементы матрицы $\widetilde{P}(x)$; $H_1(x) = \mathrm{diag}(H_{11}(x), H_{12}(x), H_{13}(x))$, где $(H_{13}(x)) = 0$, $H_{1k}(x)$ $(k = 1, 2)$ — кодиагональная матрица, являющаяся единственным решением матричного уравнения $H'_{0k}(x) + \widetilde{P}_k(x)H_{0k}(x) + (H_{1k}(x)D_k - D_k H_{1k}(x)) = 0$, где $\widetilde{P}_k(x) = B_k^{-1}Q_k^{-1}P_k(x)B_k$.

Так как элементы матрицы $P(x)$ и, следовательно, $\widetilde{P}(x)$ из $C^1[0,1]$, то элементы $H_1(x)$ из $C^1[0,1]$, а $H_0(x)$ из $C^2[0,1]$.

Теорема 1. *При больших $|\lambda|$ неособое преобразование $u = H(x,\lambda)v$, где $H(x, \lambda) = H_0(x) + \lambda^{-1}H_1(x)$, приводит систему* (9)–(11) *к виду*

$$v' + P_\lambda(x)v - \lambda D v = m(x, \lambda), \qquad (12)$$

$$U_1(v) = U_1(H(x,\lambda)v) = M_{0\lambda}v(0) + M_{1\lambda}v(1) = 0, \qquad (13)$$

$$\begin{aligned} U_2(v) = U_2(H(x,\lambda)v) = \\ &= \int_0^1 [(h_1(t) + \lambda^{-1}b_1\widetilde{r}_2(t))v_1(t) + (b_1h_2(t) + \lambda^{-1}\widetilde{r}_1(t))v_2(t)]\, d\sigma_1(t) + \\ &+ \int_0^1 [(h_3(t) + \lambda^{-1}b_2\widetilde{r}_4(t))v_3(t) + (b_2h_4(t) + \lambda^{-1}\widetilde{r}_3(t))v_4(t)]\, d\sigma_2(t) + \\ &+ \int_0^1 h_5(t)v_5(t)\, d\sigma_3(t) = 0, \end{aligned} \qquad (14)$$

где $P_\lambda(x) = \lambda^{-1}H^{-1}(x,\lambda)(H_1'(x) + \widetilde{P}(x)H_1(x))$, $m(x,\lambda) = H^{-1}(x,\lambda)\widetilde{m}(x)$, $M_{0\lambda} = \widetilde{M}_0 H(0,\lambda)$, $M_{1\lambda} = \widetilde{M}_1 H(1,\lambda)$, $\widetilde{r}_k(t)$ $(k = 1, 2)$ — элементы матрицы $H_{11}(t)$, $\widetilde{r}_k(t)$ $(k = 3, 4)$ — элементы матрицы $H_{12}(t)$.

Доказательство. Утверждение теоремы получается простой проверкой. Действительно, так как система (9) имеет блочно-диагональный вид, ее можно рассматривать как три системы вида

$$u' + \widetilde{P}_k(x)u - \lambda D u = \widetilde{m}(x) \quad (k = 1, 2, 3), \qquad (15)$$

где $\widetilde{P}_k(x) = B_k^{-1}Q_k^{-1}P_k(x)B_k$, $\widetilde{m}(x) = B_k^{-1}Q_k^{-1}m(x)$, а $u(x)$ и $\widetilde{m}(x)$ — векторы из двух компонент для $k = 1, 2$ и одной компоненты для $k = 3$ (здесь они имеют новый смысл, отличный от (6) и (9)). Выполняя в каждой системе (15) преобразование $u = H_k(x,\lambda)v$ (v — скалярная функция для $k = 3$ и $v = (v_1, v_2)^\top$ для $k = 1, 2$), где $H_k(x,\lambda) = H_{0k}(x) + \lambda^{-1}H_{1k}(x)$, получаем систему уравнений, которая с помощью указанных выше блочно-диагональных матриц приводится к (12). Краевые условия (13)–(14) следуют из (10)–(11). □

Лемма 3. *Если* $v(x,\lambda) = (v_1(x,\lambda),\ldots,v_5(x,\lambda))^\top$ *является решением* (12)–(14), *то*

$$R_\lambda f = ((h_1(x) + \lambda^{-1}b_1\widetilde{r}_2(x))v_1(x,\lambda) + (b_1h_2(x) + \lambda^{-1}\widetilde{r}_1(x))v_2(x,\lambda), (h_3(x)+ \\ + \lambda^{-1}b_2\widetilde{r}_4(x))v_3(x,\lambda) + (b_2h_4(x) + \lambda^{-1}\widetilde{r}_3(x))v_4(x,\lambda), h_5(x)v_5(x,\lambda))^\top. \quad (16)$$

Доказательство следует из лемм 1, 2 и теоремы 1.

3. Рассмотрим еще такую краевую задачу

$$w' - \mu\widehat{D}w = m(x), \quad (17)$$

$$U_1(w) = M_{0\lambda}w(0) + M_{1\lambda}w(1) = 0, \quad (18)$$

$$U_2(w) = \int_0^1 [t_1(t,\mu)w_1(t) + t_2(t,\mu)w_2(t)]\,d\sigma_1(t)+ \\ + \int_0^1 [t_3(t,\mu)w_3(t) + t_4(t,\mu)w_4(t)]\,d\sigma_2(t) + \int_0^1 t_5(t,\mu)w_5(t)\,d\sigma_3(t) = 0, \quad (19)$$

где $m = (m_1,\ldots,m_5)^\top$, $m_i = m_i(x) \in C[0,1]$, $\mu = i\lambda/\sqrt{d_1}$, $\widehat{D} = \operatorname{diag}(1,-1,d,-d,\omega)$, $d = \sqrt{d_1/d_2}$, $\omega = \sqrt{d_1}/i$, т.е. $\lambda D = \mu\widehat{D}$, $t_1(t,\mu) = h_1(t) + \mu^{-1}b_1r_2(t)$, $t_2(t,\mu) = b_1h_2(t) + \mu^{-1}r_1(t)$, $t_3(t,\mu) = h_3(t) + \mu^{-1}b_2r_4(t)$, $t_4(t,\mu) = b_2h_4(t) + \mu^{-1}r_3(t)$, $t_5(t,\mu) = h_5(t)$, $r_k(t) = i\widetilde{r}_k(t)/d$ ($k = 1,2,3,4$). Предполагаем далее, что $d_1 > 0$, $d_2 > 0$.

Общее решение системы (17) имеет вид

$$w(x,\mu) = \int_0^1 g(x,t,\mu)m(t)\,dt + V(x,\mu)c, \quad (20)$$

где $V(x,\mu) = \operatorname{diag}(e^{\mu(x-1)}, e^{-\mu x}, e^{\mu d(x-1)}, e^{-\mu dx}, e^{\mu\omega(x-1)})$; $c = (c_1,\ldots,c_5)^\top$ — произвольный вектор; $g(x,t,\mu) = \operatorname{diag}(g_1(x,t,\mu),...,g_5(x,t,\mu))$; $g_k(x,t,\mu) = \varepsilon(x,t)e^{\mu\omega_k(x-t)}$, если $\operatorname{Re}\mu\omega_k \le 0$; $g_k(x,t,\mu) = -\varepsilon(t,x)e^{\mu\omega_k(x-t)}$, если $\operatorname{Re}\mu\omega_k \ge 0$; $\varepsilon(x,t) = 1$, если $x \ge t$; $\varepsilon(x,t) = 0$, если $x < t$; $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = -1$, $\omega_3 = d$, $\omega_4 = -d$, $\omega_5 = \omega$.

Обозначим через M_μ вектор-строку, определяемую соотношением $U_2(H(x,\lambda)V(x,\mu)c) = M_\mu c$, тогда

$$M_\mu = \Bigg(\int_0^1 t_1(t,\mu)e^{\mu(t-1)}\,d\sigma_1(t), \int_0^1 t_2(t,\mu)e^{-\mu t}\,d\sigma_1(t), \int_0^1 t_3(t,\mu)e^{\mu d(t-1)}\,d\sigma_2(t), \\ \int_0^1 t_4(t,\mu)e^{-\mu dt}\,d\sigma_2(t), \int_0^1 t_5(t,\mu)e^{\mu\omega(t-1)}\,d\sigma_3(t)\Bigg).$$

Подставив (20) в (18)–(19), получим следующий результат.

Лемма 4. *Если* μ *таково, что матрица*

$$\Delta(\mu) = (U_1^\top(V(x,\mu)), M_\mu^\top)^\top = (U_1^\top(H(x,\lambda)V(x,\mu)), M_\mu^\top)^\top$$

обратима, то краевая задача (17)–(19) *однозначно разрешима и для ее решения* $w(x) = W_\mu m(x)$ *справедлива формула*

$$W_\mu m(x) = \int_0^1 g(x,t,\mu)m(t)\,dt - V(x,\mu)\Delta^{-1}(\mu)\Phi(m,\mu),$$

где

$$\Phi(m,\mu)=\left(U_1^\top\left(\int_0^1 g(x,t,\mu)m(t)\,dt\right),U_2^\top\left(\int_0^1 g(x,t,\mu)m(t)\,dt\right)\right)^\top. \qquad (21)$$

Лемма 5. *Имеет место представление*

$$\Phi(m,\mu)=(R_1(\mu),\dots,R_5(\mu))^\top, \qquad (22)$$

где $R_i(\mu)$ $(i=1,2,3,4)$ *является линейной комбинацией с ограниченными по* μ *(при* $|\mu|$ *достаточно больших) коэффициентами интегралов*

$$\int_0^1 n(t)e^{-\mu t}\,dt,\quad \int_0^1 n(t)e^{-\mu dt}\,dt,\quad \int_0^1 n(t)e^{-\mu\omega t}\,dt, \qquad (23)$$

а $R_5(\mu)$ *— линейной комбинацией интегралов*

$$\int_0^1 \varphi_i(t)e^{-\mu t}\,dt,\quad \int_0^1 \varphi_i(t)e^{-\mu dt}\,dt,\quad \int_0^1 \varphi_i(t)e^{-\mu\omega t}\,dt\quad (i=1,\dots,5), \qquad (24)$$

где $n(t)$ *— одна из функций* $m_i(t)$, $m_i(1-t)$ $(i=1,\dots,5)$; $\varphi_1(t)=\int\limits_0^{1-t} m_1(\tau+t)\psi(\tau)\,d\sigma_1(\tau)$, $\varphi_2(t)=\int\limits_t^1 m_2(\tau-t)\psi(\tau)\,d\sigma_1(\tau)$, $\varphi_3(t)=\int\limits_0^{1-t} m_3(\tau+t)\psi(\tau)\,d\sigma_2(\tau)$, $\varphi_4(t)=\int\limits_t^1 m_4(\tau-t)\psi(\tau)\,d\sigma_2(\tau)$, $\varphi_5(t)=\int\limits_0^{1-t} m_5(\tau+t)\psi(\tau)\,d\sigma_3(\tau)$, $\psi(\tau)$ *совпадает с одной из функций* $h_1(\tau)$, $b_1h_2(\tau)$, $h_3(\tau)$, $b_2h_4(\tau)$, $h_5(\tau)$, $r_1(\tau)$, $b_1r_2(\tau)$, $r_3(\tau)$, $b_2r_4(\tau)$.

Доказательство. Имеем $\int\limits_0^1 g(x,t,\mu)m(t)\,dt=(F_1(x,\mu),\dots,F_5(x,\mu))^\top$, где $F_1(x,\mu)=-\int\limits_x^1 e^{\mu(x-t)}m_1(t)\,dt$, $F_2(x,\mu)=\int\limits_0^x e^{-\mu(x-t)}m_2(t)\,dt$, $F_3(x,\mu)=-\int\limits_x^1 e^{\mu d(x-t)}m_3(t)\,dt$, $F_4(x,\mu)=\int\limits_0^x e^{-\mu d(x-t)}m_4(t)\,dt$, $F_5(x,\mu)=-\int\limits_x^1 e^{\mu\omega(x-t)}m_5(t)\,dt$.

Выполним в $F_i(x,\mu)$ $(i=1,\dots,5)$ замены переменных так, чтобы в $F_i(x,\mu)$ $(i=1,2)$ экспонента была равна $e^{-\mu t}$, в $F_i(x,\mu)$ $(i=3,4)$ равна $e^{-\mu dt}$, в $F_5(x,\mu)$ равна $e^{-\mu\omega t}$. Подставив эти выражения в (21) и проведя надлежащие перестановки порядков интегрирования, получим (22). □

Непосредственным вычислением получается

Лемма 6. *Имеет место формула*

$$\Delta(\mu)=\begin{pmatrix} e^{-\mu}(1+\mu^{-1}b_1r_2(0)) & b_1+\mu^{-1}r_1(0) & & \\ b_1h_1(1)+\mu^{-1}r_2(1) & e^{-\mu}(h_2(1)+\mu^{-1}b_1r_1(1)) & & \\ 0 & 0 & A & B \\ 0 & 0 & & \\ \int\limits_0^1(h_1(t)+\mu^{-1}b_1r_2(t))e^{\mu(t-1)}\,d\sigma_1(t) & \int\limits_0^1(b_1h_2(t)+\mu^{-1}r_1(t))e^{-\mu t}\,d\sigma_1(t) & & \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-\mu d}(b_2 + \mu^{-1} r_4(0)) \\ e^{-\mu d}(b_2 + \mu^{-1} r_4(0)) - h_3(1) + \mu^{-1} b_2 r_4(1) \\ \int\limits_0^1 (h_3(t) + \mu^{-1} b_2 r_4(t)) e^{\mu d(t-1)}\, d\sigma_2(t) \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -h_5(1) \\ 0 & -h_5(1) \\ 1 & -e^{-\mu\omega} \\ 1 + \mu^{-1} b_2 r_3(0) + e^{-\mu d}(-b_2 h_4(1) - \mu^{-1} r_3(0)) & 0 \\ \int_0^1 (b_2 h_4(t) + \mu^{-1} r_3(t)) e^{-\mu dt}\, d\sigma_2(t) & \int_0^1 h_5(t) e^{\mu\omega(t-1)}\, d\sigma_3(t) \end{pmatrix}.$$

4. Очевидной является

Лемма 7. *Если $f(x) \in C[0,1]$, $\nu(x)$ — функция ограниченной вариации и $\nu(+0) = \nu(0)$, то* $\lim\limits_{\operatorname{Re}\mu \to +\infty} \int_0^1 f(x) e^{-\mu x}\, d\nu(x) = 0.$

Пусть в дальнейшем выполняется условие

$$b_1 b_2 (\alpha_{10} + b_1\alpha_{11} + \alpha_{31})(\alpha_{20} + b_2\alpha_{21} + b_2\alpha_{30})(b_1\alpha_{10} + \alpha_{11} + b_2\alpha_{31})(b_2\alpha_{20} + \alpha_{21} + \alpha_{30}) \neq 0, \quad (25)$$

где $\alpha_{i0} = \sigma_i(+0) - \sigma_i(0)$, $\alpha_{i1} = \sigma_i(1) - \sigma_i(1-0)$ $(i = 1, 2, 3)$.

Обозначим $\varphi(\mu) = \det \Delta_1(\mu)$, где $\Delta_1(\mu) = (U_{10}^{\top}(V(x,\mu)), M_{\mu 0}^{\top})^{\top}$, $U_{10}(V(x,\mu)) = U_1(H_0(x) v(x,\mu))$, $M_{\mu 0}$ — вектор-строка, определяемая соотношением $U_2(H_0(x) V(x,\mu) c) = M_{\mu 0} c$. Тогда $U_{10}(V(x,\mu)) = N_0 V(0,\mu) + N_1 V(1,\mu)$, $N_0 = \widetilde{M_0} H_0(0)$, $N_1 = \widetilde{M_1} H_0(1)$, $M_{\mu 0} = \Big(\int\limits_0^1 h_1(t) e^{\mu(t-1)}\, d\sigma_1(t), \int\limits_0^1 b_1 h_2(t) e^{-\mu t}\, d\sigma_1(t), \int\limits_0^1 h_3(t) e^{\mu d(t-1)}\, d\sigma_2(t), \int\limits_0^1 b_2 h_4(t) e^{-\mu dt}\, d\sigma_2(t),$ $\int\limits_0^1 e^{\mu\omega(t-1)} h_5(t)\, d\sigma_3(t)\Big)$.

Нетрудно видеть, что

$$\varphi(\mu) = \begin{vmatrix} e^{-\mu} & b_1 & 0 & \\ b_1 h_1(1) & e^{-\mu} h_2(1) & 0 & \\ 0 & 0 & e^{-\mu d} b_2 & \widetilde{C} \\ 0 & 0 & e^{-\mu d} b_2 - h_3(1) & \\ \int\limits_0^1 h_1(t) e^{\mu(t-1)}\, d\sigma_1(t) & \int\limits_0^1 b_1 h_2(t) e^{-\mu t}\, d\sigma_1(t) & \int\limits_0^1 h_3(t) e^{\mu d(t-1)}\, d\sigma_2(t) & \end{vmatrix},$$

$$\widetilde{C} = \begin{pmatrix} 0 & -h_5(1) \\ 0 & -h_5(1) \\ 1 & -e^{-\mu\omega} \\ -e^{-\mu d} b_2 h_4(1) + 1 & 0 \\ \int\limits_0^1 b_2 h_4(t) e^{-\mu dt}\, d\sigma_2(t) & \int\limits_0^1 h_5(t) e^{\mu\omega(t-1)}\, d\sigma_3(t) \end{pmatrix}. \quad (26)$$

Далее рассматриваем область $S = \{\mu \mid \operatorname{Re}\mu \geq 0,\ \operatorname{Re}\mu\omega \geq 0\}$ (остальные случаи рассматриваются аналогично). Через S_δ обозначим область, получающуюся из S удалением всех нулей $\varphi(\mu)$ вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса δ.

Лемма 8. *Нули функции $\varphi(\mu)$ находятся в двух полуполосах*: $0 \leq \operatorname{Re}\mu \leq h$, $\operatorname{Im}\mu \geq 0$ *и* $0 \leq \operatorname{Im}\mu \leq h$, $\operatorname{Re}\mu \geq 0$, *причем в любом прямоугольнике* $|\operatorname{Im}\mu - t| \leq 1$ *первой полуполосы* *и любом прямоугольнике* $|\operatorname{Re}\mu - t| \le 1$ *второй полуполосы число этих нулей ограничено при всех вещественных* $t \ge 1$. *В* S_δ *справедлива оценка*

$$|\varphi(\mu)| \ge C,$$

где $C > 0$ *и не зависит от* μ.

Доказательство. По лемме 7 и из (26) имеем

$$\varphi(\mu) = d_1(\mu) + d_2(\mu), \tag{27}$$

где

$$d_1(\mu) = \begin{vmatrix} e^{-\mu} & b_1 & \\ b_1 h_1(1) & e^{-\mu} h_2(1) & \\ 0 & 0 & D \\ 0 & 0 & \\ \alpha_{10} h_1(0) e^{-\mu} + \alpha_{11} h_1(1) & \alpha_{10} b_1 h_2(0) + \alpha_{11} b_1 h_2(1) e^{-\mu} & \end{vmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -h_5(1) \\ 0 & 0 & -h_5(1) \\ e^{-\mu d} b_2 & 1 & -e^{-\mu\omega} \\ e^{-\mu d} b_2 - h_3(1) & -e^{-\mu d} b_2 h_4(1) + 1 & 0 \\ \alpha_{20} h_3(0) e^{-\mu d} + \alpha_{21} h_3(1) & \alpha_{20} b_2 h_4(0) + \alpha_{21} b_2 h_4(1) e^{-\mu d} & \alpha_{30} h_5(0) e^{-\mu\omega} + \alpha_{31} h_5(1) \end{pmatrix},$$

а $|d_2(\mu)| < \varepsilon$ для μ из области $\{\operatorname{Re}\mu \ge h_1,\ \operatorname{Im}\mu \ge h_1\}$ с некоторым $h_1 > 0$ при произвольном $\varepsilon > 0$.

Далее имеем

$$d_1(\mu) = A_1 + A_2 e^{-\mu\omega} + A_3 e^{-2\mu - 2\mu d - \mu\omega} + A_4 e^{-2\mu d - 2\mu} + \sum_{k \ge 5} A_k e^{a_k \mu + b_k \mu d + c_k \mu\omega},$$

где $A_1 = -b_1 h_1(1) h_3(1) h_5(1)(\alpha_{10} b_2 + \alpha_{11} + b_2 \alpha_{31})$, $A_2 = -b_1 b_2 h_1(1) h_3(1)(\alpha_{20} b_2 + \alpha_{21} + \alpha_{30})$, $A_3 = b_2 h_2(1) h_4(1)(\alpha_{20} + \alpha_{21} b_2 + \alpha_{30} b_2)$, $A_4 = b_2^2 h_1(1) h_4(1) h_5(1)(\alpha_{10} + \alpha_{11} b_1 + \alpha_{31})$, а остальные A_k — постоянные, $a_k \mu + b_k \mu d + c_k \mu\omega$ — различные комбинации, отличные от показателей экспонент первых четырех слагаемых, числа a_k, b_k, c_k равны 0, -1 или -2. В силу условий регулярности (25) нули $d_1(\mu)$ находятся в двух полуполосах: $0 \le \operatorname{Re}\mu \le h_2$, $\operatorname{Im}\mu \ge 0$; $0 \le \operatorname{Im}\mu \le h_2$, $\operatorname{Re}\mu \ge 0$. Вне δ-окрестностей этих нулей имеет место очевидная оценка

$$|d_1(\mu)| \ge C. \tag{28}$$

Поэтому из (27) и (28) получаем, что существуют $0 < h_3 < h_4$ такие, что $\varphi(\mu)$ ограничена в обеих полуполосах ширины h_4, все нули ее лежат в полуполосах ширины h_3 и на полупрямых $\operatorname{Re}\mu = h_3$, $\operatorname{Im}\mu \ge 0$; $\operatorname{Im}\mu = h_3$, $\operatorname{Re}\mu \ge 0$ ее модуль отделен от нуля. Поэтому ([17], с. 27, § 2.3) из (27) и (28) получаем утверждение леммы. □

Лемма 9. *Для всех достаточно больших* μ *в области* S_δ *имеет место оценка*

$$|\det \Delta(\mu)| \ge C,$$

где $C > 0$ *и не зависит от* μ.

Доказательство. Имеем $\Delta(\mu) = \Delta_1(\mu) + \Delta_2(\mu)$, где $\Delta_2(\mu)$ — матрица, у которой все элементы равны $O(\mu^{-1})$. Утверждение леммы теперь легко следует из леммы 8. □

В дальнейшем считаем выполненным условие (25). Обозначим через Π полуполосу из леммы 8, расположенную вдоль мнимой оси, и пусть $\Pi(\delta) = S_\delta \cap \Pi$.

Лемма 10. *Если* $\mu \in \Pi(\delta)$ *и* $|\mu|$ *достаточно велико, то существует единственное решение* $W_\mu m(x)$ *задачи* (17)–(19), *для компонент которого имеют место представления*:

$$(W_\mu m)_1 = -\int_x^1 e^{\mu(x-t)} m_1(t)\,dt + W_1(m,\mu)e^{\mu(x-1)}, \tag{29}$$

$$(W_\mu m)_2 = \int_0^x e^{-\mu(x-t)} m_2(t)\,dt + W_2(m,\mu)e^{-\mu x}, \tag{30}$$

$$(W_\mu m)_3 = -\int_x^1 e^{\mu d(x-t)} m_3(t)\,dt + W_3(m,\mu)e^{\mu d(x-1)}, \tag{31}$$

$$(W_\mu m)_4 = \int_0^x e^{-\mu d(x-t)} m_4(t)\,dt + W_4(m,\mu)e^{-\mu dx}, \tag{32}$$

$$(W_\mu m)_5 = -\int_x^1 e^{\mu\omega(x-t)} m_5(t)\,dt + W_5(m,\mu)e^{\mu\omega(x-1)}, \tag{33}$$

где $W_i(m,\mu)$ $(i=1,2,3,4)$ *— линейные комбинации интегралов* (23), *а* $W_5(m,\mu)$ *— линейные комбинации интегралов* (24) *с ограниченными по* μ *коэффициентами.*

Утверждение леммы следует из лемм 4 и 5, если учесть, что в силу леммы 9 элементы матрицы $\Delta(\mu)$ ограничены по μ.

Пусть $\varphi(t,f)$ — одна из функций $\varphi_i(t)$ из леммы 5, когда $m_i(x)$ $(i=1,\ldots,5)$ заменены на произвольную функцию $f(x)\in C[0,1]$.

Лемма 11. *Если* $f(x)\in C[0,1]$, *то справедлива оценка*

$$\|\varphi(t,f)\| \le C\|f\|, \tag{34}$$

где $C>0$ *и не зависит от* $f(x)$, $\|\cdot\|$ *— норма в* $L_2[0,1]$.

Доказательство. Пусть для определенности $\varphi(t,f)=\int\limits_0^{1-t} f(t+\tau)\psi(\tau)\,d\sigma(\tau)$ и $\sigma(\tau)$ не убывает. Тогда

$$\|\varphi(t,f)\|^2 \le \int_0^1 |\psi(\tau)|\,d\sigma(\tau)\int_0^{1-\tau} |\varphi(t,f)||f(t+\tau)|\,dt. \tag{35}$$

Внутренний интеграл по теореме Коши–Буняковского оценивается сверху величиной $\|\varphi(t,f)\|\,\|f\|$. Поэтому из (35) получаем

$$\|\varphi(t,f)\|^2 \le \|\varphi(t,f)\|\,\|f\|\int_0^1 |\psi(\tau)|\,d\sigma(\tau). \tag{36}$$

Так как $\|\varphi(t,f)\|<\infty$, то из (36) получаем (34). □

По лемме 11 $\varphi(t,f)$ как оператор по f продолжается по непрерывности на все $L_2[0,1]$. Это продолжение также обозначим через $\varphi(t,f)$. Тем самым можем рассмотреть задачу (17)–(19), когда $m(x)\in L_2^5[0,1]$.

Лемма 12. *Если* $\mu\in\Pi(\delta)$ *и* $|\mu|$ *достаточно велико, то для краевой задачи* (17)–(19) *при* $m(x)\in L_2^5[0,1]$ *существует единственное решение* $W_\mu m(x)$ *и для его компонент имеют место формулы* (29)–(33), *в которых* $\varphi_i(t)$ *из леммы* 5 *заменяются на соответствующие операторы* $\varphi(t,f)$ *в* $L_2[0,1]$.

5. Считаем, что функции $f_i(x)$ $(i=1,2,3)$ в задаче (6)–(8) принадлежат $L_2[0,1]$. Тогда $m(x)\in L_2^5[0,1]$.

Лемма 13. *Если μ — то же, что и в лемме 12, то существует единственное решение задачи* (12)–(14), *причем*

$$v(x,\lambda) = W_\mu q_1(x) + \frac{1}{\lambda} W_\mu q_2(x) - \frac{1}{\lambda} W_\mu M_\lambda q_1(x) + O\biggl(\frac{\|f\|}{\lambda^2}\biggr), \tag{37}$$

где $q_1(x) = H^{-1}(x)m(x)$, $q_2(x) = -H_0^{-1}(x)H_1(x)H_0^{-1}(x)m(x)$, $M_\lambda = H_2(x)(E+M_{1\lambda})^{-1}W_\mu$, $H_2(x) = H_0^{-1}(x)[H_1'(x) + P(x)H_1(x)]$, $M_{1\lambda}m(x) = W_\mu(P_\lambda(x)m(x))$, $f = (f_1, f_2, f_3)^\top$, $\|\cdot\|$ — *норма в* $L_2^3[0,1]$.

Доказательство. Имеем из (12)

$$v(x,\lambda) = W_\mu(m(x,\lambda) - P_\lambda(x)v(x,\lambda)). \tag{38}$$

Так как $P(\lambda) = O(\lambda^{-1})$, то оператор $E + M_{1,\lambda}$ ограниченно обратим. Поэтому из (38) получаем

$$\begin{gathered} v(x,\lambda) = (E+M_{1,\lambda})^{-1}W_\mu(m(x,\lambda) = W_\mu m(x,\lambda) - \\ - M_{1,\lambda}(E+M_{1,\lambda})^{-1}W_\mu m(x,\lambda) = W_\mu m(x,\lambda) - W_\mu P_\lambda(E+M_{1,\lambda})^{-1}W_\mu m(x,\lambda). \end{gathered} \tag{39}$$

Но $m(x,\lambda) = q_1(x) + \frac{1}{\lambda}q_2(x) + O\bigl(\frac{\|f\|}{\lambda^2}\bigr)$, $P_\lambda(x) = \frac{H_2(x)}{\lambda} + O\bigl(\frac{1}{\lambda^2}\bigr)$. Поскольку W_μ ограничен по μ, из (39) получаем (37). □

Лемма 14. *Существуют непрерывные функции $\gamma_{ij}(x)$, $\delta_{ij}(x)$ ($i = 1,\dots,5$; $j = 1,2$) такие, что для $q_1(x)$ и $q_2(x)$ из леммы* 13 *имеют место соотношения*:

$$\begin{aligned}
(W_\mu q_j)_1 &= -\int_x^1 e^{\mu(x-t)}\gamma_{1j}(t)f_1(t)\,dt - \int_0^{1-x} e^{\mu(x+t-1)}\delta_{1j}(t)f_1(t)\,dt + W_{1j}(\mu)e^{\mu(x-1)}, \\
(W_\mu q_j)_2 &= \int_0^x e^{-\mu(x-t)}\gamma_{2j}(t)f_1(t)\,dt + \int_{1-x}^1 e^{-\mu(x+t-1)}\delta_{2j}(t)f_1(t)\,dt + W_{2j}(\mu)e^{-\mu x}, \\
(W_\mu q_j)_3 &= -\int_x^1 e^{\mu d(x-t)}\gamma_{3j}(t)f_2(t)\,dt - \int_0^{1-x} e^{\mu d(x+t-1)}\delta_{3j}(t)f_2(t)\,dt + W_{3j}(\mu)e^{\mu d(x-1)}, \\
(W_\mu q_j)_4 &= \int_0^x e^{-\mu d(x-t)}\gamma_{4j}(t)f_2(t)\,dt + \int_{1-x}^1 e^{-\mu d(x+t-1)}\delta_{4j}(t)f_2(t)\,dt + W_{4j}(\mu)e^{-\mu dx}, \\
(W_\mu q_1)_5 &= -\int_x^1 e^{\mu\omega(x-t)}\gamma_{51}(t)f_3(t)\,dt + W_{51}(\mu)e^{\mu\omega(x-1)}, \quad (W_\mu q_2)_5 = W_{52}(\mu)e^{\mu\omega(x-1)},
\end{aligned} \tag{40}$$

где $W_{ij}(\mu) = W_{ij}(f,\mu)$ ($i = 1,\dots,4$) — *линейные комбинации с ограниченными по μ коэффициентами интегралов* $\int\limits_0^1 \theta(t)f_\nu(t)e^{-\mu t}\,dt$, $\int\limits_0^1 \theta(t)f_\nu(t)e^{-\mu(1-t)}\,dt$, $\int\limits_0^1 \theta(t)f_\nu(t)e^{-\mu dt}\,dt$, $\int\limits_0^1 \theta(t)f_\nu(t)e^{-\mu d(1-t)}\,dt$, $\int\limits_0^1 \theta(t)f_\nu(t)e^{-\mu\omega t}\,dt$, $\int\limits_0^1 \theta(t)f_\nu(t)e^{-\mu\omega(1-t)}\,dt$ ($\nu = 1,2,3$), *а* $W_{5j}(\mu) = W_{5j}(f,\mu)$ — *линейные комбинации интегралов* $\int\limits_0^1 \varphi(t)e^{-\mu t}\,dt$, $\int\limits_0^1 \varphi(t)e^{-\mu dt}\,dt$, $\int\limits_0^1 \varphi(t)e^{-\mu\omega t}\,dt$, *где $\varphi(t)$ являются продолжениями по лемме 11 следующих, рассматриваемых как операторы по $f_\nu(x)$, интегралов:*

$$\begin{gathered}\int_0^{1-t} f_\nu(\tau+t)\theta(\tau+t)\psi(\tau)\,d\sigma_l(\tau),\ \int_0^{1-t} f_\nu(1-\tau-t)\theta(1-\tau-t)\psi(\tau)\,d\sigma_l(\tau),\\ \int_t^1 f_\nu(\tau-t)\theta(\tau-t)\psi(\tau)\,d\sigma_l(\tau),\ \int_t^1 f_\nu(1-\tau+t)\theta(1-\tau+t)\psi(\tau)\,d\sigma_l(\tau)\\ (\nu,\,l=1,2,3),\end{gathered}\tag{41}$$

когда $\theta(x)$ являются произвольными функциями среди $\gamma_{ij}(x)$, $\delta_{ij}(x)$. Функции $\psi(\tau)$ — те же, что и в лемме 5.

Доказательство. По определению компоненты вектор-функций $q_j(x)$ $(j=1,2)$ можно представить в виде $(q_j(x))_i=\gamma_{ij}(x)f_\nu(x)+\delta_{ij}(1-x)f_\nu(1-x)$ $(\nu=1,2,3)$, где $\gamma_{ij}(x)$ и $\delta_{ij}(x)$ — непрерывные функции. Взяв в лемме 12 в качестве $m_i(x)=\gamma_{ij}(x)f_\nu(x)+\delta_{ij}(1-x)f_\nu(1-x)$, получим (40). □

Рассмотрим операторы

$$Q_\lambda f_\nu=\int_0^1 Q(x,t,\lambda)f_\nu(t)\,dt,$$

где $Q(x,t,\lambda)$ — одна из функций $\int\limits_x^1 e^{\mu(x-\tau)}\theta(t)M(\tau,t,\lambda)\,d\tau$, $\int\limits_0^x e^{-\mu(x-\tau)}\theta(t)M(\tau,t,\lambda)\,d\tau$, $\int\limits_x^1 e^{\mu d(x-\tau)}\theta(t)M(\tau,t,\lambda)\,d\tau$, $\int\limits_0^x e^{-\mu d(x-\tau)}\theta(t)M(\tau,t,\lambda)\,d\tau$, $\int\limits_x^1 e^{\mu\omega(x-\tau)}\theta(t)M(\tau,t,\lambda)\,d\tau$, $e^{\mu(x-1)}N(t,\lambda,\mu)$, $e^{-\mu x}N(t,\lambda,\mu)$, $e^{\mu d(x-1)}N(t,\lambda,\mu)$, $e^{-\mu dx}N(t,\lambda,\mu)$, $e^{\mu\omega(x-1)}N(t,\lambda,\mu)$. Здесь $M(x,t,\lambda)$ есть либо $M_{ij}(x,t,\lambda)$, либо $M_{ij}(1-x,t,\lambda)$, либо $M_{ij}(x,1-t,\lambda)$ при некоторых i,j. Функции $M_{ij}(x,t,\lambda)$ $(i,j=1,\dots,5)$ являются компонентами ядра интегрального оператора M_λ; $N(t,\lambda,\mu)$ — одна из функций $\int\limits_0^1 e^{r(\mu)\tau}M(\tau,t,\lambda)\theta(t)\,d\tau$,

$$\int_0^1 e^{r(\mu)\tau}\,d\tau\int_0^{1-\tau} M(s+\tau,t,\lambda)\psi(s)\theta(t)\,d\sigma_1(s),\quad \int_0^1 e^{r(\mu)\tau}\,d\tau\int_\tau^1 M(s-\tau,t,\lambda)\psi(s)\theta(t)\,d\sigma_1(s),$$

$\int\limits_0^1 e^{r(\mu)\tau}\,d\tau\int\limits_0^{1-\tau} M(s+\tau,t,\lambda)\psi(s)\theta(t)\,d\sigma_2(s)$, $\int\limits_0^1 e^{r(\mu)\tau}\,d\tau\int\limits_\tau^1 M(s-\tau,t,\lambda)\psi(s)\theta(t)\,d\sigma_2(s)$, $\int\limits_0^1 e^{r(\mu)\tau}\,d\tau\int\limits_0^{1-\tau} M(s+\tau,t,\lambda)\psi(s)\theta(t)\,d\sigma_3(s)$ и, наконец, $r(\mu)$ есть одна из функций

$$-\mu,\ -\mu d,\ -\mu\omega.$$

Лемма 15. *Каждая компонента вектор-функции $W_\mu M_\lambda q_1$ есть линейная комбинация всевозможных операторов $Q_\lambda f_\nu$ с ограниченными по μ коэффициентами.*

Доказательство. Каждая компонента вектор-функции $M_\lambda q_1(x)$ есть линейная комбинация интегралов $\int\limits_0^1 M(x,t,\lambda)\theta(t)f(t)\,dt$ при всевозможных $M(x,t,\lambda)$ и $\theta(t)$, и утверждение леммы следует из (29)–(33). □

Обозначим через $\sigma(x,\mu_1,k)$ одну из функций $e^{-(\mu_1+ik)x}$, $e^{(\mu_1+ik)(x-1)}$, $e^{-(\mu_1+ik)dx}$, $e^{(\mu_1+ik)d(x-1)}$, $e^{-(\mu_1+ik)\omega(x-1)}$; через $\omega(x,t,\mu_1,k)$ — одну из функций $\varepsilon(x,t)\theta(t)e^{-(\mu_1+ik)(x-t)}$, $\varepsilon(t,x)\theta(t)e^{(\mu_1+ik)(x-t)}$, $\varepsilon(1-x,t)\theta(t)e^{(\mu_1+ik)(x+t-1)}$, $\varepsilon(t,1-x)\theta(t)e^{-(\mu_1+ik)(x+t-1)}$,

$\varepsilon(x,t)\theta(t)e^{-(\mu_1+ik)d(x-t)}$, $\varepsilon(t,x)\theta(t)e^{(\mu_1+ik)d(x-t)}$, $\varepsilon(1-x,t)\theta(t)e^{(\mu_1+ik)d(x+t-1)}$, $\varepsilon(t,1-x)\theta(t)e^{-(\mu_1+ik)d(x+t-1)}$, $\varepsilon(t,x)\theta(t)e^{(\mu_1+ik)\omega(x-t)}$, где $\theta(t)$ — либо те же, что и в лемме 14, либо $\theta(t)\equiv 1$; $M(x,t,\mu_1,k)=M(x,t,\lambda)|_{\lambda=-i\sqrt{d_1}(\mu_1+ik)}$, $N(x,\mu_1,k)=N(t,\lambda,\mu)\Big|_{\substack{\lambda=-i\sqrt{d_1}(\mu_1+ik)\\ \mu=\mu_1+ik}}$.

Пусть $A_kf_\nu=\psi(x)\int\limits_0^1\sigma(x,\mu_1,k)\sigma(t,\mu_1,k)Af_\nu(t)\,dt$ $(\nu=1,2,3)$, где $Af_\nu(t)$ — один из операторов $\theta(t)f_\nu(t)$ или операторов (41); $B_kf_\nu=\psi(x)\int\limits_0^1\omega(x,t,\mu_1,k)f_\nu(t)\,dt$,

$M_kf_\nu=\int\limits_0^1 M(x,t,\mu_1,k)\theta(t)f_\nu(t)\,dt$, $N_kf_\nu=\psi(x)\sigma(x,\mu_1,k)\int_0^1 N(t,\mu_1,k)f_\nu(t)\,dt$.

Пусть $\mu\in\Pi(\delta)$, $\mu=\mu_1+ik$ и μ_1 принадлежит ограниченной области. Положим

$$R(\mu)=R_{-i\mu\sqrt{d_1}}.$$

Лемма 16. *Если $f_\nu(x)\in L_2[0,1]$ $(\nu=1,2,3)$, то при больших $|\mu|$ для каждой компоненты вектора $R(\mu)f$ справедливо представление*

$$(R(\mu)f)_i=\Omega(x,\mu_1,k;f)+O\left(\frac{\|f\|}{k^2}\right),\tag{42}$$

где $\Omega(x,\mu_1,k;f)$ есть конечная сумма с ограниченными по μ_1 и k коэффициентами всевозможных операторов A_kf_ν, $\frac{1}{k}A_kf_\nu$, B_kf_ν, $\frac{1}{k}B_kf_\nu$, $\frac{1}{k}B_kM_kf_\nu$, $\frac{1}{k}N_kf_\nu$, причем коэффициенты при B_kf_ν не зависят от μ_1 и k, $\|\cdot\|$ — норма в $L_2^3[0,1]$.

Доказательство. По лемме 14 из (40) следует, что каждая компонента вектор-функций $\psi(x)W_\mu q_j$ $(j=1,2)$ является линейной комбинацией операторов B_kf_ν с постоянными коэффициентами и операторов A_kf_ν с ограниченными по μ_1 и k коэффициентами. В силу леммы 15 каждая компонента вектора $\lambda^{-1}\psi(x)W_\mu M_\lambda q_1(x)$ является линейной комбинацией операторов $\frac{1}{k}B_kM_kf_\nu$ и $\frac{1}{k}N_kf_\nu$ с ограниченными по μ_1 и k коэффициентами. Отсюда, из формулы (16) и леммы 13 следует (42). □

6. Считаем, что вертикальные границы полуполосы Π находятся в $\Pi(\delta)$ (в противном случае вместо области S рассматривали бы область $\{\mu\mid \operatorname{Re}\mu\ge\gamma,\ \operatorname{Re}\mu\omega\ge\gamma\}$, где γ — достаточно большое по модулю отрицательное число). Представим полуполосу Π, как и в [18], в виде объединения конечного числа различных групп равных между собой прямоугольников, границы которых Γ_k $(k=1,2,\dots)$ (при возрастании k контуры удаляются от начала координат) состоят из отрезков, лежащих на прямых $\operatorname{Re}\mu=h$ (h — ширина полосы), $\operatorname{Re}\mu=0$, и из отрезков длины h, параллельных вещественной оси. Контуры Γ_k принадлежат $\Pi(\delta)$ и для каждого Γ_k одной конкретной группы существует такое натуральное t_k, что $\Gamma_k=\Gamma+it_k$, где Γ — некоторый фиксированный прямоугольный контур из этой группы. Аналогичное построение проводится и для второй полуполосы из леммы 8, расположенной вдоль вещественной оси ширины h. Построенные в ней контуры обозначим через Γ_k $(k=-1,-2,\dots)$.

Лемма 17. *Пусть J — любой конечный набор достаточно больших по модулю целых чисел. Тогда имеет место оценка*

$$\left\|\sum_{k\in J}\int_{\Gamma_k}R(\mu)\,d\mu\right\|\le C,\tag{43}$$

равномерная по J.

Доказательство оценки (43) проведем для Γ_k ($k = 1, 2, \dots$), когда Γ_k принадлежат фиксированной группе одинаковых прямоугольников. Тогда $\Gamma_k = \Gamma + it_k$, и если $\mu \in \Gamma_k$, то $\mu_1 = \mu - it_k$ принадлежит Γ. Имеем $\sum\limits_{k\in J}\int\limits_{\Gamma_k} R(\mu)f\,d\mu = \int\limits_{\Gamma}\Phi(f,\mu_1)\,d\mu_1$, где $\Phi(f,\mu_1) = \sum\limits_{k\in J} R(\mu)|_{\mu=\mu_1+it_k}$. Пусть P_k — любой из операторов леммы 16. Тогда по лемме 16 каждая компонента вектор-функции $\Phi(f,\mu_1)$ представима в виде конечной суммы (число слагаемых не зависит от J) операторов

$$\Sigma = \sum_{k\in J}\alpha(\mu_1,t_k)P_{t_k}f_\nu = \sum_{k\in J_1}\alpha(\mu_1,k)P_kf_\nu, \tag{44}$$

где $J_1 = \{t_k \mid k \in J\}$, $\alpha(\mu_1,k)$ ограничены по μ_1 и k. Ядра операторов P_k состоят из одних и тех же функций, отличающихся лишь параметром k, т. е., например, все P_k в (44) есть $A_kf_\nu = \psi(x)\sigma(x,\mu_1,k)\int\limits_0^1\sigma(t,\mu_1,k)Af_\nu(t)\,dt$, где $\psi(x)$ — одна и та же функция, $Af_\nu(t)$ — один и тот же оператор, $\sigma(x,\mu_1,k) = e^{-(\mu_1+ik)x}$, $\sigma(t,\mu_1,k) = e^{(\mu_1+ik)(t-1)}$. Если $P_k = B_k$, то $\alpha(\mu_1,k)$ — константы, не зависящие от μ_1 и k, и поэтому в этом случае $\int\limits_\Gamma\Sigma\,d\mu_1 = 0$. Если $P_k = A_k$, то $P_kf_\nu = A_kf_\nu = \psi(x)\sigma(x,\mu_1,k)b_k(Af_\nu,\mu_1)$, где $b_k(Af_\nu,\mu_1) = \int\limits_0^1\sigma(t,\mu_1,k)Af_\nu(t)\,dt$, и в этом случае $\Sigma = \sum\limits_{k\in J_1}\alpha(\mu_1,k)\psi(x)\sigma(x,\mu_1,k)b_k(Af_\nu,\mu_1)$. Покажем, что

$$\|\Sigma\| \le C\|f_\nu\|, \tag{45}$$

где константа C не зависит от J_1 и μ_1; $\|\cdot\|$ — норма в $L_2[0,1]$. Пусть $u(x) \in L_2[0,1]$. Тогда $(\Sigma,u) = \sum\limits_{k\in J_1}\alpha(\mu_1,k)b_k(u\psi,\mu_1)b_k(Af_\nu,\mu_1)$. Так как $\sigma(x,\mu_1,k) = \sigma(x,\mu_1,0)\sigma(x,0,k)$, то $b_k(Af_\nu,\mu_1) = \int\limits_0^1\sigma(t,0,k)f_{\nu,1}(t,\mu_1)\,dt$, где $f_{\nu,1}(t,\mu_1) = \sigma(t,\mu_1,0)Af_\nu$ и $\|Af_\nu\| \le C\|f_\nu\|$, поэтому

$$|(\Sigma,u)| \le c\biggl(\sum_{k=1}^\infty|b_k(u\psi,\mu_1)|^2\biggr)^{1/2}\biggl(\sum_{k=1}^\infty|b_k(Af_\nu,\mu_1)|^2\biggr)^{1/2} < \infty.$$

Значит, по теореме Банаха–Штейнгауза функционалы (Σ,u) имеют нормы, ограниченные константой, не зависящей от J_1 и μ_1. Теперь, применяя опять теорему Банаха–Штейнгауза к операторам Σ, получаем оценку (45). Если $P_k = \frac{1}{k}B_k$, то оценка (45) следует из ([7], лемма 6). Если $P_k = \frac{1}{k}B_kM_k$, то $(\Sigma,u) = \sum\limits_{k\in J_1}\frac{\alpha(\mu_1,k)}{k}(M_kf_\nu,\overline{B_k^*}u)$, где $\overline{B_k^*}$ — оператор с ядром $\overline{B}_k(x,t) = B_k(t,x)$. Так как ядра операторов M_k ограничены, то отсюда получаем оценку

$$|(\Sigma,u)| \le C\|f_\nu\|\sum_{k\in J_1}\frac{1}{k}\|\overline{B_k^*}u\|. \tag{46}$$

Аналогично лемме 6 из [7] можно показать, что $\sum\limits_{k=1}^\infty\|\overline{B_k^*}u\|^2 \le C\|u\|^2$. Тогда из (46) следует оценка $|(\Sigma,u)| \le C\|f_\nu\|\|u\|$ и поэтому (45) справедлива. Если $P_k = \frac{1}{k}N_k$, то $(\Sigma,u) = \sum\limits_{k\in J_1}\frac{\alpha(\mu_1,k)}{k}\int\limits_0^1\sigma(t,0,k)u_1(t,\mu_1)\,dt\int\limits_0^1 N(t,\mu_1,k)f_\nu(t)\,dt$, где $u_1(t,\mu_1) = \sigma(t,\mu_1,0)\psi(t)u(t)$. Отсюда, учитывая ограниченность ядер $N(t,\mu_1,k)$, получаем оценку (45). □

Теорема 2. *Система с. п. ф. оператора L образует базис Рисса со скобками в $L_2^3[0,1]$. При этом в скобки следует объединять те с. п. ф., которые соответствуют собственным значениям λ_m, для которых числа $i\lambda_m/\sqrt{d_1}$ попали внутрь контуров Γ_k области S и в аналогичные контуры из оставшихся нерассмотренных областей.*

Доказательство. Из предыдущего исследования R_λ несложно установить, что $\|R_\lambda\|$ ограничена по λ во всей λ-плоскости, за исключением δ-окрестностей собственных значений. Тогда всякая вектор-функция из области определения квадрата оператора L разлагается в ряд Фурье по с.п.ф., сходящийся в $L_2^3[0,1]$. Так как область определения оператора L всюду плотна в $L_2^3[0,1]$, то отсюда следует полнота системы с.п.ф. Поэтому на основании леммы 17 по теореме Банаха–Штейнгауза получаем утверждение теоремы. □

Литература

[1] Babbage Ch. *An essay towards the calculas on functions* // Philosophical transactions of the Royal Society of London. – 1816. – V. 11. – P. 179–226.

[2] Андреев А.А. *Об аналогах классических краевых задач для одного дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом* // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40. – № 5. – С. 1126–1128.

[3] Dankl Ch.G. *Differential-difference operators associated to reflection groups* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1989. – V. 311. – № 1. – P. 167–183.

[4] Платонов С.С. *Разложение по собственным функциям для некоторых функционально-дифференциальных операторов* // Тр. Петрозавод. гос. ун-та. Сер. матем. – 2004. – Вып. 11. – С. 15–35.

[5] Хромов А.П. *Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях* // Матем. заметки. – 1998. – Т. 64. – № 6. – С. 932–949.

[6] Корнев В.В., Хромов А.П. *О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях* // Матем. сб. – 2001. – Т. 192. – № 10. – С. 33–50.

[7] Курдюмов В.П., Хромов А.П. *О базисах Рисса из собственных функций интегрального оператора с переменным пределом интегрирования* // Матем. заметки. – 2004. – Т. 76. – № 1. – С. 97–110.

[8] Кесельман Г.М. *О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов* // Изв. вузов. Математика. – 1964. – № 2. – С. 82–93.

[9] Михайлов В.П. *О базисах Рисса в $L_2[0,1]$* // ДАН СССР. – 1962. – Т. 144. – № 5. – С. 981–984.

[10] Ильин В.А. *Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений.* I // Дифференц. уравнения. – 1980. – Т. 16. – № 5. – С. 771–794.

[11] Ильин В.А. *Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений.* II // Дифференц. уравнения. – 1980. – Т. 16. – № 6. – С. 980–1009.

[12] Шкаликов А.А. *Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях* // Тр. семинара им. И.Г. Петровского. – 1983. – Т. 9. – С. 190–229.

[13] Шкаликов А.А. *О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями* // Вестн. МГУ. Сер. матем., механ. – 1982. – № 6. – С. 12–21.

[14] Баскаков А.Г., Кацаран Т.К. *Спектральный анализ интегро-дифференциальных операторов с нелокальными краевыми условиями* // Дифференц. уравнения. – 1988. – Т. 24. – № 8. – С. 1424–1433.

[15] Раппопорт И.М. *О некоторых асимтотических методах в теории дифференциальных уравнений.* – Киев: Изд-во АН УССР, 1954. – 287 с.

[16] Хромов А.П. *О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с переменными пределами интегрирования* // Инф. бюллетень журн. Интегральные преобразования и специальные функции. – 2006. – Т. 6. – № 1. – С. 46–55.

[17] Седлецкий А.М. *Аналитические преобразования Фурье и экспоненциальные аппроксимации* I // М.: Изд-во МАИ, 2003. – 150 с.

[18] Курдюмов В.П., Хромов А.П. *О базисах Рисса из собственных и присоединенных функций дифференциально-разностного оператора с многоточечным краевым условием* // Математика. Механика: Сб. науч.тр. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2004. – Вып. 6. – С. 80–82.

В.П. Курдюмов

доцент, кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики,
Саратовский государственный университет,
410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83

А.П. Хромов

профессор, кафедра дифференциальных уравнений и прикладной математики,
Саратовский государственный университет,
410012, г. Саратов, ул. Астраханская, д. 83,

e-mail: KhromovAP@info.sgu.ru

V.P. Kurdyumov

Associate Professor, Chair of Differential Equations and Applied Mathematics,
Saratov State University,
83 Astrakhanskaya str., Saratov, 410012 Russia

A.P. Khromov

Professor, Chair of Differential Equations and Applied Mathematics,
Saratov State University,
83 Astrakhanskaya str., Saratov, 410012 Russia,

e-mail: KhromovAP@info.sgu.ru