ТРУДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЦЕНТРА
ИМЕНИ Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО

ТОМ 57

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ
И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ

Материалы четырнадцатой международной
Казанской научной школы-конференции
(Казань, 7 – 12 сентября 2019 г.)

Казанское математическое общество
2019

**Институт математики и механики
им. Н. И. Лобачевского
Казанского (Приволжского)
федерального университета**

Казанское математическое общество

**N. I. Lobachevsky Institute of
Mathematics and Mechanics,
Kazan (Volga region)
Federal University**

Kazan Mathematical Society

ЛАБОРАТОРИЯ
«МНОГОМЕРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ»

Издание осуществлено при финансовой поддержке лаборатории "Многомерная аппроксимация и приложения" механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова (грант правительства РФ, проект 14.W03.31.0031).

УДК 517:531
ББК 22.1:22.2
Т78

Печатается по рекомендации Редакционно-издательского совета Казанского математического общества

Научный редактор – С. Р. Насыров
Составители – А.А. Агафонов, И.А. Кох

Т78 Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского / Казанское математическое общество. ***Теория функций, ее приложения и смежные вопросы // Материалы Четырнадцатой международной Казанской научной школы-конференции.*** **– Казань: Издательство Казанского математического общества, Издательство Академии наук Республики Татарстан, 2019. – Т. 57. – 388 с.**

ISBN 987-5-9690-0568-6

Сборник содержит материалы четырнадцатой международной Казанской научной школы-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы», организованной Казанским (Приволжским) федеральным и Московским государственным университетами, Математическим институтом им. В. А. Стеклова РАН при содействии Регионального научно-образовательного математического центра КФУ и Академии наук Республики Татарстан. Школа-конференция проведена с 7 по 12 сентября 2019 года.

Предназначен для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов, специализирующихся в различных областях математики, механики и их приложений.

УДК 517:531
ББК 22.1:22.2

УДК 517.956

О ВОЗМОЖНОСТЯХ ФУНКЦИИ ШВАРЦА В ИССЛЕДОВАНИИ ЗАДАЧ ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

Н.Р. Абубакиров[1], Л.А. Аксентьев[2]

1 *abunail@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет
2 *l.aksentev@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Данное сообщение является продолжением исследований авторов [1] – [3]. В нем представлены возможности осуществления методов А.В. Цирульского и В.Н. Страхова при решении прямых задач логарифмического потенциала. Приведена классификация функций Шварца, которые используются при построении решений, рассмотрены варианты конечнолистных и бесконечнолистных римановых поверхностей.

Ключевые слова: логарифмический потенциал, функция Шварца, однозначные ветви аналитических функций, римановы поверхности.

При решении прямых задач логарифмического потенциала полезной оказывается комплексная формула Грина в форме

$$u(z) = -\frac{2}{\pi}\int\int_D \frac{ds_\tau}{\tau - z} = -\frac{1}{\pi i}\int_{\partial D}\frac{\overline{\tau}\,d\tau}{\tau - z}, \tag{1}$$

где D – конечная односвязная область с границей ∂D.

Предположим, что $\partial D = L$ является замкнутой аналитической линией на комплексной плоскости $z = x + iy$. Тогда ее уравнение можно представить в виде

$$L = \Big\{z : \psi(x,y) = 0 \Leftrightarrow \psi((z+\bar z)/2, (z-\bar z)/2i) \equiv \Psi(z,\bar z) = 0,$$

$$\text{необходимое условие } \partial\Psi/\partial\bar z|_{z\in L} \neq 0\Big\} \Rightarrow \bar z = S(z)$$

с дополнительным условием конечного числа точек ветвления функции $S(z)$.

В книге Дэвиса [4] функция $S(z)$ названа функцией Шварца кривой L.

В докладе будут доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. *Конечнолистная симметричная поверхность функции Шварца $S(z)$ с конечным числом точек ветвления позволяет вычислить градиент $u(z)$ в виде (1) для $L : \bar\tau = S(\tau)$ с помощью вычетов тогда и только тогда, когда эта поверхность имеет род 0 и нет точек ветвления внутри L или вне L. Если же точки ветвления присутствуют и внутри L и вне L, то поверхность для $S(z)$ имеет род, больший или равный 1, и $u(z)$ представится в виде, содержащем интеграл типа Коши по берегам разрезов между точками ветвления.*

Теорема 2. *В случае, когда поверхность для функции Шварца $S(z)$ является бесконечнолистной, возможны два варианта для $L : \bar\tau = S(\tau)$:*

1) внутри L или вне L нет точек ветвления, но содержится хотя бы одна существенная особенность функции $S(z)$. Тогда $u(z)$ в виде (1) можно вычислить с помощью вычетов;

2) внутри и вне L имеются точки ветвления и тогда $u(z)$ можно представить в виде, содержащем интеграл типа Коши по берегам разрезов внутри или вне L.

Приведены примеры применения теорем 1 и 2 для конкретных линий L.

Основные результаты представленного доклада будут опубликованы в Lobachevskii Journal of Mathematics, №8 за 2019 год.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан (проект №18-41-160017).

Литература

1. Абубакиров Н. Р., Аксентьев Л. А. *О конечных решениях обратной задачи логарифмического потенциала* // Изв. вузов. Математика. – 2016. – № 10. – С. 65–69.

2. Abubakirov N. R., Aksentev L. A. *Classes of finite solutions to the inverse problem of the logarithmic potential* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2018. – V. 39. – P. 151–160.

3. Абубакиров Н. Р., Аксентьев Л. А. *О прямых и обратных задачах логарифмического потенциала с конечным числом параметров* // Изв. вузов. Математика. – 2018. – № 8. – С. 75–82.

4. Davis Ph. *The Schwarz function and its applications*. – Carus Mathematical Monographs. № 17, 1974. – 228 p.

5. Цирульский А. В. *Функции комплексного переменного в теории и методах потенциальных геофизических полей.* – Свердловск: УрО АН СССР, 1990. – 234 с.

6. Страхов В. Н. *К вопросу единственности решения плоской обратной задачи теории потенциала*// Известия АН СССР. Физика Земли. – 1972. – № 2. – С. 38–49.

ON CAPABILITIES OF SCHWARZ FUNCTION IN THE PROBLEMS OF LOGARITHMIC POTENTIAL

N.R. Abubakirov, L.A. Aksentev

In this report, we continue our research [1] – [3]. We discuss the capabilities of A.V. Tsirulsky's and V.N. Strakhov's methods in the solution of direct problems of the logarithmic potential. We give classification of the Schwarz functions that arise in construction of the solutions and study the cases of finite-sheeted and infinite-sheeted Riemann surfaces.

Keywords: logarithmic potential, Schwarz function, single-valued branches of analytic functions, Riemann surfaces.

УДК 517.9: 519.6

О СХОДИМОСТИ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА ДЛЯ ЗАДАЧИ ТИПА КОШИ ДЛЯ ОДНОГО ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Ю.Р. Агачев[1], А.В. Гуськова[2]

1 *jagachev@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет
2 *avsavina@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В работе в специальных парах функциональных пространств искомых элементов и правых частей дается обоснование метода Галеркина приближенного решения задачи типа Коши для одного дифференциального уравнения дробного порядка.

Ключевые слова: пространство Лебега, дифференциальное уравнение, дробная производная, задача типа Коши, метод Галеркина, сходимость метода.

Пусть фиксированы $m \in N$ и $\alpha \in R, m-1 < \alpha \le m$. Рассматривается задача типа Коши

$$(D_{a+}^{\alpha-k-1}x)(a) = 0, \quad k = \overline{0, m-1}, \tag{1}$$

для дробно-дифференциального уравнения вида

$$(D_{a+}^{\alpha}x)(t) + \sum_{k=1}^{m} g_k(t)(D_{a+}^{\alpha-k}x)(t) = y(t), \quad -\infty < a < t \le b \le +\infty, \tag{2}$$

где функции $g_k(t),\ k = \overline{1, m},\ y(t)$ — известные, $x(t)$ — искомая; $(D_{a+}^{\beta}x)(t)$ есть левосторонняя производная Римана–Лиувилля дробного порядка β от функции $x(t)$ (см.,напр., [1, с. 44]).

Отметим, что задача (1), (2) тесно связана с задачей Коши

$$z^{(k)}(a) = 0, \quad k = \overline{0, m-1}, \tag{3}$$

для дифференциального уравнения

$$z^{(m)}(t) + \sum_{k=1}^{m} g_k(t) z^{(m-k)}(t) = y(t), \quad a < t \le b. \tag{4}$$

Пусть $L_p \equiv L_p(a, b), 1 \le p < \infty,$ — пространство функций, интегрируемых по Лебегу на $[a, b]$ со степенью p, с нормой

$$\|z\|_p = \left\{ \int_a^b |z(t)|^p dt \right\}^{1/p},\ z \in L_p.$$

Под $L_\infty \equiv L_\infty(a, b)$ будем понимать пространство $C[a, b]$ непрерывных на $[a, b]$ функций с обычной max-нормой.

Будем предполагать, что известные функции $g_k(t), k = \overline{1, m}$ и $y(t)$ принадлежат пространству $Y = L_p \equiv L_p(a, b), 1 \le p \le \infty$. Тогда задачу (1), (2) можно рассматривать в паре пространств (X, Y) искомых элементов и правых частей соответственно, где $X = I_{a+}^{\alpha}(L_p)$ — пространство функций $f(t)$, представимых в виде левостороннего дробного интеграла Римана–Лиувилля порядка α от функции из L_p:

$$f(t) = (I_{a+}^{\alpha}\varphi)(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(r-1+\alpha)} \int_a^t \frac{x(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{r-\alpha}}, \quad r = [\alpha] + 1,$$

$\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера. Норму в пространстве X зададим, согласовав с соответствующей нормой в Y:

$$\|x\|_X = \|x\|_p + \|I_{a+}^{\alpha}x\|_p,\ x \in X.$$

В выбранной паре (X, Y) задача (1), (2) эквивалентна операторному уравнению

$$Kx \equiv Gx + Tx = y \quad (x \in X, y \in Y), \tag{5}$$

где оператор $G: X \to Y$, определяемый формулой

$$(Gx)(t) = (D_{a+}^{\alpha}x)(t),\ x \in X,$$

непрерывен и имеет непрерывный обратный, а оператор $T : X \to Y$,

$$(Tx)(t) = \sum_{k=1}^{m} g_k(t)(D_{a+}^{\alpha-k}x)(t),\ x \in X,$$

является вполне непрерывным.

Таким образом, уравнение (5) в выбранной паре пространств (X, Y) является уравнением, приводящимся к уравнению второго рода с вполне непрерывным оператором [2], к которому применима теория Фредгольма. Отсюда вытекает корректная постановка в смысле Адамара исходной задачи (1), (2) в паре пространств (X, Y), если задача (3), (4) имеет единственное решение при любой правой части из Y.

В дальнейшем без всяких оговорок будем предполагать однозначную разрешимость соответствующей задачи (3), (4).

Пусть $H_p^{(r+\mu)}$, $r+1 \in N, \mu \in (0,1], 1 \le p \le \infty$, — класс функций $f(t)$, определенных на $[a, b]$ и имеющих производную порядка r из пространства L_p, удовлетворяющую при $\forall h \in (0, b-a)$ условию

$$\left\{\int_a^{b-h} |f^{(r)}(t+h) - f^{(r)})(t)|^p\right\}^{1/p} \le Mh^{\mu},\ M = \text{const} < \infty \quad (f^{(0)} \equiv f).$$

Заметим, что абсолютная постоянная M зависит, вообще говоря, от самой функции $f(t)$, а при $p = \infty$ класс $H_p^{(r+\mu)}$ будем обозначать как $H^{(r+\mu)}$.

Приближенное решение задачи (1), (2) будем искать в виде

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k(t-a)^{\alpha+k}. \tag{6}$$

Неизвестные коэффициенты $\{c_k\}_0^n$ определим, согласно методу Галеркина, из условия ортогональности невязки приближенного решения к функциям t^j, $j = \overline{0, n}$:

$$\int_a^b \left[(Kx_n)(t) - y(t)\right] t^j\, dt = 0,\ j = \overline{0, n}.$$

Эти условия относительно $\{c_k\}$ представляют собой систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\sum_{k=0}^{n} \gamma_{kj} c_k = y_j,\ j = \overline{0, n}, \tag{7}$$

где

$$y_j = \int_a^b y(t) t^j\, dt,\ \gamma_{kj} = \int_a^b (K[(t-a)^{\alpha+k}])(t) \cdot t^j\, dt. \tag{8}$$

Для вычислительной схемы метода Галеркина имеют место следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть функции g_k, $k = \overline{1, m}$, $y \in L_p$, $4/3 < p < 4$.*

Тогда система (7), (8) для всех n, начиная с некоторого номера n_0, имеет единственное решение $\{c_k^*\}_0^n$. Приближенные решения $x_n^*(t) = \sum_{k=0}^{n} c_k^*(t-a)^{\alpha+k}$ при $n \to \infty$

сходятся по норме пространства $X = I^{\alpha}_{a+}(L_p)$ *к точному решению* x^* *задачи (1), (2) со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_X = O\left\{E_n(Dx^*)_p\right\}, \ \frac{4}{3} < p < 4.$$

В частности, если функции $y, g_k, k = \overline{1,m}$, *принадлежат классу* $H_p^{(r+\mu)}$, $r+1 \in N$, $0 < \mu \le 1$, *то скорость сходимости задается порядковым соотношением*

$$\|x^* - x_n^*\|_X = O\left(n^{-r-\mu}\right), \ \frac{4}{3} < p < 4.$$

Теорема 2. *Пусть* $r+1 \in N, \mu \in (0,1]$ *таковы, что* $r+\mu > \frac{1}{4}$. *Пусть* $\nu > 0$ *задается соотношениями:* $\nu = 2\mu - 1/2$ *при* $r+\mu \le 1/2$, $\nu = r+\mu$ *при* $r+\mu > 1/2$.

Если функции $g_k, k = \overline{1,m}, y \in H_1^{(r+\mu)}$, *то система (7), (8) для всех* n, *начиная с некоторого номера* $n_0 \le r$, *имеет единственное решение* $\{c_k^*\}_0^n$. *Приближенные решения* $x_n^*(t)$, *построенные по формуле (6), при* $n \to \infty$ *сходятся по норме пространства* $X = I^{\alpha}_{a+}(L_1)$ *к точному решению* x^* *задачи (1), (2) со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_X = O\left(n^{-\nu} \ln n\right).$$

Теорема 3. *Пусть* $1 < p \le 4/3$, $r+1 \in N, \mu \in (0,1]$ *таковы, что* $r+\mu > \frac{2}{p} - \frac{3}{2}$.

Если функции $g_k, k = \overline{1,m}, y \in H_p^{(r+\mu)}$, *то система (7), (8) для всех* n, *начиная с некоторого номера* $n_0 \le r$, *имеет единственное решение* $\{c_k^*\}_0^n$. *Приближенные решения* $x_n^*(t)$, *построенные по формуле (6), при* $n \to \infty$ *сходятся по норме пространства* $X = I^{\alpha}_{a+}(L_p)$ *к точному решению* x^* *задачи (1), (2) со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_X = O\left(n^{-r-\mu}\right), \ 1 < p \le \frac{4}{3}.$$

Теорема 4. *Пусть* $4 \le p < \infty, r+1 \in N$, $\mu \in (0,1]$ *при* $r = 0$ *удовлетворяет условию* $\mu > \frac{1}{2} - \frac{2}{p}$.

Если функции $g_k, k = \overline{1,m}$, *и* $y \in H_p^{(r+\alpha)}$, *то система (7), (8) для всех* n, *начиная с некоторого номера* n_0, *имеет единственное решение* $\{c_k^*\}_0^n$. *Приближенные решения* $x_n^*(t) = \sum_{k=0}^n c_k^*(t-a)^{\alpha+k}$ *при* $n \to \infty$ *сходятся по норме пространства* $X = I^{\alpha}_{a+}(L_p)$ *к точному решению* x^* *задачи (1), (2) со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_X = O\left\{n^{\frac{1}{2} - \frac{2}{p} - r - \mu} (\ln n)^{[4/p]}\right\}, \ p \ge 4.$$

Теорема 5. *Пусть* $r+1 \in N, \mu \in (0,1]$, *причем* $r+\mu > \frac{1}{2}$.

Если функции $g_k, k = \overline{1,m}, y \in H^{(r+\alpha)}$, *то система (7), (8) для всех достаточно больших* n *имеет единственное решение* $\{c_k^*\}_0^n$. *Приближенные решения* $x_n^*(t)$, *построенные по формуле (6), при* $n \to \infty$ *сходятся по норме пространства* $X = I^{\alpha}_{a+}(L_\infty)$ *к точному решению* x^* *задачи (1), (2) со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_X = O\left(n^{\frac{1}{2} - r - \mu} \ln n\right).$$

Доказательство этих теорем проводится с помощью результатов общей теории приближенных методов функционального анализа (см., напр., [3]), а также теории приближений функций из L_p суммами Фурье по ортогональной системе полиномов Лежандра (см. [4]– [7]).

Литература

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. А. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

2. Агачев Ю. Р., Гуськова А. В. *О корректной постановке задачи типа Коши для одного дробно-дифференциального уравнения* // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2018. – Т. 56. – С. 8-10.

3. Габдулхаев Б. Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань.: Изд-во Казан. ун-та, 1980. – 232 с.

4. Бадков В. М. *Аппроксимативные свойства рядов Фурье по ортогональным полиномам* // Успехи матем. наук. – 1978. – Т. 33. – Вып. 4(202). – С. 51–106.

5. Моторный В. П. *О сходимости в среднем рядов Фурье по многочленам Лежандра* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1973. – Т. 37. – № 1. – С. 135–147.

6. Суетин П. К. *О представлении непрерывных и дифференцируемых функций рядами Фурье по многочленам Лежандра* // Докл. АН СССР. – 1964. – Т. 158. – № 6. – С. 1275–1277.

7. Pollard H. *The mean convergence of orthogonal series* // Duke Math. J. – 1949. – V. 16. – № 1. – P. 355–367.

ON THE CONVERGENCE OF THE GALERKIN METHOD FOR A PROBLEM OF CAUCHY TYPE FOR A FRACTIONAL DIFFERENTIAL EQUATION

J.R. Agachev, A.V. Guskova

In the work, in special pairs of functional spaces of the desired elements and right-hand sides, the Galerkin method is used to approximate the Cauchy type problem for a fractional-order differential equation.

Keywords: Lebesgue space, differential equation, fractional derivative, Cauchy type problem, Galerkin method, convergence of the method.

УДК 517.968: 519.6

К ОБОСНОВАНИЮ МЕТОДА ГАЛЕРКИНА РЕШЕНИЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ю.Р. Агачев[1], М.Ю. Першагин[2]

1 *juriy.agachev@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет
2 *mpershagin@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В статье дается обоснование полиномиального метода Галеркина решения краевых задач для обыкновенных интегро–дифференциальных уравнений, когда порядок внутреннего дифференциального оператора выше соответствующего внешнего. Скорость сходимости метода характеризуется в терминах наилучших полиномиальных приближений точного решения, что автоматически реагирует на гладкостные свойства коэффициентов уравнения.

Ключевые слова: пространство Соболева, вес Якоби–Гегенбауэра, интегро–дифференциальное уравнение, задача Коши, полиномиальное приближение, метод Галеркина, сходимость метода.

Пусть $m+1, p \in \mathbb{N}, p > m$. Рассматривается, для определенности, однозначно разрешимая задача Коши[1]

$$x^{(i)}(-1) = 0,\ i = \overline{1,m}, \tag{1}$$

для интегро–дифференциального уравнения

$$Kx \equiv x^{(m)}(t) + \sum_{k=1}^{m} g_k(t)x^{(m-k)}(t) + \sum_{j=0}^{p} \int_{-1}^{+1} h_j(t,s)x^{(j)}(s)\,ds = y(t), \quad -1 \le t \le 1, \tag{2}$$

где $y(t), g_k(t),\ k = \overline{1,m}$, и $h_j(t,s),\ j = \overline{0,p}$, — известные функции в своих областях определения.

Пусть $\rho(t) = \sqrt{1-t^2}$ — вес Чебышева второго рода, $q_l(t) = \{\rho(t)\}^{2l-1}$, $l+1 \in \mathbb{N}$, — веса Якоби–Гегенбауэра. Обозначим через $L_{2,q_l} \equiv L_{2,q_l}(-1,1)$ пространство Лебега функций, квадратично–суммируемых с весом $q_l(t)$ в промежутке $(-1,1)$, $W^r L_{2,q_r} \equiv W^r L_{2,q_r}[-1,1]$, $r \in \mathbb{N}$, — пространство Соболева функций $f(t) \in L_{2,\rho}$, имеющих производные $f^{(l)}(t) \in L_{2,q_l}$, $1 \le l \le r$. Норму в пространстве $W^r L_{2,q_r}$ зададим по формуле

$$\|f\|_{r;2,q_r} = \left(\int_{-1}^{+1} \sum_{l=0}^{r} q_l(t)|f^{(l)}(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Введем также пространства L_1 суммируемых в промежутке $(-1,1)$ функций и $W^s L_{2,q_r} \equiv W^s L_{2,q_r}[-1,1]$, $s > r$, непрерывных функций $f(t)$, для которых существует производная $f^{(s-r)}(t) \in W^r L_{2,q_r}$. В пространстве $W^s L_{2,q_r}$ зададим полунорму по формуле

$$\|f\|_{s;2,q_r} = \|f^{(s-r)}\|_{r;2,q_r}. \tag{3}$$

Задачу (1), (2) будем рассматривать (при надлежащих требованиях относительно коэффициентов уравнения) в паре пространств (X,Y), где $Y = W^r L_{2,q_r}$, $r = p -$

1 При $m = 0$ начальные условия отсутствуют.

$m \geq 1$, $X = \overset{\circ}{W}{}^p L_{2,q_r}$ — подпространство функций из $W^p L_{2,q_r}$, удовлетворяющих начальным условиям (1). В пространстве X полунорма (3) представляет собой норму, по которой, очевидно, X становится полным.

В паре пространств (X, Y) исходная (однозначно разрешимая) задача может быть записана в операторном виде:

$$Kx \equiv Dx + Gx + Hx = y \quad (x \in X,\, y \in Y), \tag{4}$$

где

$$Dx \equiv x^{(m)}(t), \quad Gx \equiv (Gx)(t) = \sum_{k=1}^{m} g_k(t) x^{(m-k)}(t),$$

$$Hx \equiv (Hx)(t) = \sum_{j=0}^{p} \int_{-1}^{+1} h_j(t,s) x^{(j)}(s)\, ds.$$

Лемма 1. *Пусть выполнены условия:*

1) $g_k, k = \overline{1,m}, y \in Y$;

2) существует производная $\frac{\partial^r h_j(t,s)}{\partial t^r} \in L_{2,q_r} \times L_1$, $j = \overline{0, m-1}$;

3) существует производная $\frac{\partial^r h_j(t,s)}{\partial t^r} \in L_{2,q_r} \times L_{2,q_{m-j}}$, $j = \overline{m,p}$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1°. *Оператор $D : X \to Y$ имеет непрерывный обратный $D^{-1} : Y \to X$, причем*

$$\|D\|_{X \to Y} = \|D^{-1}\|_{Y \to X} = 1.$$

2°. *Операторы $G : X \to Y$ и $H : X \to Y$ вполне непрерывны.*

Лемма 1 позволяет применить для приближенного решения задачи (1), (2) вычислительную схему метода Галеркина, применяемого обычно для корректно поставленных по Адамару задач.

Предварительно приведем два вспомогательных утверждения, непосредственно вытекающие из результатов работы [2].

Лемма 2. *Система $\{T_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ полиномов Чебышева первого рода образует ортогональный базис в пространстве Соболева $W^r L_{2,q_r}$ при любых $r = 1, 2, \ldots$.*

Лемма 3. *Пусть $x \in W^r L_{2,q_r}, r \in N$, $x_n(t)$ — полином степени n наилучшего приближения функции $x(t)$ в пространстве Лебега $L_{2,1/\rho}$. Тогда $x_n(t)$ также является полиномом наилучшего приближения и в пространстве $W^r L_{2,q_r}$.*

Леммы 2 и 3 дают нам возможность обоснованно строить полиномиальные приближения решений задачи (1), (2).

Приближенное решение задачи (1), (2) будем искать в виде

$$x_n(t) = \sum_{i=m}^{n+m} c_i (t+1)^i, \tag{5}$$

неизвестные коэффициенты $\{c_k\}$ которого определим из условий

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \left[(Kx_n)(t) - y(t) \right] t^l \, dt = 0, \; l = \overline{0,n}. \tag{6}$$

Условия (6) относительно $\{c_k\}$ представляют собой систему линейных алгебраических уравнений вида

$$\sum_{i=m}^{n+m} \alpha_{il} c_i = y_l,\ l = \overline{0,n}, \tag{7}$$

где

$$y_l = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} y(t) t^l dt,\ \alpha_{il} = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} (K[(t+1)^i])(t) t^l dt. \tag{8}$$

Имеет место следующая

Теорема. *Пусть функции y, g_k, $k = \overline{1,m}$ и h_j, $j = \overline{0,p}$, удовлетворяют условиям 1)–3) леммы 1. Тогда система (7), (8) для всех n, начиная с некоторого номера n_0, имеет единственное решение $\{c_i^*\}_m^{m+n}$. Приближенные решения x_n^*, построенные по формуле (5) при $\{c_i = c_i^*\}$, при $n \to \infty$ сходятся по норме пространства X к точному решению x^* задачи (1), (2) со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_X = O\{E_n(Dx^*)_Y\},$$

где $E_n(z)_Y$ — наилучшее приближение функции $z \in Y$ алгебраическими полиномами степени не выше n.

Доказательство теоремы проводится с помощью варианта общей теории приближенных методов анализа, предложенного Б.Г. Габдулхаевым (см., например, [3, глава I]), и леммы 3. Заметим также, что из указанной теоремы можно получить конкретную скорость сходимости приближенных решений к точному, если коэффициенты уравнения (2) обладают дополнительными свойствами.

Литература

1. Даутов Р. З., Тимербаев М. Р. *Точные оценки аппроксимации полиномами в весовых пространствах Соболева* // Дифференц. уравнения. – 2015. – Т. 51. – № 7. – С. 890–898.

2. Габдулхаев Б. Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач*. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980. – 232 с.

TO THE JUSTIFICATION OF THE GALERKIN METHOD FOR A CLASS OF INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

J.R. Agachev, M.Y. Pershagin

The article gives the justification of the polynomial Galerkin method for solving boundary value problems for ordinary integro–differential equations when the order of the internal differential operator is higher than the corresponding external one. The rate of convergence of the method is characterized in terms of the best polynomial approximations of the exact solution, which automatically responds to the smoothness properties of the coefficients of the equation.

Keywords: Sobolev space, Jacobi–Gegenbauer weight, integro-differential equation, Cauchy problem, polynomial approximation, Galerkin method, convergence of the method.

УДК 517.51

ОБ ОЦЕНКАХ НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ КЛАССА НИКОЛЬСКОГО–БЕСОВА ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛОРЕНЦА

Г. Акишев[1]

1 *akishev_g@mail.ru*; Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева; Уральский федеральный университет

В статье рассматривается пространство Лоренца периодических функций многих переменных и пространство Никольского–Бесова. Получены оценки наилучшего приближения тригонометрическими полиномами с номерами гармоник из гиперболичского креста функций класса Никольского–Бесова.

Ключевые слова: пространство Лоренца, класс Никольского–Бесова, приближение функции, гиперболический крест.

Пусть $\mathbb{R}^m$ — m-мерное евклидово пространство точек $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_m)$ с вещественными координатами; $\mathbb{I}^m = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^m;\ 0 \le x_j \le 1;\ j = 1, \ldots, m\}$ — m-мерный куб, $\mathbb{T}^m = [0, 2\pi]^m$.

Через $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ обозначим пространство Лоренца всех измеримых по Лебегу функций $f(\bar{x})$, которые имеют период 2π по каждой переменной и для которых величина

$$\|f\|_{p,\tau} = \left\{\frac{\tau}{p}\int_0^1 \left(f^*(t)\right)^\tau t^{\frac{\tau}{p}-1} dt\right\}^{\frac{1}{\tau}},\ 1 < p < \infty, 1 \le \tau < \infty$$

конечна, где $f^*(y)$ – невозрастающая перестановка функции $|f(2\pi\bar{x})|$, $\bar{x} \in \mathbb{I}^m$ (см. [1], с. 228).

В случае $\tau = p$ пространство Лоренца $L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ совпадает с пространством Лебега $L_p(\mathbb{T}^m)$ с нормой $\|f\|_p = \|f\|_{p,p}$.

Функции $f \in L_1\left(\mathbb{T}^m\right) = L\left(I^m\right)$ сопоставим ее ряд Фурье

$$\sum_{\overline{n} \in \mathbb{Z}^m} a_{\overline{n}}(f)\, e^{i\langle \overline{n}, 2\pi\overline{x}\rangle},$$

где $a_{\overline{n}}(f)$ – коэффициенты Фурье функции $f \in L_1\left(\mathbb{T}^m\right)$ по кратной тригонометрической системе $\{e^{i\langle \overline{n}, 2\pi\overline{x}\rangle}\}_{\mathbb{Z}^m}$, и $\mathbb{Z}^m$ – целочисленная решетка в $\mathbb{R}^m$.

Положим $\langle \bar{y}, \bar{x}\rangle = \sum\limits_{j=1}^m y_j x_j$,

$$\delta_{\overline{s}}\left(f, \overline{x}\right) = \sum_{\overline{n} \in \rho(\overline{s})} a_{\overline{n}}(f)\, e^{i\langle \overline{n}, \overline{x}\rangle},$$

где $\rho(\bar{s}) = \left\{\overline{k} = (k_1, \ldots, k_m) \in \mathbb{Z}^m : \quad [2^{s_j - 1}] \le \left|k_j\right| < 2^{s_j},\ s_j \in \mathbb{Z}_+,\ j = 1, \ldots, m\right\}$ и $[a]$ – целая часть числа a.

Числовая последовательность $\left\{a_{\overline{n}}\right\}_{\overline{n} \in \mathbb{Z}^m,} \in l_p$, $1 \leqslant p < +\infty$, если

$$\left\|\left\{a_{\overline{n}}\right\}_{\overline{n} \in \mathbb{Z}^m}\right\|_{l_p} = \left\{\sum_{\overline{n} \in \mathbb{Z}^m} \left|a_{\overline{n}}\right|^p\right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Пусть $\bar{r} = (r_1, ..., r_m)$, $r_j > 0$, $j = 1, 2, ..., m$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$. Рассмотрим пространство всех функций $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$, для которых

$$\sum_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m}^{\infty} 2^{\langle\bar{s},\bar{r}\rangle\theta} ||\delta_{\bar{s}}(f)||_{p,\tau}^{\theta} < \infty.$$

Это пространство обозначается символом $S_{p,\tau,\theta}^{\bar{r}}B$ и называется пространством Никольского–Бесова.

В этом пространстве рассмотрим единичный шар

$$\mathbb{S}_{p,\tau,\theta}^{\bar{r}}B = \left\{ f \in \overset{\circ}{L}_{p,\tau}\left(\mathbb{T}^m\right) : \|f\|_{p,\tau} + \left\| \left\{ 2^{\langle\bar{s},\bar{r}\rangle} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau} \right\}_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m} \right\|_{l_\theta} \leqslant 1 \right\}.$$

Для данного вектора $\bar{r} = (r_1, ..., r_m)$ положим $\bar{\gamma} = \frac{\bar{r}}{r_1}$,$r_j > 0$ и

$$Q_n^{(\bar{\gamma})} = \cup_{\langle\bar{s},\bar{\gamma}\rangle<n}\rho(\bar{s}), \quad T(Q_n^{(\bar{\gamma})}) = \{T(\bar{x}) = \sum_{\bar{k}\in Q_n^{(\bar{\gamma})}} b_{\bar{k}} e^{i\langle\bar{k},\bar{x}\rangle}\}.$$

Пусть $E_n^{(\bar{\gamma})}(f)_{p,\tau}$ — наилучшее приближение функции $f \in L_{p,\tau}\left(\mathbb{T}^m\right)$ полиномами из множества $T(Q_n^{(\bar{\gamma})})$.

В пространстве Лебега $L_p(\mathbb{T}^m)$ для класса Никольского–Бесова $\mathbb{S}_{p,\theta}^{\bar{r}}B$ точные по порядку оценки наилучших приближений в пространстве $L_q(\mathbb{T}^m)$ установили В.Н. Темляков [5], Э.М. Галеев, А.С. Романюк и другие (см. библиографию в [2]-[4]).

Известно, что для пространств Лоренца справедливы включения $L_{q,\tau_2}(\mathbb{T}^m) \subset L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$ в случае $1 < p < q < \infty$, $1 < \tau_1, \tau_2 < \infty$ и $L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m) \subset L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$, если $1 < \tau_2 < \tau_1 < \infty$.

Основная цель статьи – найти точный порядок величины $E_n^{(\bar{\gamma})}(\mathbb{S}_{p,\tau_1,\theta}^{\bar{r}}B)_{q,\tau_2}$ в различных соотношениях между параметрами $p, q, \tau_1, \tau_2, \theta$.

Запись $A_n \asymp B_n$ означает, что существуют положительные числа C_1, C_2, не зависящие от $n \in \mathbb{N}$, такие что $C_1 A_n \leqslant B_n \leq C_2 A_n$.

Основными результатами являются следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 < \tau \leqslant 2$ *или* $2 < p < \infty$, $2 \leq \tau < \infty$. *Тогда для любой функции* $f \in L_{p,\tau}(\mathbb{T}^m)$ *имеет место неравенство*

$$\|f\|_{p,\tau} \leqslant C\Big(\sum_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau}^{\tau_0}\Big)^{\frac{1}{\tau_0}}, \quad где \quad \tau_0 = \min\{2, \tau\}.$$

Для доказательства этой теоремы сначала устанавливаются аналоги лемм 1.1-1.2 [5] для кратных сумм и потом используется теорема Литтльвуда–Пэли в пространстве Лоренца.

Теорема 2. *Пусть* $1 < p < \infty$, $1 < \tau_2 \leqslant 2$. *Если* $\tau_2 < \tau_1$ *и функция* $f \in L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m} \Big(\sum_{j=1}^{m} (s_j + 1)\Big)^{\tau_2(\frac{1}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1})} \|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau_1}^{\tau_2} < \infty,$$

то $f \in L_{p,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ *и выполняется неравенство*

$$\|f\|_{p,\tau_2} \leqslant C\left(\sum_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m}\left(\sum_{j=1}^{m}(s_j+1)\right)^{\tau_2(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1})}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau_1}^{\tau_2}\right)^{1/\tau_2}.$$

Доказательство этой теоремы следует из теоремы 1 и неравенства разных метрик для тригонометрических полиномов в пространстве Лоренца [5].

Положим $\bar{\gamma}' = (\gamma_1', \dots, \gamma_m')$ и будем считать, что $\gamma_j' = \gamma_j$, $j = 1, \dots, \nu$ и $\gamma_{j-1} < \gamma_j' < \gamma_j$, $j = \nu+1, \dots, m$.

Теорема 3. *Пусть* $\bar{r} = (r_1, \dots, r_m)$, $0 < r_1 = \dots = r_\nu < r_{\nu+1} \leq \dots \leq r_m$, $1 < p < \infty$ *и* $1 < \tau \leqslant 2$ *или* $2 < p < \infty$ *и* $2 \leqslant \tau \leqslant 2$, $1 \leqslant \theta \leqslant \infty$. *Если* $2 < p < \infty$ *и* $2 \leqslant \tau < \infty$, *то*

$$E_n^{(\bar{\gamma}')}(\mathbb{S}_{p,\tau,\theta}^{\bar{r}}B)_{p,\tau} \asymp 2^{-nr_1}n^{(\nu-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}, n \in \mathbb{N}, \quad где \quad a_+ = \max\{0, a\}.$$

Если $1 < p < \infty$ *и* $1 < \tau \leqslant 2$, *то*

$$E_n^{(\bar{\gamma}')}(\mathbb{S}_{p,\tau,\theta}^{\bar{r}}B)_{p,\tau} \asymp 2^{-nr_1}n^{(\nu-1)(\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\theta})_+}, n \in \mathbb{N}.$$

Для доказательства этой теоремы используется теорема 1.

Теорема 4. *Пусть* $\bar{r} = (r_1, \dots, r_m)$, $0 < r_1 = \dots = r_\nu < r_{\nu+1} \leq \dots \leq r_m$, $1 < p < \infty$, $1 < \tau_2 \leqslant 2$ *и* $\tau_2 < \tau_1 < \infty$, $1 \leqslant \theta < \infty$. *Тогда*

$$E_n^{(\bar{\gamma})}(\mathbb{S}_{p,\tau_1,\theta}^{\bar{r}}B)_{p,\tau_2} \leqslant C2^{-nr_1}n^{(m-1)(\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\theta})_+ + (\frac{1}{\tau_2}-\frac{1}{\tau_1})}, n \in \mathbb{N}, \quad где \quad a_+ = \max\{0, a\}.$$

Для доказательства этой теоремы используется теорема 2.

Теорема 5. *Пусть* $1 \leqslant p < q < \infty$, $1 \leqslant \tau_1, \tau_2 < \infty$. *Если функция* $f \in L_{p,\tau_1}(\mathbb{T}^m)$ *и*

$$\sum_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m}\prod_{j=1}^{m}2^{s_j(1/p-1/q)/\tau_2}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau_1}^{\tau_2} < \infty,$$

то функция $f \in L_{q,\tau_2}(\mathbb{T}^m)$ *и*

$$\|f\|_{q,\tau_2} \leqslant C\left\{\sum_{\bar{s}\in\mathbb{Z}_+^m}\prod_{j=1}^{m}2^{s_j(1/p-1/q)/\tau_2}\|\delta_{\bar{s}}(f)\|_{p,\tau_1}^{\tau_2}\right\}^{1/\tau_2}.$$

Эта теорема доказывается методом, примененным в [4], с использованием неравенства разных метрик для тригонометрических полиномов в пространстве Лоренца [5].

Теорема 6. *Пусть* $1 \leqslant p < q < \infty$, $1 \leqslant \tau_1, \tau_2 < \infty$, $r_j > 1/p - 1/q$, $j = 1, \dots, m$. *Тогда*

$$E_n^{(\bar{\gamma})}(\mathbb{S}_{p,\tau_1,\theta}^{\bar{r}}B)_{q,\tau_2} \asymp 2^{-n(r_1-1/p+1/q)}n^{(\nu-1)(1/\tau_2-1/\theta)_+}.$$

Для доказательства этой теоремы используется теорема 5.

Замечания. В случае $\tau = p$ из теоремы 3 получим теорему 2.3 [4] и теорему 1 [6].
В случае $\tau_1 = p$ и $\tau_2 = q$ теорема 5 совпадает с леммой 3.1 [4], теорема 6 с результатами [4] (теорема 2.2) и [6] (теорема 2).

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы повышения конкурентоспособности Уральского федерального университета, постановления № 211 Правительства Российской Федерации, контракт № 02.A03.21.0006.

Литература

1. Стейн И., Вейс Г. *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.* – М.: Мир, 1974. – 332 с.

2. Тихомиров В. М. *Теория приближений. Современные проблемы математики.* – М.: 1987. – С. 103–270.

3. Dinh Dung, Temlyakov V.N., Ullrich T. *Hyperbolic cross approximation* // arXiv: 1601. 03978v1[math.NA] 15 Jan. – 2016. – 154 p.

4. Темляков В.Н. *Приближение функций с ограниченной смешанной производной* // Труды математического института им. В.А. Стеклова АН СССР. – 1986. – Т. 178. – С. 1–112.

5. Акишев Г. *Оценки наилучших приближений функций класса логарифмической гладкости в пространстве Лоренца* // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2017. – Т. 23, 3. – С. 3–21.

6. Романюк А.С. *Приближение классов Бесова периодических функциий многих переменных в пространстве L_q* // Укр. мат. ж. 1991. – Т. 43, № 10. – С. 1398–1408.

ESTIMATES OF THE BEST APPROXIMATIONS OF FUNCTIONS OF THE NIKOL'SKII–BESOV CLASS IN THE LORENTZ SPACE BY TRIGONOMETRIC POLYNOMIALS

G. Akishev

We consider the Lorentz space of periodic functions of several variables and Nikol'skii–Besov classes. We obtain estimates of the best approximation by trigonometric polynomials with harmonic numbers from a hyperbolic cross of functions from Nikol'skii-Besov classes in the Lorentz space.
Keywords: Lorentz space, Nikol'skii–Besov class, approximations of functions, hyperbolic cross.

УДК 517.53

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

Р.Р. Акопян[1]

1 *rrakopyan@mephi.ru*; Уральский федеральный университет, Институт математики и механики УрО РАН

Решены взаимосвязанные экстремальные задачи для ограниченных аналитических функций в односвязной области G с жордановой спрямляемой границей Г. В частности – задача оптимального восстановления производной в точке $z_0 \in G$ по заданным *с погрешностью предельным граничным значениям функции на измеримой части* γ_1 *границы* Γ *на классе* Q *функций с ограниченными единицей граничными значениями на* $\gamma_0 = \Gamma \setminus \gamma_1$; *задача наилучшего приближения производной в точке* $z_0 \in G$ *линейными ограниченными функционалами в* $L^\infty(\gamma_1)$ *на классе* Q.

Ключевые слова: оптимальное восстановление функционала, наилучшее приближение неограниченного функционала ограниченными, аналитические функции.

В дальнейшем G есть односвязная область комплексной плоскости, ограниченная жордановой спрямляемой кривой Γ. Пусть γ_1 – измеримое подмножество Γ положительной меры, γ_0 – дополнение γ_1 до Γ, т.е. $\gamma_0 := \Gamma \setminus \gamma_1$. Через $H(G) = H^\infty(G)$ обозначают класс Харди аналитических и ограниченных в G функций. Функции класса $H(G)$ имеют почти всюду на Γ некасательные (угловые) предельные граничные значения. Эти граничные значения составляют функцию, почти всюду определенную на Γ и принадлежащую $L^\infty(\Gamma)$.

Для плотности гармонической меры относительно области G в точке z будем использовать обозначение $P(z,\zeta)$. Соответственно, гармоническая мера $w(z,\gamma,G)$ измеримого подмножества γ спрямляемой границы Γ относительно области G в точке z представима по формуле

$$w(z,\gamma,G) = \int_\gamma P(z,\zeta)\,|d\zeta|.$$

В $H(G)$ выделим класс Q функций f, удовлетворяющих неравенству $\|f\|_{L^\infty(\gamma_0)} \le 1$.

В данной статье на классе Q рассматриваются взаимосвязанные экстремальные задачи для функционала $\Upsilon^1_{z_0}$, который ставит в соответствие граничным значениям на γ_1 функции f значение её производной $f'(z_0)$ в точке z_0 области G.

Функцию переменной $\delta \ge 0$, определяемую равенством

$$\omega(\delta) = \omega(\delta; \Upsilon^1_{z_0}, Q) = \sup\left\{|f'(z_0)| \,:\, f \in Q,\ \|f\|_{L^\infty(\gamma_1)} \le \delta\right\}, \tag{1}$$

называют *модулем непрерывности функционала* $\Upsilon^1_{z_0}$ на классе Q. Из определения (1) следует, что для функций из $H(G)$ справедливо точное неравенство

$$|f'(z_0)| \le \|f\|_{L^\infty(\gamma_0)}\, \omega\left(\frac{\|f\|_{L^\infty(\gamma_1)}}{\|f\|_{L^\infty(\gamma_0)}}\right).$$

Второй является задача оптимального восстановления значения производной аналитической в области G функции в точке z_0 (функционала $\Upsilon^1_{z_0}$) по заданным с известной погрешностью δ по норме $L^\infty(\gamma_1)$ граничным значениям функции на γ_1 и дополнительной информации принадлежности функции классу Q. Более точно, пусть для неизвестной функции f из класса Q задана функция $q \in L^\infty(\gamma_1)$ такая, что справедливо неравенство $\|f - q\|_{L^\infty(\gamma_1)} \le \delta$. Мы хотим наилучшим (оптимальным) способом восстановить по q значение производной функции $f'(z_0)$, $z_0 \in G$. В качестве множества методов восстановления $\mathscr{R}$, из которых выбирается оптимальный, будем рассматривать множество $\mathscr{O}$ всех возможных, $\mathscr{B}$ ограниченных, или $\mathscr{L}$ линейных функционалов на $L^\infty(\gamma_1)$. Формальная постановка задачи такова. Для числа $\delta \ge 0$ и метода восстановления $T \in \mathscr{R}$ величина

$$\mathscr{U}(T,\delta) := \sup\left\{|f'(z_0) - Tq| \,:\, f \in Q,\ q \in L^\infty(\gamma_1),\ \|f - q\|_{L^\infty(\gamma_1)} \le \delta\right\}$$

является погрешностью восстановления значения в точке z_0 производной функции класса Q по граничным значениям функции на γ_1, заданным с ошибкой δ по норме $L^\infty(\gamma_1)$, методом T. Тогда

$$\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\delta) := \inf\{\mathcal{U}(T,\delta) : T \in \mathcal{R}\} \tag{2}$$

есть *величина оптимального восстановления* значения производной функции в точке z_0 (или, что то же самое, оптимального восстановления функционала $\Upsilon^1_{z_0}$) функций класса Q по их δ-приближённым граничным значениям на γ_1 с помощью методов восстановления $\mathcal{R}$. Задача состоит в вычислении величины $\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\delta)$ и определении оптимального метода восстановления – функционала, на котором в (2) достигается нижняя грань.

С величинами (1) и (2) тесно связана задача наилучшего приближения функционала $\Upsilon^1_{z_0}$ линейными ограниченными функционалами. Точная постановка задачи такова. Пусть $\mathcal{L}(N)$ есть множество линейных ограниченных функционалов на $L^\infty(\gamma_1)$, норма которых не превосходит числа $N \geq 0$. Величина

$$U(T) := \sup\left\{|f'(z_0) - Tf| : f \in Q\right\}$$

является уклонением функционала $T \in \mathcal{L}(N)$ от функционала $\Upsilon^1_{z_0}$ на классе функций Q. Соответственно, величина

$$E(N) := \inf\{U(T) : T \in \mathcal{L}(N)\} \tag{3}$$

есть *наилучшее приближение функционала* $\Upsilon^1_{z_0}$ множеством линейных ограниченных функционалов $\mathcal{L}(N)$ на классе Q. Задача состоит в том, чтобы вычислить величину $E(N)$ и найти экстремальный функционал, на котором в (3) достигается нижняя грань.

Рассматриваемые задачи ранее исследовались в работе автора [1]. Точнее, в [1] были получены утверждения (I) и (I^*) приведенных ниже теорем. Здесь формулируется полное решение этих задач. В [1], а также в статье [2], посвященной аналогичным задачам для функционала $\Upsilon_{z_0} = f(z_0)$, можно найти обсуждение постановок и историю исследования близких задач. Об исследовании задач в более общей постановке и их взаимосвязи см. [3], о последних результатах в задаче наилучшего приближения неограниченных операторов ограниченными (задаче Стечкина) см. в [4].

Пусть w гармоническая в области G функция переменной z, значение которой в точке равно гармонической мере γ_1 относительно области G в этой точке, т.е. определяемая равенством $w(z) := w(z,\gamma_1,G)$. Будем использовать обозначения $\alpha = \alpha(z_0)$ и $\beta = \beta(z_0)$ для величин гармонической меры γ_1 и γ_0 относительно области G в точке z_0:

$$\alpha = \alpha(z_0) := w(z_0,\gamma_1,G), \quad \beta = \beta(z_0) := w(z_0,\gamma_0,G) = 1-\alpha.$$

Обозначим через $\kappa = \kappa(z_0)$, $\overline{\nu} = \overline{\nu}(z_0)$ и $t = t(z_0)$, соответственно, длину, направление и аргумент градиента функции w (гармонической меры γ_1 относительно области G) в точке z_0, т.е. определяемые равенствами

$$\kappa = \kappa(z_0) := \left|\overline{\nabla} w(z_0)\right|, \quad \overline{\nu} = \overline{\nu}(z_0) := \frac{\overline{\nabla} w(z_0)}{\left|\overline{\nabla} w(z_0)\right|}, \quad \overline{\nu} = (\cos t, \sin t).$$

Пусть g – функция, задающая однолистное отображение области G на единичный круг, удовлетворяющая условиям $g(z_0) = 0, \quad g'(z_0) > 0$. Обозначим через $\eta(z_0)$ положительную величину $\eta(z_0) := 2g'(z_0)/\kappa(z_0)$, если $\kappa(z_0) \neq 0$, и равную $+\infty$, если $\kappa(z_0) = 0$.

Пусть f_δ функция, определяемая равенством

$$f_\delta(z) := \exp\{\ln\delta\,(w(z) + i\,v(z))\}, \quad z \in G,$$

где v – функция, гармонически сопряжённая к w. Функция v однозначная, в силу односвязности области G, и единственная с точностью до аддитивной константы, выбор значения которой нам не важен. Заметим, что функция f_δ является аналитической, ограниченной и не обращается в нуль в области G.

На пространстве $L^\infty(\gamma_1)$ для $\delta \geq 0$ и $z_0 \in G$, удовлетворяющих неравенству

$$|\ln\delta| \geq \eta(z_0),$$

определим функционал T^1_δ формулой

$$T^1_\delta f := e^{-it}\int_{\gamma_1} J_{z_0}(\zeta)\,\frac{f_\delta(z_0)}{f_\delta(\zeta)}\,f(\zeta)\,|d\zeta|, \quad J_{z_0}(\zeta) = \frac{\partial P}{\partial \overline{v}}(z_0,\zeta) + \ln\delta\,\kappa(z_0)\,P(z_0,\zeta). \tag{4}$$

Для $\delta \geq 0$ и $z_0 \in G$, удовлетворяющих условию

$$|\ln\delta| < \eta(z_0),$$

определим на области G функцию F_δ равенством

$$F_\delta(z) := \frac{g(z) - g_0}{1 - g(z)\,\overline{g_0}}\,f_\delta(z), \quad g_0 := -e^{it}\frac{\kappa(z_0)\ln\delta}{2g'(z_0)} = -e^{it}\frac{\ln\delta}{\eta(z_0)}.$$

Для этого случая функционал T^δ_1 определим равенством

$$T^1_\delta f := \int_{\gamma_1} I_{z_0}(\zeta)\,\frac{f_\delta(z_0)}{f_\delta(\zeta)}\,f(\zeta)\,|d\zeta|, \tag{5}$$

в котором

$$I_{z_0}(\zeta) = \frac{\kappa(z_0)\ln\delta}{2g'(z_0)}\left\{\frac{\partial P}{\partial\overline{v}}(z_0,\zeta) + \left[\frac{1}{2}\kappa(z_0)\ln\delta + \frac{2(g'(z_0))^2}{\kappa(z_0)\ln\delta}\right]P(z_0,\zeta)\right\}.$$

Полным решением задач о величинах (1), (2) и (3) являются следующие две теоремы.

Теорема 1. *Для величин* (1) *и* (2) *справедливы следующие утверждения.*
(I) *В случае* $|\ln\delta| \geq \eta(z_0)$ *справедливы равенства*

$$\omega(\delta) = \mathscr{E}_{\mathscr{O}}(\delta) = \mathscr{E}_{\mathscr{B}}(\delta) = \mathscr{E}_{\mathscr{L}}(\delta) = \kappa(z_0)\,\delta^\alpha\,|\ln\delta|.$$

Экстремальными функциями в (1) *являются функции вида* cf_δ, $|c| = 1$*; в* (2) *оптимальным метом восстановления является функционал* T^1_δ*, определенный равенством* (4).
(II) *В случае* $|\ln\delta| < \eta(z_0)$ *справедливы равенства*

$$\omega(\delta) = \mathscr{E}_{\mathscr{O}}(\delta) = \mathscr{E}_{\mathscr{B}}(\delta) = \mathscr{E}_{\mathscr{L}}(\delta) = \kappa(z_0)\,\delta^\alpha\,\frac{1}{2}\left(\eta(z_0) + \frac{\ln^2\delta}{\eta(z_0)}\right).$$

Экстремальными функциями в (1) *являются функции вида* cF_δ, $|c| = 1$*; в* (2) *оптимальным метом восстановления является функционал* T^1_δ*, определенный равенством* (5).

Теорема 2. *Для величины* (3) *справедливы следующие утверждения.*
(I^*) *Если параметр* $N > 0$ *представим в виде*

$$N = \kappa(z_0)\,\delta^{-\beta}\,|\alpha\ln\delta + 1|, \quad |\ln\delta| \geq \eta(z_0),$$

то для величины (3) *справедливо равенство*

$$E(N) = \kappa(z_0)\,\delta^{\alpha}\,|\beta\ln\delta - 1|.$$

Функционал T^1_δ*, определенный формулой* (4) *есть функционал наилучшего приближения.*
(II^*) *Если параметр* $N > 0$ *представим в виде*

$$N = \kappa(z_0)\,\delta^{-\beta}\left[\frac{\alpha}{2}\left(\eta(z_0) + \frac{\ln^2\delta}{\eta(z_0)}\right) + \frac{\ln\delta}{\eta(z_0)}\right], \quad |\ln\delta| < \eta(z_0),$$

то для величины (3) *справедливо равенство*

$$E(N) = \kappa(z_0)\,\delta^{\alpha}\left[\frac{\beta}{2}\left(\eta(z_0) + \frac{\ln^2\delta}{\eta(z_0)}\right) - \frac{\ln\delta}{\eta(z_0)}\right]. \tag{1}$$

Функционалом наилучшего приближения является T^1_δ*, определенный равенством* (5).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00336) и Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

Литература

1. Akopyan R. R. *Optimal Recovery of a Derivative of an Analytic Function from Values of the Function Given with an Error on a Part of the Boundary* // Analysis Math. – 2018. – V. 44. – № 1. – P. 3–19.

2. Акопян Р. Р. *Оптимальное восстановление аналитической функции по заданным с погрешностью граничным значениям* // Матем. заметки. – 2016. – Т. 99. – № 2 – С. 163—170.

3. Арестов В. В. *Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи* // Успехи мат. наук. – 1996. – Т. 51. – Вып. 6(312). – С. 89–124.

4. Арестов В. В. *Наилучшее равномерное приближение оператора дифференцирования ограниченными в пространстве L_2 операторами* // Тр. ИММ УрО РАН. – 2018. – Т. 24. – № 4. – С. 34—56.

OPTIMAL RECOVERY OF A DERIVATIVE OF ANALYTIC BOUNDED FUNCTION

R.R. Akopyan

Solution of several related extremal problems for functions analytic in a simply connected domain G with a rectifiable Jordan boundary Γ is obtained. In particular, the problem of optimal recovery of a derivative at a point $z_0 \in G$ from limit boundary values given with an error on a measurable part γ_1 of the boundary Γ for the class Q of functions with limit boundary values bounded by 1 on $\gamma_0 = \Gamma \setminus \gamma_1$, as well as the problem of the best approximation of the derivative at a point $z_0 \in G$ by bounded linear functionals in $L^\infty(\gamma_1)$ on the class Q are solved.

Keywords: best approximation of an unbounded functional by bounded functionals, optimal recovery of a functional, analytic functions.

УДК 517.16, 519.651

НОВЫЕ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ ПОЛНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ИНТЕГРАЛА 1-ГО РОДА

Е.С. Алексеева[1]

1 *kometarella@mail.ru*; Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Лаборатория бесконечномерного анализа и математической физики механико-математического факультета

Для полного эллиптического интеграла 1-го рода найдены его оценки снизу и сверху, выражающиеся через элементарные функции. В докладе приведены графики полученных оценок, а также графики их относительных погрешностей в зависимости от модуля этого интеграла. Обсуждена пригодность полученных аппроксимаций для инженерных приложений.

Ключевые слова: гипергеометрическая функция, преобразование Ландена, длина эллипса.

Через полные эллиптические интегралы 1-го рода (ПЭИ-1):

$$\mathbf{K}(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}, \qquad k \in [0,1), \tag{1}$$

выражаются решения широкого круга математических, физических и технических задач [1-4].

Для нахождения численных значений функции (1) существует целый ряд алгоритмов, например, алгоритм, основанный на преобразовании Ландена [5]:

$$\mathbf{K}(k) = \frac{\pi}{2}\prod_{n=1}^{\infty}(1+f^n(k^2)), \tag{2}$$

где символ f^n обозначает n раз применённую функцию $f(x) = \frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}$, отображающую полуинтервал $[0,1)$ в себя. Однако бесконечное произведение (2) непригодно для изучения целого ряда вопросов, возникающих, например, при описании протяжённых джозефсоновских контактов [2] или при исследовании дальности действия канала связи [3], именно в силу рекуррентного характера этой формулы.

Использование хорошо известного представления ПЭИ-1 степенным рядом, являющимся частным случаем гипергеометрической функции [1]:

$$\mathbf{K}(k) \equiv \frac{\pi}{2}F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1;k^2\right) = \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{[(2n)!]^2}{2^{4n}(n!)^4}k^{2n}, \tag{3}$$

также не приводит к прояснению поведения “в целом” выражений, зависящих от функции (1), потому что эти последние тоже сводятся к степенным рядам, то есть опять возникает бесконечная процедура, правда теперь в виде суммирования.

Таким образом, для определения глобального поведения величин, включающих в себя ПЭИ-1, желательно иметь оценки для функции (1), сводящиеся к конечному числу операций над элементарными функциями.

Один из возможных вариантов таких оценок даёт следующая

Теорема. *При* $k \in (0,1)$ *ПЭИ-1 удовлетворяет неравенствам:*

$$\mathbf{K}^{-}(k) < \mathbf{K}(k) < \mathbf{K}^{+}(k), \tag{4}$$

где

$$\mathbf{K}^{-}(k) = \frac{\pi}{4k}\left(\arcsin k + \ln\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\right) \tag{5}$$

и

$$\mathbf{K}^{+}(k) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}\,k}\left(\arcsin\frac{k}{\sqrt{2}} + \ln\sqrt{\frac{1+k}{1-k}\,\frac{2-k+\sqrt{2-k^2}}{2+k+\sqrt{2-k^2}}}\right). \tag{6}$$

Доказательство теоремы основано на известой [1] формуле для производной от функции (1):

$$k\,\frac{d\mathbf{K}(k)}{dk} = \frac{\mathbf{E}(k)}{1-k^2} - \mathbf{K}(k), \qquad k \in (0,1), \tag{7}$$

где

$$\mathbf{E}(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi \tag{8}$$

— полный эллиптический интеграл 2-го рода (ПЭИ-2) [1].

Из формулы (7) следует, что ПЭИ-1 и ПЭИ-2 связаны интегральным соотношением:

$$\mathbf{K}(k) = \frac{1}{k}\int_0^k \frac{\mathbf{E}(q)}{1-q^2}\,dq. \tag{9}$$

Далее, хорошо известно, что длина L эллипса с полуосями a и b ($a > b > 0$) выражается через функцию (8) следующим образом [5]:

$$L = 4\,a\,\mathbf{E}\left(\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}\right). \tag{10}$$

С другой стороны, в книге [6] (см. задачу 17 параграфа 4 главы 1) приведена двусторонняя оценка длины L этого эллипса через его полуоси:

$$\pi\,(a+b) \le L \le \pi\sqrt{2\,(a^2+b^2)}. \tag{11}$$

Переписав неравенство (11) с помощью модуля $k = \sqrt{1-b^2/a^2}$ ПЭИ-2 из формулы (10), найдём, что:

$$\frac{\pi}{4}\,(1+\sqrt{1-k^2}) \le \mathbf{E}(k) \le \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\sqrt{2-k^2}, \qquad k \in [0,1]. \tag{12}$$

Таким образом, комбинируя формулы (9) и (12), в силу известных свойств интеграла Римана придём к неравенству (4), причём функции (5) и (6) вычисляются как

$$\mathbf{K}^{-}(k) = \frac{\pi}{4\,k}\int_0^k \frac{1+\sqrt{1-q^2}}{1-q^2}\,dq$$

и

$$\mathbf{K}^{+}(k) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}\,k}\int_0^k \frac{\sqrt{2-q^2}}{1-q^2}\,dq$$

соответственно.

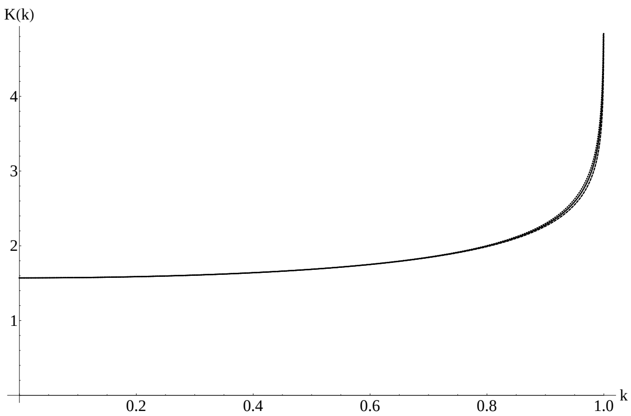


Рис. 1. Графики оценок ПЭИ-1 снизу (пунктирная линия) и сверху (точечная линия)

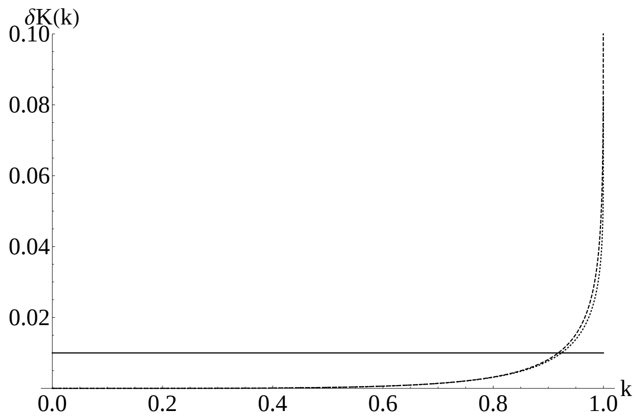


Рис. 2. Графики относительной погрешности оценок ПЭИ-1 снизу (пунктирная линия) и сверху (точечная линия)

На рис. 1 представлены графики оценок ПЭИ-1 снизу и сверху в зависимости от его модуля k. Из этого рисунка видно, что графики функций (5) и (6) вполне удовлетворительно приближают график функции (1) (сплошная линия на рис. 1).

Для того чтобы выразить степень этой удовлетворённости количественно, введём относительные погрешности определения ПЭИ-1 по приближениям снизу и сверху:

$$\delta^{-}\mathbf{K}(k) = \frac{\mathbf{K}(k)-\mathbf{K}^{-}(k)}{\mathbf{K}(k)}, \qquad \delta^{+}\mathbf{K}(k) = \frac{\mathbf{K}^{+}(k)-\mathbf{K}(k)}{\mathbf{K}(k)}. \tag{13}$$

На рис. 2 приведены графики зависимостей (13) от модуля эллиптического интеграла k. Рис. 2 демонстрирует, что при $k \in [0, 0.9]$ функции (13) не превышают значения $0,01$ (горизонтальная линия на рис. 2), что вполне достаточно для инженерных приложений, например, для определения волнового сопротивления полосковой линии (см. [4] и ссылки там).

В заключение отметим, что поскольку функции $\mathbf{K}(k)$ и $\mathbf{K}(\sqrt{1-k^2})$ являются линейно независимыми решениями следующего дифференциального уравнения 2-го порядка с переменными коэффициентами [1]:

$$\frac{d}{dk}\left[k\,(1-k^2)\,\frac{dy}{dk}\right] - k\,y = 0\,, \tag{14}$$

то доказанная теорема даёт оценки этих решений уравнения (14) сверху и снизу, выражающиеся через элементарные функции.

Наконец, из формул (2) и (3) вытекает весьма нетривиальное тождество:

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+f^{\,n}(z)) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{[(2n)!]^2}{2^{4n}(n!)^4}\,z^n\,, \qquad |z|<1\,.$$

Литература

1. Ахиезер Н. И. *Элементы теории эллиптических функций.* – М.: Мир, 1970. – 606 с.

2. Уваев И. В., Захаров Ю. В., Юшкова О. Г. *Поведение магнитного поля длинного джозефсоновского перехода при протекании через него постоянного тока* // Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ. – 2011. – Т. 4. – № 3. – С. 393–399.

3. Антипов В. Н., Горяинов В. Т., Кулин А. Н. и др. *Радиолокационные станции с цифровым синтезированием апертуры антенны.* – М.: Радио и связь, 1988. – 304 с.

4. Малорацкий Л. Г., Явич Л. Р. *Проектирование и расчёт СВЧ элементов на полосковых линиях.* – М.: Советское радио, 1972. – 232 с.

5. Фихтенгольц Г. М. *Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том II.* – М.: Наука, 1966. – 800 с.

6. Садовничий В. А., Григорьян А. А., Конягин С. В. *Задачи студенческих математических олимпиад.* – М.: Изд-во МГУ, 1987. – 310 с.

NEW APPROXIMATIONS FOR A COMPLETE ELLIPTIC INTEGRAL OF THE FIRST KIND

E.S. Alekseeva

For a complete elliptic integral of the first kind, its upper and lower bounds, expressing via elementary functions, have been found. In the report, both graphs of derived estimations and graphs of their relative mistakes depending on modulus of this integral have been presented. Suitability of the obtained approximations for engineering applications has been discussed.

Keywords: hypergeometric function, Landen’s transformation, length of ellipse.

УДК 517.547

ОБ УСИЛЕННОМ НЕРАВЕНСТВЕ БОРА

С.А. Алхалифах[1], И.Р. Каюмов[2], С. Поннусами[3]

1 *s.alkhaleefah@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского
2 *ikayumov@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского
3 *samy@isichennai.res.in, samy@iitm.ac.in*; Индийский технологический институт Мадраса

В работе получена точная версия классического неравенства Бора для ограниченных аналитических функций, а также для K-квазиконформных гармонических отображений.

Ключевые слова: неравенство Бора, аналитические функции, гармонические отображения.

Классический результат Х. Бора [1], который в окончательную форму привели М. Рисс, И. Шур и Н. Винер, состоит в следующем: Предположим, что $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ является аналитической функцией в $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1\}$ и $|f(z)| \le 1$ для всех $z \in \mathbb{D}$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k \le 1 \ \text{ для всех } \ r \le \frac{1}{3}, \tag{1}$$

где $r = |z|$, причем константа $1/3$ не может быть улучшена.

Недавно Каюмов и Поннусами представили несколько улучшенных версий классического неравенства Бора [6], и также нашли радиус Бора для класса нечетных однолистных функций [5]. Для получения дополнительной информации о неравенстве Бора мы рекомендуем ознакомиться с работой [2].

Сначала напомним следующее определение.

Определение. Пусть $f : \mathbb{D} \to \Omega$ непрерывное, однолистное, сохраняющее ориентацию отображение. Говорят, что f является K-квазиконформным отображением в $\mathbb{D}$, если для $z \in \mathbb{D}$ имеет место оценка

$$\frac{|f_z| + |f_{\overline{z}}|}{|f_z| - |f_{\overline{z}}|} = \frac{1 + |\omega_f(z)|}{1 - |\omega_f(z)|} \le K, \ \text{ то есть, } \ |\omega_f(z)| = \left| \frac{g'(z)}{h'(z)} \right| \le k = \frac{K-1}{K+1},$$

где $K \ge 1$.
Нами получены следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ – аналитическая функция в $\mathbb{D}$ и $|f(z)| < 1$ для всех $z \in \mathbb{D}$ и $0 \le |a_0| = a < 1$. Тогда*

$$|f(z)| + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| r^k \le 1 \tag{2}$$

для всех $a \ge 2\sqrt{3} - 3 \approx 0.4641016$ и $|z| = r \le r_a$, где

$$r_a = \frac{\sqrt{(1+a)^2 + a^2} - (1+a)}{a^2} = \frac{1}{\sqrt{(1+a)^2 + a^2} + 1 + a},$$

причем величина r_a не может быть улучшена.

Теорема 2. *Предположим, что $f(z) = h(z)+\overline{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n}$ – сохраняющее ориентацию K-квазиконформное гармоническое отображение в $\mathbb{D}$, где $|h(z)| < 1$ в $\mathbb{D}$ и $0 \le a = |a_0| < 1$. Тогда*

$$|h(z)| + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n + \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| r^n \le 1 \qquad (3)$$

для всех $a \ge \alpha_k$ и $|z| = r \le r_{a,k}$, где

$$\alpha_k = \frac{\sqrt{k^2+12k+12} - (2k+3)}{k+1}, \quad r_{a,k} = \frac{B_{a,k} - (k+2)(1+a)}{2a^2(k+1)+2ak},$$

$$B_{a,k} = \sqrt{a^2(k^2+8k+8) + 2a(k^2+6k+4) + (k+2)^2},$$

причем $r_{a,k}$ и α_k не могут быть улучшены.

Литература

1. Bohr H. *A theorem concerning power series* // Proc. London Math. Soc. – 1914. – V. 13 (2). – P. 1–5.

2. Abu-Muhanna Y., Ali R.M., Ponnusamy S. *On the Bohr inequality*. – In: "Progress in Approximation Theory and Applicable Complex Analysis" (Edited by N.K. Govil et al.). – Springer Optimization and Its Applications. – 2016. – V. 117. – P. 265–295.

3. Kayumov I.R., Ponnusamy S. *Bohr inequality for odd analytic functions* // Comput. Methods Funct. Theory. – 2017. – V. 17. – P. 679–688.

4. Kayumov I.R., Ponnusamy S. *Improved version of Bohr's inequality* // Comptes Rendus Mathematique. – 2018. – V. 356, № 3. – P. 272–277.

ON IMPROVED BOHR'S INEQUALITY

S.A. Alkhaleefah, I.R. Kayumov, S. Ponnusamy

In this paper, we obtain the exact version of the classical Bohr's inequality for bounded analytic functions, as well as for K-quasiconformal harmonic mappings.

Keywords: Bohr's inequality, analytic functions, harmonic mappings.

UDC 517.53

ON THE MENDELEEV PROBLEM FOR POLYNOMIALS

K.F. Amozova[1], E.G. Ganenkova[2], V.V. Starkov[3]

1 *amokira@rambler.ru*; Petrozavodsk state university, Saratov state university
2 *g_ek@inbox.ru*; Petrozavodsk state university
3 *vstarv@list.ru*; Petrozavodsk state university

The question raised in this paper goes back to the problem posed by the famous chemist D.I. Mendeleev in 1887 (solved by A.A. Markov in 1889). In the next 100 years, the Mendeleev problem was repeatedly modificated and solved. Its essence is in the description of conditions under which the inequality $|f(z)| \le |F(z)|$ for polynomials f and F and for z from a fixed set *implies the inequality $|L[f](z)| \le |L[F](z)|$ for some differential operator L. In the presented paper, we consider a differential operator of special type and arbitrary order.*

Keywords: polynomial, inequality, differential operator.

By $\mathscr{P}_n$ we denote the set of all polinomials in $\mathbb{C}$ of degree at most $n \in \mathbb{N}$.

In 1887 D.I. Mendeleev [8, § 86] posed the following problem: for a polynomial f, $\deg f = 2$, with $|f(x)| \le M$ for $x \in [a,b]$, give an estimation of $|f'(x)|$ for $x \in [a,b]$. In the book of V.I. Smirnov and N.A. Lebedev [11, p. 340] this problem was formulated in more general form. It was called **the Mendeleev problem**: *let $B \subset \mathbb{C}$ be a compact set, $f(z)$ be a polynomial,* $\deg f = n \ge 1$, *$|f(z)| \le M$ for $z \in B$. Give the best estimation of $|f'(z)|$ for $z \in B$.*

The Mendeleev problem was solved by A.A. Markov in 1889 in the case of real polynomials and compact set $B = [a;b]$.

Theorem A. [6, p. 51–75]. *Let $f \in \mathscr{P}_n$ and $|f(x)| \le M$ for $x \in [a,b]$. Then*

$$|f'(x)| \le \frac{2n^2M}{b-a}.$$

Here the equality is attained only by the functions

$$f(x) = \pm M T_n\left(\frac{2x-a-b}{b-a}\right)$$

where $T_n = \cos(n \arccos x)$ is the Chebyshev polynomial.

V.A. Markov obtained analogous result for k-th derivative of a real polynomial f, $1 \le k \le n$, [7, p. 81–93].

By $\mathbb{D}$ denote the unit disc $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. V.I. Smirnov proved the Mendeleev problem for complex polynomials in the case $B = \partial\mathbb{D}$.

Theorem B. [10], [11, ch.V, § 1, 2^0, p. 346] (see also [1, pp. 38–44]). *Let $f \in \mathscr{P}_n$ and $|f(z)| \le M$ on $\partial\mathbb{D}$. Then on $\partial\mathbb{D}$*

$$|f'(z)| \le Mn.$$

The equality holds only if $f(z) = e^{i\gamma}z^n$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

Theorem B can be reformulated as follows:

Theorem B′. *Let $f \in \mathscr{P}_n$ and $|f(z)| \le |Mz^n|$ on $\partial\mathbb{D}$. Then*

$$|f'(z)| \le |(Mz^n)'| \quad \text{on } \partial\mathbb{D}.$$

The equality holds only if $f(z) = e^{i\gamma}z^n$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

S.N. Bernstein generalized Theorem B′. He changed the polynomial Mz^n to an arbitrary polynomial F, $\deg F = n$. More precisely, he obtained the following result:

Theorem C. [2]. *Let f and F be polynomials such that*

$$(*)\begin{cases} 1)\ \deg f \le \deg F = n, \\ 2)\ F \text{ has all its zeros in } \overline{\mathbb{D}}, \\ 3)\ |f(z)| \le |F(z)| \text{ on } \partial\mathbb{D}. \end{cases}$$

Then

$$|f'(z)| \le |F'(z)| \quad \text{for } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}.$$

For $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ *equality holds only in* $f = e^{i\gamma}F$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

V.I. Smirnov generalized Theorem D. For $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ by $\Omega_{|z|}$ denote the image of the disc $\{t \in \mathbb{C} : |t| < |z|\}$ under the mapping $\psi(t) = \dfrac{t}{1+t}$. For $f \in \mathscr{P}_n$ put $S_\alpha[f](z) = zf'(z) - n\alpha f(z)$, α is a complex constant.

Theorem D. [11, ch.V, § 1, p. 356]. *Let* f *and* F *be polynomials possessing conditions* $(*)$. *Then for* $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$

$$|S_\alpha[f](z)| \le |S_\alpha[F](z)|$$

for all $\alpha \in \overline{\Omega_{|z|}}$. *For* $\alpha \in \Omega_{|z|}$ *equality holds at a point* $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ *only if* $f = e^{i\gamma}F$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

If we put $\alpha = 0$ in Theorem D we obtain the Bernstein Theorem C.

In [5, p. 65] M. Marden presented a differential operator $B : \mathscr{P}_n \to \mathscr{P}_n$. The Marden operator carries a polynomial $f \in \mathscr{P}_n$ into the polynomial

$$B[f](z) = \lambda_0 f(z) + \lambda_1 \frac{nz}{2} f'(z) + \lambda_2 \left(\frac{nz}{2}\right)^2 \frac{f''(z)}{2!},$$

where λ_0, λ_1 and λ_2 are constants such that all roots of the polynomial

$$u(z) = \lambda_0 + n\lambda_1 z + \frac{n(n-1)}{2}\lambda_2 z^2 \tag{1}$$

belong to the half-plane $\operatorname{Re} z \le \dfrac{n}{4}$. Q.I. Rahman and G. Schmeisser obtained the following generalization of Theorem D for the operator B.

Theorem E. [9, p. 538–540]. *Let* f *and* F *be polynomials possessing conditions* $(*)$. *Then*

$$|B[f](z)| \le |B[F](z)|, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}, \tag{2}$$

For $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ *in (2) equality holds only in the case* $f = e^{i\gamma}F$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

This theorem was generalized in different ways (see, for example [12] and references herewith).

Let $T : \mathscr{P}_n \to \mathscr{P}_n$ be a linear operator. The operator T *preserves zeros* if, for *every* polynomial F of degree n having all its zeros in $\overline{\mathbb{D}}$, the polynomial $T[F]$ also has all zeros in $\overline{\mathbb{D}}$.

In [9, p. 538] Rahman and Schmeisser proved that Theorem F takes place not only for the operator B, but for any operator T preserving zeros. In [4] we showed that the converse statement is also true:

Theorem F. *Let* $T : \mathscr{P}_n \to \mathscr{P}_n$ *be a linear operator. Then* T *preserves zeros if and only if for all* f *and* F *possessing conditions* $(*)$

$$|T[f](z)| \le |T[F](z)|, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}, \tag{3}$$

and for $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ *in (2) equality holds only if* $f = e^{i\gamma}F$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

In the paper [4] we introduced the modified Smirnov operator, which carries a polynomial $f \in \mathscr{P}_n$ into

$$\widetilde{S}_a[f](z) = (1 + az)f'(z) - naf(z),$$

$a \in \overline{\mathbb{D}}$. The modified Smirnov operator $\widetilde{S}_a$ is more preferred in a sense than the Smirnov operator S_α, because the parameter a of $\widetilde{S}_a$ does not depend on z unlike the parameter α of S_α.

Applying consistently the operators

$$\widetilde{S}_{a_1} : \mathscr{P}_n \to \mathscr{P}_{n-1},\ \widetilde{S}_{a_2} : \mathscr{P}_{n-1} \to \mathscr{P}_{n-2},\ \dots,\ \widetilde{S}_{a_k} : \mathscr{P}_{n-k+1} \to \mathscr{P}_{n-k},$$

$a_1, \dots, a_k \in \overline{\mathbb{D}}$, $1 \le k \le n$, to a polynomial $f \in \mathscr{P}_n$ we obtain the differential operator $\widetilde{S}^k : \mathscr{P}_n \to \mathscr{P}_{n-k}$ of k-th order

$$\widetilde{S}^k[f](z) \stackrel{def}{=} \widetilde{S}_{a_k} \circ \dots \circ \widetilde{S}_{a_2} \circ \widetilde{S}_{a_1}[f](z). \tag{4}$$

Denote $x_j := -\dfrac{a_j z}{1 + a_j z}$, $1 \le j \le n$, $x := (x_1, \dots, x_n)$,

$$Q_k^0(x) := 1, \quad Q_k^1(x) := \sum_{p=1}^{k} x_p, \quad Q_k^2(x) := \sum_{1 \le p_1 < p_2 \le k} x_{p_1} x_{p_2}, \ \dots,$$

$$Q_k^l(x) := \sum_{1 \le p_1 < \dots < p_l \le k} x_{p_1} x_{p_2} \dots x_{p_l}, \quad 1 \le l \le k$$

(here for every ordered set $p_1, \dots, p_l$ there is a unique term in the sum).

In the following theorem for the operator $\widetilde{S}^k$ we obtain an inequality of the form (2) and a representation formula in the terms of introduced notations.

Theorem 1. *Let f and F be polynomials possessing conditions* $(*)$. *Then for the operator $\widetilde{S}^k$, defined by (4), the following inequality holds*

$$|\widetilde{S}^k[f](z)| \le |\widetilde{S}^k[F](z)|, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}. \tag{5}$$

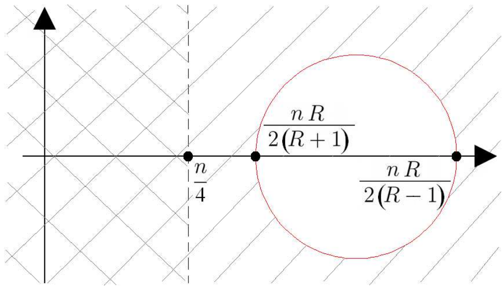
If at least one of $a_1, \dots, a_k$ takes the value $a' = \dfrac{F^{(n)}(0)}{F^{(n-1)}(0)} \in \partial\mathbb{D}$ then for $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}$ in (3) equality holds if and only if $F = C(1 + a'z)^n$, $f = c(1 + a'z)^n$, $|c| \le |C|$. If $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{D}$ then for $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ in (3) equality holds only in the case $f = e^{i\gamma}F$, $\gamma \in \mathbb{R}$. The operator $\widetilde{S}^k$ can be written in the form

$$\widetilde{S}^k[g](z) = \frac{1}{z^k (n-k)!} \prod_{m=1}^{k} (1 + a_m z) \sum_{j=0}^{k} z^j g^{(j)}(z)(n-j)!\, Q_k^{k-j}(x), \quad g \in \mathscr{P}_n. \tag{6}$$

Remark. Let us note that investigation of the equality case in (3) is a very difficult problem. Unlike Theorem F (where the equality holds only for one case $f = e^{i\gamma}F$), even for $k = 2$ the equality can be realized in (3) for eleven pairs of polynomial classes (see [4]).

In [4] for $k = 2$ we compared $\widetilde{S}^k[f]$ with the Marden operator B and proved that for $|z| \ge R > 1$ the operator $\widetilde{S}^2$ essentially generalizes the Marden operator. Namely, if we write $\widetilde{S}^2[f]$ in the form of the operator $B[f]$ with parameters λ_k then for $|z| \ge R > 1$ inequality (2) takes place if the roots of $u(z)$ (see (1)) belong to the complement of the open disc with diameter $\left(\dfrac{nR}{2(R+1)}, \dfrac{nR}{2(R-1)}\right)$ (see the figure below). Moreover, this set can not be extended [4]. This fact essentially refines Theorem F. See also [3] for more details concerning this problem.

This work is supported by the Russian Science Foundation under grant 17-11-01229.



References

1. Bernstein S. *Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle.* – Paris: Gauthier-Villars, 1926. – 208 p.

2. Bernstein S. *Sur la limitation des dérivées des polynomes* // C.R. Acad. Sci. – 1930. – V. 190. – P. 338–341.

3. Ganenkova E. G., Starkov V. V. *The Möbius transformation and Smirnov's Inequality for Polynomials* // Mat. Zametki. – 2019. – V. 105. – № 2. – P. 228–239 [in Russian]. DOI: 10.4213/mzm11858; English version: Mathematical Notes. – 2019. – V. 105. – № 2. – P. 58–68. DOI: 10.1134/S0001434619010243.

4. Ganenkova E. G., Starkov V. V. *Variations on a theme of the Marden and Smirnov operators, differential inequalities for polynomials* // J. Math. Anal. Appl. – 2019. – V. 476. – № 2. – P. 696-714 . DOI: 10.1016/j.jmaa.2019.04.006.

5. Marden M. *The geometry of the zeros of a polynomial in a complex variable. Mathematical Surveys. No 3.* – New York: American Mathematical Society, 1949. – 243 p.

6. Markov A. A. *Selected works on theory of continued fractions and theory of functions deviating least from zero*. – Moscow, Leningrad: OGIZ, 1948. – 413 p. [in Russian].

7. Markov V. A. *On functions that deviates least from zero at the given interval*. – St. Petersburg: Tip. Imperatorskoi AN, 1892. – 111 p. [in Russian].

8. Mendeleev D. I. *Investigation of aquenous liquids by specific gravity*. – St. Petersburg: Tip. V. Demakova, 1887. – 542 p. [in Russian].

9. Rahman Q. I., Schmeisser G. *Analytic theory of polynomials*. – New York: Oxford University Press, 2002. – 742 p.

10. Smirnoff V. I. *Sur quelques polynomes aux propriétés extrémales* // Transactions of the Kharkov mathematical society. – 1928. – Vol. 4. – № 2. – P. 67–72.

11. Smirnov V. I., Lebedev N. A. *Constructive theory of functions of a complex variable*. – Moscow, Leningrad: Nauka, 1964. – 440 p.[in Russian]; translation into English: *Functions of a Complex Variable: Constructive Theory*. – Cambridge, MA: M.I.T. Press / Massachusetts Institute of Technology, 1968. – 438 p.

12. Wali S. L., Shah W. M., Liman A. *Inequalities concerning B-operators* // Probl. Anal. Issues Anal. – 2016. – V. 5(23). – № 1. – P. 55-72. DOI:10.15393/j3.art.2016.3250.

О ПРОБЛЕМЕ МЕНДЕЛЕЕВА ДЛЯ ПОЛИНОМОВ

К.Ф. Амозова, Е.Г. Ганенкова, В.В. Старков

Вопрос, поставленный в этой статье, восходит к проблеме, поставленнной знаменитым химиком Д.И. Мендеелевым в 1887 г. (и решенной А.А. Марковым в 1889 г.). В течение последующих ста лет проблема Менделеева неоднократно модифицировалась и решалась. Ее суть состоит в описании условий, при выполнении которых неравенство $|f(z)| \le |F(z)|$ для полиномов f и F и для z из фиксированного множества влечет неравенство $|L[f](z)| \le |L[F](z)|$ для

некоторого дифференциального оператора L. В настоящей статье мы рассматриваем дифференциальный оператор специального вида и произвольного порядка.

Ключевые слова: полином, неравенство, дифференциальный оператор

УДК 517.956.3

ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

А.А. Андреев[1], Ю.О. Яковлева[2]

1 *andre01071948@yandex.ru*; Самарский государственный технический университет
2 *julia.yakovleva@mail.ru*; Самарский государственный технический университет

В статье рассматривается решение задачи Коши для одной системы дифференциальных уравнений четвертого порядка, не содержащей производных меньше четвертого порядка, методом Римана. Регулярное решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений гиперболического типа четвертого порядка построено в явном виде с помощью матрицы Римана. Матрица Римана получена через гипергеометрические функции матричного аргумента.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений гиперболического типа четвертого порядка, метод Римана, матрица Римана, задача Коши.

Система дифференциальных уравнений четвертого порядка

$$MU \equiv U_{xxyy} + \Lambda U = 0, \tag{1}$$

где $U\left(x, y\right)$ — искомая n-мерная вектор-функция, Λ — постоянная квадратная матрица порядка $(n \times n)$, имеет две двухкратные характеристики.

Известно, что решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений гиперболического типа, все уравнения которой имеют одинаковые пары характеристик, может быть построено методом Римана, обобщенным на матричный случай [1, 2, 3].

Задача Коши. Найти регулярное решение $U\left(x, y\right) \in C^4(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ системы уравнений (1) в плоскости $\{\left(x, y\right) : x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\}$, удовлетворяющее условиям на нехарактеристической линии $y = x$:

$$\begin{gathered}
U\left(x, y\right)|_{y=x} = A(x),\\
\frac{\partial U(x, y)}{\partial l}|_{y=x} = B(x),\\
\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial l^2}|_{y=x} = C(x),\\
\frac{\partial^3 U(x, y)}{\partial l^3}|_{y=x} = D(x),
\end{gathered}$$

где $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x) \in C^3(R)$ — заданные вектор-функции, $\overrightarrow{l} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ — нормаль к нехарактеристической линии.

Для оператора $MU \equiv U_{xxyy} + \Lambda U$ сопряженным по Лагранжу является оператор $M^* V \equiv V_{xxyy} + V\Lambda$, где $V\left(x_0, y_0; x, y\right)$ — квадратная матрица порядка n.

Матрицей Римана для системы уравнений (1) называется решение $V = V(x_0, y_0; x, y)$ задачи

$$M^* V = 0, \quad V(x_0, y_0; x, y)|_{x=x_0} = \Theta, \quad V(x_0, y_0; x, y)|_{y=y_0} = \Theta,$$
$$V_x(x_0, y_0; x, y)|_{x=x_0} = (y - y_0)E, \quad V_y(x_0, y_0; x, y)|_{y=y_0} = (x - x_0)E,$$

где $\left(x_0, y_0\right)$ – произвольная точка плоскости $\{\left(x, y\right) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$, E, Θ — единичная и нулевая матрицы порядка n соответственно.

С учетом определения обобщенной гипергеометрической функции матричного аргумента [2, 4] матрица Римана имеет вид

$$V(x_0, y_0; x, y) = (x - x_0)\left(y - y_0\right) {}_0F_3\left(1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; \frac{(x - x_0)^2(y - y_0)^2}{16}\Lambda\right). \tag{2}$$

С использованием полученной матрицы Римана (2), регулярное решение задачи Коши для системы (1) получено в явном виде и имеет вид

$$U\left(x_0, y_0\right) = A(y_0) + \frac{1}{4}\int\limits_{x_0}^{y_0} \left[(x - y_0)\, {}_0F_3\left(1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; \tau\Lambda\right)(A''(x) - C(x))\right] dx +$$
$$+\frac{1}{8}\int\limits_{x_0}^{y_0} \left[(x - x_0)(x - y_0)\, {}_0F_3\left(1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; \tau\Lambda\right)(A'''(x) - B''(x) - C'(x))\right] dx +$$
$$+\frac{1}{8}\int\limits_{x_0}^{y_0} \left[((x - x_0)(x - y_0) + 1)\, {}_0F_3\left(1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; \tau\Lambda\right)(D(x) - 4A'(x) - 4B(x))\right] dx -$$
$$+\frac{1}{72}\int\limits_{x_0}^{y_0} \left[(x - x_0)^2(x - y_0)^3\Lambda\, {}_0F_3\left(2, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}; \tau\Lambda\right)(A''(x) - C(x))\right] dx -$$
$$-\frac{1}{9}\int\limits_{x_0}^{y_0} \left[(x - x_0)^2(x - y_0)^2\Lambda\, {}_0F_3\left(2, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}; \tau\Lambda\right)(A'(x) + B(x))\right] dx -$$
$$-\frac{1}{3600}\int\limits_{x_0}^{y_0} \left[(x - x_0)^4(x - y_0)^4\Lambda^2\, {}_0F_3\left(3, \frac{7}{2}, \frac{7}{2}; \tau\Lambda\right)(A'(x) + B(x))\right] dx -$$
$$-\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{y_0} \left[(x - x_0)^2(x - y_0)\, {}_0F_3\left(2, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}; \tau\Lambda\right)A(x)\right] dx -$$
$$-\frac{1}{225}\int\limits_{x_0}^{y_0} \left[(x - x_0)^4(x - y_0)^3\Lambda^2\, {}_0F_3\left(3, \frac{7}{2}, \frac{7}{2}; \tau\Lambda\right)A(x)\right] dx -$$
$$-\frac{1}{529600}\int\limits_{x_0}^{y_0} \left[(x - x_0)^6(x - y_0)^5\Lambda^3\, {}_0F_3\left(4, \frac{9}{2}, \frac{9}{2}; \tau\Lambda\right)A(x)\right] dx,$$

где $\tau = \frac{(x-x_0)^2(x-y_0)^2}{16}$.

Литература

1. Бицадзе А. В. *Некоторые классы уравнений в частных производных.* – М.: Наука, 1981. – 448 с.

2. Андреев А. А. *О построении функции Римана* // Дифференциальные уравнения: Тр. Пединститутов РСФСР. Рязань. – 1975. – Вып. 6. – С. 3–9.

3. Миронова Л. Б. *К задаче Коши для одной системы уравнений с кратными характеристиками* // Тр. матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Актуальные проблемы математики и механики: Материалы международной научной конф. – Т. 25. Казань, 2004. – С. 186–187.

4. Бейтмен Г. *Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функция Лежандра.* – М.: Наука, 1973. – 296 с.

THE CAUCHY PROBLEM FOR A SYSTEM OF THE HYPERBOLIC DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE FOURTH ORDER

A.A. Andreev, J.O. Yakovleva

In the paper, on the basis of the method of Riemann the solution of the Cauchy problem for a system of differential equations of the fourth order is received. The regular solution is constructed by the matrix of Riemann. The matrix of Riemann is expressed through hypergeometrical functions of matrix argument.

Keywords: system of the hyperbolic differential equations of the fourth order, method of Riemann, matrix of Riemann, Cauchy problem.

УДК 517.938.25

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СЕМЕЙСТВА ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ В КРУГЕ ПУАНКАРЕ

И.А. Андреева[1], А.Ф. Андреев[2], Т.О. Ефимова[3]

1 *irandr@inbox.ru*; СПбПУ Петра Великого
2 *irandr@inbox.ru*; СПбПУ Петра Великого
3 *substress@mail.ru*; СПбПУ Петра Великого

Рассматривается широкое семейство динамических систем, характеризующихся наличием у них полиномиальных правых частей вида

$$\frac{dx}{dt} = X(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x,y),$$

где $X(x,y)$, $Y(x,y)$ суть взаимно простые формы фазовых переменных системы x и y, при этом X является полиномом третьей степени, представляя собою кубическую форму, в то время как Y — полином второй степени, являющийся формой квадратичной. Для них $X(0,1)Y(0,1) \neq 0$. Для изучаемых систем ставим цель построения в круге Пуанкаре всех существующих их фазовых портретов с установлением близких к коэффициентным критериев реализации каждого портрета, решая эту задачу с применением метода последовательных отображений (центральных и ортогональных, т.е.

метода Пуанкаре). Указаны как качественные, так и количественные результаты.

Ключевые слова: динамическая система, фазовый портрет, сфера Пуанкаре, круг Пуанкаре, особые точки, траектории.

В работе рассматривается и подробно изучается на вещественной плоскости фазовых переменных $x,\ y$, широкое семейство динамических систем, содержащих в своих правых частях полиномы, вида

$$\frac{dx}{dt} = X(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x,y), \tag{1}$$

где $X(x,y)$, $Y(x,y)$ — взаимно простые многочлены от x и y, такие, что X — кубическая форма, а Y — квадратичная, $X(0,1) > 0$, $Y(0,1) > 0$. Поставлена и решается задача об определении и построении в круге Пуанкаре всех реализующихся (топологически различных) фазовых портретов (1)–систем с установлением (близких к коэффициентным) критериев возникновения каждого фазового портрета. Для решения данной задачи применен метод последовательных отображений, предложенный Анри Пуанкаре: 1) центрального отображения (из центра $(0,0,1)$ сферы $\Sigma: x^2+y^2+z^2=1$) плоскости $x,\ y$, дополненной бесконечно удаленной прямой (т. е. плоскости $\bar{R}^2_{x,y}$) на сферу (Пуанкаре) Σ с отождествленными диаметрально противоположными точками, 2) ортогонального отображения нижней замкнутой полусферы Σ на круг (Пуанкаре) $\bar{\Omega}: x^2+y^2 \le 1$ с отождествленными граничными диаметрально противоположными точками Γ ([1], стр. 241–249).

При изучении данного семейства динамических систем был применен целый ряд методов, специально разработанных для целей этого исследования авторами, в первую очередь – А.Ф. Андреевым. Исходное обширное семейство расщепляем на подсемейства, которые могут быть классифицированы как принадлежащие к нескольким иерархическим уровням. Вследствие такого подхода исследовательский алгоритм включает несколько шагов или разделов. Переходя на первый уровень иерархии подсистем, начинаем их рассмотрение с тех (1)-систем, разложения полиномов $X(x,y)$ и $Y(x,y)$ которых на вещественные формы нижайших степеней содержат по 3 и 2 множителя соответственно, т. е. имеют вид (3.2)-систем:

$$X(x,y) = p_3(y-u_1x)(y-u_2x)(y-u_3x), \quad Y(x,y) = c(y-q_1x)(y-q_2x),$$

где $p_3>0$, $c>0$, $u_1<u_2<u_3$, $q_1<q_2$, $u_i \ne q_j$ при любых i и j.

Для (3.2)-систем вводим понятия, аналогичные которым далее вводятся и для всех остальных разновидностей подсистем, лежащих на первом уровне заданной авторами иерархии. Пусть $P(u)$, $Q(u)$ — полиномы системы:

$$P(u) := X(1,u) \equiv p_3(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3), \quad Q(u) := Y(1,u) \equiv c(u-q_1)(u-q_2);$$

ПКР (ПКQ) — возрастающая последовательность всех вещественных корней полинома системы $P(u)$ $(Q(u))$, ПКРQ — возрастающая последовательность всех вещественных корней обоих полиномов системы $P(u)$, $Q(u)$.

ДЗ-преобразование — есть двойная замена: $(t,y) \to (-t,-y)$, которая преобразует исходную систему в, говоря строго, отличную от нее (3.2)-систему. Для полученной посредством ДЗ-преобразования новой системы направления движения по траекториям (с возрастанием t), знаки корней полиномов $P(u)$, $Q(u)$, а также нумерация этих корней изменяются на противоположные по отношению к тем, что имелись у первоначальной системы. Две исследуемые (3.2)-системы мы называем а) взаимно обратными (относительно двойной замены), если ДЗ преобразует одну из них в другую, б) независимыми (от двойной замены) в противоположном случае. Для (3.2)-систем оказываются возможными 10 различных видов ПКРQ. ДЗ-преобразование (1)-систем позволяет прийти к заключению, что 6 из них будут попарно независимыми относительно ДЗ-преобразования, в то время как для каждой из прочих найдется ДЗ-взаимно обратная среди шести первых систем. Каждой из различных ПКРQ (3.2)-систем присвоим уникальный номер $r \in \{1, \ldots, 10\}$ таким образом, чтобы (ПКРQ)$_r$ с номерами $r = \overline{1,6}$ оказывались попарно независимыми, в то время как системы с номерами $r = \overline{7,10}$ – являлись взаимно обратными системам под номерами $r = \overline{1,4}$. Вводим понятие $(3.2)_r$-семейства (1)-систем как совокупность всех систем (3.2)-семейства, для каждой из которых ПКРQ = (ПКРQ)$_r$. Далее, следуя общей программе, исследуем $(3.2)_r$-семейства (1)-систем, $r = \overline{1,6}$. Результаты для $(3.2)_r$-семейств, $r = \overline{7,10}$, выводим затем из найденных для $(3.2)_r$-семейств, $r = \overline{1,4}$, применяя ДЗ-преобразование к системам последних. Фазовые портреты для систем $(3.2)_r$-семейства строим в формах как графической, так и описательной (то есть по специально разработанной табличной форме). Приводим критерии возникновения каждого из возможных в круге Пуанкаре фазовых портретов изучаемых подсемейств динамических систем.

Выводы для систем $(3.2)_1$-семейства сделаны следующие: реализуется двадцать пять топологически различных фазовых портретов, для систем $(3.2)_2$- и $(3.2)_3$-семейств — оказываются возможными по девять ФП, для $(3.2)_4$ и $(3.2)_5$-семейств — по семь, для систем $(3.2)_6$-семейства фазовых портретов выявлено — тридцать шесть, для всех же (3.2)-систем в общей сложности — различных фазовых портретов обнаруживается девяносто три. Итог этот оцениваем, принимая во внимание тот очевидный факт, что в каждом $(3.2)_r$-семействе число (1)-систем несчетно [4].

Впоследствии (на первом уровне иерархии изучаемых подсемейств систем) основная проблема решается для двух различных классов (2,2)-семейств, так же как и для (3,1)-семейства (1)-систем [3], [7], [10]. Дается полное решение поставленной задачи и для (2,1)-систем. Детализированное рассмотрение всего алгоритма и процесса исследования, описание принципов перехода на следующие ступени иерархии подсемейств изучаемого широкого семейства динамических систем, а также результатов их изучения (в совокупности с подробным изложением сути новых методов исследования и форм их применения) можно найти в монографии [1] и статьях [5,6,8,9].

Литература

1. Андронов А.А., Леонтович Е.А., Гордон И.И., Майер А.Г. *Качественная теория динамических систем второго порядка.* – М.: Наука, 1966. – 586 с.

2. Андреева И.А., Андреев А.Ф. *Фазовые портреты одного семейства кубических систем в круге Пуанкаре.* – Germany, Saarbrucken: Lambert Academic Publishing, 2017. – 70 с.

3. Андреева И.А., Андреев А.Ф. *Фазовые портреты одного семейства кубических систем в круге Пуанкаре, I* // Вестник РАЕН. – 2017. – No 4. – С. 8-18.

4. Andreeva I., Andreev A. *Investigation of a Family of Cubic Dynamic Systems* // Vibroengineering PROCEDIA. IOP Journal of Physics: Conference Series. – 2017. – No 15. – P. 88-93.

5. Andreeva I.A., Andreev A.F., Detchenya L.V., Makovetskaya T.V., Sadovskii A.P. *Nilpotent Centers of Cubic Systems* // Differential Equations. – 2017. – No 53. – 8. – P. 975-980.

6. Andreeva I.A., Andreev A.F. *On a Behavior of Trajectories of a Certain Family of Cubic Dynamic Systems in a Poincare Circle* // IOP Journal of Physics: Conference Series. – 2018. – No 1141.

7. Андреева И.А., Андреев А.Ф. *Фазовые портреты семейства кубических систем в круге Пуанкаре, II* // Вестник РАЕН. – 2018. – No 4. – С. 11-15.

8. Andreeva I.A., Andreev A.F. *On a Behavior of Trajectories of a Certain Family of Cubic Dynamic Systems in a Poincare Circle* // IOP Journal of Physics: Conference Series. – 2018. – No 1141.

9. Andreeva I.A.,Efimova T.O. *Phase Portraits of a Special Class of Dynamic Systems in a Poincare Circle* // IOP Journal of Physics: Conference Series. – 2019.

10. Андреева И.А., Андреев А.Ф. *Фазовые портреты некоторого семейства кубических динамических систем в круге Пуанкаре, III* // Вестник РАЕН. – 2019. – No 4.

THE QUALITATIVE INVESTIGATION OF A FAMILY OF DYNAMIC SYSTEMS WITH POLYNOMIAL RIGHT HAND SIDES IN THE POINCARE DISK

I.A. Andreeva, A.F. Andreev, T.O. Efimova

Some extended family of dynamical systems with polynomials in their right parts is studied on an arithmetical plane of the phase variables x and y:

$$\frac{dx}{dt} = X(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x,y).$$

Here $X(x,y)$, $Y(x,y)$ are reciprocal polynomials of x and y, X is a cubic, while Y is a square form, such that $X(0,1)Y(0,1) \neq 0$. A goal was established to outline all possible topologically different phase portraits in the Poincare circle existing for these systems with obtaining criteria of their appearance close to coefficient ones. The Poincare method of central and orthogonal displays is used. The qualitative results together with the quantitative ones are given.

Keywords: dynamical system, phase portrait, Poincare sphere, Poincare circle, singular points, trajectories.

UDC 517.5

EXTREMAL SETS IN THE COMPLEX PLANE: CHEBOTAREV, STAHL AND NUTTALL COMPACTS

A.I. Aptekarev[1]

1 *aptekaa@keldysh.ru*; Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Science, Moscow, Russian Federation

The classical Chebotarev problem is about a compact of the minimal logarithmic capacity, connecting a finite number of given points on the complex plane. We discuss the modern applications and generalizations of this problem, such as the "sheets"- structure of the Riemann surface of vector-analytic functions and asymptotics of the Hermite-Padé rational approximants.

Keywords: Chebotarev problem, logarithmic capacity, Riemann surface, Hermite-Padé rational approximants.

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ: КОМПАКТЫ ЧЕБОТАРЕВА, ШТАЛЯ И НАТОЛЛА

А.И. Аптекарев

Классическая проблема Чеботарева состоит в нахождении компакта минимальной логарифмической емкости, содержащего конечное число заданных точек на комплексной плоскости. Мы обсуждаем современные приложения и обобщения этой проблемы, такие как структура листов римановой поверхности аналитических вектор-функций и асимптотика рациональных аппроксимантов Эрмита-Паде.

Ключевые слова: проблема Чеботарева, логарифмическая емкость, риманова поверхность, рациональные аппроксиманты Эрмита-Паде.

УДК 517.98

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОДНОГО ТРЕХЧАСТИЧНОГО МОДЕЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Г.П. Арзикулов[1], Ю.Х. Эшкабилов[2]

1 *arzikulov79@mail.ru*; Ташкентский государственный политехнический университет имени Ислама Каримова

2 *yusup62@mail.ru*; Каршинский государственный университет

Исследована структура существенного спектра одного трехчастичного модельного оператора H. Дано описание существенному спектру оператора H. Доказано существование отрицательных собственных значений оператора H и получена оценка для количества отрицательных собственных значений.

Ключевые слова: существенный спектр, дискретный спектр, нижняя грань существенного спектра, трехчастичный дискретный оператор.

В работе [1] приведен модельный оператор в теории дискретных операторов Шредингера, которые возникают в теории трехчастичных квантовых систем. Пусть $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$, $(d_1 \in \mathbb{N})$ и $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$, $(d_2 \in \mathbb{N})$ – компактные множества. Обозначим через H_0 оператор умножения на функцию $k_0(x,y)$, т.е.

$$(H_0 f)(x,y) = k_0(x,y) f(x,y),$$

где $k_0(x,y)$ – произвольная вещественнозначная непрерывная функция на $\Omega_1 \times \Omega_2$.

Рассмотрим непрерывные функции $k_1(x,s,y)$ на $\Omega_1^2 \times \Omega_2$ и $k_2(x,t,y)$ на $\Omega_1 \times \Omega_2^2$. Предположим, что $k_1(x,s,y) = \overline{k_1(s,x,y)}$, $k_2(x,t,y) = \overline{k_2(x,y,t)}$.

В гильбертовом пространстве $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ определим линейный ограниченный самосопряженный оператор

$$H = H_0 - (T_1 + T_2), \tag{1}$$

здесь действия операторов T_1 и T_2 заданы по формулам

$$T_1 f(x,y) = \int\limits_{\Omega_1} k_1(x,s,y) f(s,y) d\mu_1(s),$$

$$T_2 f(x,y) = \int\limits_{\Omega_2} k_2(x,t,y) f(x,t) d\mu_2(t).$$

Интегрирование понимается в смысле Лебега по мере $\mu_j(\cdot)$ на $\Omega_j,\ j=1,2$. В дальнейшем будем предполагать, что $ds = d\mu_1(s),\ dt = d\mu_2(t)$ и $\mu_1(\Omega_1) = \mu_2(\Omega_2) = 1$. Иногда операторы вида (1) называются частично интегральными операторами (ЧИО) типа Фредгольма. Исследованию различных свойств ЧИО типа Фрелгольма посвящена монография [2]. В работе [3] исследованы спектральные свойства самосопряженных ЧИО типа Фредгольма.

В работе [1] исследован спектр одного трехчастичного дискретного оператора H^t, возникающего в модели Хаббарда. Импульсное представление дискретного оператора H^t реализует самосопряженный оператор вида (1).

Существенные и дискретные спектры некоторых трехчастичных операторов, заданных (1), исследованы, например, в работах [4-7]. В работе [4] получены достаточные условия конечности и бесконечности дискретного спектра в модели (1), когда $k_1(x,s,y) = const, k_2(x,t,y) = const$ и при $\sigma_{ess}(H) = \sigma(H_0)$. В работе [5] доказано существование бесконечного количества отрицательных собственных значений в модели (1). В работах [6,7] исследован существенный спектр и число собственных значений, лежащих ниже нижней грани существенного спектра в модели (1), когда функция $k_0(x,y)$ имеет специальный вид: $k_0(x,y) = u(x)v(y)$ и ядра k_1, k_2 являются вырожденными с одним и двумя порядками. Дано полное описание существенного спектра оператора H (1). Доказано существование одного или двух собственных значений, лежащих ниже нижнего края существенного спектра.

Пусть $\{\varphi_k(x), k = \overline{1,n}\}$ и $\{\psi_j(y), j = \overline{1,m}\}$ – ортонормированная система непрерывных функций из $L_2(\Omega_1)$ и $L_2(\Omega_2)$, $\varphi(y)$ и $\psi(x)$ – вещественнозначные непрерывные функции на Ω_2 и Ω_1, соответственно. В настоящей работе рассматривается модельный оператор H (1) с вырожденными ядрами $k_1(x,s,y), k_2(x,t,y)$:

$$k_1(x,s,y) = \varphi(y) q_1(x,s),\ \ k_2(x,t,y) = \psi(x) q_2(y,t)$$

здесь

$$q_1(x,s) = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x) \overline{\varphi_k(s)},\ \ q_2(y,t) = \psi(x) \sum_{k=1}^{m} b_k \psi_k(y) \overline{\psi_k(t)},$$

где $a_k > 0,\ b_j > 0$.

Пусть $u(x)$ и $v(y)$ – неотрицательные непрерывные функции на Ω_1 и Ω_2, соответственно и $0 \in Ran(u),\ 0 \in Ran(v)$, при этом $u(x^{\min}) = 0,\ x^{\min} \in \Omega_1$ и $v(y^{\min}) = 0,\ y^{\min} \in \Omega_2$, и пусть функции $\varphi(y),\ \psi(x)$ также неотрицательные и $\varphi(y^{\min}) = \varphi_{\max} = \max\limits_{y \in \Omega_2} \varphi(y),\ \psi(x^{\min}) = \psi_{\max} = \max\limits_{x \in \Omega_1} \psi(x)$.

Рассмотрим ЧИО H, заданные равенством

$$H = H_0 - (T_1 + T_2), \tag{2}$$

в пространстве $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$, где

$$H_0 f(x,y) = u(x)v(y)f(x,y).$$

Через $\rho(\cdot)$, $\sigma(\cdot)$, $\sigma_{ess}(\cdot)$ и $\sigma_{disc}(\cdot)$, как обычно, обозначаются резольвентное множество, спектр, существенный спектр и дискретный спектр самосопряженных операторов [8].

Работа [6] посвящена изучению существенных и дискретных спектр ЧИО H (2) с вырожденными ядрами $k_1(x,s,y)$ и $k_2(x,t,y)$. В разделе 3 дано полное описание существенного спектра оператора H (2).

Число

$$E_{\min}(A) = \inf\{\lambda : \lambda \in \sigma_{ess}(A)\}, \;\; E_{\max}(A) = \sup\{\lambda : \lambda \in \sigma_{ess}(A)\}$$

будем называть *нижней гранью* (или *нижним краем*) и *верхней гранью* (или *верхним краем* существенного спектра оператора A.

В пространстве $L_2(\Omega_1 \times \Omega_2)$ рассмотрим самосопряженные операторы $W_k = H_0 - T_k, k = 1,2$.

Имеем [3]: $\sigma(W_k) = \sigma_{ess}(W_k), \;\; k = 1,2$ и $\sigma(W_k) = \sigma_0 \cup \sigma_k$, где $\sigma_0 = \sigma(H_0) = Ran(k_0)$.

Положим

$$\pi_j^{\max} = \max_{t \in \Omega_k} \pi_j(t), \;\; k \neq j, \;\; j = 1,2, \;\; k = 1,2,$$

$$a_{max} = max\{a_1, \cdots, a_n\}, \;\; b_{max} = max\{b_1, \cdots, b_m\}.$$

Теорема 1.*Справедливы следующие равенства*

а) $\sigma_{ess}(W_1) = [-\varphi_{\max} \cdot a_{max}, \pi_1^{\max}] \cup [0, u_{\max} \cdot v_{\max}]$;
б) $\sigma_{ess}(W_2) = [-\psi_{\max} \cdot b_{max}, \pi_2^{\max}] \cup [0, u_{\max} \cdot v_{\max}]$.

Из положительности операторов H_0, T_1 и T_2 для оператора H (2) имеем $\sigma(H) \subset (-\infty, u_{\max} \cdot v_{\max}]$. Тогда, в силу теоремы 3.1, дискретный спектр оператора H лежит в множестве отрицательных чисел. Определим матрицу Λ порядка $m \times n$ с положительными элементами $\xi_{i,j}$:

$$\xi_{i,j} = \int\limits_{\Omega_1} u(x)|\varphi_i(x)|^2 dx \cdot \int\limits_{\Omega_2} v(y)|\psi_j(y)|^2 dy.$$

Предложение.

а) Пусть $\varphi_{\max} \cdot a_{max} \geq \psi_{\max} \cdot b_{max}$. *Если для элемента* $\xi_{i,j}$ *матрица* Λ *выполнено условие*

$$\xi_{i,j} < \psi_{\min} \cdot b_j + (\varphi_{\min} \cdot a_i - \varphi_{\max} \cdot a_{max}),$$

то оператор H (2) имеет отрицательное собственное значение, лежащее слева от нижней грани существенного спектра.

б) Пусть $\varphi_{\max} \cdot a_{max} \leq \psi_{\max} \cdot b_{max}$. *Если для элемента* $\xi_{i,j}$ *матрица* Λ *выполнено условие*

$$\xi_{i,j} < \varphi_{\min} \cdot a_i + (\psi_{\min} \cdot b_j - \psi_{\max} \cdot b_{max}),$$

то оператор H (2) имеет отрицательное собственное значение, лежащее слева нижней грани существенного спектра.

Теорема 2. *Количество собственных значений в модели* (2)*, лежащих ниже нижней грани* $E_{\min}(H)$ *существенного спектра* $\sigma_{ess}(H)$*, не превосходит числа* $n \cdot m$.

Литература

1. Эшкабилов Ю.Х. *Об одном дискретном "трехчастичном" операторе Шредингера в модели Хаббарда* // ТМФ. – 2006. – V. 149, № 2. – P. 228–243.

2. Appell J.M., Kalitvin A.S., Zabrejko P.P. *Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations.* – New York, 2000.

3. Эшкабилов Ю.Х. *Частично интегральные операторы типа Фредгольма.* – Germany, Saarbrucken: LAP, 2013.

4. Albeverio S., Lakaev S.N., Muminov Z.I. *On the Number of Eigenvalues of a Model Operator Associated to a System of Three-Particles on Lattices* // Russ. J. of Math. Phys. – 2007. – V. 14, № 4. – P. 377–387.

5. Расулов Т.Х. *Асимптотика дискретного спектра одного модельного оператора, ассоциированного с системой трех частиц на решетке* // ТМФ. – 2010. – Т. 163, № 1. – С. 34–44.

6. Арзикулов Г.П., Эшкабилов Ю.Х. *О существенном и дискретном спектрах одного частично интегрального оператора типа Фредгольма* // Мат. труды. – 2014. – Т. 17, № 2. – С. 23–40.

7. Кучаров Р.Р., Эшкабилов Ю.Х. *О конечности отрицательных собственных значений частично интегрального оператора* // Мат. труды. – 2014. – Т. 17, № 1. – С. 128–144.

8. Рид М., Саймон Б. *Методы современной математической физики.* – Т.1, Функциональный анализ. – М.: Мир, 1977.

ABOUT SPECTRAL PROPERTIES OF A THREE-PARTICLE MODEL OPERATOR

G.P. Arzikulov, Yu.Kh. Eshkabilov

We investigate the structure of the essential spectrum of a three-particle model operator H*. The description of the essential spectrum of the operator* H *is given. We prove the existence of negative eigenvalues of the operator* H *and obtain an estimate for the number of negative eigenvalues of the operator* H.

Keywords: essential spectrum, discrete spectrum, lower bound of the essential spectrum, three particle discrete operator.

УДК 517.982.22+517.982.27

О НЕКОТОРЫХ ПРОБЛЕМАХ ТЕОРИИ ДИЗЪЮНКТНО ОДНОРОДНЫХ СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВ

С.В. Асташкин[1]

1 *astash56@mail.ru*; Самарский национальный исследовательский университет им. С.П. Королева

Это краткий обзор недавних результатов автора, которые решают некоторые проблемы, связанные с теорией дизъюнктно однородных симметричных пространств и ее приложениями.

Ключевые слова: банахова решетка, симметричное пространство, компактный оператор, строго сингулярный оператор, дизъюнктно однородная банахова решетка, p-дизъюнктно однородная банахова решетка.

Банахова решетка E называется *дизъюнктно однородной* ($E \in DH$), если любые две последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ попарно дизъюнктных нормированных элементов в E содержат эквивалентные подпоследовательности. Это означает, что существует возрастающая последовательность натуральных чисел $\{n_k\}$ и константа $C > 0$ такие, что для произвольных $a_k \in \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots$ выполнено неравенство:

$$C^{-1}\Big\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_{n_k}\Big\|_E \le \Big\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k y_{n_k}\Big\|_E \le C\Big\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_{n_k}\Big\|_E.$$

В частности, для данного $1 \le p \le \infty$, говорят, что банахова решетка E *p-дизъюнктно однородна* ($E \in p$-DH), если всякая нормированная дизъюнктная последовательность в E содержит подпоследовательность, эквивалентную каноническому базису l_p (c_0, если $p = \infty$). Очевидно, что каждая p-DH банахова решетка имеет также и DH-свойство. В то же время существуют DH решетки, которые не обладают p-DH свойством ни при каком $1 \le p \le \infty$ (например, пространство Цирельсона). Эти понятия, введенные в работе [1], оказались очень полезными при изучении соотношений между различными классами операторов, действующих в банаховых решетках.

Напомним, что линейный оператор, ограниченный из одного банахова пространства в другое, называется *строго сингулярным*, если никакое сужение его на бесконечномерное подпространство не является изоморфизмом. Это понятие было введено Т. Като в связи с решением некоторых проблем теории возмущений фредгольмовых операторов [2]. Известно [3, предложение 2.c.10], что сумма строго сингулярного и фредгольмового операторов является по-прежнему фредгольмовым оператором с тем же индексом, и поэтому спектры строго сингулярных и компактных операторов имеют весьма близкие свойства.

Как легко видеть, множество всех строго сингулярных операторов образует замкнутый операторный идеал, который содержит идеал компактных операторов. В то же время, согласно классической теореме Ж. Калкина [4], последний является единственным нетривиальным замкнутым идеалом операторов, ограниченных в гильбертовом пространстве. Поэтому в этом случае идеалы строго сингулярных и компактных операторов совпадают [2]. Аналогичный результат верен также для пространств l_p, $1 \le p < \infty$, и c_0 [5]. Про такие пространства говорят, что они имеют *свойство Като*. Что касается функциональных пространств, то уже $L_p[0,1]$ не является пространством Като при $p \neq 2$. Действительно, во-первых, так как пространства l_p и l_q (c_0, если $p = \infty$), $1 \leq p \neq q \leq \infty$, не имеют общих бесконечномерных подпространств (см., например, [6, следствие 2.1.6]), то тождественное вложение $I : l_p \to l_q$ строго сингулярно для любых $p < q$. Кроме того, всякая нормированная дизъюнктная последовательность $\{x_n\} \subset L_r[0,1]$ эквивалентна в $L_r[0,1]$ каноническому базису l_r, $1 \leq r \leq \infty$, а замкнутая линейная оболочка $[x_n]$ дополняема в $L_r[0,1]$ [6, предложение 6.4.1]. С другой стороны, согласно неравенству Хинчина, система Радемахера $\{r_n\}$ эквивалентна в $L_r[0,1]$ для каждого $r < \infty$ каноническому базису l_2 и, точно так же, замкнутая линейная оболочка $[r_n]$ дополняема в $L_r[0,1]$ при $1 < r < \infty$ (см., например, [6, теорема 6.2.3]). Если теперь $\{x_n\} \subset L_p[0,1]$ — произвольная нормированная дизъюнктная последовательность, то из приведенных фактов легко следует, что в случае $p > 2$ оператор $T_1 := J_1 I_1 P_1 : L_p[0,1] \to L_p[0,1]$, где P_1 — проектор из $L_p[0,1]$ на $[r_n]$,

$$I_1\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n\Big) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n,$$

а $J_1 : [x_n] \to L_p[0,1]$ — оператор тождественного вложения, строго сингулярен, но не компактен. Если $1 \leq p < 2$, то же самое можно сказать про оператор $T_2 := J_2 I_2 P_2 : L_p[0,1] \to L_p[0,1]$, где P_2 — проектор из $L_p[0,1]$ на $[x_n]$,

$$I_2\Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\Big) := \sum_{n=1}^{\infty} a_n r_n,$$

а $J_2 : [r_n] \to L_p[0,1]$ — оператор тождественного вложения.

В то же время, хорошо известна классическая теорема В. Д. Мильмана [7], из которой следует, что для всякого строго сингулярного оператора $T : L_p(\mu) \to L_p(\mu)$ оператор T^2 компактен. Недавно в работе [8] это утверждение было распространено на некоторые классы DH банаховых решеток. Более того, наряду с другими результатами, ее авторы доказали, что каждая 2-DH банахова решетка, имеющая конечный котип (Радемахера), имеет свойство Като [8, теорема 2.12].

Больше информации о введенных понятиях и, в частности, примеры DH, p-DH банаховых решеток, а также банаховых пространств со свойством Като см. в [1,8–12]. Цель этой заметки состоит в кратком изложении недавнего прогресса в решении ряда проблем в теории DH решеток, сформулированных в работах [9] и [12]. Относительно используемых далее понятий из теории симметричных пространств (с.п.) см. монографии [13] и [14].

1. Проблема двойственности. Предположим, что банахова решетка E имеет DH свойство. Верно ли тогда, что решетка E^*, сопряженная к ней, также им обладает? Простые примеры показывают, что это не так в нерефлексивном случае. В то же время, до последнего времени для всех известных примеров рефлексивных банаховых функциональных решеток, определенных на вероятностном пространстве, ответ на поставленный выше вопрос был положителен. В связи с этим, в [10, с. 5877] (см. также Вопрос 3 в обзоре [12]) была сформулирована следующая проблема: Существует ли рефлексивное p-DH с.п. на $[0,1]$, сопряженное к которому не имеет DH свойства? Ответ на него был недавно дан в [15, теорема 2].

Теорема 1. *Для каждого* $1 < p < \infty$ *существует рефлексивное* p*-DH с.п.* X_p *на* $[0,1]$ *такое, что сопряженное пространство* $X_p^* \notin DH$.

Доказательство теоремы 1 основано на применении специального случая вещественного метода интерполяции, введенного Ж. Л. Лионсом и Ж. Петре [16]. В то время как параметрами классических функторов вещественного метода $(\cdot,\cdot)_{\theta,p}$, $0 < \theta < 1$, $1 \le p < \infty$, являются лишь весовые l_p-пространства, интерполяционные пространства из [16] порождаются произвольными банаховыми пространствами с нормированным 1-безусловным базисом $\{e_n\}$. Решающим обстоятельством, позволяющим конструировать с.п. с заданной решеточной структурой, является существование прямой связи между свойствами блок-базисов относительно базиса $\{e_n\}$ и последовательностей попарно дизъюнктных функций из соответствующего интерполяционного пространства.

Гораздо проще можно построить пример рефлексивного p-DH с.п. на $[0,\infty)$, сопряженное к которому не имеет DH свойства. Более того, в [15, теорема 5] получена следующая характеризация L_p-пространств в классе рефлексивных с.п.

Теорема 2. *Пусть* X *— рефлексивное с.п. на* $(0,\infty)$*. Следующие условия эквивалентны:*

(a) $X \in DH$ *и* $X^* \in DH$;

(b) $X = L_p(0,\infty)$ *для некоторого* $1 < p < \infty$.

2. Слабо p-DH симметричные пространства.

В работе [9] был введен следующий ослабленный вариант p-DH свойства. Пусть $1 \le p < \infty$. С.п. X на $[0,1]$ называется слабо p-дизъюнктно однородным (слабо p-DH) если каждая последовательность нормированных характеристических функций содержит подпоследовательность, эквивалентную в X каноническому базису l_p.

Ясно, что каждое p-DH с.п. имеет слабое p-DH свойство. В [9, теорема 5.1] авторы доказали, что для пространств Орлича верно и обратное утверждение. Там же был поставлен вопрос о том, всякое ли с.п. X на $[0,1]$, которое имеет слабое p-DH свойство, является p-DH пространством (позднее он был повторен в [12, с. 19]). Этот вопрос был мотивирован тем, что слабо p-DH с.п. имеют ряд "хороших" свойств. В частности, каждое с.п., изоморфное (как банахово пространство) некоторому 2-DH с.п. Y, является слабым 2-DH пространством [9, следствие 3.6]. В то же время, было неизвестно, справедливо ли усиление этого результата с заменой слабого 2-DH на обычное 2-DH свойство.

В работе [17] доказан следующий результат (см. там теорему 4).

Теорема 3. *Пусть* $1 \le p, q < \infty$*. Существует слабо* p*-DH с.п.* $Z_{p,q}$ *на* $[0,1]$*, которое содержит последовательность попарно дизъюнктных функций* $\{g_m\}$*, эквивалентную каноническому базису* l_q*, такую, что ее замкнутая линейная оболочка* $[g_m]$ *дополняема в* $Z_{p,q}$*. Если* $1 < p, q < \infty$*, то пространство* $Z_{p,q}$ *рефлексивно.*

В частности, применяя последнюю теорему в случае $1 \le p \ne q < \infty$, мы получаем отрицательный ответ на вопрос о том, всякое ли с.п. X на $[0,1]$, которое имеет слабое p-DH свойство, является p-DH пространством.

Следствие 1. *Для каждого* $1 \le p < \infty$ *существует слабо* p*-DH с.п., которое не имеет DH свойства.*

Сформулируем теперь результаты (см. [17, теорема 5 и следствие 2]), которые положительно решают поставленную выше проблему об устойчивости p-DH свойства относительно изоморфизмов в классе с.п.

Теорема 4. *Пусть* $1 \le p < \infty$ *и* X *— с.п. на* $[0,1]$*, изоморфное дополняемому подпространству некоторого с.п.* $Y \in p$*-DH. Тогда либо* $X = L_2$ *(с эквивалентностью норм), либо* $X \in p$*-DH.*

Следствие 2. *(i) Если с.п.* X *изоморфно дополняемому подпространству некоторого с.п.* $Y \in 2$*-DH, то* $X \in 2$*-DH.*

(ii) Пусть $1 \le p < \infty$*. Если с.п.* X *изоморфно некоторому с.п.* $Y \in p$*-DH, то* $X \in p$*-DH.*

3. Симметричные пространства со свойством Като.

Как уже упоминалось, в работе [8] был получен ряд результатов о соотношении между классами строго сингулярных и компактных операторов, действующих в банаховых решетках, имеющих конечный котип (Радемахера). В частности, было доказано, что каждая 2-DH банахова решетка, имеющая конечный котип, имеет свойство Като. Тем не менее, если рассматривать только с.п., требование конечности котипа (весьма ограничительное) оказывается излишним. При этом центральную роль в определении точного соотношения между классами строго сингулярных и компактных операторов играет классическая система Радемахера, состоящая из функций $r_j(t) := \operatorname{sign}(\sin(2^j \pi t))$, $j = 1, 2, \ldots$, где $0 \leqslant t \leqslant 1$. Хорошо известно (см. [18]), что эта система эквивалентна в с.п. X каноническому базису l_2 тогда и только тогда, когда имеет место вложение $X \supset G$, где G — замыкание L_∞ в пространстве Орлича, порожденном функцией $e^{u^2} - 1$. В связи с этим пространство G играет существенную роль при решении многих вопросов теории с.п. Как нетрудно видеть (см., например, [19]),

$$\|x\|_G \asymp \sup_{0<t\le 1} \frac{x^*(t)}{\ln^{1/2}(e/t)} \text{ и } x \in G, \text{ если и только если } \lim_{t\to 0} \frac{x^*(t)}{\ln^{1/2}(e/t)} = 0$$

(здесь $x^*(t)$ — невозрастающая перестановка функции $|x(t)|$). Отсюда, в частности, следует, что класс всех с.п. X таких, что $X \supset G$, имеет непустое пересечение со множеством с.п. с тривиальным (бесконечным) котипом. Тем самым, следующий результат [20, теорема 3] (см. также [21, теорема 2]) является усилением теоремы 2.12 из работы [8].

Теорема 5. *Пусть* X *—* 2*-DH с.п. на* $[0,1]$*,* $X \supset G$*. Тогда каждый строго сингулярный оператор, действующий в* X*, компактен. Другими словами, всякое* 2*-DH с.п., удовлетворяющее условию* $X \supset G$*, имеет свойство Като.*

Условие $X \supset G$ в теореме 5 является "почти" точным. Напомним, что $G^* = L\log^{1/2} L$, где $L\log^{1/2} L$ — пространство Орлича, порожденное возрастающей выпуклой функцией, эквивалентной при больших $u > 0$ функции $u\log^{1/2} u$. Известно (см., например, [14, теорема 2.b.4(ii)]), что замкнутая линейная оболочка $[r_n]$ функций Радемахера дополняема в с.п. X тогда и только тогда, когда $G \subset X \subset L\log^{1/2} L$. Последний факт играет важную роль при доказательстве следующих утверждений (см. [20, теорема 4 и следствие 3]).

Теорема 6. *Предположим, что X — с.п. на $[0,1]$, удовлетворяющее условиям:*

(i) $X \not\supset G$;

(ii) существует последовательность попарно дизъюнктных функций $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$, которая эквивалентна в X каноническому базису l_2;

(iii) $X \subset L\log^{1/2} L$;

(iv) ассоциированное пространство X' сепарабельно.

Тогда существует строго сингулярный оператор $T : X \to X$, который не компактен. Таким образом, любое с.п., удовлетворяющее условиям (i) — (iv), не обладает свойством Като.

Следствие 3. *Пусть X — с.п. такое, что $X \in 2$-DH, $X \not\supset G$ и $X \subset L\log^{1/2} L$. Тогда X не имеет свойства Като.*

Работа подготовлена в рамках выполнения госзадания Минобрнауки, проект 1.470.2016/1.4, а также частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 18-01-00414.

Литература

1. Flores J., Tradacete P., Troitsky V. G. *Disjointly homogeneous Banach lattices and compact products of operators* // J. Math. Anal. Appl. – 2009. – V. 354. – P. 657–663.

2. Kato T. *Perturbation theory for nullity deficiency and other quantities of linear operators* // J. d'Analyse Math. – 1958. – V. 6. – P. 273–322.

3. Lindenstrauss J., Tzafriri L. *Classical Banach Spaces, I: Sequence Spaces.* – Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977. – 190 p.

4. Calkin J. W. *Abstract symmetric boundary conditions* // Trans. Amer. Math. Soc. –1939. – V. 45. – № 3. – P. 360–442.

5. Herman R. H. *On the uniqueness of the ideals of compact and strictly singular operators* // Studia Math. – 1967/1968. – V. 29. – P. 161–165.

6. Albiac F., Kalton N. J. *Topics in Banach Space Theory.* – Springer-Verlag, New York, 2006. – 373 p.

7. Мильман В. Д. *Операторы классов C_0 и C_0^** // В сб. "Теор. функций, функц. анал. и прилож." – Харьков: Изд-во Харьковского ун-та, 1970. – Т. 10. – С. 15–26.

8. Flores J., Hernández F. L., Semenov E. M., Tradacete P. *Strictly singular and power-compact operators on Banach lattices* // Israel J. Math. – 2012. – V. 188. – P. 323–352.

9. Hernández F. L., Semenov E. M., Tradacete P. *Rearrangement invariant spaces with Kato property* // Funct. Approx. Special Issue dedicated to L. Drewnowski. – 2014. – V. 50. – № 2. – P. 215–232.

10. Flores J., Hernández F. L., Spinu E., Tradacete P., Troitsky V. G. *Disjointly homogeneous Banach lattices: Duality and complementation* // J. Funct. Anal. – 2014. – V. 266. – № 9. – P. 5858–5885.

11. Astashkin S. V. *Disjointly homogeneous rearrangement invariant spaces via interpolation*// J. Math. Anal. Appl. – 2015. – V. 421, № 1. – P. 338–361.

12. Flores J., Hernández F. L., Tradacete P. *Disjointly homogeneous Banach lattices and applications* // Ordered Structures and Applications: Positivity VII. Trends in Mathematics. – Springer. – 2016. – P. 179–201.

13. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. *Интерполяция линейных операторов.* – М.: Наука, 1978. – 400 с.

14. Lindenstrauss J., Tzafriri L. *Classical Banach Spaces, II. Function Spaces.* – Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979. – 243 p.

15. Astashkin S. V. *Duality problem for disjointly homogeneous rearrangement invariant spaces* // J. Funct. Anal. – 2019. – V. 276. – P. 3205–3225.

16. Lions J. L., Peetre L. *Sur une classe d'espaces d'interpolation* // Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci. – 1964. – V. 19. – P. 5–68.

17. Astashkin S. V. *Some remarks about disjointly homogeneous symmetric spaces* // Revista Matem. Compl. – http://doi.org/10.1007/s13163-018-0289-y.

18. Rodin V. A., Semenov E. M. *Rademacher series in symmetric spaces* // Anal. Math. – 1975. – V. 1. – № 3. – P. 207–222.

19. Рутицкий Я. Б. *О некоторых классах измеримых функций* // УМН – 1965. – Т. 20. – № 4. – С. 205–208.

20. Astashkin S. V. *Compact and strictly singular operators in rearrangement invariant spaces and Rademacher functions* // (submitted).

21. Асташкин С. В. *О симметричных пространствах со свойством Като* // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2017. – Т. 54. – С. 51–54.

ON SOME PROBLEMS OF THE THEORY OF DISJOINTLY HOMOGENEOUS SYMMETRIC SPACES

S.V. Astashkin

This is a concise survey of recent author's results which give solution of some problems related to the theory of disjointly homogeneous symmetric spaces and its applications.

Keywords: Banach lattice, symmetric space, compact operator, strictly singular operator, disjointly homogeneous Banach lattice, p-disjointly homogeneous Banach lattice.

УДК 517.956.25

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОНВЕКТИВНОЙ ДИФФУЗИИ ВНУТРИ КАПЛИ ПРИ НАЛИЧИИ ОБЪЁМНОЙ ХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ

Р.Г. Ахметов[1]

1 *akrust@mail.ru*; Башкирский государственный педагогический университет им. М.Акмуллы

Рассматривается стационарная задача конвективной диффузии внутри капли, обтекаемой потоком жидкости при малых числах Рейнольдса, с учетом нелинейной объёмной химической реакции. Характерной особенностью задачи является наличие двух безразмерных параметров: константы скорости объёмной химической реакции и числа Пекле, которые определяют распределение концентрации в потоке. Отношение константы скорости объёмной химической реакции и числа Пекле есть величина постоянная. Рассматриваемая задача представляет собой краевую задачу для квазилинейного уравнения в частных производных эллиптического типа с малым параметром при старших производных. В малой окрестности капли построены главные члены асимптотического решения [1].

Ключевые слова: конвективная диффузия, объемная химическая реакция, асимптотическое решение.

Литература

1. Ахметов Р.Г., Милюкова А.В. *Асимптотические решения задачи конвективной диффузии внутри капли, обтекаемой потоком жидкости* // Современные наукоемкие технологии. – 2018. – № 9. – С. 29–34.

ASYMPTOTIC SOLUTIONS OF THE PROBLEM OF CONVECTIVE DIFFUSION INSIDE DROPS WITH VOLUMETRIC CHEMICAL REACTION

R.G. Akhmetov

We consider a stationary problem of convective diffusion inside a droplet, which is streamlined by a liquid flow at low Reynolds numbers, taking into account a nonlinear volumetric chemical reaction. The characteristic feature of the problem is the presence of two dimensionless parameters: a constant of rate of the volumetric chemical reaction and the Peclet number which determine the concentration distribution in the flow. The quantity constant of rate of the volumetric chemical reaction and the Peclet number are assumed to have a constant value. It is a boundary value problem for a quasilinear partial elliptical equation with a small parameter multiplying in higher derivatives. In the small neighborhood of the drop, the principal terms of the asymptotics of the solution are constructed [1].

Keywords: convective diffusion, volumetric chemical reaction, asymptotics of solution.

УДК 517.95

L_P–ОГРАНИЧЕННОСТЬ НЕКОТОРОГО КЛАССА ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Ш.А. Балгимбаева[1]

1 *sholpan.balgyn@gmail.com*; Институт математики и математического моделирования (Алматы, Казахстан)

Устанавливается L_p–ограниченность одного класса псевдодифференциальных операторов с символом, негладким по пространственной переменной, на d–мерном торе при $1 < p < \infty$ при наличии весов.

Ключевые слова: псевдодифференциальный оператор, символ оператора, d–мерный тор.

Псевдодифференциальные операторы (пдо), т.е. операторы имеющие представление

$$T_a u(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} a(x,\xi)\,\hat{u}(\xi)\,e^{2\pi i x\xi}\,d\xi,$$

имеют важное значение в теории общих дифференциальных операторов с переменными коэффициентами, а также в гармоническом анализе. Исследование ограниченности (классов) пдо между различными нормированными пространствами функций и распределений — одна из важных задач теории. Обычно предполагается, что символ $a : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ оператора T_a является гладким, как по пространственной переменной x, так и по частотной переменной ξ, и удовлетворяет некоторым условиям роста (убывания).

Пусть $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ — множества натуральных, целых, действительных и комплексных чисел соответственно; $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$; $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$; $\mathrm{z}_d = \{1, 2, \ldots, d\}$ ($d \in \mathbb{N}$). Для

$x = (x_1, \ldots, x_d)$, $y = (y_1, \ldots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ положим $xy = x_1y_1 + \ldots + x_dy_d$, $|x| := |x|_2 = \sqrt{xx}$; $x \le y$ $(x < y) \Leftrightarrow x_\kappa \le y_\kappa$ $(x_\kappa < y_\kappa)$ для всех $\kappa \in \mathrm{z}_d$. Далее, $\mathbb{T}^d \equiv (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^d$ — d-мерный тор.

Пусть $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ и $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ — пространства Шварца пробных функций и распределений соответственно; $\widehat{f} \equiv \mathcal{F}_d(f)$ — преобразование Фурье для $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Далее для $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_d) \in \mathbb{N}_0^d$, используем стандартные мультииндексные обозначения:

$$\partial^\alpha f(x) (\equiv \partial_x^\alpha f(x)) = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_d^{\alpha_d} f(x), \text{ где } \partial_\kappa = \frac{\partial}{\partial x_\kappa}, \kappa \in \mathrm{z}_d;$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_d, \quad \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_d!; \quad \binom{\alpha}{\gamma} = \frac{\alpha!}{\gamma!(\alpha-\gamma)!} \quad (\gamma \le \alpha).$$

Пусть, далее, $\mathcal{S}'(\mathbb{T}^d)$ — пространство 1-периодических (по всем переменным) распределений, т. е. совокупность всех $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ таких, что $\langle f, \varphi(\cdot + \xi)\rangle = \langle f, \varphi\rangle$ для всех $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ и любых $\xi \in \mathbb{Z}^d$. Известно, что $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{T}^d)$ если и только если $\operatorname{supp} \widehat{f} \subset \mathbb{Z}^d$, т. е. распределение $\widehat{f}$ обращается в 0 на открытом множестве $\mathbb{R}^d \setminus \mathbb{Z}^d$.

Для $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ $(\subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d))$ и $g \in L_1(\mathbb{T}^d)$ $(\subset \mathcal{S}'(\mathbb{T}^d))$ имеем

$$\widehat{f}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-2\pi i \xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}^d; \quad \widehat{g}(\xi) = \int\limits_{\mathbb{T}^d} g(x) e^{-2\pi i \xi x} dx, \quad \xi \in \mathbb{Z}^d.$$

Фиксируем вектор $\mathrm{d} = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{N}^n, n \in \mathbb{N}, n \le d$. Тогда $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d = \mathbb{R}^{d_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{d_n}$ представим в виде $x = (x^1, \ldots, x^n)$, где $x^\nu = (x_{k_{\nu-1}+1}, \ldots, x_{k_\nu}) \in \mathbb{R}^{d_\nu}$.

Далее обозначим $k_\nu = d_1 + \ldots + d_\nu$, $k_0 = 0$ и введем множества $\mathrm{k}_\nu = \{l \in \mathbb{N} : k_{\nu-1} + 1 \le l \le k_\nu\}, \nu \in \mathrm{z}_n$.

Введем вес $M = (M^1, \ldots, M^n)$, где $M^\nu = (m_{k_{\nu-1}+1}, \ldots, m_{k_\nu})$ и $\min_{l \in \mathrm{k}_\nu} m_l = 1$.

Для $y^\nu \in \mathbb{R}^{d_\nu}$ определим действие $t \in \mathbb{R}_+$ на y^ν следующим образом

$$t^{M^\nu} y^\nu = (t^{m_{k_{\nu-1}+1}} y_{m_{k_{\nu-1}+1}}, \ldots, t^{m_{k_\nu}} y_{k_\nu})$$

и обозначим

$$[y^\nu]_\nu := \{t > 0 : t^{-M^\nu} y^\nu = (t^{-1})^{M^\nu} y^\nu \in \{y^\nu \in \mathbb{R}^{d_\nu} : |y^\nu| = 1\}\}.$$

Если $x \in \mathbb{R}^d$, положим

$$t^M x = (t^{M^1} x^1, \ldots, t^{M^n} x^n).$$

Обозначим через Δ_y^ν разность первого порядка для функции $f(x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ по ν-ой "пачке" переменной

$$\Delta_y^\nu f(x) = f(x^1, \ldots, x^\nu - y, \ldots, x^n) - f(x), \nu \in \mathrm{z}_n, y \in \mathbb{R}^{d_\nu}.$$

Приведем обобщение определения модуля непрерывности

Определение. *Набор функций $\{\omega_1(t_1), \omega_2(t_1, t_2), \ldots, \omega_n(t_1, \ldots, t_n)\}$ будем называть модулем непрерывности, если справедливы условия:*
1. Для каждого $\nu \in \mathrm{z}_n$ функции $\omega_\nu(t_1, \ldots, t_\nu) : (\mathbb{R}_+)^\nu \to \mathbb{R}_+$ непрерывная, вогнутая, монотонно возрастающая по каждой переменной $t_l, l \in \mathrm{z}_\nu$;

2. $\omega_\nu(t_1,\dots,t_\nu)$ инвариантна относительно любой перестановки переменных $t_1,\dots,t_\nu$;
3. для каждых $\mu,\nu : 1\le\mu<\nu\le n$

$$\omega_\nu(t_1,\dots,t_\nu)\le 2^{\nu-\mu}\omega_\mu(t_1,\dots,t_\mu).$$

Пусть символ $a(x,\xi)$ удовлетворяет условиям:
I. Для любого $\nu\in \mathrm{z}_n, l\in \mathrm{k}_\nu$ и $\alpha\in\nu\in \mathrm{z}_{d+1}\cup\{0\}$

$$|\partial^\alpha_{\xi_l}a(x,\xi)|\le C(1+[y^\nu]_\nu)^{-m_l\alpha},\xi^\nu\in\mathbb{R}^{d_\nu};$$

II_μ. ($\mu\in \mathrm{z_n}$)
Для любого $\nu\in \mathrm{z}_n, l\in \mathrm{k}_\nu$; $\alpha\in\nu\in \mathrm{z}_{d+1}\cup\{0\}$; $1\le\nu_1<\dots<\nu_\mu\le n$; $y_1\in\mathbb{R}^{d_{\nu_1}},\dots,y_\mu\in\mathbb{R}^{d_{\nu_\mu}}$

$$|\Delta^{\nu_1}_{y_1}\dots\Delta^{\nu_\mu}_{y_\mu}\partial^\alpha_{\xi_l}a(x,\xi)|\le\omega_\mu([y_1]_{\nu_1},\dots,[y_\mu]_{\nu_\mu})(1+[y^\nu]_\nu)^{-m_l\alpha},\xi^\nu\in\mathbb{R}^{d_\nu}.$$

Отметим работы, которые имеют непосредственное отношение к нашему результату. В непериодическом случае — это результат Р. Койфмана и И. Мейера [1] и результат М. Ямазаки [2]. Сформулируем в наших обозначениях теорему из [2], периодическая версия которой является основным результатом сообщения.

Теорема А. *Следующие три условия относительно модулей непрерывности эквивалентны:*
1. Для каждого $\nu\in \mathrm{z}_n$ имеем

$$\int_0^1\dots\int_0^1\frac{\omega_\nu(t_1,\dots,t_\nu)^2}{t_1\cdot\ldots\cdot t_\nu}dt_1\dots dt_\nu<\infty,$$

2. Если символ $a(x,\xi)$ удовлетворяет условиям $\mathrm{II}_\mu,\mu\in \mathrm{z}_n$, тогда соответствущий оператор T_a ограничен в L_p для каждого $1<p<\infty$,
3. Для каждого символа $a(x,\xi)$, удовлетворяющего условиям $\mathrm{II}_\mu,\mu\in \mathrm{z}_n$, существует $1<p<\infty$ такой, что оператор ограничен в L_p.

В периодическом случае отметим работу Д.Б. Базарханова [3], в которой развиты, в частности, результаты из [1] на случай периодических пдо с символами, которые являются негладкими по пространственной переменной и имеют достаточно малую гладкость по частнотной переменной.

Обозначим через $\Sigma^{(\mathrm{r})}_\omega=\Sigma_\omega(\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^d)$ пространство символов $a:\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ таких, что выполнены условия I, II_μ $\forall\mu\in \mathrm{z}_n$.

Пусть $\Sigma^{(\mathrm{t})}_\omega=\Sigma_\omega(\mathbb{T}^m\times\mathbb{Z}^d)$ — класс символов $a:\mathbb{T}^d\times\mathbb{Z}^d\to\mathbb{C}$, которые являются сужениями на $\mathbb{T}^d\times\mathbb{Z}^d$ символов $a^{(\mathrm{r})}\in\Sigma^{(\mathrm{r})}_\omega$ таких, что $\forall\xi\in\mathbb{Z}^d$ функция $a^{(\mathrm{r})}(x,\xi)$ является периодической по пространственной переменной x.

Рассмотрим формальный псевдодифференциальный оператор, соответствующий периодическому символу $a:\mathbb{T}^d\times\mathbb{Z}^d\to\mathbb{C}$

$$T_a:\ u(x)\mapsto T_au(x)=\sum_{\xi\in\mathbb{Z}^d}a(x,\xi)\widehat{u}(\xi)e^{2\pi i\xi x}.$$

Сформулируем основной результат.

Теорема. *Псевдодифференциальный оператор T_a ограничен на $L_p(\mathbb{T}^d)$ при всех $1 < p < \infty$ для любого $a \in \Sigma_\omega(\mathbb{T}^d \times \mathbb{Z}^d)$ тогда и только тогда, когда ω_ν^2, $\nu \in \mathrm{z}_n$, удовлетворяет условию Дини:* $\int_0^1 \cdots \int_0^1 \frac{\omega_\nu(t_1,\ldots,t_\nu)^2}{t_1\cdot\ldots\cdot t_\nu} dt_1\ldots dt_\nu < \infty.$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта AP05133257 МОиН РК.

Литература

1. Coifman R. R., Meyer Y. *Au–dela des operateurs pseudo-differentiels* // Asterisque. – 1978. – V. 57 – P. 1–185.

2. Yamazaki M. *The L^p-boundedness of pseudo-differential operators satisfying estimates of parabolic type and product type* // Proc. Japan Acad. Series A. Math Sci. – 1984. – V. 60. – № 8. – P. 279–282.

3. Базарханов Д. Б. *L_p-ограниченность некоторых классов псевдодифференциальных операторов на m-мерном торе* // Труды Инст. матем. мех. УрО РАН. – 2016. – Т. 22. – № 4. – С. 64–80.

L_P–BOUNDEDNESS OF SOME CLASS OF PERIODICAL PSEUDO–DIFFERENTIAL OPERATORS

Sh.A. Balgimbayeva

L_p–boundedness of some classes of pseudo–differential operators with symbols that are nonsmooth in the spatial variable is established on the d–dimensional torus for $1 < p < \infty$ with weights.

Keywords: pseudo-differential operator, symbol, d–dimensional torus.

УДК 517.982.256 + 515.124.4

О СВЯЗИ ТОЧЕК ШТЕЙНЕРА И p-МЕДИАН

Б.Б. Беднов[1]

1 *noriiii@inbox.ru*; Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

Исследуются свойства множества p-медиан для элементов $x_1,\ldots,x_n$ банахова пространства. Формулируется условие пересечения множества p-медиан и множества точек Штейнера для элементов $x_1,\ldots,x_n$.

Ключевые слова: точки Штейнера, p-медианы, банаховы пространства.

Пусть $(X,\|\cdot\|)$ — банахово пространство. Для заданного набора $M_n = \{x_1,\ldots,x_n\} \subset X$ множество p-медиан состоит из таких точек $s \in X$, для которых

$$\sum_{k=1}^n \|x_k - s\|^p = \inf\left\{\sum_{k=1}^n \|x_k - x\|^p : x \in X\right\}.$$

Напомним, что множество точек Штейнера (в англоязычной литературе — медиан) $\mathrm{st}(M_n)$ состоит из таких точек $s \in X$, для которых

$$\sum_{k=1}^n \|x_k - s\| = \inf\left\{\sum_{k=1}^n \|x_k - x\| : x \in X\right\}.$$

Заметим, что точки Штейнера — это p-медианы при $p = 1$, а чебышёвские центры — это p-медианы при $p = \infty$ (точка s называется чебышёвским центром для M_n, если $\max_{k=1}^{n} \|x_i - s\| = \inf\left\{\max_{k=1}^{n} \|x_k - x\| : x \in X\right\}$).

Основные свойства p-медиан отражены в работе [1]. Следующие две леммы являются обобщениями хоршо известного критерия элемента наилучшего приближения [2].

Лемма А. *Пусть $M_n = \{x_1, \dots, x_n\} \subset X$. Элемент $s \in X$ принадлежит множеству p-медиан для M_n тогда и только тогда, когда найдутся такие функционалы $f_1, \dots, f_n \in X^*$, что 1) $\sum_{j=1}^{n} f_j = 0$; 2) $\|f_j\| = K\|x_j - s\|^{\frac{p}{q}}$ при некотором $K \neq 0$; 3) $f_j(x_j - s) = \|x_j - s\|$.*

Лемма Б. *Пусть $M_n = \{x_1, \dots, x_n\} \subset X$. Элемент $s \in X$ принадлежит множеству $\mathrm{st}(M_n)$ тогда и только тогда, когда найдутся такие функционалы $f_1, \dots, f_n \in X^*$, что 1) $\sum_{j=1}^{n} f_j = 0$; 2) $\max \|f_j\| = 1$; 3) $f_j(x_j - s) = \|x_j - s\|$.*

Последнее равенство означает, что либо $\|f_j\| = 1$, либо $x_j = s$.

Из этих лемм следует

Теорема. *Пусть $M_n = \{x_1, \dots, x_n\} \subset X$, $s \in \mathrm{st}(M_n)$ и расстояния $\|x_i - s\|$ одинаковы для каждого $j = 1, \dots, n$. Тогда s принадлежит множеству p-медиан для M_n при каждом $p \in (1, \infty)$.*

Из этой теоремы и примера, построенного в пункте d теоремы 6 работы [3], следует, что существует трёхмерное строго выпуклое гладкое пространство, в котором не существует липшицевой выборки из отображения, сопоставляющего набору точек $\{x_1, \dots, x_n\}$ множество их p-медиан.

Работа поддержана РФФИ (проект № 18-01-00333) и Программой Президента Российской Федерации поддержки ведущих научных школ (грант НШ 6222.2018.1).

Литература

1. Vesely L. *Generalized centers of finite sets in Banach spaces* // Acta Math. Univ. Comenianae. – 1997. – Vol. LXVI. – № 1. – C. 83–115.

2. Singer I. *Best approximation in normed linear spaces by elements of linear subspaces.* – Bucharest: Springer-Verlag, 1970.

3. Беднов Б.Б., Бородин П.А., Чеснокова К.В. *Существование липшицевых выборок из точек Штейнера* // Матем. сб. – 2018. – Т. 209. – № 2. – С. 3–21.

ON CONNECTION BETWEEN STEINER POINTS AND p-MEDIANS

B.B. Bednov

The properties of the set of p-medians for the elements $x_1, \dots, x_n$ from Banach space are investigated. The condition for the intersection of the set of p-medians and the set of Steiner points for the elements $x_1, \dots, x_n$ is formulated.

Keywords: Steiner points, p-medians, Banach spaces.

УДК 519.6, 536.2

О ПРИМЕНЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ФОРМУЛ ПРИ НАХОЖДЕНИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРЫ В ЗАДАЧЕ О ВНЕЗАПНОМ НАГРЕВЕ ПОВЕРХНОСТИ НЕОДНОРОДНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

В.Б. Беднова[1]

1 *msu.mmf.vb@gmail.com*; Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова

В статье приведен метод решения температурной задачи о внезапном нагреве поверхности неоднородного по глубине полупространства. Используются интегральные формулы, которые позволяют выразить решение исходной задачи для уравнения с переменными коэффициентами, зависящими от координат и времени, через решение такой же задачи для уравнения с постоянными коэффициентами.

Ключевые слова: теплопроводность, уравнения в частных производных с переменными коэффициентами, интегральные формулы.

Рассматривается нестационарная одномерная задача теплопроводности о внезапном нагреве (при $t \geq 0$) неоднородного полупространства $x \geq 0$ по границе $x = 0$. Предполагаем, что температурные условия имеют вид

$$\theta(0,t) = \theta_0 H(t);\ \theta(x,0) = 0, \tag{1}$$

где $\theta(x,t)$ — отклонение температуры от начального значения $\theta_0 = const$, $H(t)$ — единичная функция Хевисайда.

Вместе с исходной задачей (аналогично работам [1], [2]) рассматривается сопутствующая задача о внезапном нагреве поверхности однородного полупространства с такими же начальными и граничными условиями. Отклонение температуры в сопутствующей задаче обозначим $\psi(x,t)$.

Для исходной задачи аналогично [2] получена интегральная формула

$$\theta(x,t) = \psi(x,t) + \int\limits_0^t \int\limits_0^L \frac{\partial G(x,\xi,t-\tau)}{\partial \xi} \left(\lambda^0 - \lambda(\xi,\tau) \frac{\partial \psi(\xi,\tau)}{\partial \xi} \right) d\xi d\tau +$$
$$+ \int\limits_0^t \int\limits_0^L G(x,\xi,t-\tau) \left(C_\varepsilon^0 - C_\varepsilon(\xi,\tau) \dot{\psi}(\xi,\tau) \right) dV_\xi d\tau,$$

где $G(x,\xi,t-\tau)$ — функция Грина исходной задачи (книги [3], [4]).

Далее решение исходной задачи представляется в виде ряда по всевозможным производным от решения сопутствующей задачи (в предположении, что решение сопутствующей задачи бесконечно дифференцируемо и раскладывается в ряд Тэйлора в окрестности точки (x,t)):

$$\theta(x,t) = \sum_{p+q=0}^{\infty} N_{(q)i_1 \ldots i_q}^{(p)}(x) \frac{\partial^p \psi_{,i_1 \ldots i_q}}{\partial t^p},\ p = 0,1,2,\ldots;\ q = 0,1,2,\ldots.$$

Функции $N^{(p)}_{(q)i_1\ldots i_q}(x)$ при $p+q>0$ — непрерывные функции координат, представляющие собой взвешенные моменты функции Грина и ее производных. Верхний и нижний индексы в круглых скобках означают порядок производной по времени и координате соответственно. При отрицательных p или q структурные (согласно работе [2]) функции N тождественно равны нулю, $N^{(0)}_{(0)}=1$.

Подставляя полученное представление в виде ряда решения исходной задачи в уравнение теплопроводности, получаем рекуррентные уравнения для структурных функций:

$$p+q=1:\ \left(\lambda_{11}N^{(0)}_{(1)i_1,x}+\lambda_{1i_1}\right)_{,x}=0,\ \left(\lambda_{11}N^{(1)}_{(0),x}\right)_{,x}-C_\varepsilon=-C^0_\varepsilon;$$

$$p+q=2:\ \left(\lambda_{11}N^{(0)}_{(2)i_1i_2,x}+\lambda_{1i_2}N^{(0)}_{(1)i_1}\right)_{,x}+\lambda_{i_21}N^{(0)}_{(1)i_1,x}+\lambda_{i_2i_1}=\lambda^0_{i_2i_1},$$

$$\left(\lambda_{11}N^{(1)}_{(1)i_1,x}+\lambda_{1i_1}N^{(1)}_{(0)}\right)_{,x}+C_\varepsilon N^{(1)}_{(0),x}+C_\varepsilon N^{(0)}_{(1)i_1}=0,$$

$$\left(\lambda_{11}N^{(2)}_{(0),x}\right)_{,x}-C_\varepsilon N^{(1)}_{(0)}-\rho=-\rho^0;$$

$$p+q\ge 3:\ \left(\lambda_{11}N^{(p+q)}_{(q)i_1\ldots i_q,x}+\lambda_{1i_q}N^{(p+q)}_{(q-1)i_1\ldots i_{q-1}}\right)_{,x}+\lambda_{i_q1}N^{(p+q)}_{(q-1)i_1\ldots i_{q-1},x}+$$
$$+\lambda_{i_qi_{q-1}}N^{(p+q)}_{(q-2)i_1\ldots i_{q-2}}-C_\varepsilon N^{(p+q-1)}_{(q)i_1\ldots i_q}-\rho N^{(p+q-2)}_{(q)i_1\ldots i_q}=0.$$

В случае одномерной задачи теплопроводности рекуррентные уравнения становятся обыкновенными дифференциальными, решения которых довольно легко найти. Например, при $p+q=1$ получаем

$$N^{(0)}_{(1)i_1}(x)=\int_0^x\lambda^{-1}_{11}(\zeta)\left(\frac{1}{\langle\lambda^{-1}_{11}\rangle}\langle\lambda^{-1}_{11}\lambda_{1i_1}\rangle-\lambda_{1i_1}(\zeta)\right)d\zeta,$$

$$N^{(1)}_{(0)}(x)=\int_0^x\lambda^{-1}_{11}(\zeta)\int_0^\zeta\left(C_\varepsilon(\hat\zeta)-C^0_\varepsilon\right)d\hat\zeta\,d\zeta-\int_0^x\lambda^{-1}_{11}d\zeta\frac{1}{\langle\lambda^{-1}_{11}\rangle}\langle\lambda^{-1}_{11}\int_0^\zeta\left(C_\varepsilon(\hat\zeta)-C^0_\varepsilon\right)d\hat\zeta\rangle.$$

Учитывая, что решение сопутствующей задачи (частный случай задачи Даниловской, работы [5], [6]) имеет вид $\psi(x,t)=\theta_0\,\mathrm{erfc}\left(\frac{x_1}{\sqrt{4\kappa t}}\right)$, можем с нужной точностью найти приближенное решение задачи.

Литература

1. Горбачев В. И. *Интегральные формулы в связанной задаче термоупругости неоднородного тела. Применение в механике композитов* // ПММ. – 2014. – Т. 78. – № 2. – С. 277–299.

2. Горбачев В. И. *Интегральные формулы решений основных линейных дифференциальных уравнений математической физики с переменными коэффициентами* // Чебышевский сборник. – 2017. – Т. 18. – № 3. – С. 209–233.

3. Соболев С. Л. *Уравнения математической физики.* – М.: Наука, 1966. – 443 с.

4. Владимиров В. С. *Обобщенные функции в математической физике.* – М.: Наука, 1979. – 318 с.

5. Карслоу Г., Егер Д. *Теплопроводность твердых тел.* – М.: Наука, 1964. – 487 с.

6. Новацкий В. *Теория упругости.* – М.: Мир, 1975. – 872 с.

ON THE USE OF INTEGRAL FORMULAS WHEN FINDING THE TEMPERATURE DISTRIBUTION IN THE PROBLEM OF SUDDEN HEATING OF THE SURFACE OF A NON-UNIFORM HALF-SPACE

V.B. Bednova

This article presents the solution method of the temperature problem of the sudden heating of the non-uniform in depth half-space surface. We use integral formulas that allow us to obtain the solution of the original problem for an equation with variable coefficients depending on coordinates and time, by solving the same problem for an equation with constant coefficients.

Keywords: heat conductivity, partial differential equations with variable coefficients, integral formulas.

УДК 517.929

НОВЫЙ ПОДХОД В ВОПРОСАХ СУЩЕСТВОВАНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТОЧЕЧНОГО ТИПА

Л.А. Бекларян[1], А.Л. Бекларян[2]

1 *lbeklaryan@outlook.com*; Центральный экономико-математический институт РАН, Москва
2 *abeklaryan@hse.ru*; Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Москва

Доклад посвящен теории функционально-дифференциальных уравнений точечного типа

$$\dot{x}(t) = f(t, x(q_1(t)), \dots, x(q_s(t))), \quad t \in B_R$$

где $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *– отображение класса* $C^{(0)}$*;* $q_j(\cdot)$, $j = 1, \dots, s$ *– гомеоморфизмы прямой, сохраняющие ориентацию;* B_R *– замкнутый интервал* $[t_0, t_1]$*, замкнутая числовая полупрямая* $[t_0, +\infty[$*, или числовая прямая* $\mathbb{R}$*.*

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения точечного типа, начально-краевая задача, солитонные решения, периодические решения.

Важность уравнений рассматриваемого типа определяется тем, что теория решений функционально-дифференциальных уравнений точечного типа тесно связана с теорией солитонных решений для бесконечномерных обыкновенных дифференциальных уравнений [2].

Подход, предлагаемый для исследования таких уравнений, основан на формализме, центральным элементом которого являются конструкции, использующие конечно порожденную группу

$$Q = < q_1, \dots, q_s >$$

гомеоморфизмов прямой (групповой операцией в такой группе является суперпозиция гомеоморфизмов). Используя замену времени, для функций отклонениями аргумента

$$[q_j(t) - t], \quad j = 1, \dots, s$$

всегда можем добиться выполнения условия

$$h = \max_{i \in \{1,\dots,s\}} h_j < +\infty, \quad h_j = \sup_{t \in \mathbb{R}} |q_j(t) - t|, \quad j = 1, \dots, s.$$

Основная цель при изучении функционально-дифференциальных уравнений точечного типа – это исследование начально-краевой задачи

$$\dot{x}(t) = f(t, x(q_1(t), \dots, x(q_s(t))), \quad t \in B_R, \tag{1}$$

$$\dot{x}(t) = \varphi(t), \quad t \in \mathbb{R} \backslash B_R, \quad \varphi(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \tag{2}$$

$$x(\bar{t}) = \bar{x}, \quad \bar{t} \in \mathbb{R}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \tag{3}$$

которую будем называть *основной начально-краевой задачей*. В ситуации общего положения, когда $\bar{t} \neq t_0, t_1$, или отклонения аргумента произвольны, мы имеем задачу с *нелокальными начально-краевыми условиями*.

Другой важный класс задач связан с изучением периодических и ограниченных решений для исходного функционально-дифференциального уравнения точечного типа, определённого на прямой.

Определим банахово пространство функций $x(\cdot)$ с весами

$$\mathscr{L}_\mu^n C^{(k)}(\mathbb{R}) = \left\{ x(\cdot) : x(\cdot) \in C^{(k)}\left(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n\right), \max_{0 \le r \le k} \sup_{t \in \mathbb{R}} \| x^{(r)}(t) \mu^{|t|} \|_{\mathbb{R}^n} < +\infty \right\}, \quad \mu \in (0, 1),$$

и нормой

$$\| x(\cdot) \|_\mu^{(k)} = \max_{0 \le r \le k} \sup_{t \in \mathbb{R}} \| x^{(r)}(t) \mu^{|t|} \|_{\mathbb{R}^n}.$$

Сформулируем систему ограничений на правую часть функционально-дифференциальных уравнений точечного типа:

(a) $f(\cdot) \in C^{(0)}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n \times s}, \mathbb{R}^n)$ (в условии (a) функцию $f(\cdot)$ по переменной t можно положить кусочно непрерывной с разрывами первого рода в точках дискретного множества);

(b) условие квазилинейного роста: для любых $t, z_j, \bar{z}_j, j = 1, \dots, s$

$$\| f(t, z_1, \dots, z_s) \|_{\mathbb{R}^n} \le M_0(t) + M_1 \sum_{j=1}^{s} \| z_j \|_{\mathbb{R}^n}, \quad M_0(\cdot) \in C^{(0)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}),$$

и условие Липщица

$$\| f(t, z_1, \dots, z_s) - f(t, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_s) \|_{\mathbb{R}^n} \le M_2 \sum_{j=1}^{s} \| z_j - \bar{z}_j \|_{\mathbb{R}^n}$$

(в действительности $M_1 \le M_2$, но константы M_1 и M_2 можно взять равными);

(c) существует $\mu^* \in \mathbb{R}_+$ такое, что выражение

$$\sup_{i\in\mathbb{Z}} M_0(t+i)\left(\mu^*\right)^{|i|}$$

для любого $t \in \mathbb{R}$ имеет конечное значение и как функция аргумента t непрерывна.

Теорема 1. [1] *Если для некоторого $\mu \in (0,\mu^*) \cap (0,1)$ выполняется неравенство*

$$M_2 \sum_{j=1}^{s} \mu^{-h_j} < \ln \mu^{-1},$$

то при любых фиксированных начально-краевых условиях

$$\bar{x} \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$$

существует решение (абсолютно непрерывное)

$$x(\cdot) \in \mathscr{L}_\mu^n C^{(0)}(\mathbb{R})$$

основной начально-краевой задачи (1)-(3). *Такое решение является единственным, как элемент пространства $\mathscr{L}_\mu^n C^{(0)}(\mathbb{R})$ непрерывно зависит от начально-краевых условий $\varphi(\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^n), \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ и правой части уравнения – функции $f(\cdot)$.*

Будут изучаться периодические решения уравнения

$$\dot{x}(t) = f\left(t, x(t+n_1),\ldots,x(t+n_s)\right), \quad t \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

правая часть которого периодическая по времени с периодом ω. Не нарушая общности будем полагать, что $n_1 \leq \ldots \leq n_s \leq \omega$. Для наглядности при изложении мы ограничимся случаем, когда величины отклонений аргумента $n_1,\ldots,n_s$ и период ω правой части уравнения по переменной времени соизмеримы. В этом случае, не нарушая общности, мы можем считать, что величины $n_1,\ldots,n_s,\omega$ являются целочисленными. Последнее свойство можно добиться с помощью замены времени типа растяжения.

Среди основных методов изучения ограниченных решений дифференциальных уравнений следует отметить метод направляющих функций [3], [5], [6], метод интегральных уравнений [9], [8], вариационные методы и т.д. Условия существования ω-периодического решения для обыкновенного дифференциального уравнения, основанные на исследовании свойств оператора сдвига приводятся в работах многих исследователей, в частности, в работах [4], [6]. В них, для обыкновенных дифференциальных уравнений такие условия формулируются в виде поточечного свойства для правой части уравнения на какой-либо окружности (геометрического свойства для фазового портрета) и формулируется в виде ограничения: для всех $t \in [0,\omega], \|\bar{x}\|_{\mathbb{R}^n} = r$

$$\left(\bar{x}, g(t,\bar{x})\right) \leq 0$$

при каком-либо фиксированном радиусе $r > 0$.

В работе [2] представлен подход для изучения периодических решений, основанный на учете асимптотических свойств решений, который был использован для изучения решений как обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), так и более широкого класса функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ) точечного типа.

Введем обозначения

$$M_{0\infty\mu}(t) = \sup_{i\in\mathbb{Z}} M_0(t+i)\mu^{|i|}, \quad \mathbb{A}_f = \frac{\left(\mu^{-\omega}-1\right)}{\ln\mu^{-1}}, \quad \mathbb{B}_f = \frac{M_2\sum_{j=1}^{s}\mu^{-|n_j|}}{\left(\ln\mu^{-1} - M_2\sum_{j=1}^{s}\mu^{-|n_j|}\right)},$$

$$\mathbb{C}_f(r) = \left[M_2 sr + \inf_{\xi\in[0,\omega]}\sup_{\tau\in[\xi,\xi+1]} M_{0\infty\mu}(\tau)\right], \quad \tilde{\mathbb{C}}_f(r) = \left[M_2 sr + \sup_{t\in\mathbb{R}}\|g(t,0,\ldots,0)\|_{\mathbb{R}^n}\right].$$

Сформулируем теорему существования периодического решения в терминах средних по периоду.

Теорема 2. [2] *Пусть отображение $f(\cdot)$ удовлетворяет условиям (a)–(d), является ω-периодической по времени функцией, где $\omega \in \mathbb{Z}_+$. Если для заданных $\mu \in (0,\mu^*)\cap(0,1)$, $r>0$ и всех $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$, $\|\bar{x}\|_{\mathbb{R}^n} = r$ выполняются условия*

$$M_2\sum_{j=1}^{s}\mu^{-|n_j|} < \ln\mu^{-1},$$

$$\left(\frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|_{\mathbb{R}^n}}, \int_0^{\omega} f(\tau,\bar{x},\ldots,\bar{x})\,d\tau\right) < -\mathbb{A}_f\mathbb{B}_f\mathbb{C}_f(r)$$

то для исходного функционально-дифференциального уравнения точечного типа (1) *существует ω-периодическое по времени решение $x(\cdot)$. Для такого решения $\|x(0)\|_{\mathbb{R}^n} \le r$ и оно лежит в шаре пространства $\mathbb{R}^n$ радиуса $\mu^{-\omega}\hat{\mathscr{R}}$, где*

$$\hat{\mathscr{R}} = r + \frac{\mathbb{C}_f(r)}{\left(\ln\mu^{-1} - M_2\sum_{j=1}^{s}\mu^{-|n_j|}\right)}.$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проект 19-01-00147 а).

Литература

1. Бекларян Л. А. *Об одном методе регуляризации краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом* // Доклады Академии Наук СССР. – 1991. – Т. 317. – № 5. – С. 1033–1038.

2. Бекларян Л. А. *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. Групповой подход.* – М.: Факториал Пресс, 2007. – 288 с.

3. Бекларян Л. А. *Новый подход в вопросе существования периодических решений для функционально-дифференциальных уравнений точечного типа* // Изв. РАН. Сер. матем. – 2018. – Т. 82. – № 6. – С. 3–35.

4. Красносельский М. А. *Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений.* – М.: Наука, 1966. – 331 с.

5. Красносельский М. А., Забрейко П.П. *Геометические методы нелинейного анализа.* – М.: Наука, 1975. – 512 с.

6. Розенвассер В. Н. *Колебания нелинейных систем.* – М.: Наука, 1969. – 576 с.

7. Перов А. И., Коструб И. Д. *Ограниченные решения нелинейных векторно-матричных дифференциальных уравнений n-го порядка.* – Воронеж: Научная книга, 2013. – 227 с.

8. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. *Устойчивость решений дифференциалных уравнений в банаховом пространстве.* – М.: Наука, 1970. – 529 с.

A NEW APPROACH TO THE EXISTENCE OF PERIODIC SOLUTIONS FOR FUNCTIONAL-DIFFERENTIAL EQUATIONS OF POINTWISE TYPE

L.A. Beklaryan, A.L. Beklaryan

The report is devoted to the theory of functional differential equations of pointwise type

$$\dot{x}(t) = f(t, x(q_1(t)), \dots, x(q_s(t))), \quad t \in B_R,$$

where $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{ns} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *is a map of the class* $C^{(0)}$*;* $q_j(\cdot)$*,* $j = 1, \dots, s$*, are homeomorphisms of the line that preserve orientation;* B_R *is either a closed interval* $[t_0, t_1]$*, or a closed semi-line* $[t_0, +\infty[$*, or the whole line* $\mathbb{R}$*.*

Keywords: functional differential equations of pointwise type, initial-boundary value problem, soliton solutions, periodic solutions.

УДК 517.958

О ФАКТОРИЗАЦИИ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОБОБЩЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Н.С. Белевцов[1], С.Ю. Лукащук[2]

1 *nikitabelewtsov@mail.ru*; Уфимский государственный авиационный технический университет
2 *lsu@ugatu.su*; Уфимский государственный авиационный технический университет

Рассматривается дробно-дифференциальное обобщение уравнения Гельмгольца с потенциалом Рисса по пространственной переменной. Доказано утверждение о представлении фундаментального решения рассматриваемого уравнения через функцию Фокса. Ставится задача и приводятся основные шаги алгоритма факторизации полученного фундаментального решения.

Ключевые слова: потенциал Рисса, фундаментальное решение, уравнение Гельмгольца.

Рассматривается дробно-дифференциальное обобщение однородного уравнения Гельмгольца [1]:

$$\Delta R^\alpha u - u = 0,\ u = u(x, y),\ (x, y) \in R^2,\ \alpha \in (0, 1), \tag{1}$$

где

$$R^\alpha u(x, y) = \frac{1}{\gamma(\alpha)} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\mu, \nu)}{\left[(x-\mu)^2 + (y-\nu)^2\right]^{\frac{2-\alpha}{2}}} d\mu d\nu,\ \gamma(\alpha) = 2^\alpha \pi \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) / \Gamma\left(\frac{2-\alpha}{2}\right)$$

– потенциал Рисса [2], $\Gamma(z)$ – гамма-функция.

Для уравнения (1) было доказано следующее утверждение.

Утверждение 1. *Фундаментальное решение* $G_\alpha(x, y)$ *дробно-дифференциального обобщения оператора Гельмгольца* $\Delta R^\alpha - E$ *является решением уравнения*

$$\Delta R^\alpha G_\alpha - G_\alpha = \delta(x, y)$$

и имеет вид

$$G_\alpha(x,y) \equiv G_\alpha(r) = H_{31}^{12}\left[\left(\frac{2}{r}\right)^{\frac{2-\alpha}{2}} \middle| \begin{matrix} (0,1)\,,\ \left(0,\frac{2-\alpha}{2}\right),\ \left(0,\frac{2-\alpha}{2}\right) \\ (0,1) \end{matrix}\right],\ r = \sqrt{x^2+y^2}, \tag{2}$$

где $H_{pq}^{mn}\left[z \middle| \begin{matrix}(a_p;A_p)\\(b_q;B_q)\end{matrix}\right]$ *– H–функция Фокса [4].*

В математической физике важным классом задач являются задачи о факторизации фундаментальных решений, соответствующих случаю, когда функция точечного влияния имеет вид $\delta(x-\xi, y-\eta)$.

Обозначим

$$G_\alpha(x-\xi, y-\eta) \equiv G_\alpha(r-R) = G_\alpha(z),\ z = \sqrt{r^2+R^2-2rR\cos(\theta-\varphi)}.$$

Для достижения факторизации рассматриваемой функции Грина, представим ее в виде

$$G_\alpha(z) = \frac{\omega_0(r,R)}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} \omega_m(r,R)\cos\left(m\left(\theta-\varphi\right)\right). \tag{3}$$

Подстановка (3) в дробно-дифференциальное обобщение уравнения Гельмгольца (1) после ряда преобразований приводит к дробно-дифференциальному обобщению модифицированного уравнения Бесселя вида

$$\left(R\frac{d}{dR}\right)^2 L_m^\alpha\omega_m - m^2 L_m^\alpha\omega_m - R^2\omega_m = 0, \tag{4}$$

$$L_m^\alpha\omega_m = 2^{-\alpha}R^{-m}\left[{}_0I_s^{\alpha/2}s^{m-\alpha/2}{}_sI_\infty^{\alpha/2}s^{-m/2}\omega_m|_{R=\sqrt{s}}\right]_{s=R^2},$$

где ${}_0I_s^{\alpha/2}f(s)$, ${}_sI_\infty^{\alpha/2}f(s)$ – левосторонние и правосторонние дробные интегралы Римана-Лиувилля [2]. Нетрудно проверить, что при $\alpha=0$ уравнение (4) переходит в модифицированное уравнение Бесселя [3].

Функция $\omega_m(R)$ является решением уравнения (4), она должна быть аналитической в начале координат и стремиться к нулю на бесконечности. При $R=r$ производная потенциала Рисса указанной функции должна иметь разрыв непрерывности:

$$\frac{d}{dR}R^\alpha\left(\omega_m\right)\Big|_{R=r-0} - \frac{d}{dR}R^\alpha\left(\omega_m\right)\Big|_{R=r+0} = \frac{A}{r},\ A = const. \tag{5}$$

Решение задачи (4), (5) ищется в виде

$$\omega_m(r,R) = \begin{cases} A_m(r)I_m^\alpha(R),\ R\le r; \\ B_m(r)K_m^\alpha(R),\ R\ge r, \end{cases}$$

где $I_m^\alpha(R)$, $K_m^\alpha(R)$ – линейно независимые решения дробно-дифференциального обобщения уравнения Бесселя (4), такие, что $\lim\limits_{R\to\infty} K_m^\alpha(R) = 0$, $\lim\limits_{R\to 0} I_m^\alpha(R) = const$.

Условие непрерывности функции $\omega_m(r,R)$ в точке $R=r$ имеет вид:

$$A_m(r)I_m^\alpha(r) - B_m(r)K_m^\alpha(r) = 0. \tag{6}$$

Решая систему уравнений (5), (6), находим функции $A_m(r),\ B_m(r)$. В результате, факторизованное разложение функции $G_\alpha(z)$ примет вид

$$G_\alpha(z) = \begin{cases} \dfrac{A_0(r) I_0^\alpha(R)}{2} + \sum\limits_{m=0}^{\infty} A_m(r) I_m^\alpha(R) \cos(m(\theta-\varphi)),\ R \le r; \\ \dfrac{B_0(r) K_0^\alpha(R)}{2} + \sum\limits_{m=0}^{\infty} B_m(r) K_m^\alpha(R) \cos(m(\theta-\varphi)),\ R \ge r. \end{cases}$$

Работа выполнялась в рамках проекта государственного задания Министерства образования и науки РФ №1.3103.2017/4.6 на 2017–2019 гг. по теме "Математическое и компьютерное моделирование процессов фильтрации в неоднородных коллекторах нефтегазовых месторождений на основе дробно-дифференциального подхода".

Литература

1. Stana D., Felix del Tesoa, Vazquez J.L. *Finite and infinite speed of propagation for porous medium equations with nonlocal pressure* // Journal of Differential Equations. — 2016. — Vol. 260.— № 2.— P. 1154–1199.

2. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications*. – London: Gordon and Breach Science Publishers, 1993.

3. Bateman H., Erdelyi A. *Higher transcendental functions*. – New York: McGraw-Hill, 1953-1955.

4. Kilbas A.A., Saigo M. *H-Transforms: Theory and Application, vol. Analytical methods and special functions of An International Series of Monographs in Mathematics*. – Chapman and Hall, 2004.

ON A FACTORIZATION OF THE FUNDAMENTAL SOLUTION
OF A FRACTIONAL HELMHOLTZ EQUATION

N.S. Belevtsov, S.Yu. Lukashchuk

A space-fractional generalization of the Helmholtz equation is considered. It has been proved that the fundamental solution of the considered equation can be represented as the Fox H-function. Main steps of the factorization algorithm are given for the obtained fundamental solution.

Keywords: Riesz potential, fundamental solution, Helmholtz equation.

УДК 517.956

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ В МАТЕРИАЛЕ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ УЛЬТРАКОРОТКИМИ ЛАЗЕРНЫМИ ИМПУЛЬСАМИ

Л.А. Бигаева[1], И.И. Латыпов[2]

1 *bigla@rambler.ru*; Башкирский государственный университет, Уфа, ул. З. Валиди, 32
2 *latypovii@rambler.ru*; Башкирский государственный университет, Уфа, ул. З. Валиди, 32

В докладе рассматривается задача нахождения распределения температуры в твердом материале при облучении ультракороткими лазерными импульсами. Приводится двухтемпературная модель описания переходных явлений в неравновесном электронном газе и решетке при субпикосекундном лазерном воздействии.

Ключевые слова: асимптотика, нестационарное уравнение теплопроводности, сингулярно возмущенная краевая задача, лазерный импульс, подвижная граница.

Введение. Интерес к изучению различного рода локально-неравновесных систем и процессов переноса (энергии, массы, импульса) связан, с одной стороны, с естественным направлением развития науки (равновесные системы, локально-равновесные и локально-неравновесные), а с другой – с быстрым развитием технологии, использованием материалов со сложной структурой (полимеров, жидких кристаллов, капиллярно-пористых и других дисперсных систем), лазерной техники. Быстрое развитие экспериментальной техники привело к тому, что, начиная с 80-х годов, исследования абляции проводились с лазерными импульсами наносекундного диапазона, в последующие годы все больше внимания уделяется абляции под действием ультракоротких лазерных импульсов пикосекундного и фемтосекундного диапазонов, для которых квазистационарный режим абляции не достигается [1,3]. В случае металла одной из особенностей являются эффекты, связанные с электрон-фононным взаимодействием, и явления, обусловленные горячим электронным газом в веществе. Также важным является задача исследования влияния граничных условий и импульсного режима облучения на распределение температуры в материале.

В работе рассматривается задача нахождения распределения температуры в твердом материале при облучении ультракороткими лазерными импульсами, приводится двухтемпературная модель описания переходных явлений в неравновесном электронном газе и решетке при субпикосекундном лазерном воздействии в следующих постановках [2,3]: модель диффузионного типа, представляющая собой систему двух параболических уравнений теплопроводности; модель уравнения переноса гиперболического типа, представляющая собой систему двух уравнений переноса гиперболического типа.

Постановка задачи

Модель диффузионного типа. Двухтемпературная модель [2] описывает транспорт энергии внутри металла с помощью системы уравнений нестационарной теплопроводности для температуры электронов и решетки:

$$c_e\frac{\partial T_e(z,t)}{\partial t}=c_e\nu\frac{\partial T_e(z,t)}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\chi_e\frac{\partial T_e(z,t)}{\partial z}\right)+D_k\cdot Q-\mu_e\left(T_e(z,t)-T_i(z,t)\right),\quad (x,t)\in\Omega,$$

$$c_i\frac{\partial T_i(x,t)}{\partial t}=c_i\nu\frac{\partial T_i(x,t)}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\chi_i\frac{\partial T_i(x,t)}{\partial z}\right)+D_k\cdot Q+\mu_e\left(T_e-T_i\right),\quad (x,t)\in\Omega,$$

$$T_e(z,\ t_k)=T_{e,k}(z),\quad T_e(z,\ t_0)=T_{e,0}(z)=T_0,\quad k=\overline{0,m},$$

$$T_i(z,\ t_k)=T_{i,k}(z),\quad T_i(z,\ t_0)=T_{i,0}(z)=T_0,\ \ D_k=\begin{cases}1, & k=2p\\ 0, & k=2p+1\end{cases},$$

$$\Omega=\{\,(x,t):\ 0<\ z\ <\ H,\ \ t_0<t<t_\infty\},$$

$$-\chi\cdot\frac{\partial T_e(z,t)}{\partial z}\bigg|_{z=0}=J_e(t),\ J_e(t)=-k_0b_0\left(T_{e,s}(t)+T_0\right)^2\exp\left\{-\frac{T_a}{T_{e,s}(t)+T_0}\right\},$$

$$-\chi \cdot \frac{\partial T_i(z,t)}{\partial z}\bigg|_{z=0} = J_i(t) = -\varrho \nu \mathrm{L},\ \nu = \nu_0 \exp\left\{-\frac{T_u}{T_{i,s}+T_0}\right\},$$

$$-\chi \cdot \frac{\partial T_e(z,t)}{\partial z}\bigg|_{z=H} = \psi_e(t) + \sigma_{1,e}\left[T_e(z,t)-T_0\right] + \sigma_{2,e}\left[T_e^4(z,t)-U_0^4\right],$$

$$-\chi \cdot \frac{\partial T_i(z,t)}{\partial z}\bigg|_{z=H} = \psi_i(t) + \sigma_{1,i}\left[T_i(z,t)-T_0\right] + \sigma_{2,i}\left[T_i^4(z,t)-U_0^4\right],$$

где $\mu_e = c_e/\tau$ – коэффициент скорости обмена энергией между электронной и решеточной подсистемами (τ – характерное время обмена для электронной подсистемы); b_0 – постоянная Ричардсона; $k_0 = k_b\left(T_{s,e} - T_0\right)/e$ – коэффициент преобразования плотности потока энергии J_e в энергетические единицы, где индекс s – обозначает значение соответствующей величины на поверхности $z = 0$; $H,\ \psi,\ L$ – толщина, плотность и удельная теплота плавления материала; $\nu,\ T_a$ – константы, характеризующие модель испарения. Функции $\psi_e,\ \psi_i$ и константы $\sigma_{1,e},\ \sigma_{1,e},\ \sigma_{1,i},\ \sigma_{1,i}$ определяют режимы теплообмена на обратной стороне пластины. Функция $Q(z,t)$ описывает вид и характер источника тепла.

Данная модель применима в случае, когда работают классические законы Фурье, т.е. для времен, много больших, чем характерное время τ_e установления равновесного распределения в электронном газе, которое в большинстве задач составляет несколько фемтосекунд.

Модель уравнения переноса гиперболического типа. Двухтемпературная модель диффузионного типа справедливы при условии, что время установления равновесия в подсистемах много меньше времени установления равновесия между ними. Если учитывать процессы релаксации внутри каждой подсистемы, получим двухтемпературную модель системы уравнений переноса гиперболического типа [2]. Применительно к процессу теплообмена между электронным газом и решеткой при облучении поверхности металлов сверхкороткими импульса энергии система примет вид

$$\frac{a_e}{\nu_F^2}\frac{\partial^2 T_e(z,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial T_e(z,t)}{\partial t} = a_e \frac{\partial^2 T_e(z,t)}{\partial z^2} + Q_e + \mu \cdot F_e(\tau_e),$$

$$\frac{a_i}{\nu_C^2}\frac{\partial^2 T_i(z,t)}{\partial t^2} + \frac{\partial T_i(z,t)}{\partial t} = a_i \frac{\partial^2 T_i(z,t)}{\partial z^2} + Q_i + \mu \cdot F_i(\tau_i),$$

где $Q_e = W + \tau_e \cdot \frac{\partial W}{\partial t}$, $F_e(\tau_e) = (T_e - T_i) + \tau_e \frac{\partial (T_e - T_i)}{\partial t} = -F_i(\tau_i)$, $\nu_e = \left(\frac{a_e}{\tau_e}\right)^{\frac{1}{2}} \approx \nu_F$, $\nu_i = \left(\frac{a_i}{\tau_i}\right)^{\frac{1}{2}} \approx \nu_C$, ν_C – скорость звука в металле; $\tau_e,\ \tau_i$ – время релаксации к локальному равновесию подсистем соответственно; W – интенсивность распределенных в системе источников энергии; $a_e = \frac{\lambda_e}{C_e \varrho_e}$, $a_i = \frac{\lambda_i}{C_i \varrho_i}$; μ – коэффициент теплообмена между подсистемами.

Решение задачи. Ставится задача аналитического и численного исследования распределение температуры в материале при лазерной абляции. В этом случае источник тепла Q может быть определена в виде $Q = -\frac{\partial I}{\partial z} = \alpha \cdot I$, $I(0,t) = I_s(t) = A \cdot I(t)$, где $\alpha,\ I_s$ – коэффициент поглощения и интенсивность излучения на поверхности материала, зависящей от формы лазерного импульса.

Исходную задачу, вводя безразмерные переменные, мы сводим к решению системы сингулярно возмущенных краевых задач уравнения теплопроводности с нелинейными граничными условиями. Приближенное решение которой, используя "геометро-оптический" асимптотический метод [4,5], получаем в виде асимптотического разложения решения в смысле Пуанкаре по степеням малых параметров, в зависимости от близости рассматриваемой точки к границам [5-8].

Литература

1. Прохоров А. М., Конов В. И., Урсу И., Михэилеску И. Н. *Взаимодействие лазерного излучения с металлами.* – М.: Наука, 1988.

2. Соболев С. Л. *Процессы переноса и бегущие волны в локально-неравновесных системах* // УФН. – 1991. – Т. 161. – С. 5–29.

3. Анисимов С. И., Лукьянчук Б. С. *Избранные вопросы теории лазерной абляции* // УФН. – 2002. – Т. 172, № 3.

4. Kravchenko V. F., Nesenenko G. A., Latypov I. I. *An application of integral equations to a singularly perturbed nonstationary boundary value problem for the heat equation in a domain with moving boundaries* // Differential Equations. – V. 35, Iss. 9. – 1999. – P. 1184–1192.

5. Латыпов И. И. *Приближенный расчет распределения температурного поля активного элемента твердотельного лазера* // Труды кафедры экспериментальной и теоретической физики института физики молекул и кристаллов УНЦ РАН. Вып. 1. – Уфа: Гилем, 2001. – С. 82–92.

6. Латыпов И. И. *Моделирование испарения материала короткими лазерными импульсами* // Труды четвертой РНК по теплообмену: В 8 томах. Т. 5. Испарение, конденсация. – М.: Изд.дом МЭИ, 2006. – С. 138–142.

7. Latypov I. I. *Approximate solution to a singular perturbed boundary value problem of thermal shielding* // IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conf. Series. – 918 (2017) 012005.

8. Latypov I. I., Bigaeva L. A., Chudinov V. V., Gilev A. Y., Gaisin F. R. *Material evaporation with ultrashort laser exposure* // IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering. – 537 (2019) 022068.

STUDY OF NON-STATIONARY THERMAL PROCESSES IN THE MATERIAL WHEN EXPOSED ULTRASHORT LASER PULSES

L.A. Bigaeva, I.I. Latypov

The article deals with the problem of finding the temperature distribution in a solid material when irradiated by ultrashort laser pulses, two-temperature model is a description of transient phenomena in nonequilibrium electron gas and lattice at subpicosecond laser irradiation.

Keywords: asymptotics, nonstationary heat equation, singular perturbed boundary value problem, laser pulse, moving boundary.

УДК 517.956.222

ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА “О СКАЧКЕ” ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

И.А. Бикчантаев[1]

1 *ibikchan@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Для однородного дифференциального уравнения второго порядка эллиптического типа с постоянными коэффициентами исследуется краевая задача о нахождении двоякопериодических решений по заданному скачку их и их производных на гладком и на неспрямляемом замкнутом контуре. Установлены необходимые и достаточные условия разрешимости задачи, получены явные формулы для ее решения.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение, краевая задача, двоякопериодические функции.

Пусть $L = \sum_{k=0}^{2} a_k \frac{\partial^2}{\partial x^{2-k} \partial y^k}$ — эллиптический оператор с постоянными комплексными коэффициентами $a_0,\ a_1,\ a_2$. Эллиптичность означает, что $a_2 \neq 0$ и характеристический многочлен $a_0 + a_1 s + a_2 s^2$ не имеет вещественных корней. Обозначим корни этого многочлена через s_1 и s_2. Будем предполагать, что они различны и $\operatorname{Im} s_q > 0,\ q = 1,\ 2$. Рассмотрим уравнение

$$Lf = 0. \tag{1}$$

Действительная и мнимая части решения f этого уравнения удовлетворяют основному уравнения плоской анизотропной теории упругости (см. [1], с. 32).

Здесь изучается двоякопериодическая задача сопряжения для решений этого уравнения.

Двоякопериодические решения уравнения (1).

Пусть ω_1 и ω_2 — комплексные числа, такие, что $\operatorname{Im}(\omega_2/\omega_1) \neq 0$. Они порождают двоякопериодическую группу P_2 преобразований $\omega(z) = z + m_1\omega_1 + m_2\omega_2,\ m_1,\ m_2 = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$, с основными периодами ω_1 и ω_2. Чтобы получить одну из фундаментальных областей R_0 группы P_2 возьмем произвольную точку $\xi \in \mathbb{C}$ и построим параллелограмм с вершинами $\xi,\ \xi + \omega_1,\ \xi + \omega_1 + \omega_2,\ \xi + \omega_2$. Противоположные стороны этого параллелограмма связаны преобразованиями $z \to z + \omega_1$ и $z \to z + \omega_2$, порождающими всю группу P_2. Для определенности будем считать, что начало координат находится в R_0.

Изучим решения уравнения (1), инвариантные относительно группы P_2.

Пусть Ω — открытое множество в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, инвариантное относительно группы P_2.

Общее решение уравнения (1) на множестве Ω может быть записано в виде [2]

$$f(z) = \varphi_1(z_1) + \varphi_2(z_2), \tag{2}$$

где $z_q = T_q(z) := x + s_q y,\ q = 1,\ 2,$ — аффинное преобразование плоскости комплексного переменного $z = x + \mathrm{i}y$, сохраняющее ориентацию, φ_q — аналитические функции в $T_q(\Omega)$. Положим $\omega_{kj} := T_j(\omega_k),\ k,\ j = 1,\ 2$. Для единственности представления

(2) можно считать, что $\varphi_2(a_2) = 0$, где $a_2 := T_2(a),\ a \in \Omega$. Если $f(z)$ непрерывна в $\overline{\Omega}$, то точку a можно брать и на границе $\partial\Omega$ множества Ω.

Следуя Л.И. Чибриковой ([3], с. 213), функцию $g(z)$ будем называть квазипериодической, если при изменении аргумента z на ω она приобретает некоторое постоянное слагаемое η, то есть $g(z+\omega) - g(z) = \eta$.

Лемма. *Если $f(z)$ есть регулярное в Ω решение уравнения (1), инвариантное относительно группы P_2, то функции $\varphi_1(z_1)$ и $\varphi_2(z_2)$ квазипериодические с циклическими постоянными $-\varphi_2(a_2+\omega_{k2})$ и $\varphi_2(a_2+\omega_{k2})$ соответственно.*

Двоякопериодическая задача „о скачке“ для аналитических функций.

Пусть дан гладкий замкнутый контур Γ_0, лежащий внутри параллелограмма периодов R_0, Γ есть объединение Γ_0 и всех конгруэнтных ему относительно группы P_2 контуров, D^+ — объединение счетного числа ограниченных односвязных областей, границами которых служат компоненты контура Γ, $D^- = \mathbb{C} \setminus \overline{D^+}$. Рассмотрим следующую задачу (см. [3], с. 209 – 232, [4], p. 143 –163).

Найти квазипериодическую ограниченную кусочно аналитическую функцию $\Phi(z)$ с заданными циклическими постоянными α_1 и α_2, непрерывно продолжимую на Γ из областей D^+ и D^- и имеющую на Γ заданный скачок

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g(t),\ t \in \Gamma, \tag{4}$$

где $g(t) \in H_\mu(\Gamma),\ 0 < \mu \le 1,$ — функция, инвариантная относительно преобразований группы P_2.

Необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (4) является выполнение условия

$$\int\limits_{\Gamma_0} g(\tau)\mathrm{d}\tau = \alpha_2\omega_1 - \alpha_1\omega_2. \tag{5}$$

При этом решение поставленной задачи определяется формулой

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int\limits_{\Gamma_0} g(\tau)\zeta(\tau - z)\mathrm{d}\tau + C + \frac{z}{2\pi \mathrm{i}}(\eta_1\alpha_2 - \eta_2\alpha_1).$$

Здесь C — произвольная постоянная, $\zeta(z)$ — дзета-функция Вейерштрасса с циклическими постоянными $\eta_1 = \zeta(z+\omega_1) - \zeta(z)$ и $\eta_2 = \zeta(z+\omega_2) - \zeta(z)$.

Отсюда при $\alpha_1 = 0$ и $\alpha_2 = 0$ вытекает следующий результат.

Условие

$$\int\limits_{\Gamma_0} g(\tau)\mathrm{d}\tau = 0 \tag{6}$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы задача (4) имела ограниченное двоякопериодическое решение, определяемое формулой

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int\limits_{\Gamma_0} g(\tau)\zeta(\tau - z)\mathrm{d}\tau + C. \tag{7}$$

Двоякопериодическая задача сопряжения для уравнения (1).

Пусть Γ_0 — гладкий замкнутый контур, лежащий внутри параллелограмма периодов R_0 и ориентированный против часовой стрелки. Будем считать, что начало координат лежит на Γ_0. Обозначим через S_0^+ конечную область, ограниченную контуром Γ_0, $S_0^- = R_0 \setminus \overline{S_0^+}$, S^+ есть объединение S_0^+ и всех конгруэнтных ей областей относительно группы параллельных переносов, порожденной преобразованиями $z \to z + \omega_k$, $k = 1, 2$, Γ есть объединение Γ_0 и всех конгруэнтных ему контуров и S^- есть дополнение множества $\overline{S^+}$ до $\mathbb{C}$.

Рассматриваемая нами задача формулируется следующим образом. Требуется определить двоякопериодическое ограниченное кусочно регулярное решение $f(z)$ уравнения (1) с линией скачков Γ, предельные значения которого на Γ принадлежат классу $C^1(\Gamma)$ и удовлетворяют соотношениям

$$f^+(t) = f^-(t) + g_0(t), \ \frac{\partial}{\partial \overline{z}_1} f^+(t) = \frac{\partial}{\partial \overline{z}_1} f^-(t) + g_1(t), \ t \in \Gamma, \tag{8}$$

где $g_0, g_1 \in H_\mu(\Gamma)$, $0 < \mu \le 1$, — двоякопериодические функции с основными периодами ω_1, ω_2.

Для единственности представления (2) будем считать, что $\varphi_2(0) = 0$. Из представления (2) и второго из соотношений (8) получаем краевую задачу сопряжения для определения двоякопериодической с основными периодами $\omega_{k2} = T_2(\omega_k)$, $k = 1, 2$, кусочно аналитической функции $\varphi_2'(z_2)$

$$\varphi_2'^+(t_2) = \varphi_2'^-(t_2) + g_1(t)\frac{s_1 - \overline{s}_1}{s_1 - s_2}, \ \ t_2 = T_2(t), \ t \in \Gamma. \tag{9}$$

Согласно формулам (6) и (7) решение задачи (9) имеет вид

$$\varphi_2'(z_2) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \frac{s_1 - \overline{s}_1}{s_1 - s_2} \int\limits_{\Gamma_0} g_1(\tau)\zeta(T_2(\tau) - z_2)\mathrm{d}\tau + C \tag{10}$$

при условии, что

$$\int\limits_{\Gamma_0} g_1(\tau)\mathrm{d}\tau = 0. \tag{11}$$

Поскольку однородная ($g_0 = g_1 = 0$) задача (8) имеет лишь решение $f = \mathrm{const}$, то $C = 0$. Из (10) с учетом нормировки $\varphi_2(0) = 0$ получаем

$$\varphi_2(z_2) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \frac{s_1 - \overline{s}_1}{s_1 - s_2} \int\limits_{\Gamma_0} g_1(\tau)\mathrm{d}\tau \int\limits_0^{z_2} \zeta(\tau_2 - z_2)\mathrm{d}z_2, \ z \in S_0^+ \bigcup S_0^-, \ \tau_2 := T_2(\tau). \tag{12}$$

Путь интегрирования в (12) лежит соответственно в $T_2(S_0^+)$, когда $z \in S_0^+$ и в $T_2(S_0^-)$, когда $z \in S_0^-$.

При $t \in \Gamma_0$

$$\varphi_2^+(t_2) - \varphi_2^-(t_2) =$$

$$= \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \frac{s_1 - \overline{s}_1}{s_1 - s_2} \int\limits_{\Gamma_0} g_1(\tau)\mathrm{d}\tau \left(\int\limits_0^{t_2^+} \zeta(\tau_2 - z_2)\mathrm{d}z_2 - \int\limits_0^{t_2^-} \zeta(\tau_2 - z_2)\mathrm{d}z_2 \right), \tag{13}$$

где $t_2^{\pm}$ означает предельное положение точки t_2 на $T_2(\Gamma_0)$ из $T_2(S_0^{\pm})$.

Из представления (2), леммы 1 и первого из соотношений (8) получаем следующую задачу сопряжения для определения квазипериодической функции φ_1 с циклическими постоянными $-\varphi_2(\omega_{k2}),\ k=1,\ 2,$

$$\varphi_1^+(T_1(t)) = \varphi_1^-(T_1(t)) + g_0(t) + \varphi_2^-(T_2(t)) - \varphi_2^+(T_2(t)),\ t \in \Gamma. \tag{14}$$

Положим

$$\tilde{g}_0(t) := g_0(t) + \varphi_2^-(t_2) - \varphi_2^+(t_2). \tag{15}$$

Тогда, согласно равенству (5), необходимое и достаточное условие разрешимости задачи (14) имеет вид

$$\int\limits_{\Gamma_0} \tilde{g}_0(\tau)\mathrm{d}\tau = -\omega_1\varphi_2(\omega_{22}) + \omega_2\varphi_2(\omega_{12}), \tag{16}$$

где

$$\varphi_2(\omega_{k2}) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\frac{s_1-\overline{s}_1}{s_1-s_2}\int\limits_{\Gamma_0} g_1(\tau)\mathrm{d}\tau \int\limits_0^{\omega_{k2}} \zeta(\tau_2 - z_2)\mathrm{d}z_2,\ k=1,\ 2.$$

Учитывая (13) и (15), соотношение (16) можно переписать в виде

$$\int\limits_{\Gamma_0} g_0(\tau)\mathrm{d}\tau - \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\frac{s_1-\overline{s}_1}{s_1-s_2}\int\limits_{\Gamma_0} g_1(\sigma)\mathrm{d}\sigma \int\limits_{\Gamma_0}\left(\int\limits_0^{\tau_2^+}\zeta(T_2(\sigma)-z_2)\mathrm{d}z_2 - \int\limits_0^{\tau_2^-}\zeta(T_2(\sigma)-z_2)\mathrm{d}z_2\right)\mathrm{d}\tau =$$

$$= -\omega_1\varphi_2(\omega_{22}) + \omega_2\varphi_2(\omega_{12}). \tag{17}$$

При выполнении условия (17) решение задачи (14) имеет вид

$$\varphi_1(z_1) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\int\limits_{\Gamma_0} \tilde{g}_0(\tau)\zeta(T_1(\tau)-z_1)\mathrm{d}\tau - \frac{z_1}{2\pi \mathrm{i}}(\eta_1\varphi_2(\omega_{22}) - \eta_2\varphi_2(\omega_{12})) + C_1, \tag{18}$$

где $\eta_1,\ \eta_2$ — циклические постоянные дзета-функции Вейерштрасса $\zeta(z)$, C_1 — произвольная постоянная.

Теорема. *Для разрешимости задачи (8) необходимо и достаточно, чтобы правые части краевых условий g_0 и g_1 удовлетворяли условиям разрешимости (11) и (17). При их выполнении решение задачи определяется формулами (2), (12), (15), (18). Общее решение задачи (8) зависит от одной произвольной постоянной.*

Литература

1. Лехницкий С.Г. *Анизотропные пластинки.* – М.-Л.: ОГИЗ, 1947. – 356 с.

2. Бикчантаев И.А. *Некоторые краевые задачи для одного эллиптического уравнения* // Докл. АН СССР. – 1973. – Т. 209, № 5. – С. 1013–1016.

3. Чибрикова Л.И. *Основные граничные задачи для аналитических функций.* – Казань: Изд-во Казанского университета, 1977.

4. Lu Jian-Ke. *Boundary value problems for analytic functions.* – Singapore: World Scientic, 1993.

5. Кац Д.Б. *Новые метрические характеристики неспрямляемых кривых и их приложения* // Сибирский математический журнал. – 2016. – Т. 57, № 2. – С. 364–372.

6. Garifyanov F.N., Kats B.A., Katz D.B. *Doubly periodic Riemann boundary value problem for nonrectifiable curves* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2015. – T. 36, № 2. – P. 120–126.

DOUBLY PERIODIC “JUMP” PROBLEM FOR A SECOND ORDER ELLIPTIC EQUATION

I.A. Bikchantaev

For a homogeneous second order differential equation of elliptic type with constant coefficients, a boundary value problem of finding two-periodic solutions with given jumps of them and their derivatives on the smooth and nonrectifiable closed circuit is investigated. We obtained the necessary and sufficient conditions for the solvability of the problem and explicit formulas for its solution.

Keywords: elliptic equation, boundary value problem, doubly periodic functions.

UDC 517.984.2

ON INDEPENDENCE OF EVENTS IN NONCOMMUTATIVE PROBABILITY THEORY

A.M. Bikchentaev[1], P.N. Ivanshin[2]

1 *airat.bikchentaev@kpfu.ru*; Kazan Federal University, N.I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics

2 *pivanshi@yandex.ru*; Kazan Federal University, N.I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics

Let φ be a tracial state on a von Neumann algebra $\mathscr{A}$. Projections P, Q of $\mathscr{A}$ are said to be independent if $\varphi(PQ) = \varphi(P)\varphi(Q)$. First we present the general criterion of a projection pair independence. We then give a geometric criterion for independence of the following pairs of projections: 1) isoclinic; 2) one of operators is an atom of the algebra. The projection $R \equiv P \vee Q - P \wedge Q$ is an analog of a “symmetric difference” for a pair of projections P and Q. If $R \neq 0, I$, the pairs $\{P, R\}$ and $\{Q, R\}$ are independent then $\varphi(P) = \varphi(Q) = 1/2$ and $\varphi(P \wedge Q + P \vee Q) = 1$. If, moreover, P and Q are independent, then $\varphi(P \wedge Q) \leq 1/4$ and $\varphi(P \vee Q) \geq 3/4$. We give examples of projection pairs P and Q that are 1) isoclinic independent; 2) non-isoclinic independent; 3) non independent but with independent $\{P, R\}$ and $\{Q, R\}$; 4) independent with independent $\{P, R\}$ and $\{Q, R\}$. For the full matrix algebra we give several equivalent conditions for the independence of pairs of projections.

Keywords: Hilbert space, linear operator, projection, von Neumann algebra, tracial state, independence.

Let φ be a tracial state on a von Neumann algebra $\mathscr{A}$. Projections P, Q of $\mathscr{A}$ are said to be *independent* [1], if $\varphi(PQ) = \varphi(P)\varphi(Q)$. In [1] for this notion of independence, the structure of a finite von Neumann algebra generated by an independent family of subalgebras is determined. As a consequence, the authors obtain extensions of the Kolmogorov and Hewitt–Savage zero-one laws. For any P, the projection set $\{Q \in \mathscr{A} : P \text{ and } Q \text{ are independent}\}$ comprises a quantum logic and is closed in the strong operator topology [2, Theorem 3.1]. The strong law of large numbers for d-dimensional arrays in von Neumann algebras holds for this notion of independence [3]; for the strong laws of large numbers for positive measurable operators and applications see [4], [5] and [6].

Here we present the general criterion of a projection pair independence. With the help of Theorem 4.8 of [7], we obtain

Theorem 1. *Let φ be a faithful normal tracial state on a von Neumann algebra $\mathscr{A}$. For $P, Q \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$ the following conditions are equivalent:*

(i) *P, Q are independent;*

(ii) *$\|I + z(PQ - \varphi(P)Q)\|_1 \geq 1$ for all $z \in \mathbb{C}$;*

(iii) *$\|I + z(PQ - \varphi(Q)P)\|_1 \geq 1$ for all $z \in \mathbb{C}$.*

For the full matrix algebra we give several equivalent conditions for the independence of pairs of projections.

Theorem 2. *Consider $\mathscr{A} = \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ and $\varphi = \frac{1}{n}\mathrm{tr}$, the normalized canonical trace. For $P, Q \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$ the following conditions are equivalent:*

(i) *P, Q are independent;*

(ii) *$PQ - \varphi(P)Q$ is unitarily equivalent to a zero-diagonal matrix;*

(iii) *$PQ - \varphi(Q)P$ is unitarily equivalent to a zero-diagonal matrix;*

(iv) *$PQ - \varphi(P)Q$ is a commutator;*

(v) *$PQ - \varphi(Q)P$ is a commutator;*

(vi) *$\sum_{k=1}^{n} s_k(I + z(PQ - \varphi(P)Q)) \geq n$ for all $z \in \mathbb{C}$;*

(vii) *$\sum_{k=1}^{n} s_k(I + z(PQ - \varphi(Q)P)) \geq n$ for all $z \in \mathbb{C}$;*

(viii) $\mathrm{tr}(c^2) + n_2 = \frac{1}{n}\Big(\frac{n_1}{2} + n_2 + n_3\Big)\Big(\frac{n_1}{2} + n_2 + n_4\Big)$.

Now we give a geometric criterion for the independence of the following pairs of projections: 1) isoclinic; 2) one of operator is an atom of the algebra.

Theorem 3. *Let φ be a faithful tracial state on a von Neumann algebra $\mathscr{A}$. Let $P, Q \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$ be isoclinic with an angle $\theta \in (0, \pi/2)$. Then the following conditions are equivalent:*

(i) *P, Q are independent;*

(ii) $\varphi(P) = \cos^2\theta$.

Theorem 4. *Let φ be a faithful tracial state on a von Neumann algebra $\mathscr{A}$. Consider $P, Q \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$ such that P is an atom of $\mathscr{A}$. Then the following conditions are equivalent:*

(i) *P, Q are independent;*

(ii) $\varphi(Q) = \|PQ\|^2$.

The projection $R \equiv P \vee Q - P \wedge Q$ is an analog of a "symmetric difference" for the pair of projections P and Q. We have $P \wedge Q^{\perp} + P^{\perp} \wedge Q \leq P \vee Q - P \wedge Q$ for all $P, Q \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$ [8, Theorem 2].

Theorem 5. *Let φ be a faithful tracial state on a von Neumann algebra $\mathscr{A}$ and projections $P, Q \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$ be independent with the projection $P \vee Q - P \wedge Q \neq 0, I$. Then $\varphi(P) = \varphi(Q) = 1/2$, $\varphi(P \wedge Q + P \vee Q) = 1$ and $\varphi(P \wedge Q) = \varphi(P^{\perp} \wedge Q^{\perp})$, $\varphi(P \vee Q) = \varphi(P^{\perp} \vee Q^{\perp})$.*

If, moreover, P and Q are independent, then $\varphi(P \wedge Q) \leq 1/4$ and $\varphi(P \vee Q) \geq 3/4$.

We give the examples of projection pairs P and Q that are 1) isoclinic independent; 2) non-isoclinic independent; 3) non independent but with independent $\{P, R\}$ and $\{Q, R\}$; 4) independent with independent $\{P, R\}$ and $\{Q, R\}$.

The projections $P \wedge Q^{\perp} + P^{\perp} \wedge Q$ and $P \vee Q - P \wedge Q$ are analogs of the "symmetric difference" for $P, Q \in \mathscr{A}^{\mathrm{pr}}$.

References

1. Gootman E.C., Kannan D. *Zero-one laws in finite W^*-algebras* // J. Math. Anal. Appl. – 1976. – Vol. 55. – No. 3. – P. 743–756.

2. Bikchentaev A., Navara M., Yakushev R. *Quantum logics of idempotents of unital rings* // Internat. J. Theoret. Phys. – 2015. – Vol. 54. – No. 6. – P. 1987–2000.

3. Quang N.V., Tien N.D. *The strong law of large numbers for d-dimensional arrays in von Neumann algebras* // Theory Probab. Appl. – 1997. – Vol. 41. – No. 3. – P. 569–578.

4. Quang N.V., Son D.T., Son L.H. *The strong laws of large numbers for positive measurable operators and applications* // Stat. Probab. Lett. – 2017. – Vol. 124. – P. 110–120.

5. Luczak A. *Laws of large numbers in von Neumann algebras and related results* // Studia Math. – 1985. – Vol. 81. – No. 3. – P. 231–243.

6. Choi B.J., Ji U.C. *Convergence rates for weighted sums in noncommutative probability space* // J. Math. Anal. Appl. – 2014. – Vol. 40. – No. 2. – P. 963–972.

7. Бикчентаев А.М. *О сходимости интегрируемых операторов, присоединенных к конечной алгебре фон Неймана* // Тр. МИАН. – 2016. – Т. 293. – С. 73–82.

8. Бикчентаев А.М. *Разности идемпотентов в C*-алгебрах* // Сиб. матем. журн. – 2017. – Т. 58. – № 2. – С. 243–250.

О НЕЗАВИСИМОСТИ СОБЫТИЙ В НЕКОММУТАТИВНОЙ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

А.М. Бикчентаев, П.Н. Иваньшин

Пусть φ — следовое состояние на алгебре фон Неймана $\mathscr{A}$. Проекторы $P,Q \in \mathscr{A}$ называются независимыми, если $\varphi(PQ) = \varphi(P)\varphi(Q)$. Получен общий критерий независимости проекторов. Приведен геометрический критерий независимости следующих пар проекторов: 1) изоклинических; 2) один из проекторов является атомом алгебры. Проектор $R \equiv P \vee Q - P \wedge Q$ является аналогом "симметричной разности" для пары проекторов P и Q. Если $R \neq 0, I$, пары $\{P,R\}$ и $\{Q,R\}$ независимы, то $\varphi(P) = \varphi(Q) = 1/2$ и $\varphi(P \wedge Q + P \vee Q) = 1$. Кроме того, если P и Q независимы, то $\varphi(P \wedge Q) \leq 1/4$ и $\varphi(P \vee Q) \geq 3/4$. Приведены примеры пар проекторов P и Q, которые 1) изоклинны и независимы; 2) неизоклинны и независимы; 3) не независимы, но с независимыми $\{P,R\}$ и $\{Q,R\}$; 4) независимы с независимыми $\{P,R\}$ и $\{Q,R\}$. Для полной матричной алгебры приведено несколько эквивалентных условий независимости проекторов.

Ключевые слова: гильбертово пространство, линейный оператор, проектор, алгебра фон Неймана, следовое состояние, независимость.

УДК 517.218.2

О ВЛОЖЕНИИ ОБОБЩЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ СОБОЛЕВА $M_\alpha^p(X)$ В КЛАСС НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

С.А. Бондарев[1]

1 *bsa0393@gmail.com*; Белорусский государственный университет

Пусть (X, d, μ) — пространство однородного типа с размерностью удвоения γ. В статье обсуждается вложение обобщенных пространств Соболева $M_\alpha^p(X)$ (p — показатель суммируемости, α — показатель гладкости) в класс непрерывных функций в так

называемом критическом случае $\gamma = \alpha p$. Показывается, что при $p \leq 1$, $\alpha > 0$, любая функция из $M^p_\alpha(X)$ имеет локально равномерно непрерывного представителя при определенных условиях на пространство (X, d, μ).

Ключевые слова: анализ на метрических пространствах с мерой, пространства Соболева.

Пусть (X, d) — метрическое пространство с метрикой d. Обозначим через

$$B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$$

открытый шар с центром в точке x.

Мера μ на X называется борелевской, если класс μ-измеримых множеств содержит все борелевские множества. Мы будем работать только с σ-аддитивными борелевскими мерами. Более того, мы будем предполагать, что мера любого шара $B \subset X$ положительна и конечна.

Тройка (X, d, μ) называется пространством однородного типа, если метрика и мера связаны условием удвоения. Это означает, что существует положительная постоянная a_μ такая, что неравенство

$$\mu(B(x,2r)) \leq a_\mu \mu(B(x,r)) \tag{1}$$

выполнено для любого шара $B(x,r)$.

Условие удвоения можно записать в количественной форме: существуют постоянные $\gamma > 0$, $c > 0$, такие, что

$$\mu(B(x,R)) \leq c\left(\frac{R}{r}\right)^\gamma \mu(B(x,r)) \tag{2}$$

выполняется для любого $x \in X$ и любых $0 < r \leq R$. В качестве γ можно взять $\log_2 a_\mu$. Легко видеть, что при этом неравенство (2) получается итерацией (1). Число γ играет роль размерности пространства (X, d, μ).

Базовым примером пространства однородного типа является $\mathbb{R}^n$ с евклидовым расстоянием в качестве метрики d и мерой Лебега в качестве меры μ.

Пусть $\alpha > 0$ и $0 < p < \infty$. Определим класс Соболева $M^p_\alpha(X)$ на метрическом пространстве X. Для того, чтобы это сделать, введем сначала понятие α-градиента. Для функции $f \in L^p(X)$ обозначим через $D_\alpha[f]$ класс всех неотрицательных μ-измеримых функций, таких, что условие

$$|f(x) - f(y)| \leq [d(x,y)]^\alpha [g(x) + g(y)]$$

выполнено почти всюду по мере μ. Элементы $D_\alpha[f]$ будем называть α-градиентами функции f.

Введем шкалу пространств Соболева $M^p_\alpha(X)$

$$M^p_\alpha(X) = \{f \in L^p(X) : D_\alpha[f] \cap L^p(X) \neq \varnothing\}.$$

Эти пространства нормируются следующим образом (при $p < 1$ получаем квазинорму):

$$||f||_{M^p_\alpha(X)} = ||f||_{L^p(X)} + \inf ||g||_{L^p(X)},$$

где точная нижняя грань берется по всем α-градиентам функции f.

В статье П. Хайлаша [1] были введены пространства $M^p_\alpha(X)$ при $\alpha = 1$. Там же было показано, что введенное таким образом пространство $M^p_1(\mathbb{R}^n)$ совпадает с классическим пространством Соболева $W^p_1(\mathbb{R}^n)$ при $p > 1$, а в качестве α-градиента g можно взять максимальную функцию Харди–Литтлвуда от обычного градиента $M|\nabla f|$.

Пространство (X, d, μ) будем называть γ-регулярным по Альфорсу, если существует такая постоянная $c > 0$, что для любого шара выполняется

$$c^{-1} r^\gamma \le \mu(B(x,r)) \le c r^\gamma.$$

Сформулируем основную теорему. При $\alpha = 1$ этот результат был получен в [2].

Теорема. *Пусть $\gamma = \alpha p$, $0 < \alpha$, $0 < p \le 1$, и (X, d, μ) является γ-регулярным по Альфорсу. Если $f \in M^p_\alpha(X)$, то f имеет локально равномерно непрерывного представителя. Более того, для любого шара B и любого α-градиента $g \in D_\alpha[f]$ выполнено следующее неравенство*

$$\sup_{x,y\in B} |f(x) - f(y)| \le \text{ñ} \left(\int_{2B} g^p \, d\mu \right)^{1/p}.$$

Литература

1. Hajlasz P. *Sobolev spaces on an arbitrary metric spaces* // Potential Analysis. — 1996. — Vol. 5, № 4. — P. 403–415.

2. Zhou X. *Sobolev functions in the critical case are uniformly continuous in s-Ahlfors regular metric spaces when $s \le 1$* // Proc. Amer. Math. Soc. – 2017. – Vol. 145. – P. 267–272.

ON THE INCLUSION OF GENERALISED SOBOLEV SPACES $M^p_\alpha(X)$
INTO CONTINUOUS FUNCTIONS IN THE CRITICAL CASE

S.A. Bondarev

Let (X, d, μ) be a space of homogeneous type with doubling dimension γ. Inclusion of generalized Sobolev spaces $M^p_\alpha(X)$ (p is a summability parameter, α is a smoothness parameter) into the space of continuous functions in the critical case $\gamma = \alpha p$ is discussed. It is shown, that, under certain conditions on the space (X, d, μ), for $p \le 1$, $\alpha > 0$, any function from $M^p_\alpha(X)$ locally has an uniformly continuous representative.

Keywords: analysis on metric measure spaces, Sobolev spaces.

УДК 517.54

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ В ЗАДАЧЕ СЕГЕ-ФЕКЕТЕ

Я.В. Борисова[1]

1 *borisova_yana@list.ru*; Томский государственный университет

В данной работе задача Сеге и Фекете решается вариационным методом. Исследуется функционально-дифференциальное уравнение для граничных отображений рассматриваемого функционала. При вещественных значениях параметра найдены граничные *отображения. Установлена геометрия граничных отображений.*

Ключевые слова: функционал, голоморфное однолистное отображение, граничное отображение, вариационный метод.

Пусть S – множество всех голоморфных однолистных в круге $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ отображений $f : E \to \mathbb{C}$, $f(z) = z + c_2z^2 + c_3z^3 + \dots$. Рассматривается классическая задача Фекете и Сеге [1-3] о нахождении множества значений функционала

$$I : S \to \mathbb{R}, \quad I(f) = \mathrm{Re}\big(c_3 - \gamma c_2^2\big), \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Вариационным методом [4] установлено, что граничные отображения функционала удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{qf(z)+1}{f^4(z)} f'^2(z) = \frac{z^4 + \overline{q}z^3 + bz^2 + qz + 1}{z^4},$$

где $q = 2(1-\gamma)c_2$, $b = 2I(f)$.

С помощью качественного анализа установлено, что правая часть этого уравнения имеет вид

$$\frac{qf(z)+1}{f^4(z)} f'^2(z) = \frac{(z-\mu)^2(z-\eta)^2}{z^4} \tag{1}$$

или вид

$$\frac{qf(z)+1}{f^4(z)} f'^2(z) = \frac{(z-\mu)^2(z-\xi)(z-\frac{1}{\xi})}{z^4}, \tag{2}$$

где $|\mu| = 1$, $|\eta| = 1$, $|\xi| < 1$.

Теорема. *При $\gamma \in (0,1)$ максимум функционала $\max\limits_{f\in S} I(f) = 1 + 2e^{\frac{-2\gamma}{1-\gamma}}$ доставляет решение уравнения (1) с вещественными коэффициентами в разложении в окрестности нуля, которое неявно задается в виде*

$$2e^{-\frac{\gamma}{1-\gamma}} \ln \frac{1+\sqrt{1-4e^{-\frac{\gamma}{1-\gamma}}f}}{1-\sqrt{1-4e^{-\frac{\gamma}{1-\gamma}}f}} - \frac{\sqrt{1-4e^{-\frac{\gamma}{1-\gamma}}f}}{f} = -\frac{1}{z} + z - 2e^{-\frac{\gamma}{1-\gamma}} \ln z,$$

причем f отображает единичный круг на плоскость с разрезами по трем аналитическим дугам, соединяющимися в точке $\frac{1}{4}e^{\frac{\gamma}{1-\gamma}}$ под равными углами, одна из которых уходит на бесконечность.

При $\gamma < 0$ максимум функционала $\max\limits_{f\in S} I(f) = 3 - 4\gamma$ доставляет решение уравнения (2) с вещественными коэффициентами в разложении в окрестности нуля, принадлежащее семейству отображений Кебе.

При $\gamma > 1$ максимум функционала $\max\limits_{f\in S} I(f) = -3 + 4\gamma$ доставляет решение уравнения (2) с коэффициентами $c_{2n-1} \in \mathbb{R}$, $ic_{2n} \in \mathbb{R}$ в разложении в окрестности нуля, принадлежащее семейству отображений Кебе.

Результат получен совместно с И.А. Колесниковым, С.А. Копаневым, Г.Д. Садритдиновой.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы повышения международной конкурентоспособности Томского государственного университета на 2013-2020 гг.

Литература

1. Szego G., Fekete M. *Eine Bemerkung über ungerade schlichte Funktionen* // J. London Math. Soc. – 1933. – Vol. 8. – № 2(30). – P. 85–89.

2. Голузин Г. М. *Некоторые вопросы теории однолистных функций* // Тр. МИАН СССР. – М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1949. – Т. 27. – С. 3–110.

3. Александров И. А. *Некоторые свойства класса* $S(w_0)$ // Вопросы геометрической теории функций. – Томск: изд-во Том-го. гос. ун-та, 1963. – Т. 169. – С. 24–58.

4. Александров И. А., Колесников И. А., Копанев С. А., Копанева Л. С. *Метод внутренних вариаций в теории однолистных отображений*. – Томск: Изд-во Том-го. ун-та, 2017.

EXTREMAL FUNCTIONS IN SZEGO-FEKETE PROBLEM

Ya.V. Borisova

The paper solves the Szego and Fekete problem by the variational method. We investigate functional-differential equation for extremal functions of the considered functional. For real values of the parameter extremal functions are found. We describe the image domain under the extremal functions.

Keywords: functional, holomorphic univalent function, extremal function, variational method.

УДК 517.925.53+51.72

О ФАКТОРИЗАЦИИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО МНОГОЧЛЕНА МАТРИЦЫ ЯКОБИ

А.В. Братищев[1]

1 *avbratishchev@spark-mail.ru*; Донской государственный технический университет

Пусть автономная система дифференциальных уравнений n-го порядка имеет инвариантное множество. Для состояния равновесия на этом множестве образуем матрицу Якоби правой части системы. В работе предложена формула факторизации этой матрицы. Формула полезна в задаче проектирования регуляторов динамических систем.

Ключевые слова: автономная система, инвариантное множество, состояние равновесия, характеристический многочлен.

Пусть дана автономная система n-го порядка с правыми частями из класса гладкости $C^r, r > 0$,

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x), \\ \quad \ldots \\ x_n' = f_n(x_1, \ldots, x_n) = f_n(x). \end{cases} \tag{1}$$

Как известно, функция $\psi(x)$ является полным интегралом системы (1) тогда и только тогда, когда её производная в силу системы (1) тождественно равна нулю. Геометрически это означает, что каждое множество $L_c := \{x : \psi(x) = c\}, c \in R$, является инвариантным: решение задачи Коши с начальными данными $x_0 := (x_1^0, ..., x_n^0) \in L_c$, всегда лежит на этом множестве.

Более общим является вопрос, когда $\psi(x)$ является частным интегралом: множество $L := \{x : \psi(x) = 0\}$ инвариантно. Он актуален в обратных задачах динамики и синергетической теории управления [1]-[3]. Заметим, что обратная задача об описании всех дифференциальных уравнений, для которых данное множество является инвариантным, была поставлена в [4].

В этом пункте обобщается один признак наличия у системы (1) инвариантного множества.

Лемма. *Рассмотрим n-мерное дифференцируемое многообразие*

$$L := \{x : \psi_1(x) = 0, ..., \psi_m(x) = 0\}, \ m < n, \tag{2}$$

$$\forall x \quad rang\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_j}(x)\right) = m.$$

Пусть функции $\psi_1, ..., \psi_m$ и правые части системы (1) *связаны соотношениями*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_1} f_1(x) + ... + \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_n} f_n(x) = \Phi_1(\psi_1(x), ..., \psi_m(x), x_1, ..., x_n), \\ \qquad \ldots \\ \dfrac{\partial \psi_m}{\partial x_1} f_1(x) + ... + \dfrac{\partial \psi_m}{\partial x_n} f_n(x) = \Phi_m(\psi_1(x), ..., \psi_m(x), x_1, ..., x_n), \end{cases}$$

где $\Phi_i(0, ..., 0, x_1, ..., x_n) \equiv 0$, $i = 1, ..., m$. Обозначим через $x(t, x_0) := (x_1(t, x_0), ..., x_n(t, x_0))$ решение задачи Коши для системы (1) *с начальным условием $x(0, x_0) = x_0$. Пусть $\forall x_0 \in L$ и соответствующей, вообще говоря, неавтономной системы дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} \phi_{1,t}' = \Phi_1(\phi_1(t), ..., \phi_m(t), x_1(t, x_0), ..., x_n(t, x_0)), \\ \quad \ldots \\ \phi_{m,t}' = \Phi_m(\phi_1(t), ..., \phi_m(t), x_1(t, x_0), ..., x_n(t, x_0)), \end{cases} \tag{3}$$

задача Коши $\phi_1(0) = ... = \phi_m(0) = 0$ имеет единственное (*нулевое*) *решение. Тогда L является инвариантным множеством системы* (1).

Доказательство. Нужно доказать, что

$$\forall x_0 \in L \qquad \forall t \geqq 0 \qquad \begin{cases} \psi_1(x_1(t, x_0), ..., x_n(t, x_0)) \equiv 0, \\ \ldots \\ \psi_m(x_1(t, x_0), ..., x_n(t, x_0)) \equiv 0. \end{cases}$$

Обозначим $\phi_i(t) := \psi_i(x_1(t,x_0),...,x_n(t,x_0)),\ i = 1,...,m$. Тогда в силу (1), (3) имеем

$$\begin{cases} \phi'_{1,t} = \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1} f_1(x(t,x_0)) + ... + \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_n} f_n(x(t,x_0)) = \Phi_1(\phi_1(t),...,\phi_m(t), x_1(t,x_0),...,x_n(t,x_0)), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \cdots \\ \phi'_{m,t} = \dfrac{\partial\psi_m}{\partial x_1} f_1(x(t,x_0)) + ... + \dfrac{\partial\psi_m}{\partial x_n} f_n(x(t,x_0)) = \Phi_m(\phi_1(t),...,\phi_m(t), x_1(t,x_0),...,x_n(t,x_0)), \end{cases}$$

то есть функции $\phi_i(t)$ являются решением системы дифференциальных уравнений (3), причем с начальным условием $\phi_i(0) = \psi_i(x_1^0,...,x_n^0) = 0,\ i = 1,...,m$. В силу условия единственности решения этой задачи Коши получаем требуемое соотношение. Лемма доказана.

Следствие. *Если функции, определяющие многообразие (2), и правые части системы (1) связаны частными соотношениями вида*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1} f_1(x) + ... + \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_n} f_n(x) = \Phi_1(\psi_1,...,\psi_m), \\ \qquad\qquad\qquad \cdots \\ \dfrac{\partial\psi_m}{\partial x_1} f_1(x) + ... + \dfrac{\partial\psi_m}{\partial x_n} f_n(x) = \Phi_m(\psi_1,...,\psi_m), \end{cases}$$

где $\Phi_i(0,...,0) = 0,\ i = 1,...,m,$ *то вместо* (3) *нужно потребовать, чтобы задача Коши* $\phi_1(0) = ... = \phi_m(0) = 0$ *для автономной системы*

$$\begin{cases} \phi'_{1,t} = \Phi_1(\phi_1,...,\phi_m), \\ \qquad \cdots \\ \phi'_{m,t} = \Phi_m(\phi_1,...,\phi_m), \end{cases}$$

имела единственное (нулевое) решение.

Пусть автономная система (1) имеет инвариантное множество (2), для которого выполнены условия леммы. В предположении аналитичности функций Φ_i в окрестности начала координат по всем переменным, из условия $\Phi_i(0,...,0,x_1,...,x_n) \equiv 0$, $i = 1,...,m,$ следуют равенства,

$$\frac{\partial\Phi_i}{\partial x_1}(0,...,0,x_1,...,x_n) \equiv 0, ..., \frac{\partial\Phi_i}{\partial x_n}(0,...,0,x_1,...,x_n) \equiv 0,\ i = 1,...,m. \qquad (4)$$

Пусть точка $x_0 = (x_1^0...,x_1^0) \in L$ есть состояние равновесия системы (1), и

$$\Delta = \left.\begin{vmatrix} \psi'_{1,x_{i_1}} & \cdots & \psi'_{1,x_{i_m}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \psi'_{m,x_{i_1}} & \cdots & \psi'_{m,x_{i_m}} \end{vmatrix}\right|_{x=x_0} \neq 0$$

Тогда имеет место такое обобщение теоремы 2 статьи [5].

Теорема. *Характеристический многочлен матрицы Якоби правой части* (1) *в точке* $x_0 \in L$ *можно факторизовать следующим образом*

$$p(\lambda) = \frac{1}{\Delta} \cdot \left\| \begin{matrix} \lambda - \Phi'_{1,\psi_1} & \dots & -\Phi'_{1,\psi_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ -\Phi'_{m,\psi_1} & \dots & \lambda - \Phi'_{m,\psi_m} \end{matrix} \right\|_{x=x_0} \times$$

$$\times \left\| \begin{matrix} \lambda - f'_{1,x_1} & \dots & -f'_{1,x_{i_1}} & \dots & -f'_{1,x_{i_m}} & \dots & -f'_{1,x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi'_{1,x_1} & \dots & \psi'_{1,x_{i_1}} & \dots & \psi'_{1,x_{i_m}} & \dots & \psi'_{1,x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi'_{m,x_1} & \dots & \psi'_{m,x_{i_1}} & \dots & \psi'_{m,x_{i_m}} & \dots & \psi'_{m,x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -f'_{n,x_1} & \dots & -f'_{n,x_{i_1}} & \dots & -f'_{n,x_{i_m}} & \dots & \lambda - f'_{n,x_n} \end{matrix} \right\|_{x=x_0}.$$

Доказательство проводится по схеме доказательства теоремы 1 [5] с учетом замечания (4).

Литература

1. Леви-Чивита Т., Амальди У. *Курс теоретической механики. Том 2. Часть 2.* – М.: ИЛ, 1951. – 556 с.

2. Галиуллин А. С. *Методы решения обратных задач динамики.* – М: Наука, 1986. – 224 с.

3. *Современная прикладная теория управления. Ч. 2. Синергетический подход в теории управления.* Под ред. А. А. Колесникова. – Таганрог: Издательство ТРТУ, 2000. – 559 с.

4. Еругин Н. П. *Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую* // Прикладная математика и механика. – 1952. – Т. 16. – Вып. 6. – С. 659–670.

5. Братищев А. В. *Факторизация характеристического многочлена состояния равновесия автономной системы, имеющей притягивающее инвариантное многообразие* // Дифференциальные уравнения и процессы управления. – 2018. – № 4. – С. 1–17.

FACTORIZATION OF THE CHARACTERISTIC POLYNOMIAL OF JACOBIAN MATRIX

A.V. Bratishchev

Let an autonomous system of n-th order differential equations have an invariant set. For the equilibrium state on this set, we form the Jacobian matrix for the right hand sides of the system. The paper proposes a formula for factorization of this matrix. It is useful in the problem of designing controllers of dynamic systems.

Keywords: autonomous system, invariant set, the state of equilibrium, Jacobian matrix, characteristic polynomial.

УДК 517.911

УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА В ПРОСТРАНСТВАХ ОБОБЩЕННО ИНТЕГРИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

А.В. Буробин[1]

1 *burobin@iate.obninsk.ru*; Обнинский институт атомной энергетики НИЯУ МИФИ

Рассматриваются уравнения дробного порядка. Обсуждаются свойства решений линейных уравнений в пространствах обобщенно интегрируемых функций.

Ключевые слова: уравнение Абеля, линейные уравнения дробного порядка, пространства обобщенно интегрируемых функций.

Как известно, уравнение Абеля [1]

$$\int_0^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^\gamma} = f(x), \quad x \in [0,1], \quad \gamma \in (0,1). \tag{1}$$

имеет формальное решение

$$\varphi(x) = B^{-1}(\gamma, 1-\gamma)\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{f(t)\,dt}{(x-t)^{1-\gamma}}.$$

Левая часть уравнения (1) с точностью до коэффициента представляет собой дробный интеграл Римана-Лиувилля поряда $(1-\gamma)$:

$$I_{0+}^{1-\gamma}\varphi = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\int_0^x \frac{\varphi(t)\,dt}{(x-t)^\gamma}.$$

Ранее [2] обсуждалось введение пространств функций $C^{(\alpha)}([0,1])$, $\alpha < 0$, получающихся как расширения пространства $C^{(0)}([0,1])$.

Справедлива следующая

Теорема 1. *При любом $\gamma \in (0,1)$ существует пространство $C^{(-1+\gamma)}([0,1])$, в котором уравнение (1) имеет единственное решение при любой правой части $f \in C^{(0)}([0,1])$.*

Оператор $I_{0+}^{1-\gamma}$ при этом обладает следующим свойством:

Теорема 2. *Оператор $I_{0+}^{1-\gamma} : C^{(-1+\gamma)}([0,1]) \to C^{(0)}([0,1])$* ограничен. Он отображает $C^{(-1+\gamma)}([0,1])$ на $C^{(0)}([0,1])$.

Введем оператор $D_{0+}^{1-\gamma} = [I_{0+}^{1-\gamma}]^{-1}$ дробного дифференцирования. Тогда в условиях теоремы 1

$$D_{0+}^{1-\gamma} f(x) = \Gamma(1-\gamma)\varphi(x). \tag{2}$$

Заметим, что $D_{0+}^{1-\gamma} f_\gamma(x) = 0$ для функции $f_\gamma = x^{-\gamma}$. Следовательно, если рассматривать равенство (2) как уравнение относительно $f(x)$, то можно обнаружить неоднозначность в определении его решения. Однако при условии

$$f(0+) = 0 \tag{3}$$

такое уравнение имеет только тривиальное решение.

При том же условии (3) рассмотрим линейное уравнение [1]

$$D_{0+}^{1-\gamma} f(x) = a(x) f(x) + F(x). \tag{4}$$

В частности, представляет интерес случай коэффициента $a(x) = a_0 x^s$. Предполагается, что это уравнение имеет решение $f(x)$, причем $D_{0+}^{1-\gamma} f \in C^{(-1+\gamma)}([0,1])$.

Теорема 3. *Пусть* $F \in C^{(-1+\gamma)}([0,1])$. *Тогда решение* f *уравнения (4) принадлежит пространству* $C^{(0)}([0,1])$.

При выполнении условия теоремы 3 решение уравнения (4) оказывается непрерывным решением интегрального уравнения

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^x \frac{a(t) f(t)\, dt}{(x-t)^\gamma} + \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^x \frac{F(t)\, dt}{(x-t)^\gamma}.$$

Отметим, что исследование линейных уравнений может служить базой для изучения нелинейных уравнений, когда в правой части уравнения (4) $F = F(x, f)$.

Литература

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

2. Буробин А. В. *Уравнение Абеля и дробное интегрирование* // Материалы XXIV Международной конференции «Математика. Экономика. Образование». – Ростов н/Д: Фонд науки и образования, 2016. – С. 103.

FRACTIONAL ORDER EQUATIONS IN SPACES OF GENERALIZED INTEGRABLE FUNCTIONS

A.V. Burobin

The equations of fractional order are considered. The properties of solutions of linear equations in spaces of generalized integrable functions are discussed.

Keywords: Abel equation, linear fractional order equations, generalized integrable functions spaces.

УДК 517.95

О ПРЕДЕЛЬНОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В КОНУСЕ

В.Б. Васильев[1], Ш.Х. Кутаиба[2]

1 *vbv57@inbox.ru*; Белгородский государственный национальный исследовательский университет
2 *1167542@bsu.edu.ru*; Белгородский государственный национальный исследовательский университет

В статье рассматриваются некоторые краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений в конусе и обсуждается вопрос о поведении решения краевой задачи, когда раствор конуса стремится к нулю. В частном случае показано, что такой предел существует, только если граничная функция удовлетворяет определенному функциональному сингулярному интегральному уравнению.

Ключевые слова: эллиптическое псевдодифференциальное уравнение, краевая задача, разрешимость.

1. Модельные краевые задачи

В теории псевдодифференциальных уравнений и краевых задач на многообразиях принциапиальную роль играет исследование модельных уравнений и краевых задач в канонических областях [1–3]. Существует много различных подходов к исследованию модельных ситуаций, однако здесь мы применяем специальную факторизацию эллиптического символа, названную первым автором волновой [1].

Рассмотрим простейший конус $C_+^a = \{x \in \mathbb{R}^m : x = (x', x_m), x_m > a|x'|, a > 0\}$ и покажем, какова роль вышеописанных обобщенных функций в конструкции решения псевдодифференциального уравнения

$$(Au_+)(x) = f(x), \quad x \in C_+^a, \tag{1}$$

в пространстве $H^s(C_+^a)$ и правой частью из $H_0^{s-\alpha}(C_+^a)$ при условии на символ $A(\xi)$ [2, 5, 6]

$$c_1(1+|\xi|)^\alpha \le |A(\xi)| \le c_2(1+|\xi|)^\alpha$$

в предположении, что символ допускает волновую факторизацию относительно C_+^a [1, 3]

$$A(\xi) = A_{\neq}(\xi) \cdot A_{=}(\xi)$$

с индексом ɟ. Структура решения уравнения (1) в случае $ɟ - s = n + \delta, n \in \mathbb{N}, |\delta| < 1/2$ известна, и в простейшем случае $n = 1, f \equiv 0$ выглядит следующим образом

$$\tilde{u}_+(\xi) = A_{\neq}^{-1}(\xi) \int\limits_{\mathbb{R}^{m-1}} \frac{-a2^{m-1}\pi^{\frac{m-2}{2}}\Gamma(m/2)\tilde{c}_1(\eta')d\eta'}{\left((\xi_1-\eta_1)^2 + (\xi_2-\eta_2)^2 + \cdots (\xi_{m-1}-\eta_{m-1})^2 - a^2\xi_m^2\right)^{m/2}}, \tag{2}$$

где c_1 – произвольная функция из соответствующего пространства Соболева–Слободецкого [8].

В формуле (2) присутствует одна произвольная функция и, если ее зафиксировать, решение станет единственным. Для ее однозначного определения требуется дополнить уравнение дополнительным (граничным) условием, в результате чего мы получим некоторую краевую задачу. Проще всего выглядит задача с интегральным граничным условием

$$\int\limits_0^{+\infty} u_+(x', x_m)dx_m = g(x'), \tag{3}$$

которое в образах Фурье принимает вид

$$\tilde{u}_+(\xi', 0) = \tilde{g}(\xi'). \tag{4}$$

Подставляя (4) в (2), получим следующее интегральное уравнение для нахождения функции $\tilde{c}_1$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{m-1}} \frac{-a2^{m-1}\pi^{\frac{m-2}{2}}\Gamma(m/2)\tilde{c}_1(\eta')d\eta'}{\left((\xi_1-\eta_1)^2 + (\xi_2-\eta_2)^2 + \cdots + (\xi_{m-1}-\eta_{m-1})^2\right)^{m/2}} = A_{\neq}(\xi', 0)\tilde{g}(\xi'). \tag{5}$$

В формуле (5) ядро интеграла имеет сильную особенность в нуле, и интеграл понимается в некотором обобщенном смысле.

Поскольку правая часть уравнения (5) известна, а левая – по сути – свертка, можно применить (обратное) преобразование Фурье. Согласно вычислениям [4], с. 451, мы получим следующее выражение

$$ab_m c_1(x')|x'| = \int\limits_{\mathbb{R}^{m-1}} M(x'-y')g(y')dy', \tag{6}$$

где постоянная b_m зависит только от размерности m, $M(x') = F^{-1}_{\xi'\to x'} A_{\neq}(\xi', 0)$.

Таким образом, из формулы (6) функция $c_1(x')$ определяется однозначно. Следовательно, краевая задача (1),(3) имеет единственное решение.

Чтобы задать условие Дирихле для общего решения u_+ на границе конуса ∂C^a_+ в удобном виде, нам следует выполнить некоторые преобразования. Если к решению u_+ мы применим преобразование T_a [6, 7], мы получим функцию $(T_a u_+)(x)$, заданную на $\mathbb{R}^m_+$. Таким образом, условие

$$(T_a u_+)(x', 0) = g(x') \tag{7}$$

– это условие Дирихле на границе конуса ∂C^a_+. В образах Фурье это условие выглядит так

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} (FT_a u_+)(\xi', \xi_m) d\xi_m = \tilde{g}(\xi') = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (V_a \tilde{u}_+)(\xi', \xi_m) d\xi_m$$

с учетом формулы (3). Следовательно, при наличии условия (7) мы должны подействовать на обе части формулы (5) оператором V_a и затем проинтегрировать по ξ_m. Результат этих действий мы записываем в следующем виде

$$\tilde{g}(\xi') = d_m \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{A^{-1}_{\neq}(\zeta', \xi_m))}{(|\xi'-\zeta'|^2 - a^2\xi^2_m)^{m/2}} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^{m-1}} \frac{\tilde{c}_1(\eta')d\eta'}{(|\zeta'-\eta'|^2 - a^2\xi^2_m)^{m/2}} \right) d\zeta' d\xi_m = \tag{8}$$

$$= d_m \int\limits_{\mathbb{R}^m} \frac{A^{-1}_{\neq}(\zeta', \xi_m))}{(|\xi'-\zeta'|^2 - a^2\xi^2_m)^{m/2}} \tilde{C}_1(\zeta', \xi_m) d\zeta' d\xi_m,$$

где

$$\tilde{C}_1(\zeta', \xi_m) = \int\limits_{\mathbb{R}^{m-1}} \frac{\tilde{c}_1(\eta')d\eta'}{(|\zeta'-\eta'|^2 - a^2\xi^2_m)^{m/2}}$$

Таким образом, основным моментом нахождения решения является предъявление метода решения уравнения (8) относительно функции $\tilde{C}_1(\zeta', \xi_m)$, поскольку c_1 определится с помощью преобразования Фурье.

2. Предельный случай

Если символ $A(\xi)$ допускает волновую факторизацию [1], то можно показать [5–7], что общее решение уравнения (1) в пространстве Соболева–Слободецкого $H^s(C^a_+)$

для $m = 2$ в образах Фурье имеет следующий вид

$$\tilde{u}(\xi) = \frac{\tilde{c}_0(\xi_1 + a\xi_2) + \tilde{c}_0(\xi_1 - a\xi_2)}{2A_{\neq}(\xi_1, \xi_2)} +$$

$$+ A_{\neq}^{-1}(\xi_1, \xi_2)\left(v.p.\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{c}_0(\eta)d\eta}{\xi_1 + a\xi_2 - \eta} - v.p.\frac{i}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\tilde{c}_0(\eta)d\eta}{\xi_1 - a\xi_2 - \eta}\right),$$

где c_0 – произвольная функция из $H^{s-\text{æ}+1/2}(\mathbb{R})$.

Для определения произвольной функции c_0 выбирается интегральное условие

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(x_1, x_2)dx_2 \equiv g(x_1),$$

где $g(x_1)$ – заданная функция. При этом дополнительном условии решение $u(x)$ определяется однозначно, и возникает вопрос, что произойдет с решением, когда размер конуса будет стремиться к одному из предельных значений 0 или ∞. В первом случае мы "возвращаемся" в полупространство $\mathbb{R}^m_+$, а во втором, как выясняется, предел может существовать, только если граничная функция $g(x_1)$ удовлетворяет специальному функциональному сингулярному интегральному уравнению.

Литература

1. Васильев В. Б. *Мультипликаторы интегралов Фурье, псевдодифференциальные уравнения, волновая факторизация, краевые задачи.* – М.: URSS, 2-е изд., 2010. – 136 с.

2. Васильев В. Б. *Модельные эллиптические краевые задачи для псевдодифференциальных уравнений в канонических негладких областях* // Труды семинара им. И.Г. Петровского. – 2016. – Т. 31. – С. 22–37.

3. Васильев В. Б. *Псевдодифференциальные уравнения на многообразиях со сложными особенностями на границе* // Сибирск. журн. чистой и прикл. мат. – 2016. – № 3. – С. 3–14.

4. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. *Обобщенные функции и действиянад ними. Вып. 1.*- М.: ГИФМЛ, 1959. - 470 с.

5. Васильев В. Б. *Потенциалы для эллиптических краевых задач в конусах* // Сибирские электронные математические известия. – 2016. – Т. 13. – С. 1129–1149.

6. Vasilyev V. B. *Pseudo-differential equations and conical potentials: 2-dimensional case* // Opusc. Math. – 2019. – Vol. 39. – No. 1. – P. 109–124.

7. Vasilyev V. B. *Pseudo-differential equations, wave factorization, and related problems* // Math. Meth. Appl. Sci. – 2018. – Vol. 41. – No. 18. – P. 9252–9263.

8. Vasilyev V. B. *Pseudo-differential operators on manifolds with a singular boundary.* – In: Modern Problems in Applied Analysis; Drygas P., Rogosin S., editors. – Cham: Birkhäuser, 2018. – P. 169–179.

ON LIMIT BEHAVIOR OF SOLUTIONS OF ELLIPTIC BOUNDARY VALUE PROBLEM IN A CONE

V.B. Vasilyev, Sh.H. Kutaiba

We consider some boundary value problems for elliptic pseudo-differential equations in a cone and discuss the question on behavior of the solution of the boundary value problem when the cone's size tends to zero. For a special case it was shown that such a limit exists only if the boundary function

satisfies a certain functional singular integral equation.
Keywords: elliptic pseudo-differential equation, boundary value problem, solvability.

УДК 517.5

ФИЛЬТРАЦИЯ ДВУМЕРНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ МАССИВОВ МЕТОДОМ АМПЛИТУДНО-ФАЗОВЫХ ОПЕРАТОРОВ

Д.Г. Васильченкова[1]

1 *darya.vasilchenkova@mail.ru*; Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых

Рассматривается задача выделения гармоник в узлах равномерной двумерной сетки из заданного на этой же сетке тригонометрического многочлена двух переменных (двумерного тригонометрического массива). В основу метода положен аппарат амплитудно-фазовых операторов (АФО), которые осуществляют наложение подобных сигналов, отличающихся друг от друга амплитудами и начальными фазовыми сдвигами.

Ключевые слова: амплитудно-фазовый оператор, двумерные массивы, выделение гармоник.

Пусть заданы целые $s \geq 2$, $\mu \geq 1$, $n = s\mu - 1$, $m = (s+1)\mu$ и множество узлов $\lambda_j^{(0)} := 2\pi(j-1)/m$, $j = \overline{1,m}$. Положим

$$T_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \tau_k(t), \qquad \tau_k(t) := a_k \cos kt + b_k \sin kt.$$

$$\lambda_j = \lambda_j^{(0)} + r_\alpha,\ \omega = -2\cos\frac{2\pi\alpha}{s+1},\ X_j = \frac{2\cos(\lambda_j\mu) + \omega}{m},\ \alpha = \overline{1,s},$$

где сдвиг $r_\alpha = 0$ при четных α и $r_\alpha = \pi/m$ — при нечетных. Тогда действие АФО принимает вид ([1,2])

$$\tau_\mu(\lambda_k) + a_0 \cdot \omega = \sum_{j=1}^{m} X_j \cdot T_n\left(\lambda_k - \lambda_j\right).$$

В силу периодичности T_n отсюда получается

Теорема. *Пусть $\mu \geq 1$, $s \geq 2$, $n = s\mu - 1$, $m = (s+1)\mu$ и значения многочлена $T_n(t)$ заданы на равномерной сетке узлов $\{\lambda_j^{(0)}\}$ отрезка $[0, 2\pi]$. Тогда точные значения гармоники τ_μ в точках $\lambda_k = \lambda_k^{(0)} + r_\alpha$ вычисляются по формуле:*

$$\tau_\mu(\lambda_k) + a_0 \cdot \omega = \sum_{j=1}^{k} X_j \cdot T_n(\lambda_{k-j+1}^{(0)}) + \sum_{j=k+1}^{m} X_j \cdot T_n(\lambda_{m+k-j+1}^{(0)}), \qquad \alpha = \overline{1,s}.$$

Отсюда можно получить формулу выделения гармоник для тригонометрических многочленов двух переменных. Подробнее, пусть в узлах плоской равномерной сетки $\{(\lambda_{k_1}, \xi_{k_2})\}$, $\lambda_{k_1} = 2\pi(k_1 - 1)/m_1$, $\xi_{k_2} = 2\pi(k_2 - 1)/m_2$ заданы значения многочлена вида

$$T_{n_1,n_2}(t_1, t_2) = \sum_{\alpha_1=1}^{n_1} \sum_{\alpha_2=1}^{n_2} \tau^{(1)}_{\alpha_1}(t_1)\tau^{(2)}_{\alpha_2}(t_2),$$

где $n_1 = s_1\mu_1 - 1$, $n_2 = s_2\mu_2 - 1$, $m_1 = (s_1 + 1)\mu_1$, $m_2 = (s_2 + 1)\mu_2$. Тогда на этой же сетке выделяется гармоника

$$\tau^{(1)}_{\mu_1}(t_1)\,\tau^{(2)}_{\mu_2}(t_2) = (a^{(1)}_{\mu_1}\cos\mu_1 t_1 + b^{(1)}_{\mu_1}\sin\mu_1 t_1)(a^{(2)}_{\mu_2}\cos\mu_2 t_2 + b^{(2)}_{\mu_2}\sin\mu_2 t_2)$$

следующей суммой:

$$\begin{aligned}\tau^{(1)}_{\mu_1}(\lambda_{k_1})\,\tau^{(2)}_{\mu_2}(\xi_{k_2}) = &\sum_{j_1=1}^{k_1}\sum_{j_2=1}^{k_2} X^{(1)}_{j_1}\cdot X^{(2)}_{j_2}\cdot T_{n_1,n_2}(\lambda_{k_1-j_1+1},\xi_{k_2-j_2+1})+\\ &+\sum_{j_1=k_1+1}^{m_1}\sum_{j_2=k_2+1}^{m_2} X^{(1)}_{j_1}\cdot X^{(2)}_{j_2}\cdot T_{n_1,n_2}(\lambda_{m_1+k_1-j_1+1},\xi_{m_2+k_2-j_2+1})+\\ &+\sum_{j_1=1}^{k_1}\sum_{j_2=k_2+1}^{m_2} X^{(1)}_{j_1}\cdot X^{(2)}_{j_2}\cdot T_{n_1,n_2}(\lambda_{k_1-j_1+1},\xi_{m_2+k_2-j_2+1})+\\ &+\sum_{j_1=k_1+1}^{m_1}\sum_{j_2=1}^{k_2} X^{(1)}_{j_1}\cdot X^{(2)}_{j_2}\cdot T_{n_1,n_2}(\lambda_{m_1+k_1-j_1+1},\xi_{k_2-j_2+1}).\end{aligned}$$

Если нумерация индексов $\alpha_{1,2}$ начинается с нуля, то указанные формулы выделяют дополнительно суммы вида:

$$a^{(1)}_0 a^{(2)}_0\cdot\omega_1\omega_2 + \omega_1\cdot a^{(1)}_0\cdot\tau^{(2)}_{\mu_2}(\xi_{k_2}) + \omega_2\cdot a^{(2)}_0\cdot\tau^{(1)}_{\mu_1}(\lambda_{k_1}).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект No 18-01-00744).

Литература

1. Данченко В. И., Васильченкова Д. Г. *Выделение гармоник из тригонометрических многочленов амплитудно-фазовыми операторами* // Комплексный анализ и его приложения: материалы VIII Петрозаводской международной конференции, 3-9 июля 2016 – Петрозаводск: изд-во ПетрГУ, 2016. – С. 93–95.

2. Данченко В. И., Васильченкова Д. Г. *Фильтрация тригонометрических многочленов амплитудно-фазовыми операторами* // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам. Тезисы докладов. – М.: МИАН, 2016. – С. 40–41.

FILTRATION OF TWO-DIMENSIONAL TRIGONOMETRIC ARRAYS BY MEANS OF AMPLITUDE AND PHASE OPERATORS

D.G. Vasilchenkova

We consider the problem of a harmonic extraction at the nodes of a uniform two-dimensional grid from a trigonometric polynomial of two variables defined on the grid (two-dimensional trigonometric array). The method is based on apparatus of the amplitude and phase operators, which realize simple

addition of similar signals, different from each other only in amplitudes and initial phases.
Keywords: amplitude and phase operator, two-dimensional arrays, extraction of harmonics.

УДК 517.5

ВЕЩЕСТВЕННЫЕ АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ЗАДАЧАХ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА

Д.Г. Васильченкова[1], В.И. Данченко[2], П.В. Чунаев[3]

1 *darya.vasilchenkova@mail.ru*; Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых
2 *vdanch2012@yandex.ru*; Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых
3 *chunayev@mail.ru*; Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых, Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики (Университет ИТМО)

В заметке рассматривается задача построения вещественных амплитудно-частотных операторов для дифференцирования и экстраполяции аналитических функций. Предложен метод построения указанных операторов путем регуляризации интерполируемой функции за счет добавления к ней интегрального слагаемого специального вида.

Ключевые слова: численное дифференцирование, численная экстраполяция, амплитудно-частотные операторы, регуляризация.

Напомним, что *амплитудно-частотными суммами* (*операторами*) *порядка не выше* n называют функции

$$\mathscr{H}_n(h;z)=\mathscr{H}_n(\{\mu_k\},\{\lambda_k\},h;z):=\sum_{k=1}^{n}\mu_k h(\lambda_k z),\qquad z\in\mathbb{C},\tag{1}$$

где $\{\mu_k,\lambda_k\}_{k=1}^n$ — свободные комплексные параметры (соответственно, *амплитуды* и *частоты*), а h – аналитическая в единичном круге функция. В работе [1] рассматривался вопрос о разрешимости задачи $2n$-кратной интерполяции Паде

$$f(z)-\mathscr{H}_n(\{\mu_k\},\{\lambda_k\},h;z)=O(z^{2n}),\qquad z\to 0,\tag{2}$$

аналитических в окрестности начала функций f путем выбора параметров $\mu_k=\mu_k(f,h,n)$ и $\lambda_k=\lambda_k(f,h,n)$. Там, например, показано, что задача (2) разрешима и притом единственным образом, если отношения тейлоровских коэффициентов функций f и h удовлетворяют специальному детерминантному условию Прони. Такой случай называется *регулярным*. Регулярный случай получается, например, если $f(z)=\frac{1}{z}\int_{-z}^{z}h(t)\,dt$. При этом интерполяционный амплитудно-частотный оператор строится в явном виде и (2) принимает вид хорошо известной квадратурной формулы Гаусса

$$\frac{1}{z}\int_{-z}^{z}h(t)\,dt\approx\mathscr{H}_n^{\mathrm{int}}(h;z),\tag{3}$$

точной на алгебраических многочленах h степени не выше $2n-1$. В операторе $\mathscr{H}_n^{\mathrm{int}}$ амплитуды $\{\mu_k\}_{k=1}^n$ положительны, а частоты $\{\lambda_k\}_{k=1}^n$ являются нулями многочлена Лежандра и принадлежат отрезку $[-1,1]$. Кроме того, μ_k и λ_k не зависят от h.

В случае невыполнения условия Прони (*нерегулярный случай*) вопрос о существовании решения задачи (2) практически не изучен, что заметно сужает область применения амплитудно-частотных операторов.

Такая ситуация имеет место, например, при попытке построения амплитудно-частотных операторов для приближенного дифференцирования (это соответствует случаю $f(z) = (zh(z))'$) или экстраполяции (при $f(z) = h(az)$ и фиксированном $a > 1$). В [1], однако, была предложена регуляризация этих двух задач посредством вычитания из интерполируемой функции f специального бинома вида

$$B_{p,q}(z;h) := pz^{n-1} + qz^{2n-1}, \qquad p,q \in \mathbb{C}.$$

Было показано, что найдутся комплексные числа $p = p(h)$ и $q = q(h)$, для которых соответствующие амплитудно-частотные операторы существуют и строятся единственным образом, а (2) принимает вид

$$(zh(z))' = B_{p,q}(h;z) + \mathscr{H}_n^{\mathrm{dif}}(h;z) + O(z^{2n}), \quad h(az) = B_{p,0}(h;z) + \mathscr{H}_n^{\mathrm{ext}}(h;z) + O(z^{2n}), \quad (4)$$

где амплитуды и частоты $\{\mu_k, \lambda_k\}_{k=1}^n$ не зависят от h и в этом смысле являются универсальными. Заметим еще, что во втором равенстве частоты удовлетворяют условию $|\lambda_k| < a$, что и делает его экстраполяционным.

Тем не менее, формулы (4) оказываются неудобными на практике при работе с *вещественнозначными* на действительной оси функциями h, поскольку фигурирующие в них параметры зачастую являются комплексными. Для преодоления этого недостатка в настоящей заметке предлагается иной способ регуляризации, состоящий в вычитании из интерполируемой функции f интеграла

$$I_M(h;z) := \frac{M}{z}\int_0^z h(t)\,dt, \qquad M > 0.$$

Нами доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. *При определенном $M = M(n) > 0$ справедливо равенство*

$$(zh(z))' = I_M(h;z) + \mathscr{H}_n^{\mathbb{R}\mathrm{dif}}(h;z) + O(z^{2n}),$$

где в $\mathscr{H}_n^{\mathbb{R}\mathrm{dif}}$ амплитуды положительны, частоты вещественны и все они не зависят от h. Равенство является точным на многочленах h степени не выше $2n-1$.

Теорема 2. *При любых $M > 0$ и $a > 1$ справедливо равенство*

$$h(az) = I_M(h;z) + \mathscr{H}_n^{\mathbb{R}\mathrm{ext}}(h;z) + O(z^{2n}),$$

где в $\mathscr{H}_n^{\mathbb{R}\mathrm{ext}}$ амплитуды положительны, частоты вещественны и все они не зависят от h. Более того, частоты принадлежат интервалу $[0,a)$, т.е. указанное равенство является экстраполяционным. Равенство является точным на многочленах h степени не выше $2n-1$.

Заметим, что регуляризующий интеграл $I_M(h;z)$ в теоремах сам хорошо приближается амплитудно-частотной суммой по формуле Гаусса (3).

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (задание 1.574.2016/1.4) и РФФИ (проект 18-01-00744).

Литература

1. Chunaev P., Danchenko V. *Approximation by amplitude and frequency operators* // J. Approx. Theory. — 2016. — Vol. 207. — P. 1–31.

REAL-VALUED AMPLITUDE AND FREQUENCY SUMS IN NUMERICAL ANALYSIS PROBLEMS

D.G. Vasilchenkova, V.I. Danchenko, P.V. Chunaev

In this note, we consider the problem of construction of real-valued amplitude and frequency operators for numerical differentiation and extrapolation of analytic functions. We propose a construction method for the above-mentioned operators based on regularization of the function to interpolate by adding a special integral term.

Keywords: numerical differentiation, numerical extrapolation, amplitude and frequency operators, regularization.

УДК 517

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ РАСШИРЕННОЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ЧАСТИ АЛГЕБРЫ ФОН НЕЙМАНА, СВЯЗАННЫЕ С ОПЕРАТОРНО МОНОТОННЫМИ И ОПЕРАТОРНО ВЫПУКЛЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Л.В. Веселова[1], Чунг Хоа Динь[2], О.Е. Тихонов[3]

1 *lidveselova@gmail.com*; Казанский национальный исследовательский технологический университет
2 *thdinh@troy.edu*; Troy University, Troy, Alabama, USA
3 *oleg.tikhonov@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Неравенства для операторно монотонных и операторно выпуклых функций распространяются на элементы расширенной положительной части алгебры фон Неймана. Это дает возможность, в частности, распространить такие неравенства на неограниченные положительные самосопряженные операторы.

Ключевые слова: алгебра фон Неймана, расширенная положительная часть, операторно монотонная функция, операторно выпуклая функция.

Всюду в этой заметке $\mathcal{M}$ обозначает алгебру фон Неймана, $\mathcal{M}_+$ — её положительную часть, $\mathcal{M}_*^+$ — конус положительных нормальных функционалов на $\mathcal{M}$. Символом $\xrightarrow{s}$ обозначаем сходимость в сильной операторной топологии.

Определение 1. [5] Борелевская функция $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, ограниченная на ограниченных подмножествах $\mathbb{R}^+$, называется *операторно монотонной относительно* $\mathcal{M}$ (или, кратко, $\mathcal{M}$*-монотонной*), если

$$A,B\in\mathcal{M}_+,\ A\le B \implies f(A)\le f(B). \tag{1}$$

Такая функция f называется $\mathcal{M}$*-выпуклой* [2], если

$$A,B\in\mathcal{M}_+,\ 0\le\alpha\le 1 \implies f(\alpha A+(1-\alpha)B)\le \alpha f(A)+(1-\alpha)f(B). \tag{2}$$

Всюду ниже $\mathbb{R}^+\cup\{+\infty\}$ обозначается через $\overline{\mathbb{R}}^+$.

Определение 2. [3] *Расширенной положительной частью* $\widehat{\mathcal{M}_+}$ алгебры фон Неймана $\mathcal{M}$ называется совокупность отображений $m : \mathcal{M}_*^+ \to \overline{\mathbb{R}}^+$, удовлетворяющих условиям:

(i) $m(\lambda\varphi) = \lambda m(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{M}_*^+$, $\lambda \geq 0$ (где $0 \cdot (+\infty) = 0$);

(ii) $m(\varphi + \psi) = m(\varphi) + m(\psi)$, $\varphi, \psi \in \mathcal{M}_*^+$;

(iii) m полунепрерывно снизу.

Ясно, что $\mathcal{M}_+$ можно рассматривать как подмножество $\widehat{\mathcal{M}_+}$. Более того, множество положительных самосопряженных операторов, присоединенных к $\mathcal{M}$, можно отождествить с подмножеством $\widehat{\mathcal{M}_+}$ [6, Пример IX.4.5]. При этом $\widehat{\mathcal{M}_+}$ замкнута относительно сложения, умножения на неотрицательные числа и пределов возрастающих сетей [3], [6, с. 215]. Для $m \in \widehat{\mathcal{M}_+}$ и $C \in \mathcal{M}$ элемент $C^* mC$ определяется соотношением $(C^* mC)(\varphi) = m(C\varphi C^*)$, где $C\varphi C^* = \varphi(C^* \cdot C)$.

Согласно [6, Теорема IX.4.8], каждый элемент $m \in \widehat{\mathcal{M}_+}$ обладает единственным спектральным разложением вида

$$m(\varphi) = \int_0^{+\infty} \lambda \, d\varphi(e_m(\lambda)) + \infty \cdot \varphi(p_m), \quad \varphi \in \mathcal{M}_*^+,$$

где $\{e_m(\lambda) : \lambda \in \mathbb{R}^+\}$ — сильно непрерывное справа возрастающее семейство проекторов из $\mathcal{M}$ и $p_m = 1 - \lim\limits_{\lambda \to +\infty} e_m(\lambda)$.

Для ограниченной борелевской функции $f : \overline{\mathbb{R}}^+ \to \mathbb{R}$ определим самосопряженный оператор $f(m)$ из $\mathcal{M}$ посредством формулы

$$\varphi(f(m)) = \int_0^{+\infty} f(\lambda) \, d\varphi(e_m(\lambda)) + f(+\infty)\varphi(p_m) \qquad (\varphi \in \mathcal{M}_*^+).$$

Аналогично, для борелевской функции $f : \overline{\mathbb{R}}^+ \to \overline{\mathbb{R}}^+$ определим $f(m)$ формулой

$$\varphi(f(m)) = \int_0^{+\infty} f(\lambda) \, d\varphi(e_m(\lambda)) + f(+\infty)\varphi(p_m) \qquad (\varphi \in \mathcal{M}_*^+).$$

Нетрудно убедиться, что $f(m)$ является элементом $\widehat{\mathcal{M}_+}$.

Основная цель настоящей заметки — показать, как неравенства монотонности (1) и выпуклости (2) могут быть расширены с $\mathcal{M}_+$ на $\widehat{\mathcal{M}_+}$.

Теорема 1. *Пусть функция* $f : \overline{\mathbb{R}}^+ \to \overline{\mathbb{R}}^+$ *такова, что её ограничение на* $\mathbb{R}^+$ *отображает* $\mathbb{R}^+$ *в* $\mathbb{R}^+$*, является* $\mathcal{M}$*-монотонной и* $f(+\infty) \geq \lim\limits_{\lambda \to +\infty} f(\lambda)$*. Тогда*

$$f(m') \leq f(m'')$$

для любых $m', m'' \in \widehat{\mathcal{M}_+}$ *таких, что* $m' \leq m''$.

Эта теорема является обобщением теоремы 5 работы [2]. Следующее утверждение обобщает и уточняет теорему Хансена из [4].

Следствие. *Пусть функция* $f : \overline{\mathbb{R}}^+ \to \overline{\mathbb{R}}^+$ *такова, что её ограничение на* $\mathbb{R}^+$ *отображает* $\mathbb{R}^+$ *в* $\mathbb{R}^+$*, является операторно монотонной относительно* $\mathscr{M} \otimes \mathscr{B}(H_2)$ *и* $f(+\infty) \geq \lim\limits_{\lambda \to +\infty} f(\lambda)$*. Тогда*

$$C^* f(m) C \leq f(C^* m C).$$

для любых $m \in \widehat{\mathscr{M}_+}$ *и* $C \in \mathscr{M}$ *с* $\|C\| \leq 1$.

Теорема 2. *Пусть функция* $f : \overline{\mathbb{R}}^+ \to \overline{\mathbb{R}}^+$ *такова, что её ограничение на* $\mathbb{R}^+$ *отображает* $\mathbb{R}^+$ *в* $\mathbb{R}^+$*, является* $\mathscr{M}$*-выпуклой и* $f(+\infty) = \lim\limits_{\lambda \to +\infty} f(\lambda)$*. Тогда*

$$f(\alpha m' + (1-\alpha) m'') \leq \alpha f(m') + (1-\alpha) f(m'')$$

для любых $m', m'' \in \widehat{\mathscr{M}_+}$ *и* $\alpha \in [0,1]$.

Подчеркнем, что для неограниченных положительных самосопряженных операторов уже формулировка неравенств выпуклости приводит к понятию расширенной положительной части, так как выпуклую комбинацию неограниченных положительных самосопряженных операторов нельзя, вообще говоря, корректно определить как плотно заданный оператор. При доказательстве теоремы 2 мы существенно использовали нижеприведенное предложение, условие (i) в котором представляет из себя некоторый аналог сильной резольвентной сходимости неограниченных самосопряженных операторов.

Предложение. *Для сети* $\{m_\alpha\} \subset \widehat{\mathscr{M}_+}$ *и* $m \in \widehat{\mathscr{M}_+}$ *эквивалентны следующие условия:*

(i) $\nu_1(m_\alpha) \xrightarrow{s} \nu_1(m)$, *где* $\nu_1(\lambda) = \lambda(1+\lambda)^{-1}$ $(\lambda \in \mathbb{R}^+)$, $\nu_1(+\infty) = 1$.

(ii) $f(m_\alpha) \xrightarrow{s} f(m)$ *для любой непрерывной функции* $f : \overline{\mathbb{R}}^+ \to \mathbb{R}$.

Литература

1. Dinh T. H., Tikhonov O. E., Veselova L. V. *Inequalities for the extended positive part of a von Neumann algebra, related to operator monotone and operator convex functions* // Ann. Funct. Anal. – Accepted paper.

2. Динь Ч. Х., Тихонов О. Е. *К теории операторно монотонных и операторно выпуклых функций* // Изв. вузов. Матем. – 2010. – № 3. – С. 9–14.

3. Haagerup U. *Operator valued weights in von Neumann algebras, I* // J. Funct. Anal. – 1979. – V. 32. – P. 175–206.

4. Hansen F. *An operator inequality* // Math. Ann. – 1980. – V. 246. – P. 249–250.

5. Osaka H., Silvestrov S. D., Tomiyama J. *Monotone operator functions on* C^**-algebras* // International J. Math. – 2005. – V. 16. – P. 181–196.

6. Takesaki M. *Theory of operator algebras II.* – Berlin: Springer. – 2003.

INEQUALITIES FOR THE EXTENDED POSITIVE PART OF A VON NEUMANN ALGEBRA, RELATED TO OPERATOR MONOTONE AND OPERATOR CONVEX FUNCTIONS

L.V. Veselova, Trung Hoa Dinh, O.E. Tikhonov

We extend inequalities for operator monotone and operator convex functions onto elements of the extended positive part of a von Neumann algebra. In particular, that provides an opportunity to extend the inequalities onto unbounded positive self-adjoint operators.

Keywords: von Neumann algebra, extended positive part, operator monotone function, operator convex function.

УДК 517.54

ОТОБРАЖЕНИЯ С ОГРАНИЧЕННЫМ ВЕСОВЫМ (q,p)-ИСКАЖЕНИЕМ ПРИ МИНИМАЛЬНОЙ РЕГУЛЯРНОСТИ И ИХ СВОЙСТВА

С.К. Водопьянов[1]

1 *vodopis@math.nsc.ru*; Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирский государственный университет

Мы приводим свойства отображений с θ-весовым (q,p)-ограничением искажением. Основное внимание уделено модульным неравенствам для отображений этой шкалы и их применениям.

Ключевые слова: квазиконформный анализ, пространство Соболева, функция Полецкого, модуль семейства кривых, модульная оценка.

В работах [1,2] исследованы базовые свойства следующего класса отображений.

Определение. Пусть $\theta\colon \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ — измеримая функция (называемая *весовой*) такая, что $0<\theta<\infty$ $\mathcal{H}^n$-почти всюду. Отображение $f:\Omega\to\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$, называется *отображением с (внутренним) ограниченным θ-весовым (q,p)-искажением* (кратко: $f\in\mathcal{ID}(\Omega;q,p;\theta,1)$), $n-1\leq q\leq p<\infty$, если:

1) f непрерывно, открыто и дискретно;

2) f принадлежит классу Соболева $W^1_{n-1,\mathrm{loc}}(\Omega)$;

3) якобиан $J(x,f)\geq 0$ для п. вс. $x\in\Omega$;

4) отображение f имеет конечное коискажение: $\operatorname{adj}Df(x)=0$ п. вс. на множестве $Z=\{x\in\Omega:\det Df(x)=0\}$;

5) функция локального θ-весового (q,p)-искажения

$$\Omega\ni x\mapsto \mathcal{K}^{\theta,1}_{q,p}(x,f)=\begin{cases}\dfrac{\theta^{\frac{n-1}{q}}(x)|\operatorname{adj}Df(x)|}{J(x,f)^{\frac{n-1}{p}}}, & \text{если } J(x,f)\neq 0,\\ 0 & \text{иначе},\end{cases}$$

принадлежит классу $L_\varrho(\Omega)$, где ϱ находится из условия $\frac{1}{\varrho}=\frac{n-1}{q}-\frac{n-1}{p}$ ($\varrho=\infty$ при $q=p$).

Введем следующее обозначение $\mathcal{K}^{\theta,1}_{q,p}(f;\Omega)=\left\|\mathcal{K}^{\theta,1}_{q,p}(\cdot,f)\mid L_\varrho(\Omega)\right\|$.

В [1,2] показано, что в случае $\theta\equiv 1$, $q=p=n$ класс $\mathcal{ID}(\Omega;n,n;1,1)$ совпадает с классом отображений с ограниченным искажением, основы теории которых заложены в 60-ые годы прошлого века Ю.Г. Решетняком. Напомним, что отображение $f=(f_1,\dots,f_n)\colon\Omega\to\mathbb{R}^n$ класса Соболева $W^1_{n,\mathrm{loc}}(\Omega)$ называется *отображением с ограниченным искажением*, если для $\mathcal{H}^n$-почти всех $x\in\Omega$ выполняется неравенство

$$|Df(x)|^n\leqslant KJ(x,f),$$

где $K \in [1,\infty)$ — постоянная, $Df(x) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)_{i,j=1,\dots,n}$ — матрица Якоби, $|Df(x)|$ и $J(x,f)$ — ее операторная норма и определитель, соответственно. Основополагающий топологический результат Ю. Г. Решетняка [3] заключается в том, что *всякое непостоянное отображение с ограниченным искажением непрерывно, открыто и дискретно*.

Поведение модуля семейства кривых при отображениях класса $\mathscr{I}\mathscr{D}(\Omega; q, p; \theta, 1)$ сформулировано в следующем утверждении.

Теорема 1. *Пусть* $f\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ *— отображение с ограниченным* θ*-весовым* (q,p)*-искажением,* $n-1 < q \leqslant p < \infty$*, а весовая функция* $\omega(x) = \theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$ *локально суммируема. Если* Γ *— семейство кривых в области* Ω*, то справедливо неравенство*

$$(\mathrm{mod}_s f(\Gamma))^{1/s} \leqslant \mathscr{K}^{\theta,1}_{q,p}(f;\Omega)(\mathrm{mod}^{\omega}_r \Gamma)^{1/r}, \tag{1}$$

где $s = \frac{p}{p-(n-1)}$, $r = \frac{q}{q-(n-1)}$.

Здесь Γ — семейство кривых в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Борелевская функция $\rho\colon \Omega \to [0,\infty]$ называется *допустимой* для Γ, если

$$\int_{\gamma} \rho\, ds \geqslant 1$$

для каждой локально спрямляемой кривой $\gamma \in \Gamma$. Совокупность всех допустимых функций обозначаем $\mathrm{adm}\,\Gamma$. Для весовой функции $\omega\colon \mathbb{R}^n \to (0,\infty)$ и $p \in [1,\infty)$ определим *ω-весовой p-модуль* семейства Γ формулой

$$\mathrm{mod}^{\omega}_p \Gamma = \inf_{\rho \in \mathrm{adm}\,\Gamma} \int_{\mathbb{R}^n} \rho^p \omega\, d\mathscr{H}^n.$$

Весовая функция предполагается локально суммируемой и $0 < \omega < \infty$ $\mathscr{H}^n$-почти всюду. При $\omega \equiv 1$ мы получаем обычное определение p-модуля, и вместо $\mathrm{mod}^1_p \Gamma$ пишем $\mathrm{mod}_p \Gamma$. Если $\mathrm{adm}\,\Gamma = \varnothing$ (этот случай реализуется только тогда, когда в семействе Γ есть хотя бы одна кривая, задающая постоянное отображение), то полагаем $\mathrm{mod}^{\omega}_p \Gamma = \infty$.

Ключевым средством в доказательстве сформулированной теоремы служит полученное нами обобщение леммы Полецкого из [4], которое описывает совокупность «подходящих» параметризаций для кривых семейства $f(\Gamma) = \{f \circ \gamma : \gamma \in \Gamma\}$.

Теорема 1 дает положительный ответ на вопрос работы [5] о получении модульных неравенств типа (1) для общих семейств кривых при условии $f \in W^1_{n-1,\mathrm{loc}}$.

Из неравенство (1) можно получить емкостные оценки работ [1, 2].

Отметим, что в ряде задач модульные неравенства позволяют получить более тонкие результаты сравнительно с соответствующими емкостными

Исследование выполнено при частичной финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований СО РАН (проект № 0314-2016-0006), частичной поддержке Министерства образования и науки РФ (госзадание № 1.3087.2017/4.6 и соглашение № 02.a03.21.0008), и частичной поддержке гранта РФФИ (код проекта № 17-01-00801).

Литература

1. Водопьянов С. К. *Основы квазиконформного анализа двухиндексной шкалы пространственных отображений* // Сиб. матем. журн. – 2018. – Т. 59. – № 5. – С. 1020–1056.

2. Водопьянов С. К. *О дифференцируемости отображений класса Соболева W^1_{n-1} с некоторыми условиями на функцию искажения* // Сиб. матем. журн. – 2018. – Т. 59. – № 6. – С. 1240–1297.

3. Решетняк Ю. Г. *Пространственные отображения с ограниченным искажением.* – Новосибирск: Наука, 1982. – 285 с.

4. Полецкий Е. А. *Метод модулей для негомеоморфных квазиконформных отображений* // Мат. сб. – 1970. – Т. 83 (125). – № 2. – С. 261–272.

5. Tengvall V. *Differentiability in the Sobolev space $W_{1,n-1}$* // Calculus of variations and partial differential equations. – 2014. – Т. 51. – № 1-2. – P. 381–399.

MAPPINGS WITH BOUNDED WEIGHTED (q, p)-DISTORTION UNDER MINIMAL REGULARITY AND ITS PROPERTIES

S.K. Vodopyanov

We exhibit properties of mappings with θ-weighted (q, p)-distortion. The focus is given to modulus inequalities for the mappings of this scale and its applications.

Keywords: quasiconformal analysis, Sobolev space, Poletskiĭ's function, modulus of a family of curves, modulus estimate.

УДК 519.642

ОБ ОДНОМ СПЛАЙН-МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО РОДА

Н.С. Габбасов[1]

1 *gabbasovnazim@rambler.ru*; Набережночелнинский институт Казанского (Приволжского) федерального университета

Исследуется линейное интегральное уравнение третьего рода с коэффициентом, имеющим нули степенного порядка. Для его приближенного решения в пространстве обобщенных функций предложен и обоснован специальный обобщенный вариант сплайн-метода. Установлена оптимальность по порядку точности построенного метода.

Ключевые слова: интегральное уравнение третьего рода, приближенное решение, сплайн-метод.

Объектом исследования является линейное интегральное уравнение третьего рода (УТР)

$$(Ax)(t) \equiv x(t) \prod_{j=1}^{q} (t - t_j)^{m_j} + \int_{-1}^{1} K(t, s)x(s)ds = y(t), \tag{1}$$

в котором $t \in I \equiv [-1, 1]$, $t_j \in (-1, 1)$, $m_j \in \mathbb{N}$ $(j = \overline{1, q})$; K и y – известные непрерывные функции, обладающие определенными свойствами "гладкости" точечного характера, а x – искомая функция. Исследование таких уравнений представляет несомненный интерес как с точки зрения теории, так и приложений (см., напр., [1,2] и библиографию к ним). Особенно актуальной является разработка эффективных методов их приближенного решения с соответствующим теоретическим обоснованием. Основные результаты в этом направлении изложены в монографии [2], в которой предложены и обоснованы специальные прямые полиномиальные и сплайновые (на базе сплайнов 1-го и 2-го порядков) методы решения УТР (1) в различных пространствах обобщенных функций.

Настоящая работа посвящена приближенному решению УТР (1) в некотором пространстве типа V обобщенных функций, порожденных функционалом “конечная часть интеграла по Адамару”. Именно, в этих целях предложен новый вариант обобщенного метода коллокации, основанный на применении кубических сплайнов минимального дефекта. Проведено теоретическое обоснование в смысле и установлено, что разработанный метод оптимален по порядку точности на некотором классе F гладких функций среди всех прямых проекционных методов решения исследуемых уравнений в пространстве обобщенных функций.

Пусть $Y \equiv C\{\overline{m};\overline{\tau}\} \equiv C_{\overline{\tau}}^{\{\overline{m}\}}(I)$ – пространство “точечно-гладких” функций, а $T : Y \to C$ – “характеристический” оператор класса Y (см., напр., [2, с. 22]), где $\overline{m} \equiv (m_1, m_2, ..., m_q)$ и $\overline{\tau} \equiv (t_1, t_2, ..., t_q)$ – конечные наборы величин, фигурирующих в уравнении (1). На этом основном пространстве Y введем семейство $X \equiv V\{\overline{m};\overline{\tau}\}$ обобщенных функций $x(t)$ вида

$$x(t) \equiv z(t) + \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=0}^{m_j-1} \gamma_{ji} P.F.(t-t_j)^{-i-1},$$

где $t \in I$, $z \in C$, $\gamma_{ji} \in \mathbb{R}$ – произвольные постоянные, а $P.F.(t-t_j)^{-i-1}$ – обобщенные функции, определенные на Y по следующему правилу:

$$(P.F.(t-t_j)^{-i-1}, y) \equiv P.F. \int_{-1}^{1} y(t)(t-t_j)^{-i-1} dt \quad (y \in Y, i = \overline{0, m_j-1}, j = \overline{1,q})$$

(знак $P.F.$ указывает на конечную часть интеграла по Адамару). По соответствующим нормам Y и X являются банаховыми.

Далее пусть задано УТР (1), в котором непрерывные исходные данные K и y удовлетворяют следующим требованиям:

$$K \in C_{\overline{\tau}}^{\{\overline{m}\}}(I^2);\ \varphi_{ji}(s) \equiv K_t^{\{i\}}(t_j, s),\ \psi_{ji}(t) \equiv K_s^{\{i\}}(t, t_j),\ y \in Y \quad (i = \overline{1, m_j-1},\ j = \overline{1,q}), \tag{2}$$

а $x \in X$ – искомая обобщенная функция. Его приближенное решение образуем в виде

$$x_n \equiv x_n(t; \{c_k\}) \equiv \sum_{i=-1}^{n+1} c_i B_i(t) + \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=0}^{m_j-1} c_{i+n+2+M(j-1)}(t-t_j)^{-i-1}, \tag{3}$$

где $B_i(t)$ – обычные B-сплайны третьего порядка на равномерной сетке с узлами $s_k \equiv -1 + 2k/n\, (k = \overline{0,n})$, а $M(l) \equiv \sum_{i=1}^{l} m_i\, (l = 0, 1, ..., q)$, $M(0) \equiv 0, M(q) \equiv \mu$. Набор $\{c_k\}_{-1}^{n+\mu+1}$ неизвестных параметров найдем, согласно нашему методу, из СЛАУ

$$(T\rho_n)(s_i) = 0\, (i = \overline{0,n}),\ \rho_n^{\{i\}}(t_j) = 0 \quad (i = \overline{0, m_j-1}, j = \overline{1,q}),$$

$$(TUx_n)^{(3)}(s_j-0)=(TUx_n)^{(3)}(s_j+0)=0 \quad (j=\overline{1,n-1}), \tag{4}$$

где $\rho_n(t)\equiv(Ax_n-y)(t)$ – невязка приближенного решения, а $U:X\to Y$ – оператор, порожденный первым слагаемым в УТР (1).

Для вычислительного алгоритма (1)-(4) справедлива

Теорема 1. *Пусть* $Ker A=\{\theta\}$ *в* X *и функции* K *(по* t*),* T_sK *(по* t*),* ψ_{ji} $(i=\overline{0,m_j-1},\ j=\overline{1,q})$, $y\in YC^{(r)}\equiv\{y\in Y|Ty\in C^{(r)}\}$ $(r=\overline{1,3})$. *Тогда при всех* $n\in N$ $(n\geq n_0)$ *СЛАУ (4) обладает единственным решением* $\{c_k^*\}$ *и последовательность приближенных решений* $x_n^*\equiv x_n(t;\{c_k^*\})$ *сходится к точному решению* $x^*=A^{-1}y$ *по норме пространства* X *со скоростью*

$$\|x_n^*-x^*\|=O(n^{-r}) \quad (r=\overline{1,3}).$$

Следуя работе [3, с.40], через $V_N(F)$ обозначим оптимальную оценку погрешности всевозможных прямых проекционных методов решения уравнения (1) на некотором классе F.

Теорема 2. *Если* $F=YC^{(r)}$, *то*

$$V_N(F)\asymp N^{-r} \quad (N=n+\mu+3,\ r=\overline{1,3}),$$

где $\asymp$ означает слабую эквивалентность, и этот оптимальный порядок реализует метод (3), (4).

Литература

1. Bart G.R., Warnock R.L. *Linear integral equations of the third kind* // SIAM J. Math. Anal. – 1973. – Vol. 4. – № 4. – P. 609–622.

2. Габбасов Н. С. *Методы решения интегральных уравнений Фредгольма в пространствах обобщенных функций.* – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2006. – 176 с.

3. Габдулхаев Б. Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980. – 232 с.

A SPLINE METHOD FOR SOLVING INTEGRAL EQUATIONS OF THE THIRD KIND

N.S. Gabbasov

We study a linear integral equation of the third kind with a coefficient that has zeros of finite order. For its approximate solution in the space of generalized functions, we suggest and justify a special generalized version of the spline method. We show that the constructed method is optimal by the order.
Keywords: integral equation of the third kind, approximate solution, spline method.

УДК 519.642

К ПРИБЛИЖЕННОМУ РЕШЕНИЮ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО РОДА С НЕПОДВИЖНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ В ЯДРЕ

Н.С. Габбасов[1], З.Х. Галимова[2]

1 *gabbasovnazim@rambler.ru*; Набережночелнинский институт Казанского (Приволжского) федерального университета
2 *zulshik@mail.ru*; Казанский инновационный университет им. В.Г. Тимирясова, Набережночелнинский филиал

Исследуется линейное интегральное уравнение третьего рода с неподвижными особенностями в ядре. Для его приближенного решения в пространстве обобщенных функций предложен и обоснован специальный вариант метода коллокации.

Ключевые слова: интегральное уравнение третьего рода, пространство обобщенных функций, приближенное решение, метод коллокации.

Исследуется линейное интегральное уравнение третьего рода с неподвижными особенностями в ядре (УТРНО)

$$Ax \equiv x(t)\prod_{j=1}^{l}(t-t_j)^{m_j} + \int_{-1}^{1} K(t,s)\left[(s+1)^{p_1}(1-s)^{p_2}\right]^{-1} x(s)ds = y(t), \tag{1}$$

где $t \in I \equiv [-1,1]$, $t_j \in (-1,1)$, $m_j \in \mathbb{N}$ $(j=\overline{1,l})$; K и y – известные “точечно-гладкие” функции, x – искомая функция, а интеграл понимается в смысле конечной части по Адамару [1, с. 144 – 150]. Уравнения вида (1) находят все более широкие применения, как в теории, так и в приложениях (см., напр., [2] и библиографию к ней). Особенно актуальной является разработка эффективных методов их приближенного решения с соответствующим теоретическим обоснованием. Ряд результатов в этом направлении получен в работах [2-5], в которых предложены и обоснованы специальные прямые методы решения УТРНО (1) в некотором пространстве типа D обобщенных функций, построенных при помощи функционала “дельта-функция Дирака”.

Настоящая работа посвящена вопросам разрешимости УТРНО (1) в некотором пространстве типа V обобщенных функций, порожденных функционалом “конечная часть интеграла по Адамару”. Именно, разработаны обобщенные варианты “полиномиальных” и “сплайновых” прямых методов, специально приспособленные к приближенному решению уравнения (1). Дано их обоснование в смысле [6, гл. 1] и установлено, что построенные методы оптимальны по порядку точности на некотором классе F “гладких” функций среди всех прямых проекционных методов решения исследуемых уравнений. В виде иллюстрации приведем некоторые из полученных результатов.

Пусть $C\{m;0\}$ и $C\{p;1\}$ – соответствующие пространства “точечно-гладких” функций, а $T : C\{m;0\} \to C$ и $S : C\{p;1\} \to C$ – соответственно их “характеристические” операторы (см., напр., [3]). Образуем основное пространство

$$Y \equiv \{y \in C\{m;0\} | Ty \in\in C\{p;1\}\}$$

и на нем введем векторное пространство $X \equiv V^{(p)}\{m;0\}$ обобщенных функций $x(t)$ вида

$$x(t) \equiv z(t) + \sum_{i=0}^{m-1} \gamma_i P.F. t^{-i-1},$$

где $t \in I$, $z \in C\{p;1\}$, $\gamma_i \in \mathbb{R}$ – произвольные постоянные, а $P.F. t^{-k}$ – обобщенные функции, определенные на Y по следующему правилу:

$$(P.F. t^{-k}, y) \equiv P.F. \int_{-1}^{1} y(t) t^{-k} dt \quad (y \in Y, k = \overline{1,m})$$

(знак $P.F.$ указывает на конечную часть интеграла по Адамару). По соответствующим нормам Y и X являются банаховыми.

Пусть задано УТРНО (1). Ради простоты выкладок и формулировок будем считать $l = 1$, $t_1 = 0$, $p_1 = 0$, т.е. рассмотрим уравнение вида

$$Ax \equiv t^m x(t) + \int_{-1}^{1} K(t,s)(1-s)^{-p} x(s) ds = y(t) \quad (t \in I), \tag{2}$$

где $m \in N$, $p \in R^+$, $y \in Y$, ядро K удовлетворяет условиям фредгольмовости оператора $A : X \to Y$, а $x \in X$ – искомая обобщенная функция. Его приближенное решение отыскиваем в виде

$$x_n \equiv x_n(t;\{c_j\}) \equiv (1-t)^p \sum_{i=-1}^{n+1} c_i B_i(t) + \sum_{i=0}^{\lambda} c_{i+n+2}(t-1)^i + \sum_{i=0}^{m-1} c_{i+\lambda+n+3} t^{-i-1} \, (n = 2,3,\dots), \tag{3}$$

где $B_i(t)$ – обычные B-сплайны третьего порядка на равномерной сетке с узлами $s_k \equiv -1 + 2k/n \, (k = \overline{0,n})$, а $\lambda = \lambda(p) \equiv [p] - (1 + sign([p] - p))$. Неизвестные параметры $c_j = c_j^{(n)} \, (j = -1,0,1,\dots,n+m+\lambda+2)$ находим, согласно нашему методу, из СЛАУ

$$(ST\rho_n)(s_i) = 0 \, (i = \overline{0,n}), \, (T\rho_n)^{\{j\}}(1) = 0 \quad (j = \overline{0,\lambda}), \, \rho_n^{\{i\}}(0) = 0 \, (i = \overline{0,m-1}),$$

$$(STUx_n)^{(3)}(s_k - 0) = (STUx_n)^{(3)}(s_k + 0) \quad (k = 1, n-1), \tag{4}$$

в которой $\rho_n(t) \equiv (Ax_n - y)(t)$ – невязка приближенного решения, $Ug \equiv t^m g(t)$.

Замечание. Обоснование вычислительного алгоритма (2)-(4) проводится с использованием соответствующих идей и результатов работ [3], [6, гл. 1]. При этом если исходные данные УТРНО (2) принадлежат классу $YC^{(r)} \equiv \{y \in Y | STy \in C^{(r)}\} \, (r = \overline{1,3})$, то в условиях теоремы обоснования сходимость приближенных решений x_n^* к точному решению $x^* = A^{-1}y$ характеризуется неравенством

$$\| x_n^* - x^* \|_X = O(n^{-r}) \quad (r = \overline{1,3}).$$

Литература

1. Адамар Ж. *Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа.* – М.: Наука, 1978. – 351 с.

2. Замалиев Р. Р. *О прямых методах решения интегральных уравнений третьего рода с особенностями в ядре* // Дисс … канд. физ.-мат. наук. – Казань: КФУ, 2012. – 114 с.

3. Габбасов Н. С. *Методы решения интегрального уравнения третьего рода с фиксированными особенностями в ядре* // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45. – № 9. – С. 1341–1348.

4. Габбасов Н. С. *Новые варианты метода коллокации для интегральных уравнений третьего рода с особенностями в ядре* // Дифференц. уравнения. – 2011. – Т. 47. – № 9. – С. 1344–1351.

5. Габбасов Н. С. *Новый вариант метода коллокации для одного класса интегральных уравнений в особом случае* // Дифференц. уравнения. – 2013. – Т. 49. – № 9. – С. 1178–1185.

6. Габдулхаев Б. Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казан.ун-та, 1980. – 232 с.

AN APPROXIMATE SOLVING INTEGRAL EQUATIONS OF THE THIRD KIND WITH FIXED SINGULARITIES IN A KERNEL

N.S. Gabbasov, Z.H. Galimova

We study a linear integral equation of the third kind with fixed singularities in a kernel. For the approximate solution of these equatios in the space of generalized functions we propose and substantiate a special version of the collocation method.

Keywords: integral equation of the third kind, space of the generalized functions, approximate solution, collocation method.

УДК 519.6, 517.9

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПЕРЕНОСА С ВОЗМУЩЕННЫМИ ИСХОДНЫМИ ДАННЫМИ

Т.П. Гаврилова[1]

1 *gavrilovatp@susu.ru*; Южно-Уральский государственный университет (национальный исследовательский университет)

Рассмотрена задача определения температуры внутри объекта, подвергаемого внешнему тепловому воздействию. Исходные данные в задаче формируются на основе измерений температурных функций вблизи поверхности объекта. С помощью преобразования Лапласа задача сводится к интегральному уравнению, характеризующему прямую зависимость неизвестной граничной функции от исходных данных. Предложен численный метод решения интегрального уравнения, основанный на принципах дискретной регуляризации.

Ключевые слова: теплоперенос, задача измерения, возмущенные данные, уравнение теплопроводности, преобразование Лапласа, численный метод.

В технологических процессах, связанных с теплообменом, большой интерес вызывает процесс прогнозирования температуры внутри объекта при внешнем тепловом воздействии. При этом конструкция оборудования позволяет измерять температурные функции только вблизи поверхности объекта. В связи с этим возникает необходимость в разработке математических моделей и численных методов определения температуры в недоступной для непосредственных измерений части объекта по результатам поверхностных измерений. Такие задачи относят к классу обратных граничных задач. Изучению обратных граничных задач, связанных с процессами теплообмена, посвящены работы многих исследователей [1]– [7].

В работе рассмотрена задача определения температуры во внутренних точках объекта, которая в силу особенностей внешнего теплового воздействия может быть сведена к задаче теплопереноса в линейном объекте, один конец которого соответствует точке на поверхности тела, а второй – внутренней контрольной точке.

В представленной задаче измерения уравнение теплопроводности с помощью прямого и обратного преобразования Лапласа приводится к интегральному уравнению Вольтерра, представляющему прямую зависимость неизвестной температурной функции от исходных данных, а затем для численного решения полученного уравнения используется метод дискретной регуляризации, обеспечивающий устойчивость вычислительной процедуры относительно погрешности исходных данных.

Для оценки эффективности предложенного подхода был проведен вычислительный эксперимент. Результаты эксперимента свидетельствуют о достаточной точности предложенного метода определения температуры.

Постановка задачи

Математическая модель рассматриваемой задачи имеет вид:

$$u_t = au_{xx}, \quad x \in (0,l), \quad t \geq 0, \tag{1}$$

$$u(0,t) = \varphi(t), \quad u(x_0,t) = g(t), \quad t \geq 0, \tag{2}$$

$$u(x,0) = C, \quad x \in [0,l], \tag{3}$$

где x_0 – точка, расположенная вблизи границы объекта. В данной задаче требуется найти граничное значение функции

$$u(l,t) = \psi(t). \tag{4}$$

Учитывая особенности технологического процесса, полагаем, что во внутренних точках объекта $g(t), \varphi(t) \in C^{2+\eta}[0,T]$ при всех $T > 0$ и $\eta \in (0,1)$. Также существуют постоянные $\beta_0, \beta_1, \beta_2 \geq 0$ и $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \geq 0$ такие, что неравенства $|u(x,t)| \leq \beta_0 e^{\alpha_0(x+t)}$, $\left|\varphi(t)\right| \leq \beta_1 e^{\alpha_1 t}$ и $\left|\psi(t)\right| \leq \beta_2 e^{\alpha_2 t}$ выполнены для $x \in [0,l]$ и при всех $t \in [0,\infty)$. При этом функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$ и $g(t)$ удовлетворяют условиям Дирихле для любого $t \in [0,T]$ при всех $T > 0$.

При решении поставленной задачи необходимо учитывать наличие отклонений результатов измерений температурных функций от истинных значений. Таким образом, вместо g_0 и φ_0 известны некоторые приближенные значения g_δ и φ_δ и уровень погрешности $\delta > 0$ такой, что $\max\left\{\left\|\varphi_\delta - \varphi_0\right\|, \left\|g_\delta - g_0\right\|\right\} \leq \delta$. В данной задаче требуется по φ_δ, g_δ, δ найти граничное значение функции $u_\delta(l,t) = \psi_\delta(t)$.

Интегральная модель и численный метод решения задачи теплопереноса

Для получения интегрального уравнения, связывающего $u(l,t) = \psi(t)$ и исходные данные, найдем решение следующей прямой задачи, полагая, что искомая функция $\psi(t)$ нам известна:

$$u_t = au_{xx}, \quad x \in (0,l), \quad t \geq 0, \tag{5}$$

$$u(0,t) = \varphi(t), \quad u(l,t) = \psi(t), \quad t \geq 0, \tag{6}$$

$$u(x,0) = C, \quad x \in [0,l]. \tag{7}$$

Исходя из свойств функций и следуя результатам, представленным в работах [8], [9], применим прямое и обратное преобразование Лапласа в задаче (5)–(7) и получим следующее выражение для функции $u(x,t)$:

$$u(x,t)=\frac{2\pi a}{l^2}\sum_{n=1}^{\infty}n\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)e^{\frac{-n^2\pi^2 a}{l^2}t}\int_0^t\varphi(\tau)e^{\frac{n^2\pi^2 a}{l^2}\tau}\,d\tau+$$
$$+\frac{2\pi a}{l^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}n\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)e^{\frac{-n^2\pi^2 a}{l^2}t}\int_0^t\psi(\tau)e^{\frac{n^2\pi^2 a}{l^2}\tau}\,d\tau+$$
$$+\frac{4C}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{l}\cdot e^{\frac{-(2n-1)^2\pi^2 a}{l^2}t}. \quad (8)$$

Так как практическая реализация метода решения задачи (1)–(4) будет осуществляться с помощью ЭВМ, то требуется, используя идею, представленную в [4], аппроксимировать точное решение задачи (5)–(7) конечными суммами. В этом случае решение задачи (1)–(4) сводится к решению следующего интегрального уравнения Вольтерра:

$$\int_0^t K_N(t-\tau)\psi(\tau)\,d\tau=f_N(t), \quad (9)$$

где

$$K_N(t-\tau)=\frac{2\pi a}{l^2}\sum_{n=1}^{N_1}(-1)^{n+1}n\sin\left(\frac{\pi n x_0}{l}\right)e^{\frac{-n^2\pi^2 a}{l^2}(t-\tau)},$$

$$f_N(t)=g_N(t)-\frac{2\pi a}{l^2}\sum_{n=1}^{N_2}(-1)^{n+1}n\sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right)e^{\frac{-n^2\pi^2 a}{l^2}t}\int_0^t\psi(\tau)e^{\frac{n^2\pi^2 a}{l^2}\tau}\,d\tau-$$
$$-\frac{4C}{\pi}\sum_{n=1}^{N_3}\frac{1}{2n-1}\sin\frac{(2n-1)\pi x}{l}\cdot e^{\frac{-(2n-1)^2\pi^2 a}{l^2}t}.$$

Численное решение уравнения (9) получаем, используя вычислительную схему, основанную на методе дискретной регуляризации, где параметрами регуляризации являются шаг дискретизации h и величины N_1, N_2. В данном исследовании параметры выбираем апостериорно, используя итерационный процесс. Для этого аппроксимируем интегралы, входящие в уравнение (9), суммами, используя метод правых прямоугольников. Из полученной при этом системы алгебраических уравнений находим $\psi_\delta(t)$ и вычисляем значения функции погрешности $\Delta_\psi(t)=\left|\psi_\delta(t)-\psi(t)\right|$. Значение параметров регуляризации определяем, исходя из условия минимальности функции$\Delta_\psi(t)$.

Вычислительный эксперимент

С целью проверки эффективности предложенного подхода к решению задачи теплопереноса, а также для получения экспериментальных оценок погрешностей решений был проведен вычислительный эксперимент. В ходе эксперимента рассматривался процесс теплообмена в стержне длины $l=1$ при $T=1$, $x_0=0,1$, $\delta=0,05$ начальная температура тела $u(x,0)=0$, коэффициент температуропроводности $a=1$. Температурная функция на поверхности тела задается формулой

$\phi(t) = 1000t(e^{-t} - e^{-2})$, а модельная функция, определяющая температуру в контрольной точке, имеет вид $\psi(t) = 500te^{-t}$.

Сначала находим решение $u(x,t)$ прямой задачи (5)–(7), используя конечно-разностные уравнения. Используя сеточный аналог решения прямой задачи, моделируем значения $g(t_i)$. Генерируем значения $g_\delta(t_i)$ в узлах (x_0, t_i) по формуле $g_\delta(t_i) = g(t_i) + \sigma_1(t_i)$ и значения $\phi_\delta(t_i)$ в узлах $(0, t_i)$ по формуле $\phi_\delta(t_i) = \phi(t_i) + \sigma_2(t_i)$, где $\sigma_1(t_i)$ и $\sigma_2(t_i)$ являются случайными величинами, равномерно распределенными на отрезке $[-\delta, \delta]$.

Для выбранных значений параметров регуляризации $h = 1/240$ и $N_1 = 56$, $N_2 = 57$, $N_3 = 50$ находим решение интегрального уравнения (9) с помощью предложенного численного метода. Далее вычисляем абсолютную и относительную погрешности

$$\Delta_\psi = \max_{t\in[0,T]} \left|\psi_\delta(t) - \psi(t)\right| = 3,0929; \quad \epsilon_\psi = \frac{\Delta_\psi}{\max\limits_{t\in[0,T]} \left|\psi_\delta(t)\right|} = 0,0673.$$

Результаты вычислительного эксперимента свидетельствуют о достаточной точности предложенного подхода к определению температуры во внутренних точках объекта, недоступных для непосредственного теплового контроля.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации прикладных научных исследований в рамках базовой части Государственного задания «Разработка, исследование и реализация алгоритмов обработки данных динамических измерений пространственно-распределенных объектов», техническое задание 8.9692.2017/8.9 от 17.02.2017.

Литература

1. Алифанов О.М. *Обратные задачи теплообмена.* – М.: Машиностроение, 1988. – 280 с.

2. Васин В.В., Агеев А.Л. *Некорректные задачи с априорной информацией.* – Екатеринбург: Наука, 1993. – 264 с.

3. Кабанихин С.И. *Обратные и некорректные задачи.* – Новосибирск: Сиб. научн. изд-во, 2009. – 457 с.

4. Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П. *Некорректные задачи математической физики и анализа.* – М.: Наука, 1980. – 287 с.

5. Апарцин А.С., Бакушинский А.Б. *Приближенное решение интегральных уравнений Вольтерра I рода методом квадратурных сумм* // Дифференциальные и интегральные уравнения. – Иркутск: Иркут. гос. ун-т. 1972. Вып. 1. – С. 248—258.

6. Васин В.В. *Регулярный алгоритм аппроксимации негладких решений для интегральных уравнений Фредгольма первого рода* // Выч. технологии. – 2010. – Т. 15. № 2. – С. 15–23.

7. Марчук Г.И. *Методы вычислительной математики.* – СПб.: Лань, 2009. – 608 с.

8. Yaparova N. *Numerical Methods for Solving a Boundary Value Inverse Heat Conduction Problem* // Inverse Problems in Science and Engineering. – 2014. – Vol. 22, № 5. – P. 832–847.

9. Лаврентьев М.М. *Условно-корректные задачи для дифференциальных уравнений.* – Новосибирск: НГУ, 1973. – 71 с.

NUMERICAL METHOD FOR SOLVING THE INVERSE HEAT TRANSFER PROBLEM WITH PERTURBED INPUT DATA

T.P. Gavrilova

We reduce the problem of determining the temperature inside the object exposed to external heat is considered. The initial data in the problem are formed on the basis of measurements of temperature functions near the object surface. Using the Laplace transform, the problem is reduced to an integral equation characterizing the direct dependence of the unknown boundary function on the initial data. The paper proposes a numerical method for solving the integral equation based on the principles of discrete regularization.

Keywords: heat transfer, measurement problem, perturbed data, heat equation, Laplace transform, numerical method.

УДК 517.984.54

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ОБЩИХ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Р.Ю. Галимов[1]

1 *galimovry@mail.ru*; Башкирский государственный университет, факультет математики и информационных технологий

Исследуются задачи идентификации общих краевых условий задачи Штурма-Лиувилля по ее собственным значениям. В случае несимметрического потенциала задача их идентификации по всем собственным значениям имеет два решения, а в случае симметрического потенциала — бесконечно много решений (класс краевых задач). Доказано, что в случае несимметрического потенциала два решения могут быть получены и по четырем собственным значениям, если ранг некоторой матрицы равен четырем, а в случае симметрического потенциала класс краевых задач может быть получен и по трем собственным значениям.

Ключевые слова: задача Штурма-Лиувилля, идентификация краевых условий, обратная спектральная задача, собственные значения.

Обозначим через L следующую задачу Штурма-Лиувилля:

$$l y = -y'' + q(x)\, y = \lambda\, y = s^2\, y, \tag{1}$$

$$U_i(y) = a_{i1}\, y(0) + a_{i2}\, y'(0) + a_{i3}\, y(\pi) + a_{i4}\, y'(\pi) = 0, \qquad i = 1,2, \tag{2}$$

где вещественная функция $q(x) \in L_1(0,\pi)$, a_{ij}, $i = 1, 2$, $i = 1, 2, 3, 4$ — комплексные постоянные.

В настоящей работе, в отличие от [1], [2], рассматривается задача восстановления общих краевых условий (2). Также, в отличие [1], показано, что для восстановления можно использовать конечное число собственных значений, а в отличие от [2], рассматривается случай общего уравнения Штурма-Лиувилля (1).

Обозначим матрицу, составленную из коэффициентов a_{lk} краевых условий (2), через A, а ее миноры, составленные из i-го и j-го столбцов, - через M_{ij}:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{Vmatrix}, \quad M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{vmatrix}, \qquad i, j = 1, 2, 3, 4. \tag{3}$$

На протяжении всей работы будем считать, что ранг матрицы A равен двум: $\operatorname{rank} A=2$.

В дальнейшем задачу типа L, но с другими коэффициентами в уравнении и с другими параметрами в граничных формах, будем обозначать $\widetilde{L}$. Всюду будем считать, что если некоторый символ обозначает объект из задачи L, то символ с волной $\sim$ наверху обозначает аналогичный объект задачи $\widetilde{L}$.

Определение. *Краевые условия задач L и $\widetilde{L}$ назовем (kl и mn)-смежными, если для миноров M_{kl} и M_{mn} выполняются равенства $M_{kl} = C\widetilde{M}_{mn}$, $M_{mn} = C\widetilde{M}_{kl}$, а для всех остальных миноров выполнены равенства $M_{ij} = C\widetilde{M}_{ij}$.*

Так, краевые условия задач L и $\widetilde{L}$ являются (12 и 34)-*смежными*, если миноры M_{ij} и $\widetilde{M}_{ij}$ матриц коэффициентов краевых условий $A = (a_{ij})_{2\times4}$ и $\widetilde{A} = (\widetilde{a}_{ij})_{2\times4}$ связаны соотношениями:

$$\begin{aligned} &M_{12} = C\widetilde{M}_{34}, \quad M_{32} = C\widetilde{M}_{32}, \quad M_{42} = C\widetilde{M}_{42}, \\ &M_{13} = C\widetilde{M}_{13}, \quad M_{14} = C\widetilde{M}_{14}, \quad M_{34} = C\widetilde{M}_{12}. \end{aligned}$$

Теорема. *Пусть L и $\widetilde{L}$ имеют дискретный спектр, спектры задач L и $\widetilde{L}$ совпадают с учетом их алгебраических кратностей,* $\operatorname{rank} A = 2$. *Тогда:*

1. Если $q(x) \neq q(\pi - x)$, $\widetilde{q}(x) \neq \widetilde{q}(\pi - x)$, то либо матрицы коэффициентов краевых условий $A = (a_{ij})_{2\times4}$ и $\widetilde{A} = (\widetilde{a}_{ij})_{2\times4}$ совпадают с точностью до линейных преобразований строк, либо являются (12 и 34)-смежными. Т.е. задача идентификации краевых условий по всем собственным значениям имеет два решения.

2. Если $q(x) = q(\pi - x)$, $\widetilde{q}(x) = \widetilde{q}(\pi - x)$, то миноры M_{ij} и $\widetilde{M}_{ij}$ матриц коэффициентов краевых условий $A = (a_{ij})_{2\times4}$ и $\widetilde{A} = (\widetilde{a}_{ij})_{2\times4}$ связаны следующими соотношениями:

$$M_{12} = \tfrac{1}{2}C\left((\widetilde{M}_{12} + \widetilde{M}_{34}) \pm \sqrt{(\widetilde{M}_{12} + \widetilde{M}_{34})^2 - C_1}\right),$$

$$M_{34} = \tfrac{1}{2}C\left((\widetilde{M}_{12} + \widetilde{M}_{34}) \mp \sqrt{(\widetilde{M}_{12} + \widetilde{M}_{34})^2 - C_1}\right),$$

$$M_{42} = C\widetilde{M}_{42}, \quad M_{13} = C\widetilde{M}_{13}, \tag{4}$$

$$M_{14} = \tfrac{1}{2}C\left((\widetilde{M}_{14} + \widetilde{M}_{32}) \pm \sqrt{(\widetilde{M}_{14} + \widetilde{M}_{32})^2 + 4\widetilde{M}_{13}\widetilde{M}_{24} - C_1}\right),$$

$$M_{23} = \tfrac{1}{2}C\left((\widetilde{M}_{12} + \widetilde{M}_{34}) \mp \sqrt{(\widetilde{M}_{14} + \widetilde{M}_{23})^2 + 4\widetilde{M}_{13}\widetilde{M}_{24} - C_1}\right),$$

где C и C_2 — некоторые произвольные константы, а $C_1 = 4C_2/C^2$. Т.е. задача идентификации краевых условий по всем собственным значениям имеет бесконечное число решений.

Обозначим через F матрицу следующего вида:

$$F = \begin{Vmatrix} 1 & y_1(\pi,\lambda_1) & y_1'(\pi,\lambda_1) & y_2(\pi,\lambda_1) & y_2'(\pi,\lambda_1) \\ 1 & y_1(\pi,\lambda_2) & y_1'(\pi,\lambda_2) & y_2(\pi,\lambda_2) & y_2'(\pi,\lambda_2) \\ 1 & y_1(\pi,\lambda_3) & y_1'(\pi,\lambda_3) & y_2(\pi,\lambda_3) & y_2'(\pi,\lambda_3) \\ 1 & y_1(\pi,\lambda_4) & y_1'(\pi,\lambda_4) & y_2(\pi,\lambda_4) & y_2'(\pi,\lambda_4) \end{Vmatrix}, \tag{5}$$

через F_j обозначим минор матрицы F, полученный вычеркиванием j-го столбца матрицы F.

Теорема. *Если $q(x) \neq q(\pi - x)$, $\operatorname{rank} A = 2$, четыре собственных значения λ_j $(j = 1,2,3,4)$ задачи L удовлетворяют условию:*

$$\operatorname{rank} F = 4. \tag{6}$$

то задача идентификации краевых условий по этим четырем собственным значениям имеет два решения. При этом миноры матрицы A этих двух видов краевых условий связаны следующими равенствами:

$$\begin{gathered} M_{12} = \frac{t}{2}\left(F_1 \pm \sqrt{F_1^2 - 4\,(F_3\,F_4 - F_2\,F_5)}\right), \\ M_{34} = \frac{t}{2}\left(F_1 \mp \sqrt{F_1^2 - 4\,(F_3\,F_4 - F_2\,F_5)}\right), \\ M_{32} = -t\,F_2, \quad M_{42} = t\,F_3, \\ M_{13} = -t\,F_4, \quad M_{14} = t\,F_5, \end{gathered} \tag{7}$$

соответствующая смежная пара матриц A с помощью миноров (7) в явном виде выписывается следующим образом:

1) Если $M_{12} \neq 0$, то $A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -\frac{M_{23}}{M_{12}} & -\frac{M_{24}}{M_{12}} \\ 0 & M_{12} & M_{13} & M_{14} \end{Vmatrix}$;

2) Если $M_{13} \neq 0$, то $A = \begin{Vmatrix} 1 & \frac{M_{23}}{M_{13}} & 0 & -\frac{M_{34}}{M_{13}} \\ 0 & M_{12} & M_{13} & M_{14} \end{Vmatrix}$;

3) Если $M_{14} \neq 0$, то $A = \begin{Vmatrix} 1 & \frac{M_{24}}{M_{14}} & \frac{M_{34}}{M_{14}} & 0 \\ 0 & M_{12} & M_{13} & M_{14} \end{Vmatrix}$;

4) Если $M_{23} \neq 0$, то $A = \begin{Vmatrix} \frac{M_{13}}{M_{23}} & 1 & 0 & -\frac{M_{34}}{M_{23}} \\ -M_{12} & 0 & M_{23} & M_{24} \end{Vmatrix}$;

5) Если $M_{24} \neq 0$, то $A = \begin{Vmatrix} \frac{M_{14}}{M_{24}} & 1 & \frac{M_{34}}{M_{24}} & 0 \\ -M_{12} & 0 & M_{23} & M_{24} \end{Vmatrix}$;

6) Если $M_{34} \neq 0$, то $A = \begin{Vmatrix} \frac{M_{14}}{M_{34}} & \frac{M_{24}}{M_{34}} & 1 & 0 \\ -M_{13} & -M_{23} & 0 & M_{34} \end{Vmatrix}$.

В частном случае при $F_1^2 - 4\,(F_3\,F_4 - F_2\,F_5) = 0$ задача идентификации краевых условий по четырем собственным значениям λ_j $(j = 1,2,3,4)$ имеет единственное решение (смежные решения совпадают).

Пример. Пусть собственные значения задачи (1), (2) с $q(x) = 2x + 3$ равны $\lambda_1 = 5{,}642408$, $\lambda_2 = 9{,}740297$, $\lambda_3 = 10{,}78714$, $\lambda_4 = 21{,}93794$. Разложив линейно независимые решения $y_1(\pi,\lambda)$ и $y_2(\pi,\lambda)$ в ряд Тейлора по x и λ и подставив частичную сумму ряда из первых 120 членов ряда в (5) и вычислив соответствующие миноры F_j с точностью до семи значащих цифр (в действительности вычисления проводились с точностью до 100 значащих цифр), получим: $F_1 = -1{,}555370$,

$F_2 = -0,7776850$, $F_3 = 0$, $F_4 = 0$, $F_5 = 0,7776850$. (Заметим, что остатком ряда Тейлора в этом случае можно пренебречь, т.к. ряд Тейлора получается знакочередующимся и его остаток R_{120} может быть оценен модулем последнего слагаемого частичной суммы, который является малым числом. Например, для первых 120 членов разложения функции $y_1(\pi, \lambda_4)$ в ряд последнее слагаемое частичной суммы равно $5,25 \cdot 10^{-161} \cdot \lambda_4^{50} \cdot x^{103} < 5,25 \cdot 10^{-161} \cdot 22^{50} \cdot x^{103} = 1,12 \cdot 10^{-42}$.)

Отсюда и из (7) получаем

$$\begin{aligned}
M_{12} &= \tfrac{t}{2}\left(F_1 \pm \sqrt{F_1^2 - 4\,(F_3\,F_4 - F_2\,F_5)}\right) = \\
&= \tfrac{t}{2}\left(-1,555370 \pm \sqrt{1,555370^2 - 4\,(0,7776850)^2}\right) = 0,7776850\,t; \\
M_{34} &= \tfrac{t}{2}\left(-1,555370 \mp \sqrt{1,555370^2 - 4\,(0,7776850)^2}\right) = -0,7776850\,t; \\
M_{32} &= -t\,F_2 = -0,7776850\,t, \\
M_{42} &= t\,F_3 = 0, \\
M_{13} &= -t\,F_4 = 0, \\
M_{14} &= t\,F_5 = 0,7776850\,t,
\end{aligned} \tag{8}$$

Положив $t = 0,7776850^{-1}$, получим более простые представления для миноров:

$$M_{12} = M_{32} = -M_{14} = -1, \quad M_{42} = M_{13} = 0.$$

Так как $M_{12} = -1 \neq 0$ (случай 1) из теоремы 2), то матрица A с точностью до линейных преобразований строк имеет следующее представление:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -\frac{M_{23}}{M_{12}} & -\frac{M_{24}}{M_{12}} \\ 0 & M_{12} & M_{13} & M_{14} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Таким образом, задача идентификации краевых условий в данном случае имеет единственное (кратное) решение. Это решение представляет собой периодические краевые условия

$$y(0) = y(\pi), \quad y'(0) = y'(\pi).$$

Обозначим через G матрицу следующего вида:

$$G = \begin{Vmatrix} 1 & y_1(\pi, \lambda_1) & y_1'(\pi, \lambda_1) & y_2(\pi, \lambda_1) \\ 1 & y_1(\pi, \lambda_2) & y_1'(\pi, \lambda_2) & y_2(\pi, \lambda_2) \\ 1 & y_1(\pi, \lambda_3) & y_1'(\pi, \lambda_3) & y_2(\pi, \lambda_3) \end{Vmatrix} \tag{9}$$

через G_j обозначим минор матрицы G, полученный вычеркиванием j-го столбца матрицы G.

Теорема. *Если $q(x) = q(\pi - x)$, $\operatorname{rank} A = 2$ и три собственных значения λ_j $(j = 1, 2, 3)$ задачи L удовлетворяют условию:*

$$\operatorname{rank}\|1, y_1(\pi, \lambda_j), y_1'(\pi, \lambda_j), y_2(\pi, \lambda_j)\|_{j=1,2,3} = 3, \tag{10}$$

то задача идентификации краевых условий по этим трем собственным значениям имеет бесконечное число решений.

При этом миноры матрицы A представляются следующим образом:

$$\begin{gathered}
M_{12} = \tfrac{1}{2}\,(t\,G_1 \pm S_1), \quad M_{34} = \tfrac{1}{2}\,(t\,G_1 \mp S_1), \quad M_{42} = t\,G_3, \\
M_{13} = t\,G_4, \quad M_{14} = \tfrac{1}{2}\,(-t\,G_2 \pm S_2), \quad M_{32} = \tfrac{1}{2}\,(-t\,G_2 \mp S_2),
\end{gathered} \tag{11}$$

где $S_1 = \sqrt{(t\,G_1)^2 - t_1}$, $S_2 = \sqrt{t^2\,G_2^2 + 4\,t^2\,G_3\,G_4 - t_1}$, *а* t *и* t_1 *— произвольные числа. Соответствующие матрицы* A *с помощью этих миноров в явном виде выписывается по формулам 1)–6) из формулировки теоремы 2.*

Литература

1. Ахтямов А. М. *К единственности решения одной обратной спектральной задачи* // Дифференц. уравнения. – 2003. – № 8, – С. 1011–1015.

2. Ахтямов А. М., Утяшев И. М. *Идентификация краевых условий на обоих концах струны по собственным частотам колебаний* // Акустический журнал. – 2015. – Т. 61. – № 6. – С. 647–655.

THE IDENTIFICATION OF BOTH GENERAL BOUNDARY CONDITIONS
FOR THE STURM-LIOUVILLE PROBLEM

R.Yu. Galimov

The problems of identifying of both general boundary conditions for the Sturm-Liouville problem from its eigenvalues are investigated. For general boundary conditions, it is shown that in the case of an asymmetric potential the problem of identifying the general boundary conditions by all eigenvalues has two solutions, and in the case of a symmetric potential there are infinitely many solutions (the class of boundary value problems). It is also proved that, in the case of an asymmetric potential, two solutions can be obtained for four eigenvalues, if the rank of a matrix is four, and in the case of a symmetric potential, the class of boundary value problems can also be obtained from three eigenvalues.The method of solving the problem and the corresponding examples are given.

Keywords: Sturm-Liouville problem, identification of boundary conditions, inverse eigenvalue problem, eigenvalue problems.

УДК 517.518.244

ПРИМЕНЕНИЕ КРАЙНИХ ПОДАРГУМЕНТОВ И НАДАРГУМЕНТОВ ДЛЯ ПОИСКА ГЛОБАЛЬНЫХ ЭКСТРЕМУМОВ НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

О.Е. Галкин[1], С.Ю. Галкина[2]

1 *olegegalkin@ya.ru*; Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики

2 *svetlana.u.galkina@mail.ru*; Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

Для функций, заданных на подмножествах вещественных линейных пространств, введены понятия крайних подаргументов и крайних надаргументов. Описано применение этих понятий для поиска глобальных экстремумов функций. Найдены крайние под- и надаргументы для непрерывных нигде не дифференцируемых функций Такаги $T(x)$ *и Кобаяши–Грея–Такаги* $K(x)$ *на отрезке* $[0;1]$.

Ключевые слова: глобальные экстремумы недифференцируемой функции, крайние подаргументы и крайние надаргументы функции, непрерывная нигде не диф-

ференцируемая функция Такаги, непрерывная нигде не дифференцируемая функция Кобаяши–Грея–Такаги.

Пусть X — *вещественное линейное пространство* (ВЛП) и D — его подмножество. Если задана функция $f : D \to \mathbf{R}$, то будем обозначать через $\mathrm{Gr}(f)$ ее *график* $\{(x, f(x)) \mid x \in D\}$, через $\mathrm{Sub}(f)$ — ее *подграфик* $\{(x, y) \in D \times \mathbf{R} \mid y \le f(x)\}$, и через $\mathrm{Epi}(f)$ — ее *надграфик* $\{(x, y) \in D \times \mathbf{R} \mid y \ge f(x)\}$. *Глобальный максимум функции* f на D обозначим через $\max_D f$, а множество точек, где он достигается, — через $\mathrm{Argmax}_D f$. Аналогично вводятся обозначения $\min_D f$ и $\mathrm{Argmin}_D f$. Через $\sup_D f$ и $\inf_D f$ обозначим, соответственно, *супремум* и *инфимум* функции f на D.

Напомним (см. [1, § 1.18]), что точка выпуклого множества называется *крайней*, если она не является внутренней ни для какого отрезка, лежащего в этом множестве. *Выпуклую оболочку* множества D будем обозначать через $\mathrm{Conv}(D)$ или $\widetilde{D}$, а *множество его крайних точек* — через $\mathrm{Extr}(D)$.

Введем понятия *крайнего подаргумента* и *крайнего надаргумента*.

Определение 1. *Пусть X — ВЛП и $D \subset X$.* Крайним подаргументом *(соответственно* крайним надаргументом*) функции $f \colon D \to \mathbf{R}$ назовем аргумент x (то есть первую компоненту) любой крайней точки (x, y) множества* $\mathrm{Conv}(\mathrm{Sub}(f))$ *(соответственно* $\mathrm{Conv}(\mathrm{Epi}(f))$*). Множество всех крайних подаргументов (соответственно надаргументов) функции f на множестве D будем обозначать через* $\mathrm{Extr}\,SA(f, D)$ *(соответственно* $\mathrm{Extr}\,EA(f, D)$*).*

Замечание 1. *Очевидно, что выполняются равенства* $\min_D(f) = -\max_D(-f)$, $\mathrm{Argmin}_D(f) = \mathrm{Argmax}_D(-f)$ *и* $\mathrm{Extr}\,EA(f, D) = \mathrm{Extr}\,SA(-f, D)$. *Поэтому из любого утверждения про максимумы и крайние подаргументы вытекает двойственное утверждение про минимумы и крайние надаргументы (и наоборот).*

Предложение 1. *Если X — ВЛП и $D \subset X$, то для любой функции $f \colon D \to \mathbf{R}$ верны включения* $\mathrm{Extr}(\widetilde{D}) \subset \mathrm{Extr}\,SA(f, D) \subset D$, *а также* $\mathrm{Extr}(\widetilde{D}) \subset \mathrm{Extr}\,EA(f, D) \subset D$.

Теорема 1. *Пусть X — ВЛП, $D \subset X$ и заданы функции $f \colon D \to \mathbf{R}$, $g \colon \widetilde{D} \to \mathbf{R}$, $v \colon \widetilde{D} \to \mathbf{R}$, причем v строго положительна на D. Пусть, кроме того, строго выпукла на $\widetilde{D}$ функция $(g - M) \cdot v$, где $M = \sup_D(f / v + g) < \infty$. Тогда все точки глобального максимума на D функции $f / v + g$ являются крайними подаргументами функции f на D, то есть* $\mathrm{Argmax}_D(f / v + g) \subset \mathrm{Extr}\,SA(f, D)$.

Из теоремы 1, с учетом замечания 1, вытекает двойственная:

Теорема 2. *Пусть X — ВЛП, $D \subset X$ и заданы функции $f \colon D \to \mathbf{R}$, $g \colon \widetilde{D} \to \mathbf{R}$, $v \colon \widetilde{D} \to \mathbf{R}$, причем v строго положительна на D. Пусть, кроме того, строго вогнута на $\widetilde{D}$ функция $(g - m) \cdot v$, где $m = \inf_D(f / v + g) > -\infty$. Тогда все точки глобального минимума на D функции $f / v + g$ являются крайними надаргументами функции f на D, то есть* $\mathrm{Argmin}_D(f / v + g) \subset \mathrm{Extr}\,EA(f, D)$.

Замечание. *Множества* $\mathrm{Extr}\,SA(f, D)$ *и* $\mathrm{Extr}\,EA(f, D)$ *не зависят от функций g и v. Поэтому, найдя эти множества один раз, можно применять их, с помощью теорем 1 и 2, для поиска экстремумов функций $f / v + g$ при различных g и v.*

Способ поиска глобальных экстремумов. На основе полученных результатов можно предложить следующий способ, не требующий дифференцируемости f

в какой-либо точке, который облегчает поиск глобальных экстремумов некоторых функций вида $f/v+g$:

1) убеждаемся (например, с помощью теорем 1, 2 или аналогичных им утверждений), что точки глобального экстремума функции $f/v+g$ принадлежат множеству $\operatorname{Extr} SA(f,D)$ или множеству $\operatorname{Extr} EA(f,D)$;

2) находим нужное множество $\operatorname{Extr} SA(f,D)$ или $\operatorname{Extr} EA(f,D)$;

3) вычисляем глобальный экстремум функции $f/v+g$ на множестве $\operatorname{Extr} SA(f,D)$ или $\operatorname{Extr} EA(f,D)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-07-00782).

Литература

1. Половинкин Е. С., Балашов М. В. *Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа.* – М.: Физматлит, 2004. – 416 с.

USAGE OF EXTREME SUBARGUMENTS AND EPIARGUMENTS
FOR FINDING OF GLOBAL EXTREMA OF NONDIFFERENTIABLE FUNCTIONS

O.E. Galkin, S.Yu. Galkina

For the functions defined on subsets of real linear spaces, the notions of extreme subarguments and extreme epiarguments are introduced. The application of these notions to the finding of global extrema of functions is described. Extreme sub- and epiarguments for continuous nowhere differentiable Takagi function $T(x)$ and Gray–Takagi function of Kobayashi $K(x)$ on the segment $[0;1]$ are found.

Keywords: global extrema of nondifferentiable function, extreme subarguments and extreme epiarguments of function, continuous nowhere differentiable Takagi function, continuous nowhere differentiable Gray–Takagi function of Kobayashi.

УДК 514.822

НЕКОТОРЫЕ ОБОЩЕНИЯ НЕРАВЕНСТВ Г. ПОЛИА - Г. СЕГЁ И Е. МАКАИ ДЛЯ ЖЕСТКОСТИ КРУЧЕНИЯ

Л.И. Гафиятуллина[1], Р.Г. Салахудинов[2]

1 *gafiyat@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

2 *rsalakhud@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Новые неравенства для жесткости кручения, обобщающие классические результаты Г. Полиа, Г. Сегё, Е. Макаи, развиты в статьях [1], [2], одного из авторов данной работы. В данной статье, с использованием подходов из [1], мы дополняем оценки для жесткости кручения через евклидовые моменты области различных порядков.

Ключевые слова: жесткость кручения, момент инерции области относительно границы, функция расстояния до границы области, изопериметрические неравенства, выпуклая область.

Пусть G — односвязная область на плоскости, $\mathrm{A}(G)$ — площадь области G.

Определение 1. *Физический функционал*

$$\mathrm{P}(G) := 2 \iint_G u(x,G)\,d\mathrm{A},$$

называется жесткостью кручения области G, где $u(x,G)$ — решение уравнения Пуассона $\triangle u = -2$ с граничным условием $u = 0$ [3].

Определение 2. *Геометрический функционал*

$$\mathrm{I}_p(G) := \iint_G \rho(x,G)\,d\mathrm{A},$$

где $\rho(x,G)$ — функция расстояния от точки x до границы области G, называется евклидовым моментом области относительно границы порядка p. При $p = 2$ данный функционал называют евклидовым моентои инерции области (см. [4]).

В 1995 г. Ф.Г. Авхадиев получил двусторонние оценки для жесткости кручения в классе односвязных областей

$$\mathrm{I}_2(G) \le \mathrm{P}(G) \le 64\mathrm{I}_2(G). \tag{1}$$

Таким образом, жесткость кручения эквивалентна евклидовому моменту инерции области. В классе выпуклых областей круг эквивалентных функционалов весьма широк, среди них есть простые.

В случае, когда G — выпуклая область, в 1951 г. Г. Полиа и Г. Сегё [3] показали, что имеет место следующее неравенство

$$\mathrm{P}(G) \ge \frac{1}{2}\mathrm{A}(G)\rho(G)^2. \tag{2}$$

Здесь $\rho(G)$ — радиус максимального круга, содержащегося в G. Равенство в (2) достигается для круга. В 1962 г. Е. Макаи [5], получил оценку сверху, а именно:

$$\mathrm{P}(G) \le \frac{4}{3}\mathrm{A}(G)\rho(G)^2, \tag{3}$$

справедливое для выпуклых областей. Равенство в (3) достигается в пределе для вырожденных областей, в частности, для узкого прямоугольника.

Обозначим через $l(t)$ периметр кривой, которая состоит из тех точек из G, для которых минимальное расстояние до границы G равно t. Пусть $l(\rho(G)) := \lim_{t\to\rho(G)} l(t)$.

Следующие теоремы для жесткости кручения развивают неравенства (1), (2) и (3).

Теорема 1. *Пусть G — выпуклая область на плоскости, $2 > q > 0$, $p > q$, тогда*

$$\mathrm{P}(G) \le \frac{4}{3(q+2)}\left(\frac{(p+1)(p+2)\mathrm{I}_p(G)}{\rho(G)^{p-2}} + (p-q)\,l(\rho(G))\rho(G)^3\right) - \frac{2\pi(2-q)(\rho(G)^4)}{3(q+2)},$$

причем константа $4(p+1)(p+2)/3(q+2)$, соответствующая первому слагаемому, – точная.

Теорема 2. *Пусть G — выпуклая область на плоскости, $q>0$, $q \geq p \geq 0$, тогда*

$$\mathrm{P}(G) \geq \frac{1}{2(q+2)}\left(\frac{(p+1)(p+2)\mathrm{I}_p(G)}{\rho(G)^{p-2}} + (p-q)\,l(\rho(G))\rho(G)^3\right) + \frac{\pi q \rho(G)^4}{2(q+2)},$$

причем константа $(p+1)(p+2)/2(q+2)$, соответствующая первому слагаемому, – точная.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 17-01-00282-а) и за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности (1.9773.2017/8.9).

Литература

1. Салахудинов Р. Г. *Изопериметрические свойства евклидовых граничных моментов односвязной области* // Известия вузов. Математика. — 2013 – № 8. – С. 66-79.

2. Salahudinov R.G. *An isoperimetric inequality for torsional rigidity in the complex plane* // J. Inequal. and Appl. – 2001. – V. 6. – P. 253-260.

3. Полиа Г., Сегё Г. *Изопериметрические неравенства в математической физике.* — М.: Физматгиз, 1962. – С. 33.

4. Авхадиев Ф.Г. *Конформные отображения и краевые задачи.* – Казань: Казанск. фонд “Математика”, 1996.

5. Makai E. *On the Principal Frequency of a Membrane and the Torsional Regidity of a Beam.* — Stanford University Press. — 1962. — P. 227-231.

SOME GENERALIZATION OF G. POLYA-G. SZEGO AND E. MAKAI INEQUALITIES FOR TORSIONAL RIGIDITY

L.I. Gafiyatullina, R.G. Salakhudinov

New inequalities for torsional rigidity, that generalize classical results of G. Polya - G. Szego and Makai, were given in papers [1], [2] by one of the authors. We adapt methods from [1] to refine estimations on boundaries of torsional rigidity of convex domain.

Keywords: torsional rigidity, Euclidean moments of a domain with respect to the boundary, distance function to the boundary of a domain, isoperimetric inequalities, convex domain.

УДК 517.956.6

ЗАДАЧА С УСЛОВИЯМИ ПЕРИОДИЧНОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ ЛАВРЕНТЬЕВА – БИЦАДЗЕ С ДВУМЯ ЛИНИЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

А.А. Гималтдинова[1]

1 *aa-gimaltdinova@mail.ru*; Уфимский государственный нефтяной технический университет

Для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа с двумя перпендикулярными линиями изменения типа в прямоугольной области исследована нелокальная задача с условиями периодичности. Доказаны утверждения о единственности и существовании ее решения.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, нелокальная задача, условия периодичности, единственность и существование решения.

Для уравнения

$$Lu \equiv (\operatorname{sgn} x)u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} + bu = 0, \ \ b \in R, \tag{1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x, y) \in R^2 \,|\, -l < x < h, -\alpha < y < \beta\}$, $\alpha, \beta, l, h \in R_+$, изучена следующая нелокальная задача.

Задача. *Найти функцию* $u(x, y)$, *удовлетворяющую условиям:*

$$u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4),$$

$$Lu(x, y) \equiv 0, \ \ (x, y) \in D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4,$$

$$u(x, y)\big|_{x=h} = u(x, y)\big|_{x=-l}, \ u_x(x, y)\big|_{x=h} = u_x(x, y)\big|_{x=-l}, \ \ y \in [-\alpha, \beta],$$

$$u(x, y)\big|_{y=\beta} = \varphi(x), \ \ u(x, y)\big|_{y=-\alpha} = \psi(x), \ \ x \in [-l, h],$$

где φ и ψ – заданные достаточно гладкие функции, D_i – подобласти области D в соответствующих четвертях плоскости XOY.

Ранее для уравнения (1) при $b = 0$ была исследована первая краевая задача [1].

Решение поставленной задачи построено в виде суммы ряда по биортогональной системе соответствующей спектральной задачи для обыкновенного дифференциального оператора с разрывным коэффициентом. Единственность решения доказана на основании полноты биортогональной системы в пространстве $L_2[-l, h]$. При доказательстве существования решения, т.е. при обосновании сходимости ряда, возникла проблема малых знаменателей. В связи с этим получены оценки об отделенности малых знаменателей от нуля с соответствующей асимптотикой, которые позволили доказать существование решения задачи.

В [2] рассмотрена поставленная задача для $l = h$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ – РБ (проект 17-41-020516).

Литература

1. Гималтдинова А.А. *Задача Дирихле для уравнения Лаврентьева – Бицадзе с двумя линиями изменения типа в прямоугольной области* // ДАН. – 2015. – Т. 460, № 3. – С. 260–266.

2. Гималтдинова А.А. *Задача с условиями периодичности для уравнения смешанного типа с двумя линиями изменения типа* // Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения: сборник тезисов международной научной конференции (оз. Банное, 18-22 марта 2019 г.) / отв. ред. Р.Н. Гарифуллин. – Уфа: РИЦ БашГУ, 2019. – С. 31-32.

A PROBLEM WITH PERIODICITY CONDITIONS FOR AN EQUATION WITH A LAVRENT'EV – BITSADZE OPERATOR WITH TWO LINES OF TYPE CHANGE IN A RECTANGULAR DOMAIN

A.A. Gimaltdinova

For a mixed elliptic-hyperbolic type equation with two perpendicular lines of type change in a rectangular area, a nonlocal problem with periodicity conditions was investigated. The assertions about uniqueness and the existence of its solution are proved.

Keywords: mixed type equation, nonlocal problem, periodicity conditions, uniqueness and existence of a solution.

УДК 517.53/.55, 537.8

КВАТЕРНИОННЫЕ МЕТОДЫ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Ю.А. Гладышев[1]

1 *v572264@yandex.ru*; Калужский государственный университет имени К.Э. Циолковского

В статье дано обобщение известных условий Коши-Римана на множество дважды непрерывно дифференцируемых функций, определенных в некоторой области восьмимерного пространства R^8 со значениями в теле кватернионов. Приведён ряд их свойств. Введено в кватернионной форме обобщение калибровочных преобразований потенциалов системы. Дана электродинамическая интерпретация основных результатов и показана связь с электромагнитными потенциалами.

Ключевые слова: кватернионы, электродинамика, калибровочные преобразования.

В сообщениях [1], [2] было введено обобщение известных в теории функций комплексного переменного условий Коши-Римана на функции с кватернионными значениями, определенные в некоторой области восьмимерного пространства R^8, где $x_j \in R^8$, $j = \overline{0,7}$.

Пусть χ, ψ — две кватернионные функции

$$\chi = \chi_0 + \sum_{j=1}^{3} e_j \chi_j, \quad \psi = \psi_0 + \sum_{j=1}^{3} e_j \psi_j,$$

где e_j $(j = \overline{1,3})$ — кватернионные единицы [1].

Сохраняя эквивалентность всех направлений в пространстве R^8 для удобства обозначим последние четыре оси через y_j, то есть $y_j = x_{j+3}$, $j = \overline{0,3}$. Подпространство xj, $j = \overline{0,3}$ обозначим X, а $y_j = x_{j+3}$, $j = \overline{0,3}$ через Y.

Учитывая развитие понятия системы Коши-Римана [2], запишем обобщенную систему как

$$\begin{cases} D_1\chi - \psi D_2 = 0, \\ \chi\overline{D}_2 + \overline{D}_1\psi = 0. \end{cases} \tag{1}$$

где кватернионные операторы D_1, $\overline{D}_1$, D_2, $\overline{D}_2$ определены выражениями

$$D_1 = \frac{\partial}{\partial x_0} + \sum_{j=1}^{3} e_j \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad D_2 = \frac{\partial}{\partial y_0} + \sum_{j=1}^{3} e_j \frac{\partial}{\partial y_j},$$

и чертой обозначена операция кватернионного сопряжения. Легко убедиться, что

$$D_1\overline{D}_1 = \overline{D}_1 D_1 = \sum_{j=0}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}, \quad D_2\overline{D}_2 = \overline{D}_2 D_2 = \sum_{j=0}^{3} \frac{\partial^2}{\partial y_j^2}. \tag{2}$$

Таким образом, $D_1\overline{D}_1 + D_2\overline{D}_2 = \Delta_8$ есть оператор Лапласа в R^8.

Для дальнейшего полезно расписать действие этих операторов на кватернион $q = q_0 + \sum_{j=1}^{3} q_j e_j$, с использованием выражений векторного анализа, а именно

$$D_1 q = \frac{\partial q_0}{\partial x_0} - \operatorname{div}(x)\vec{q} + \frac{\partial \vec{q}}{\partial x_0} - \operatorname{grad}(x) q_0 + \operatorname{rot}(x)\vec{q}, \tag{3}$$

$$q D_2 = \frac{\partial q_0}{\partial y_0} - \operatorname{div}(y)\vec{q} + \operatorname{grad}(y) q_0 + \frac{\partial \vec{q}}{\partial y_0} - \operatorname{rot}(y)\vec{q}. \tag{4}$$

Введена так называемая присоединенная система [2]

$$\begin{cases} \overline{D}_1\widetilde{\chi} + \widetilde{\psi} D_2 = 0, \\ -\widetilde{\chi}\overline{D}_2 + D_1\widetilde{\psi} = 0, \end{cases}$$

полученная из (1) заменой D_1 на $\overline{D}_1$, $\overline{D}_1$ на D_1 и изменением знака операторов D_2, $\overline{D}_2$.

Предполагая, что компоненты $\chi_j, \psi_j \in C^{(2)}$ и учитывая (2), можем убедиться, что все компоненты удовлетворяют в R^8 уравнению Лапласа, то есть являются гармоническими функциями. Кватернион, все компоненты которого гармонические функции, назовем гармоническим.

Некоторые свойства системы (1), открывающие возможность построения бесконечной последовательности её решений, указаны в [2].

В [2] показано, что решение (1) можно записать, если α, β — гармонические кватернионы, как

$$\begin{cases} \chi = \overline{D}_1\alpha + \beta D_2, \\ \psi = -\alpha\overline{D}_2 + D_1\beta. \end{cases} \tag{5}$$

В [2] было предложено называть α, β кватернионными потенциалами. Потенциалы α, β можно найти с точностью до $\widetilde{\tau}$, $\widetilde{\theta}$ кватернионов, удовлетворяющих однородной присоединённой системе

$$\begin{cases} \overline{D}_1\widetilde{\tau} + \widetilde{\theta} D_2 = 0, \\ -\widetilde{\tau}\overline{D}_2 + D_1\widetilde{\theta} = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Рассматривая (5) как неоднородную систему уравнений, общее решение α, β записываем как сумму некоторого частного решения α', β' системы (5) и общего решения соответствующей однородной системы

$$\begin{cases} \alpha = \alpha' + \widetilde{\tau}, \\ \beta = \beta' + \widetilde{\theta}. \end{cases} \tag{7}$$

В приложениях к классической электродинамике принято называть это калибровочным преобразованием потенциалов.

Согласно [2], решение (6) можно выразить через произвольных гармонический кватернион Ω. Поскольку Ω имеет скалярную и векторную части, то будем различать скалярное и векторное калибровочное преобразования

$$\Omega = \Omega_0 + \vec{0}, \quad \Omega = 0 + \vec{\Omega}. \tag{8}$$

В первом случае, используя (3), (4), найдём

$$\widetilde{\tau} = D_1\Omega_0 = -\mathrm{grad}\Omega_0, \quad \widetilde{\theta} = \Omega_0\overline{D}_2 = \frac{\partial\Omega_0}{\partial y_0}.$$

Для векторного калибровочного преобразования на основе свойства, указанного в [2], запишем

$$\widetilde{\tau} = -\mathrm{div}\vec{\Omega} + \mathrm{rot}\vec{\Omega}, \quad \widetilde{\theta} = \frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial y_0}.$$

Для электродинамической интерпретации системы (1) примем, что χ, ψ – векторные кватернионы, и положим

$$\vec{\chi} = \vec{H}, \quad \vec{\psi} = i\vec{E}, \quad \chi_0 = \psi_0 = 0.$$

Из основной системы (5), с использованием (3), (4) следует известная система Максвелла [3].

Аналогично, предположив

$$\vec{\chi} = \vec{H}, \quad \vec{\psi} = -i\vec{E}, \quad x_0 = it, \tag{9}$$

при действительных y_1, y_2, y_3, получим систему Максвелла в этих переменных. Еще две возможности возникают при мнимых y_j (x_j), $j = \overline{1,3}$ и действительных x_0 (y_0).

Выбрать потенциалы для первого случая следует в виде

$$\alpha = 0 - \vec{A}, \quad \beta = -i\varphi + \vec{0}, \tag{10}$$

Этот выбор приводит, согласно (3), (4), к обычным выражениям связи напряженностей и потенциалов

$$\chi = h + \vec{H} = \mathrm{div}\vec{A} - \frac{\partial\varphi}{\partial y_0} + \mathrm{rot}\vec{A},$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} - \mathrm{grad}\varphi. \tag{11}$$

Чтобы из (11) получить обычные соотношения для $\vec{H}$

$$\vec{H} = \mathrm{rot}\vec{A},$$

потребуем, чтобы

$$\mathrm{div}\vec{A} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0.$$

Это условие принято называть условием Лоренца.

В (8) было показано получение кватернионного калибровочного преобразования, когда в качестве основной гармонической функции был взят скалярный кватернион Ω_0. Напомним основные результаты:

$$\vec{\tau} = \mathrm{grad}\Omega, \quad \theta_0 = \frac{\partial\Omega_0}{i\partial t}.$$

Подставим эти выражения в (7) и учтём выражения (10), тогда найдём

$$\begin{cases} \vec{A}' = \vec{A} - \mathrm{grad}(x)\Omega_0, \\ \varphi' = \varphi + \frac{\partial\Omega_0}{\partial t}. \end{cases}$$

Этот результат совпадает с общеизвестным [3].

Перейдем к случаю, когда Ω — векторный кватернион

$$\Omega = 0 + \vec{\Omega}.$$

Вообще говоря, калибровочное преобразование определено в этом случае тремя гармоническими функциями Ω_1, Ω_2, Ω_3. По основным формулам (3), (4) найдём

$$\tau = -\mathrm{div}\vec{\Omega} + \mathrm{rot}\vec{\Omega}, \quad \theta = \frac{\partial\vec{\Omega}}{\partial t_0}.$$

Выражение для τ содержит скалярную часть $-\mathrm{div}\vec{\Omega}$, что существенно отличает этот вариант от предыдущего.

Согласно общей теории такой выбор τ, θ не влияет на измеримые величины $\vec{H}$, $\vec{E}$. В этом легко убедиться непосредственно, с использованием векторного анализа. Векторная часть в силу известных тождеств и предположения о том, что Ω удовлетворяет волновому уравнению также тождественно равна нулю.

При выполнении условия Лоренца для $\vec{A}$ соотношение $\vec{H} = \mathrm{rot}\vec{A}$ остаётся в силе. Несмотря на то что функция калибровочного преобразования имеет скалярную компоненту, она не влияет на напряженность $\vec{H}$. Второе уравнение для $\vec{E}$ доказывается без дополнительных предположений.

Таким образом, предложенное обобщение системы дифференциальных уравнений Коши-Римана позволяет дать представление системы уравнений Максвелла и получить метод введения электромагнитных потенциалов.

Основная система (1) и присоединённая отличаются между собой изменением знака всех координат x_1, x_2, x_3 и времени y_0. Переход от координат x_1, x_2, x_3 к y_1, y_2, y_3 в силу соотношения (9) можно рассматривать как операцию зарядового сопряжения. Следовательно, система (1) учитывает эти основные виды симметрии.

Литература

1. Гладышев Ю. А. *Об одном обобщении условий Коши-Римана теории функций комплексного переменного в область кватернионных функций* // Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий: сборник трудов XI международной конференции «ПМТУКТ–2018». – Воронеж: Издательство «Научная книга», 2018. – С. 94–96.

2. Гладышев Ю. А. *О калибровочных преобразованиях электромагнитных потенциалов в кватернионной форме* // Современные методы теории краевых задач: материалы Международной конференции Воронежская весенняя математическая школа «Понтрягинские чтения — XXX» (3–9 мая 2019 г.) – Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2019. – С. 103–105.

3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Теоретическая физика. Том 2. Теория поля.* – М.: Физматлит, 2003. – 534 с.

QUATERNION METHODS IN ELECTRODYNAMICS

Yu.A. Gladyshev

In this paper, a certain quaternion generalization of the Cauchy-Riemann equation in R^8 space is given. Some properties of this conditions are discovered. An electrodinamic interpretation of this equation is introduced. Gauge transfomation in the quaternion form are investigated.

Keywords: quaternions, electrodynamics, gauge transformations.

УДК 517.927.2, 517.958, 51–73

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В МНОГОСЛОЙНОЙ СРЕДЕ С УСЛОЖНЁННЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Ю.А. Гладышев[1], В.В. Калманович[2]

1 *v572264@yandex.ru*; Калужский государственный университет им. К.Э. Циолковского
2 *v572264@yandex.ru*; Калужский государственный университет им. К.Э. Циолковского

В статье дан алгоритм решения сформулированной в самом общем виде краевой задачи теплопроводности третьего типа для многослойной среды. На основе этого алгоритма описан метод решения задачи о нахождении координаты границы фаз в одном из слоёв при общих условиях на внешних границах.

Ключевые слова: матричный метод, уравнение теплопроводности, многослойная среда, фазовый переход.

Многослойные материалы в виде пластин, оболочек, экранов находят всё большее применение в строительстве и технике. Они подвергаются внешним тепловым воздействиям и находятся часто в экстремальных условиях. Изучение тепловых режимов в многослойной оболочке позволяет предсказать поведение отдельных слоёв и выявить условия возможности деформации, плавления и других изменений физического или химического характера отдельных слоёв. Для этого необходимо иметь хорошие расчётные методы, позволяющие предсказать возможные нежелательные явления. В качестве такого метода подходит предложенный нами в ряде работ [1]–[4] матричный метод, использующий аппарат обобщённых степеней Берса [5], [6].

Пусть многослойная среда состоит из n плоских, осесимметричных или слоёв с центральной симметрией. Направим ось x перпендикулярно границам слоёв, координаты которых обозначим $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$, причём x_1 и x_{n+1} – границы всей системы слоёв. Рассмотрим стационарный одномерный процесс теплопереноса, направленный по оси x и описываемый системой уравнений

$$\frac{d}{dx}\left(\lambda^{(i)}(x)x^p\frac{dT^{(i)}}{dx}\right)=0,\quad x_i<x<x_{i+1},\quad n=\overline{1,n}, \tag{1}$$

и условиями согласования на границах контакта слоёв

$$T^{(i)}(x_{i+1})=T^{(i+1)}(x_{i+1}), \tag{2}$$

$$\lambda^{(i)}(x_{i+1})\frac{dT^{(i)}}{dx}\bigg|_{x_{i+1}}=\lambda^{(i+1)}(x_{i+1})\frac{dT^{(i+1)}}{dx}\bigg|_{x_{i+1}}. \tag{3}$$

Здесь $T^{(i)}$ и $\lambda^{(i)}$ – соответственно температура и коэффициент теплопроводности в i-ом слое. Множитель x^p учитывает возможные искривления слоя: $p=0$ соответствует плоским слоям, $p=1$ – соосным полым цилиндрическим оболочкам, $p=2$ – концентрическим полым сферическим оболочкам. Номер слоя совпадает с номером его меньшей координаты.

Поток в i-ом слое

$$J^{(i)}(x) = -\lambda^{(i)} x^p \frac{dT^{(i)}}{dx}. \tag{4}$$

На внешних границах системы слоёв зададим условия третьего типа

$$m_1 T^{(1)}(x_1) + n_1 J^{(1)}(x_1) = T_{\text{вн}}(x_1), \tag{5}$$

$$m_2 T^{(n)}(x_{n+1}) + n_2 J^{(n)}(x_{n+1}) = T_{\text{вн}}(x_{n+1}). \tag{6}$$

Далее для решения задачи использован матричный метод совместно с аппаратом обобщённых степеней Берса. Введём матрицы

$$V^{(1)}(x_1) = \begin{pmatrix} T^{(1)}(x_1) \\ J^{(1)}(x_1) \end{pmatrix}, \quad V^{(i)}(x) = \begin{pmatrix} T^{(i)}(x) \\ J^{(i)}(x) \end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$V_{\text{вн}}(x_1) = \begin{pmatrix} T_{\text{вн}}(x_1) \\ J_{\text{вн}}(x_1) \end{pmatrix}, \quad V_{\text{вн}}(x_{n+1}) = \begin{pmatrix} T_{\text{вн}}(x_{n+1}) \\ J_{\text{вн}}(x_{n+1}) \end{pmatrix}, \tag{8}$$

$$L = \begin{pmatrix} m_1 & n_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} m_2 & n_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

$$K^{(i,\dots,1)}(x, x_1) = \begin{pmatrix} 1 & -\left(X_i(x, x_i) + \sum\limits_{j=1}^{i-1} X_j(x_{j+1}, x_j) \right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где функции вида $X_i(x, x_i)$, $X_j(x_{j+1}, x_j)$ – обобщённые степени Берса, а их сумма в матрице K с физической точки зрения представляет сумму термических сопротивлений последовательно соединённых слоёв.

Решение для i-го слоя имеет вид

$$V^{(i)}(x) = K^{(i,\dots,1)}(x, x_1) V(x_1), \quad x_i < x < x_{i+1}. \tag{11}$$

Вывод формулы (11) представлен в [1]. Причем, согласно граничным условиям (5) и (6),

$$V_{\text{вн}}(x_1) = L V^{(1)}(x_1), \quad V_{\text{вн}}(x_{n+1}) = R V^{(n)}(x_{n+1}), \tag{12}$$

откуда получим

$$V_{\text{вн}}(x_{n+1}) = R K^{(n,\dots,1)}(x, x_1) L^{-1} V_{\text{вн}}(x_1). \tag{13}$$

Таким образом, получена система двух линейных уравнений, связывающая $T_{\text{вн}}(x_1)$, $T_{\text{вн}}(x_{n+1})$, $J_{\text{вн}}(x_1)$, $J_{\text{вн}}(x_{n+1})$, и по какой-либо известной паре из этих значений можно определить значения другой неизвестной пары. Например, если $T_{\text{вн}}(x_1)$, $T_{\text{вн}}(x_{n+1})$ известны, то из (13) можно найти $J_{\text{вн}}(x_1)$, $J_{\text{вн}}(x_{n+1})$.

Формулы (11), (13) дают возможность найти точку возможного фазового перехода. Если предположить, что точка фазового перехода $x_{\text{ф}}$ находится в i-ом слое, то этот слой точкой $x_{\text{ф}}$ разделяется в модели на два слоя. Таким образом, число слоёв в системе возрастает до $n+1$. Перенумеровав в связи с этим слои, получим, что искомой точкой фазового перехода будет x_{i+1}, а последняя точка – x_{n+2}. Решаем получившуюся задачу по предложенному алгоритму, а так как он справедлив при любом конечном числе слоёв, то применив его, получим решение краевой задачи, выраженное через неизвестный параметр $x_ф = x_{i+1}$. После чего находим значение точки $x_ф$ по заданной в ней температуре фазового перехода $T_ф$, то есть из уравнения $T(x_{i+1}) = T_ф$. Согласно общей теории поведения решения однородной системы типа (1) искомая точка $x_ф$ при условии $T_{вн}(x_1) < T_ф < T_{вн}(x_{n+1})$ существует и единственна. Дальнейший этап решения состоит в математическом исследовании, лежит ли эта точка в интервале (x_i, x_{i+1}). При простейших граничных условиях данная задача решена в [7].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 19–03–00271), а также РФФИ и правительства Калужской области (проект 18–41–400001).

Литература

1. Гладышев Ю. А., Калманович В. В., Степович М. А. *О возможности приложения аппарата Берса к моделированию процессов тепломассопереноса, обусловленного электронами в планарной многослойной среде* // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. – 2017. – № 10. – С. 105–110.

2. Калманович В. В., Степович М. А. *О совместном применении матричного метода и аппарата обобщенных степеней Берса для математического моделирования процессов тепломассопереноса в полупроводниковых материалах электронной техники* // Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем – 2018. Сборник трудов. – М.: ИППМ РАН, 2018. – Вып. III. – С. 194–201.

3. Гладышев Ю. А., Калманович В. В., Серегина Е. В., Степович М. А. *О возможности совместного применения матричного метода и аппарата обобщенных степеней Берса для математического моделирования процесса теплопереноса в объектах, обладающих цилиндрической симметрией* // Вопросы атомной науки и техники. Серия: Ядерно-реакторные константы. – 2018. – Вып. 3. – С. 158–167.

4. Kalmanovich V. V., Seregina E. V., Stepovich M. A. *Mass Transfer Problem with the Combined Matrix&Generalized Powers of Bers Method* // Journal of Physics: Conference Series. – 2019. – Vol. 1163. – 012012.

5. Bers L., Gelbart A. *On a class of functions defined by partial differential equations* // Transactions of the American Mathematical Society. – 1944. – Vol. 56. – P. 67–93.

6. Гладышев Ю. А. *О последовательности обобщенных степеней Берса с внутренней структурой* // Математические заметки. – 1994. – Том 55. – Вып. 3. – С. 21–34.

7. Гладышев Ю. А., Калманович В. В. *Об использовании матричного метода решения задач теплопроводности в многослойной среде при наличии фазовых переходов* // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы Международной конференции: Воронежская зимняя математическая школа. – Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2019. – С. 105–107.

ON THE SOLUTION OF HEAT CONDUCTION PROBLEMS IN MULTILAYER MEDIUM WITH COMPLICATED BOUNDARY CONDITIONS

Yu.A. Gladyshev, V.V. Kalmanovich

The article provides an algorithm for solving a third type boundary condition heat conduction problem for a multilayer medium formulated in the most general form. On the basis of this algorithm, a method for solving the problem of finding the interphase coordinate in a layer under the general exterior boundary conditions is developed.

Keywords: matrix method, heat conduction equation, multilayer medium, phase transition.

УДК 517.54

О ГАРМОНИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЯХ НА R-ВЫПУКЛЫЕ ОБЛАСТИ

С.Ю. Граф[1]

1 *sergey.graf@tversu.ru*; Тверской государственный университет, Петрозаводский государственный университет

В докладе обсуждаются условия R-выпуклости образа круга при сохраняющих ориентацию однолистных гармонических отображениях. Приводятся оценки коэффициентов однолистных гармонических отображений на R-выпуклые области.

Ключевые слова: гармонические отображения, R-выпуклые области.

Для данной пары точек w_1, $w_2 \in \mathbb{C}$ таких, что $|w_1 - w_2| \le 2R$, $0 < R < \infty$, определим *R-выпуклую оболочку* $E_R(w_1, w_2)$ как компактное множество, ограниченное двумя кратчайшими дугами окружностей радиуса R с концевыми точками w_1, w_2.

Определение. *Множество $A \subset \mathbb{C}$ называется R-выпуклым, если A содержит R-выпуклые оболочки $E_R(w_1, w_2)$ для любых пар точек w_1, $w_2 \in A$, $|w_1 - w_2| \le 2R$.*

R-выпуклые множества в $\mathbb{R}^n$ были введены и изучались Е.С. Половинкиным и М.В. Балашовым в работах [1, 2] и играют важную роль в выпуклом анализе и его приложениях.

В геометрической теории функций А. Гудманом [3] независимо было определено понятие *выпуклых функций ограниченного типа*. Аналитическая локально-однолистная в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функция h называется выпуклой функцией ограниченного типа, если $\liminf_{|z|\to 1} k_h(z) \ge 1/R > 0$, где $k_h(z) = \mathrm{Re}\{zh''(z)/h'(z) + 1\}/|zh'(z)|$ – кривизна образа $\Gamma_r = h(\gamma_r)$ окружности $\gamma_r = \{z \in \mathbb{D} : |z| = r\}$ при отображении h. Классы нормированных однолистных аналитических выпуклых функций ограниченного типа изучались в работах [3, 4, 5].

Взаимосвязь между R-выпуклыми областями и аналитическими однолистными отображениями на такие области была выявлена и изучена В.В. Старковым и Н.А. Шмелевым [6]. В частности, было доказано, что для аналитической локально-однолистной функции h в $\mathbb{D}$ область $D = h(\mathbb{D})$ является R-выпуклой тогда и только тогда, когда

$$\mathrm{Re}\left\{z\frac{h''(z)}{h'(z)} + 1\right\} \ge \frac{|zh'(z)|}{R} \quad \text{для всех } z \in \mathbb{D}.$$

В настоящем сообщении предполагается обсудить свойства гармонических однолистных отображений круга $\mathbb{D}$ на R-выпуклые области.

Всякая гармоническая функция f в $\mathbb{D}$ имеет вид $f = h + \overline{g}$, где h, g аналитичны в $\mathbb{D}$ и

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k.$$

Функция f является сохраняющей ориентацию и локально-однолистной в $\mathbb{D}$ тогда и только тогда, когда дилатация $\omega(z) = g'(z)/h'(z)$ отображения f аналитична в $\mathbb{D}$ и $|\omega(z)| < 1$ для всех $z \in \mathbb{D}$.

Непосредственными вычислениями устанавливается, что кривизна $k_f(z)$ кривой $\Gamma_r = f(\gamma_r)$ в точке $f(z)$ вычисляется по формуле

$$k_f(z) = \frac{1}{|zh'(z) - \overline{zg'(z)}|}\operatorname{Re}\left\{\frac{z^2h''(z) + \overline{z^2g''(z)} + 2\overline{zg'(z)}}{zh'(z) - \overline{zg'(z)}} + 1\right\}.$$

Пусть $\mathbb{D}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$. Следующий результат представляет собой критерий R-выпуклости областей $D_r = f(\mathbb{D}_r)$ при $r < 1$ в терминах кривизны границы ∂D.

Теорема 1 [7]. *Пусть $f = h + \overline{g}$ – сохраняющее ориентацию гармоническое отображение круга $\mathbb{D}$ и $r \in (0,1)$. Область $D_r = f(\mathbb{D}_r)$ является R-выпуклой тогда и только тогда, когда*

$$\operatorname{Re}\frac{z^2h''(z) + \overline{z^2g''(z)} + zh'(z) + \overline{zg'(z)}}{zh'(z) - \overline{zg'(z)}} \geq \frac{|zh'(z) - \overline{zg'(z)}|}{R}$$

для всех z таких, что $|z| = r$.

Естественным образом возникает вопрос о том, справедлив ли критерий R-выпуклости для случая $r = 1$, т.е. для области $D = f(\mathbb{D})$. В общем случае ответ на этот вопрос является отрицательным. Верным остается лишь достаточное условие R-выпуклости области $D = f(\mathbb{D})$:

Теорема 2 [7]. *Пусть $f = h + \overline{g}$ – сохраняющее ориентацию гармоническое отображение круга $\mathbb{D}$. Область $D = f(\mathbb{D})$ является R-выпуклой, если*

$$\liminf_{|z|\to 1} k_f(z) \geq \frac{1}{R}.$$

Замечание. *Утверждение, обратное к теореме 2 неверно. Даже в случае гармонических сохраняющих ориентацию автоморфизмов единичного круга $\mathbb{D}$ величина $\liminf_{|z|\to 1} k_f(z)$ может быть отрицательной.*

Чтобы проиллюстрировать данное замечание рассмотрим функцию

$$\theta(t) = \begin{cases} 2t, & \text{при } t \in (0,\pi), \\ 0, & \text{при } t \in [-\pi, 0]. \end{cases}$$

В соответствии с теоремой Радо-Кнезера-Шоке интеграл Пуассона

$$f_\theta(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - |z|^2}{\left|e^{it} - z\right|^2} e^{i\theta(t)}\, dt$$

определяет гармонический автоморфизм круга $\mathbb{D}$ с граничной функцией $e^{i\theta(t)}$.

Образ полярной сетки в $\mathbb{D}$ при отображении f_θ представлен на Рис. 1. Заметим, что образы $f_\theta(\gamma_r)$ окружностей γ_r теряют выпуклость при достаточно больших $r < 1$. На правой части Рис. 1 приведена локальная структура окружностей $f_\theta(\gamma_r)$ в окрестности точки 1. Средствами пакета Wolfram Mathematica можно показать, что $\liminf_{|z|\to 1} k_{f_\theta}(z) < 0$. Однако, очевидно, что круг $\mathbb{D}$ является R-выпуклой областью при $R = 1$.

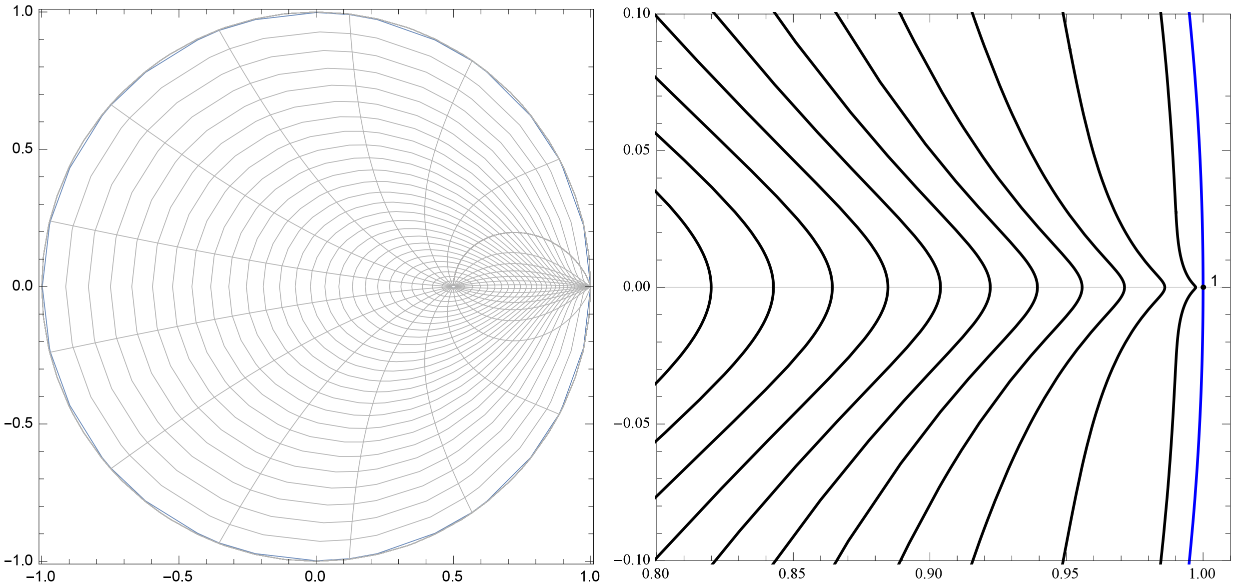


Рис. 1. *Образ полярной сетки в $\mathbb{D}$ при отображении f_θ (слева). Потеря выпуклости окружностями $f_\theta(\gamma_r)$ в окрестности точки 1 (справа).*

Приведенный пример демонстрирует, что в отличие от аналитического случая множество однолистных гармонических отображений круга $\mathbb{D}$ на R-выпуклые области шире, чем семейство гармонических выпуклых отображений ограниченного типа (для которых $\liminf\limits_{|z|\to 1} k_f(z) \geq \frac{1}{R}$).

Пусть $R \in (0, +\infty)$ фиксировано. Символом $C_{H,R}$ обозначим класс сохраняющих ориентацию однолистных гармонических отображений круга $\mathbb{D}$, для которых область $f(\mathbb{D})$ является R-выпуклой и $a_0 = a_1 - 1 = 0$. Символом $C^0_{H,R}$ обозначим подкласс $C_{H,R}$, состоящий из функций f, удовлетворяющих дополнительному условию $b_1 = 0$.

Утверждение [7]. *Семейства $C_{H,R}$ пусты при любом $R < 1$. Семейство $C_{H,1}$ состоит из единственного элемента $f \equiv z$.*

Следующий результат представляет собой аналог теоремы площадей для гармонических отображений на R-выпуклые области.

Теорема 3 [7]. *Пусть $f = h + \overline{g} \in C_{H,R}$. Тогда*

$$2\sum_{k=1}^{\infty} k^2 |a_k|^2 \int_0^1 \frac{r^{2k-1}(1-r^2)}{(1+|b_1|r)^2}\,dr \leq \frac{R^2}{1-|b_1|^2}.$$

В частности, если $f \in C^0_{H,R}$, то

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{k+1}|a_k|^2 \leq R^2.$$

Следствием теоремы 3 является оценка коэффициентов в $C^0_{H,R}$.

Следствие [7]. *Для любой функции* $f \in C^0_{H,R}$ *справедливы оценки*

$$|a_k| \leq \left(\frac{k+1}{k}\left(R^2 - \frac{1}{2}\right)\right)^{1/2} \quad \text{при } k \geq 2.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 17-11-01229).

Литература

1. Половинкин Е.С. *О сильно выпуклых множествах и сильно выпуклых функциях* // Тр. междунар. конф., посвящ. 90-летию со дня рождения Л. С. Понтрягина (Москва, 31 августа–6 сентября 1998 г.). – М.: ВИНИТИ, – 1999. – Т. 2. Негладкий анализ и оптимизация. – С. 66–138.

2. Половинкин Е.С., Балашов М.В. *Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа*. – М.: Физматлит, 2004.

3. Goodman A.W. *Convex functions of bounded type* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1984. – Vol. 92 (4). – P. 541–546.

4. Goodman A.W. *More on convex functions of bounded type* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1986. – Vol. 97 (2). – P. 303–306.

5. Wirths K.-J. *Coefficient bounds for convex functions of bounded type* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1988. – Vol. 103 (2). – P. 525–530.

6. Старков В.В., Шмелев Н.А. *Биголоморфные отображения круга на сильно выпуклые области* // Сиб. матем. журн. – 2014. – Т. 55. – № 4. – С. 875–881.

7. Graf S.Yu. *Harmonic mappings onto R-convex domains* // Probl. Anal. Issues Anal. – 2019. Vol. 8 (26). – No 2. – P. 37–50.

ON HARMONIC MAPPINGS ONTO R-CONVEX DOMAINS

S.Yu. Graf

In the present paper, we discuss the conditions of R-convexity for the image of the disks under harmonic sense preserving functions. The coefficient bounds for harmonic mappings of the unit disk onto R-convex domains are obtained.

Keywords: harmonic mappings, R-convex domains.

УДК 517.54

ОБ ИСКАЖЕНИИ ГАРМОНИЧЕСКОЙ МЕРЫ ПРИ ЛОКАЛЬНО КВАЗИКОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ

С.Ю. Граф[1]

1 *sergey.graf@tversu.ru*; Тверской государственный университет, Петрозаводский государственный университет

В докладе обсуждаются новые результаты, касающиеся двусторонних оценок искажения гармонической меры граничных дуг при локально квазиконформных отображениях круга. Оценки получены в терминах мажоранты характеристики М.А. Лаврентьева отображающей функции.

Ключевые слова: квазиконформные и локально квазиконформные отображения, гармоническая мера.

Понятие гармонической меры [1], введенное Р. Неванлинной в 1928 г. для случая плоских областей, играет важную роль в изучении граничного поведения аналитических функций, в теории потенциала и математической физике.

Пусть D – ограниченная конечносвязная жорданова область на комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Пусть функция φ определена и непрерывна на границе ∂D области D. Символом $u_\varphi(z)$ будем обозначать решение задачи Дирихле в области D с граничной функцией φ, т.е. гармоническую в области D и непрерывную в замыкании D функцию, совпадающую с φ на ∂D.

Определение 1. *Гармонической мерой произвольного открытого множества $E \subset \partial D$ называется гармоническая в D функция*

$$\omega(z, E, D) = \sup\{u_\varphi(z) : \varphi \in C(\partial D),\ 0 \le \varphi(\zeta) \le \chi_E(\zeta) \text{ для всех } \zeta \in \partial D\},$$

где χ_E – характеристическая функция множества E.

В частном случае, когда E представляет собой дугу или конечное объединение дуг на границе односвязной области D, гармоническая мера $\omega(z, E, D)$ является единственным ограниченным решением обобщенной задачи Дирихле в области D с граничными значениями $\chi_E(\zeta)$. Функция $\omega(z, E, D)$ определяет борелевскую меру множества E на ∂D. Понятие гармонической меры обобщается на случай произвольного множества $E \subset \partial D$ и на случай большей размерности.

Оценкам гармонической меры в терминах логарифмической емкости, экстремальных расстояний или с помощью теоремы проекции Бёрлинга посвящено значительное число работ (см., например, [1, 2, 3]).

В настоящем сообщении предполагается обсудить характер искажения гармонической меры граничных дуг E односвязных жордановых областей D при локально квазиконформных отображениях.

Определение 2. *Сохраняющий ориентацию гомеоморфизм f области D называется локально квазиконформным, если f квазиконформен на любом компакте из области D.*

Локально квазиконформные отображения дифференцируемы почти всюду. Локальное геометрическое поведение отображения f описывается с помощью определенной почти всюду комплексной характеристики $\mu_f(z) = f_{\bar{z}}(z)/f_z(z)$ или первой характеристики М.А. Лаврентьева

$$p_f(z) = \frac{1 + |\mu_f(z)|}{1 - |\mu_f(z)|}.$$

В общем случае локально квазиконформные отображения не допускают продолжения до гомеоморфизма замкнутых областей и неограниченно искажают длины граничных дуг и модули семейств кривых в D. Тем не менее, оценки искажения модулей семейств кривых при локально квазиконформных отображениях могут быть получены, например, в терминах мажорант характеристики p_f (см. [4, 5]). Аналогичные методы могут быть применены и для оценки искажения гармонической меры при квазиконформных или локально квазиконформных отображениях, что демонстрируется следующим новым результатом.

Теорема. *Пусть однолистное локально квазиконформное отображение f единичного круга $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ на ограниченную жорданову область D допускает продолжение $f(\zeta) = \lim_{z\to\zeta} f(z)$ на единичную окружность $\mathbb{T}$ и имеет непрерывную характеристику Лаврентьева $p_f(z)$.*

Пусть $E = \{\zeta \in \mathbb{T} : |\arg\zeta| < \alpha\}$, $0 < \alpha < \pi$, – дуга на $\mathbb{T}$ и $\tilde{E} \subset \partial D$ – дуга на ∂D, такая, что $f^{-1}(\tilde{E}) \subset E$. Определим числа $k = \frac{1-\sin(\alpha/2)}{1+\sin(\alpha/2)}$, $\mathsf{K} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$, и конформное отображение

$$\Phi_0(z) = -\left(\frac{\mathrm{sn}\,(\mathsf{K}z, k) - i\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha+\pi}{4}}{\mathrm{sn}\,(\mathsf{K}z, k) + i\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha+\pi}{4}}\right)^2$$

прямоугольника $R_0 = (0,1) \times (0, 1/\lambda_0)$ (при некотором λ_0) на $\mathbb{D} \setminus (-1, 0]$. Пусть

$$P_0(x) = \operatorname*{essup}_{\mathrm{Re}\, z = x} p_f(\Phi_0(z)), \ \ x \in (0,1), \ \ \text{и} \ \ I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{P_0(x)}.$$

Тогда

$$\omega(f(0), \tilde{E}, D) \le \frac{8}{\pi}\,(\omega(0, E, \mathbb{D}))^{I_0} = \frac{8}{\pi}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{I_0}.$$

Нетривиальная нижняя оценка искажения гармонической меры возможна лишь в случае, когда функция f продолжима до гомеоморфизма замкнутых областей, и имеет вид:

$$\omega(f(0), \tilde{E}, D) \ge \frac{\pi}{8}\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{1/J_0},$$

где $J_0 = \int_0^1 \frac{dx}{Q_0(x)}$, функция Q_0 определяется с помощью лаврентьевской характеристики отображения f^{-1} по схеме, аналогичной изложенной выше для I_0.

В случае квазиконформных отображений f справедливо

Следствие. *Пусть f – квазиконформное отображение единичного круга $\mathbb{D}$ на ограниченную жорданову область D с комплексной характеристикой $\mathbb{K}(f)$. Пусть E – дуга на $\mathbb{T}$ и $\tilde{E} = f(E) \subset \partial D$.*

Тогда

$$\frac{\pi}{8}\,(\omega(0, E, \mathbb{D}))^{\mathbb{K}(f)}\,\omega(f(0), \tilde{E}, D) \le \frac{8}{\pi}\,(\omega(0, E, \mathbb{D}))^{1/\mathbb{K}(f)}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 17-11-01229).

Литература

1. Garnett J.B., Marshall D.E. *Harmonic measure.* – Cambridge University Press. – 2005. – 571 p.

2. Beurling A. *The collected works of Arne Beurling* // Complex analysis (L. Carleson, et al., eds.). – Vol. 1. – Birkhäuser, 1989.

3. Carleson L. *Estimates of harmonic measures* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Series A. I. Mathematica. – 1982. – Vol. 7. – P. 25–32.

4. Graf S.Yu. *An analog of the Schwarz lemma for locally quasiconformal automorphisms of the unit disk* // Russian Mathematics (Iz. VUZ). – 2014. – Vol. 58. – No. 11. – P. 74–79.

5. Graf S.Yu. *On distortion of the moduli of rings under locally quasiconformal mappings in* $\mathbb{R}^n$ // Probl. Anal. Issues Anal. – 2015. – Vol. 4 (22). – No. 2. – P. 31–43.

ON DISTORTION OF HARMONIC MEASURE UNDER LOCALLY QUASICONFORMAL MAPPINGS

S.Yu. Graf

New results concerning two-side estimations of the distortion of harmonic measure of the boundary arcs under locally quasiconformal mappings of the disk are discussed. Estimations are obtained in terms of the majorant of the first Laurent'ev characteristics of the acting function.

Keywords: quasiconformal and locally quasiconformal mappings, harmonic measure.

УДК 512.579

О ТОПОЛОГИЧЕСКИ $\mathbb{Z}_n$-ГРАДУИРОВАННЫХ ПОЛУГРУППОВЫХ C^*-АЛГЕБРАХ

С.А. Григорян[1], Р.Н. Гумеров[2], Е.В. Липачева[3]

1 *gsuren@inbox.ru*; Казанский государственный энергетический университет
2 *renat.gumerov@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет
3 *elipacheva@gmail.com*; Казанский государственный энергетический университет

В докладе рассматриваются редуцированные полугрупповые C^*-алгебры для нормальных расширений абелевых полугрупп с помощью аддитивной группы $\mathbb{Z}_n$ вычетов по модулю n. Мы приводим общий метод построения таких расширений, каждое из которых порождено одним элементом, и примеры этих расширений для аддитивной полугруппы неотрицательных целых чисел. Основным обсуждаемым результатом является следующее утверждение: редуцированная полугрупповая C^*-алгебра для указанного выше расширения является топологически $\mathbb{Z}_n$-градуированной.

Ключевые слова: полугруппа с сокращением, расширение полугруппы, группа вычетов по модулю n, точная последовательность, расслоение Фелла, нормальное расширение, порожденное одним элементом, градуированная C^*-алгебра, редуцированная полугрупповая C^*-алгебра, полугруппа неотрицательных целых чисел, топологически градуированная C^*-алгебра.

Доклад посвящен редуцированным полугрупповым C^*-алгебрам для нормальных расширений абелевых полугрупп с помощью аддитивной группы $\mathbb{Z}_n$ вычетов по модулю n. Все рассматриваемые полугруппы с сокращением и единицами.

Редуцированные полугрупповые C^*-алгебры изучались авторами в серии работ, см., например, [1–7]. Исследования, связанные с построением топологической градуировки, продолжают ранее начатые исследования градуированных полугрупповых C^*-алгебр в [1, 8, 9].

Пусть S и L – аддитивные абелевы полугруппы с сокращением и единицами, а $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ – аддитивная группа вычетов по модулю n. Рассмотрим *нормальное расширение* L полугруппы S с помощью группы $\mathbb{Z}_n$, то есть короткую точную последовательность:

$$0 \longrightarrow S \xrightarrow{\tau} L \xrightarrow{\sigma} \mathbb{Z}_n \longrightarrow 0,$$

где $\tau : S \longrightarrow L$ – инъективный гомоморфизм полугрупп, а $\sigma : L \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ – сюръективный гомоморфизм, такой что $\sigma^{-1}([0]_n) = \tau(S)$, где $[0]_n$ – единица группы $\mathbb{Z}_n$. В этом случае существует изоморфизм

$$\psi : L/\sim \longrightarrow \mathbb{Z}_n,$$

где $\sim$ – конгруэнция, заданная на L с помощью σ: $x \sim y$, если и только если $\sigma(x) = \sigma(y)$.

Расширение L будем называть *нормальным расширением полугруппы S, порожденным одним элементом*, если полугруппа L порождается множеством $\tau(S)$ и фиксированным элементом $x \in \psi^{-1}([1]_n)$, где $[1]_n$ – порождающий элемент группы $\mathbb{Z}_n$.

Мы доказываем, что если L – конечное нормальное расширение полугруппы S, порожденное элементом x, то каждый элемент $y \in L$ однозначно представляется в виде $y = \tau(a) + kx$, где $a \in S$, $0 \le k \le n-1$. Это означает, что полугруппа L представляется в виде дизъюнктного объединения

$$L = \tau(S) \sqcup (\tau(S) + x) \sqcup \ldots \sqcup (\tau(S) + (n-1)x),$$

где $\tau(S) + kx := \{\tau(a) + kx \mid a \in S\}$, $0 \le k \le n-1$. При этом $nx \in \tau(S)$, то есть существует элемент $b \in S$ такой, что в полугруппе L справедливо равенство

$$nx = \tau(b). \tag{1}$$

Мы приводим метод, с помощью которого можно строить конечные нормальные расширения полугрупп, в которых разрешимо уравнение (1).

Пример. Пусть $S = \mathbb{Z}^+$ – полугруппа неотрицательных целых чисел. Тогда для любых натуральных чисел n и m существует конечное нормальное расширение $L_{n,m}$ полугруппы $\mathbb{Z}^+$, в котором уравнение $nx = \tau(m)$ имеет решение. То есть существует короткая точная последовательность полугрупп и их гомоморфизмов:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^+ \xrightarrow{\tau} L_{n,m} \xrightarrow{\sigma} \mathbb{Z}_n \longrightarrow 0.$$

Подполугруппу в $\mathbb{Z}^+$ с конечным дополнением мы называем *перфорированной*. Нами доказан следующий результат: полугруппа $L_{n,m}$ изоморфна перфорированной полугруппе тогда и только тогда, когда числа n и m взаимно просты.

Рассмотрим стандартное гильбертово пространство комплекснозначных функций на полугруппе L:

$$l^2(L) := \{f : L \to \mathbb{C} \mid \sum_{y \in L} |f(y)|^2 < +\infty\}.$$

Канонический ортонормированный базис гильбертова пространства $l^2(L)$ будем обозначать $\{e_y \mid y \in L\}$, где $e_y(y') = 1$, если $y = y'$, и $e_y(y') = 0$, если $y \neq y'$.

Через $C_r^*(L)$ обозначим C^*-подалгебру в алгебре всех ограниченных линейных операторов на $l^2(L)$, порожденную множеством изометрий $\{T_y \mid y \in L\}$, где $T_y(e_{y'}) = e_{y+y'}$. Алгебра $C_r^*(L)$ называется *редуцированной полугрупповой C^*-алгеброй для полугруппы L.*

Элементы $y \in L$ имеют вид $y = \tau(a) + kx$, где $a \in S, k \in \mathbb{N}, 0 \le k \le n-1$. Очевидно,

$$T_y = T_{\tau(a)+kx} = T_{\tau(a)} T_x^k.$$

Таким образом, C^*-алгебра $C_r^*(L)$ порождается множеством изометрий $\{T_{\tau(a)} \mid a \in S\}$ и изометрическим оператором T_x. Прямым следствием равенства (1) является операторное равенство $T_x^n = T_{\tau(b)}$.

Основной результат, сообщаемый в докладе, состоит в том, что C^*-алгебра $C_r^*(L)$ является топологически $\mathbb{Z}_n$-градуированной C^*-алгеброй.

Для точных формулировок утверждений мы напомним определение G-градуированной C^*-алгебры, а также понятие градуировки в более сильном смысле, а именно, понятие топологически градуированной C^*-алгебры, приведенные в книге [10, §16.2, §19.2].

Пусть $\mathfrak{A}$ – C^*-алгебра и G – группа. Предположим, что каждому элементу $g \in G$ поставлено в соответствие замкнутое линейное подпространство $\mathfrak{A}_g \subset \mathfrak{A}$. Если $\bigoplus\limits_{g\in G} \mathfrak{A}_g$ плотно в $\mathfrak{A}$ и для любых $g, h \in G$ справедливо:

1) $\mathfrak{A}_g \mathfrak{A}_h \subset \mathfrak{A}_{gh}$

2) $\mathfrak{A}_g^* = \mathfrak{A}_{g^{-1}}$;

то говорят, что $\mathfrak{A}$ является *G-градуированной* C^*-алгеброй. При этом семейство банаховых пространств $\{\mathfrak{A}_g\}_{g\in G}$ называется C^*-алгебраическим расслоением или *расслоением Фелла*.

Напомним, что G-градуированная C^*-алгебра $\mathfrak{A}$ называется *топологически градуированной*, если существует ограниченное линейное отображение $F : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}$, тождественное на $\mathfrak{A}_e$, где e – единица группы G, и равное нулю на $\mathfrak{A}_g$, где $g \neq e$.

В [10, с. 157] приводится пример, показывающий, что не каждая G-градуированная C^*-алгебра является топологически градуированной. Важным свойством топологически градуированной C^*-алгебры является наличие коэффициентов Фурье. Это означает, что для каждого $g \in G$ существует линейное отображение $F_g : \mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{A}_g$, такое, что для любой конечной суммы $A = \sum\limits_{g\in G} A_g$, где $A_g \in \mathfrak{A}_g$, справедливо равенство $F_g(A) = A_g$.

Для построения градуировки введем понятие монома и индекса монома в C^*-алгебре $C_r^*(L)$. Операторы $T_x, T_x^*, T_{\tau(a)}, T_{\tau(a)}^*$, $a \in S$, порождающие C^*-алгебру $C_r^*(L)$, будем называть *элементарными мономами*. Любое конечное произведение элементарных мономов будем называть *мономом*. Множество всех мономов образует полугруппу, которую мы будем называть *полугруппой мономов* и будем обозначать через Mon.

Зададим гомоморфизм полугрупп $\mathrm{ind} : \mathrm{Mon} \longrightarrow \mathbb{Z}_n$ сначала на элементарных мономах формулами

$$\mathrm{ind}\, T_{\tau(a)} = \mathrm{ind}\, T_{\tau(a)}^* = [0]_n,$$

для любого $a \in S$, и

$$\mathrm{ind}\, T_x = [1]_n,\ \mathrm{ind}\, T_x^* = [n-1]_n.$$

Затем продолжим это отображение до гомоморфизма полугрупп на всю полугруппу Mon так, чтобы для любых мономов $V, W \in \mathrm{Mon}$ выполнялись следующие равенства:

1) $\mathrm{ind}(V \cdot W) = \mathrm{ind}\, V + \mathrm{ind}\, W$;

2) если $\mathrm{ind}\, V = [k]_n$, то $\mathrm{ind}\, V^* = [n-k]_n$.

Нетрудно видеть, что гомоморфизм ind определен корректно, поскольку $\mathrm{ind}\, T_x^n = [n]_n = [0]_n = \mathrm{ind}\, T_{\tau(b)}$, где элемент $b \in S$ выбран так, что справедливо равенство (1).

Мономы индекса $[0]_n$ образуют *-подполугруппу в полугруппе мономов Mon. Через $\mathfrak{A}_0$ обозначим C^*-подалгебру в C^*-алгебре $C_r^*(L)$, порожденную мономами индекса $[0]_n$, а через $\mathfrak{A}_k$, $1 \leq k \leq n-1$, – банаховы подпространства в C^*-алгебре $C_r^*(L)$, порожденные мономами индекса $[k]_n$.

Как видно из следующей леммы, семейство подпространств $\{\mathfrak{A}_k \mid 0 \leq k \leq n-1\}$ образует расслоение Фелла над группой вычетов $\mathbb{Z}_n$.

Лемма 1. *Для системы подпространств* $\{\mathfrak{A}_k \mid 0 \leq k \leq n-1\}$ *справедливы следующие утверждения:*

1) $\mathfrak{A}_k \cap \mathfrak{A}_l = \{0\}$ *для* $k \neq l$;

2) $\mathfrak{A}_k = \mathfrak{A}_0 T_x^k$;

3) $\mathfrak{A}_k \mathfrak{A}_l \subset \mathfrak{A}_m$, *где* $[m]_n = [k+l]_n$;

4) $\mathfrak{A}_k^* = \mathfrak{A}_m$, *где* $[m]_n = [n-k]_n$;

5) *любой элемент* $A \in C_r^*(L)$ *однозначно представим в виде* $A = \sum\limits_{k=0}^{n-1} A_k$, *где* $A_k \in \mathfrak{A}_k$.

Лемма 2. *Существует ограниченное линейное отображение*

$$F : C_r^*(L) \longrightarrow C_r^*(L),$$

тождественное на $\mathfrak{A}_0$ *и равное нулю на* $\mathfrak{A}_k$, $1 \leq k \leq n-1$.

Из лемм 1 и 2 вытекает следующая

Теорема. *Система подпространств* $\{\mathfrak{A}_k \mid 0 \leq k \leq n-1\}$ *образует топологическую* Z_n*-градуировку* C^**-алгебры* $C_r^*(L)$.

Литература

1. Аухадиев М. А., Григорян С. А., Липачева Е. В. *Операторный подход к квантованию полугрупп* // Матем. сб. – 2014. – Т. 205. – № 3. – С. 15-40.

2. Липачева Е. В., Овсепян К. Г. *Автоморфизмы некоторых подалгебр алгебры Теплица* // Сиб. мат. журн. – 2016. – Т. 57. – № 3. – С. 666-674.

3. Гумеров Р. Н., Липачева Е. В., Григорян Т. А. *Об индуктивных пределах систем C^* - алгебр* // Изв. вузов. Матем. – 2018. – № 7. – С. 79-85.

4. Gumerov R. N. *On Norms of operators generated by shift transformations arising in signal and image processing on meshes supplied with semigroups structures* // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng., 2016. – 158 012042. http://china.iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/158/1/012042/pdf.

5. Гумеров Р. Н. *Предельные автоморфизмы C^* –алгебр, порожденных изометрическими представлениями полугрупп рациональных чисел* // Сиб. мат. журн. – 2018. – Т. 59. – № 1. – С. 95-109.

6. Gumerov R. N. *Coverings of solenoids and automorphisms of semigroup C^*-algebras* // Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seria Fiziko-Matematicheskie Nauki. – 2018. – V. 160. – № 2. – P. 275–286.

7. Lipacheva E. V. *Embedding semigroup C^*-algebras into inductive limits* // Lobachevskii J. Math. – 2019. – V. 40. – № 5. – P. 667–675.

8. Липачева Е. В. *Об одном классе градуированных идеалов полугрупповых C^*-алгебр* // Изв. вузов. Матем. – 2018. – № 10. – С. 43-54.

9. Григорян С. А., Липачева Е. В., Ситдиков А. С. *Сети градуированных C^*-алгебр над частично упорядоченными множествами* // Алгебра и анализ. – 2018. – Т. 30. – № 6. – С. 1-19.

10. Exel R. *Partial dynamical systems, Fell bundles and applications* // Math. Surv. Monogr. – Vol. 224. – Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2017.

ON TOPOLOGICALLY $\mathbb{Z}_n$-GRADED SEMIGROUP C^*-ALGEBRAS

S.A. Grigoryan, R.N. Gumerov, E.V. Lipacheva

The report deals with the reduced semigroup C^*-algebras for the normal extensions of cancellative commutative semigroups by the additive group $\mathbb{Z}_n$ of integers modulo n. We present a general method for constructing the extensions generated by one element and give examples of such extensions for the additive semigroup of non-negative integers. The main result discussed here is the following statement. The reduced semigroup C^*-algebra for the above-mentioned extension is a topologically $\mathbb{Z}_n$-graded C^*-algebra.

Keywords: cancellative semigroup, extension of semigroup, group of integers modulo n, exact sequence, Fell bundle, normal extension generated by one element, graded C^*-algebra, reduced semigroup C^*-algebra, semigroup of non-negative integers, topologically graded C^*-algebra.

УДК 517.53

КРИТЕРИЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ В КЛАССЕ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА В ПОЛУПЛОСКОСТИ

А.Л. Гусев[1]

1 *ctex1990goose@yandex.ru*; Курский государственный университет

Целью данной работы является изучение проблемы интерполяции в пространствах аналитических функций конечного порядка $\rho > 1$ в полуплоскости. Необходимые и достаточные условия ее разрешимости находятся в терминах меры, определяемой узлами интерполяции.

Ключевые слова: интерполяционная задача, мера, узлы интерполяции.

В работе [1] рассматривалась задача простой свободной интерполяции в пространствах аналитических функций конечного порядка $\rho > 1$ в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{z : \Im z > 0\}$. В этой статье мы используем определения и обозначения из [1]. Обозначим через $[\rho,\infty]^+$ пространство аналитических в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ функций порядка $\rho > 0$ в смысле эквивалентных между собой определений Говорова и Титчмарша [2, глава 1]. Пусть $A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}_+$ — последовательность различных комплексных чисел, такая что $|a_n| \geqslant 1$, все предельные точки A находятся на действительной оси и бесконечности.

Определение 1. *Последовательность A называется интерполяционной последовательностью в пространстве $[\rho,\infty]^+$ если для любой последовательности комплексных чисел $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющих условиям:*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\ln^+\ln^+|b_n|}{\ln|a_n|+2} < \infty, \quad \limsup_{|a_n|\to\infty} \frac{\ln^+\ln^+|b_n|}{\ln|a_n|} \leqslant \rho, \tag{1}$$

существует функция $F \in [\rho,\infty]^+$, решающая проблему интерполяции

$$F(a_n) = b_n, \quad n = 1,2,\ldots. \tag{2}$$

Здесь, как обычно, мы обозначаем через $\ln^+ b = \begin{cases} 0, & b \leqslant 0, \\ \ln b, & b > 0. \end{cases}$

В такой постановке задача интерполяции относится, к так называемым задачам *свободной интерполяции*, которую впервые рассмотрел А.Ф. Леонтьев в 1948 г. [3]. В задачах свободной интерполяции на значения интерполирующей функции в узлах интерполяции накладываются минимальные ограничения (в данном случае – ограничения (1)), вызванные необходимостью нахождения решения в данном пространстве аналитических функций.

Обозначим через $B_q(u,v)$ первичный множитель Неванлинны

$$B_q(u,v) = \begin{cases} \dfrac{\bar v(u-v)}{v(u-\bar v)}, & q=0, \\ B_0(u,v)\exp\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{q} \frac{u^i}{i}\left(\frac{1}{v^i}-\frac{1}{\bar v^i}\right)\right), & q\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

Пусть $A = \{a_n = r_n e^{i\theta_n}\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}_+$, $r_n > \delta_0 > 0$, — последовательность различных комплексных чисел, такая что все предельные точки A находятся на действительной оси и на бесконечности, и для любого $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\theta_n}{r_n^{\rho+\varepsilon}} < \infty, \quad \rho > 1, \tag{3}$$

тогда функция

$$E(z) = E_A(z) =: \prod_{|a_n|<1}\left(\frac{z-a_n}{z-\bar a_n}\right)\prod_{|a_n|\geqslant 1} B_q(z,a_n), \quad q=[\rho]$$

принадлежит пространству $[\rho,\infty]^+$. Мы обозначаем через $[a]$ целую часть числа a. Функция $E(z)$ называется *канонической функцией последовательности A*.

В работе [4] Б.Я. Левин и Нгуен Тхыонг Уен рассмотрели интерполяционную задачу (2) в пространстве $[\rho,\infty]^+$ функций порядка $\rho > 1$ в полуплоскости $\mathbb{C}_+$. Они показали, что для того чтобы по каждой последовательности $\{b_n\}_1^{\infty}$, удовлетворяющей условиям (1), можно было построить функцию из пространства $[\rho,\infty]^+$, удовлетворяющую равенствам (2), необходимо, чтобы при любом $\varepsilon > 0$ выполнялись условие (3) и неравенство

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\ln|a_n|}\ln^+\ln\frac{1}{\Im a_n|E'(a_n)|} \leqslant \rho;$$

достаточно, чтобы выполнялись условие (3) и неравенство

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\ln|a_n|}\ln^+\ln\frac{1}{\Im^2 a_n|E'(a_n)|} \leqslant \rho. \tag{4}$$

При этом дополнительно предполагалось, что множество $\{a_n\}_1^{\infty}$ имеет единственную точку сгущения на бесконечности (хотя это следует и из условия (4)). Условие (4) накладывает ограничение на скорость убывания $\Im a_n$, а именно, для любого $\varepsilon > 0$ справедливо асимптотическое неравенство

$$\Im a_n > \exp(-|a_n|^{\rho+\varepsilon}), \quad |a_n| > r(\varepsilon),$$

которое позволило авторам строить решение задачи (2) в виде интерполяционного ряда Лагранжа.

Заметим, что задача свободной кратной интерполяции в пространствах функций конечного порядка, включая нулевой, и типа не выше чем нормальный была полностью решена в работах [5], [6].

В работе [1] была доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Следующие два утверждения эквивалентны.*

1) *Последовательность A является интерполяционной последовательностью в пространстве* $[\rho,\infty]^+$.

2) *Условие* (1) *верно и каноническая функция $E(z)$ последовательности A удовлетворяет условиям*:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\ln|a_n|+2} \ln^+ \ln^+ \frac{1}{|E'(a_n)|\Im a_n} < \infty,$$
$$\limsup_{|a_n|\to\infty} \frac{1}{\ln|a_n|} \ln^+ \ln^+ \frac{1}{|E'(a_n)|\Im a_n} \leqslant \rho\,.$$

Целью данной работы является получение необходимых и достаточных условий разрешимости этой интерполяционной задачи в терминах меры, определяемой последовательностью A. Введем следующие определения. Через $C(z,R)$ обозначим открытый круг радиуса R с центром в точке z.

Определение 2. *Абсолютно непрерывная функция $\rho(r)$ на вещественной полуоси* $[0,+\infty)$*, удовлетворяющая условиям*

$$\lim_{r\to+\infty} \rho(r) = \rho, \qquad \lim_{r\to+\infty} \rho'(r)\, r \ln r = 0\,,$$

называется уточненным порядком.

Через $V(r)$ обозначим $V(r) := r^{\rho(r)}$.

По последовательности A определим неванлинновскую меру $\mu_A(G) = \mu(G)$ равенством $\mu(G) := \sum\limits_{a_n\in G} \sin\theta_n$ и семейства функций

$$\widetilde{\Phi}_z^+(\alpha) = \max\{\mu(C(z,\alpha|z|)) - \sin\theta_n; 0\},\ \Phi_z^+(\alpha) = \frac{\widetilde{\Phi}_z^+(\alpha)}{V(|z|)}, \quad \alpha > 0\,,$$

где a_n является точкой, ближайшей к z (если таких точек несколько, мы выбираем ту, которая имеет наибольшее значение $\Im a_n$).

Наши основные результаты – это две теоремы, формулируемые ниже.

Теорема 2. *Следующие два утверждения эквивалентны.*

1) *Последовательность A является интерполяционной последовательностью в пространстве* $[\rho,\infty]^+$.

2) *Для любого $\varepsilon > 0$ выполняется условие* (3) *и существует уточненный порядок* $\rho(r)$, $\lim\limits_{r\to\infty} = \rho > 1$ *такой, что*

$$\Phi_z^+(\alpha) \leqslant \frac{\alpha+\sin\theta}{\ln\dfrac{\alpha+2\sin\theta}{\alpha}}\,,$$

где $\theta = \arg z$.

Отсюда сразу же следует.

Теорема 3. *Следующие два утверждения эквивалентны.*

1) *Последовательность* A *является интерполяционной последовательностью в пространстве* $[\rho,\infty]^{+}$.

2) *Для любого* $\varepsilon > 0$ *выполняется условие* (3) *и следующие условия*:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{\ln^{+}\widetilde{\Phi}_z^{+}(\alpha)}{\ln|a_n|+2} < \infty; \tag{1}$$

$$\limsup_{|a_n|\to\infty} \frac{\ln^{+}\widetilde{\Phi}_z^{+}(\alpha)}{\ln|a_n|} \leqslant \rho + \ln\frac{\alpha+\sin\theta}{\ln\dfrac{\alpha+2\sin\theta}{\alpha}}. \tag{2}$$

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00236.

Литература

1. Malyutin K. G., Gusev A.L. *The interpolation problem in the spaces of analytical functions of finite order in the half-plane* // Probl. Anal. Issues Anal., Special Issue. – 2018. – Vol. 7. – No. 25. – P. 113–123.

2. Говоров Н. В. *Краевая задача Римана с бесконечным индексом.* – М.: Наука, 1986. – 240 с.

3. Леонтьев А. Ф. *Об интерполировании в классе целых функций конечного порядка* // Докл. АН СССР. – 1948. – № 5. – С. 785–787.

4. Левин Б. Я., Уен Н. Т. *Об интерполяционной задаче в полуплоскости в классе аналитических функции конечного порядка* // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – 1975. – Вып. 22. – С. 77–85.

5. Малютин К. Г. *Задача кратной интерполяции в полуплоскости в классе аналитических функций конечного порядка и нормального типа* // Матем. сб. – 1993. – Т. 184. – № 2. – С. 129–144.

6. Боженко О. А., Малютин К. Г. *Задача кратной интерполяции в классе аналитических функций нулевого порядка в полуплоскости.* // Уфимский математический журнал. – 2014. – Т. 6. – № 1. – С. 18–29.

GEOMETRIC INTERPOLATION CRITERION IN THE CLASS OF FUNCTIONS OF FINITE ORDER IN A HALF-PLANE

A.L. Gusev

The aim of this paper is to study the interpolation problem in the spaces of analytical functions of finite order $\rho > 1$ *in the half-plane. The necessary and sufficient conditions for its solvability are found in terms of the measure defined by the nodes of interpolation.*

Keywords: interpolation problem, measure, nodes of interpolation.

УДК 517.5

О ЗАДАЧЕ Е.А. ГОРИНА ДЛЯ ИНДИВИДУАЛЬНЫХ НАИПРОСТЕЙШИХ ДРОБЕЙ

В.И. Данченко[1], П.В. Чунаев[2]

1 *vdanch2012@yandex.ru*; Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых
2 *chunayev@mail.ru*; Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых и Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики (Университет ИТМО)

В заметке получена оценка снизу модулей мнимых частей полюсов логарифмической производной алгебраического многочлена (наипростейшей дроби) при условии ее нормировки на действительной оси. В отличие от предшествующих результатов, в оценке учитывается величина вычетов в полюсах.

Ключевые слова: задача Горина, наипростейшая дробь, наименьшее уклонение.

В работе [1] Е. А. Горин поставил задачу об оценке снизу величины

$$d_n(\mathbb{R}, p) = \inf\Big\{Y(\rho_n):\ \|\rho_n\|_{L_p(\mathbb{R})} \le 1\Big\}, \quad Y(\rho_n) := \min_{k=1,\dots,m} |\mathrm{Im}\, z_k|, \quad 1 < p \le \infty,$$

где

$$\rho_n(z) := \left(\ln \prod_{k=1}^{m} (z - z_k)^{n_k}\right)' = \sum_{k=1}^{m} \frac{n_k}{z - z_k} \tag{1}$$

есть наипростейшая дробь — логарифмическая производная алгебраического многочлена $Q(z) = \prod_{k=1}^m (z - z_k)^{n_k}$ заданной степени $n = \sum_{k=1}^m n_k$. При $p = \infty$ (это наиболее сложный случай) задача рассматривалась в работах [1]– [6]. Окончательный результат на классе всех наипростейших дробей вида (1) получен в [6]:

$$d_n(\mathbb{R}, \infty) \asymp \frac{\ln\ln n}{\ln n}. \tag{2}$$

Там же показано, что при конечных p величины $d_n(\mathbb{R}, p)$ к нулю не убывают и ограничены снизу положительной величиной, зависящей только от p. Позже рассматривались аналоги задачи Горина на других множествах (полупрямые, прямолинейные отрезки, окружности, спрямляемые компакты и др.) и при различных нормировках дробей (1). Подробно история вопросов и результаты разных авторов в этом направлении изложены в [7].

Оцениваемую величину можно переписать так:

$$d_n(\mathbb{R}, p) = \inf_{\rho_n}\Big\{Y(\rho_n)\|\rho_n\|^q_{L_p(\mathbb{R})}\Big\}, \qquad p^{-1} + q^{-1} = 1,$$

где инфимум берется по всем дробям вида (1), не имеющим полюсов на $\mathbb{R}$. Следовательно, задачу Горина можно переформулировать как задачу о величине наименьшего уклонения от нуля в $L_p(\mathbb{R})$ в классе дробей (1) при условии $Y(\rho_n) = 1$, или, что то же самое, при условии, что все дроби (1) имеют общий фиксированный полюс, например, $z_1 = i$. Это обстоятельство, в частности, приводит к значительно более общим задачам аппроксимации дробями (1) на $\mathbb{R}$ и на других множествах, так что задача Горина не потеряла свою актуальность (см. [7]).

Двусторонняя оценка (2) справедлива на классе *всех* дробей вида (1) без учета кратностей нулей многочлена Q. Возникает вопрос об оценке $Y(\rho_n)$ для индивидуальной нормированной наипростейшей дроби ρ_n с учетом значений n_k. Получена

Теорема. *С некоторой абсолютной постоянной* c *для полюса* z_k *имеем*

$$|\mathrm{Im}\, z_k| \geq c\,\frac{(\ln n)^{1/n_k}+1}{(\ln n)^{1/n_k}-1}\cdot\frac{\ln\ln n}{\ln n} > 2c\,\frac{n_k}{\ln n}, \quad n \geq 4. \tag{3}$$

Здесь второе неравенство получается элементарной оценкой первой дроби. Таким образом, имеем непрерывную шкалу дополнительных множителей в (2). Например, если $n_k \leq \ln\ln n$, то в (3) получаем порядок оценки тот же, что и в (2): $|\mathrm{Im}\, z_k| > 2c\ln\ln n/\ln n$, а при n_k, удовлетворяющих обратному неравенству, в (3) получается неравенство

$$|\mathrm{Im}\, z_k| \geq 2c\frac{n_k}{\ln n},$$

более точное по порядку, чем (2).

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (задание 1.574.2016/1.4) и РФФИ (проект 18-01-00744).

Литература

1. Горин Е. А. *Частично гипоэллиптические дифференциальные уравнения в частных производных с постоянными коэффициентами* // Сиб. матем. журн. — 1962. — Т. 3. — № 4. — С. 500–526.

2. Николаев Е. Г.*Геометрическое свойство корней многочленов* // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. — 1965. — Т. 5. — С. 23–26.

3. Гельфонд А. О. *Об оценке мнимых частей корней многочленов с ограниченными производными от логарифмов на действительной оси* // Матем. сб. — 1966. — Т. 71(113). — № 3. — С. 289–296.

4. Кацнельсон В. Э. *О некоторых операторах, действующих в пространствах, порожденных функциями* $\frac{1}{z-z_k}$ // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. — 1967. — Т. 4. — С. 58–66.

5. Николаев Е. Г. *О корнях многочленов с ограниченными логарифмическими производными* // Матем. заметки. — 1967. — Т. 2. — № 1. — С. 71–80.

6. Данченко В. И. *Оценки расстояний от полюсов логарифмических производных многочленов до прямых и окружностей* // Матем. сб. — 1994. — Т. 185. — № 8. — С. 63–80.

7. Данченко В. И., Комаров М. А., Чунаев П. В. *Экстремальные и аппроксимативные свойства наипростейших дробей* // Изв. вузов. Матем. – 2018. — Т. 62. — № 12. — С. 9–49.

ON E. A. GORIN'S PROBLEM FOR INDIVIDUAL SIMPLE PARTIAL FRACTIONS

V.I. Danchenko, P.V. Chunaev

In this note, we obtain a lower estimate for the absolute values of imaginary parts of the poles of the logarithmic derivative of an algebraic polynomial (a simple partial fraction) under a normalization condition on the real axis. Unlike the preceding results, the estimate takes into account the residues at the poles.

Keywords: Gorin's problem, simple partial fraction, least deviation.

UDC 517.5

ONE-PARAMETRIC FAMILIES AND CONFORMAL MODULE OF THE EXTERIOR OF TWO RECTILINEAR SLITS

D.N. Dautova[1], S.R. Nasyrov[2], M. Vuorinen[3]

1 *dautovadn@gmail.com*; Kazan Federal University
2 *snasyrov@kpfu.ru*; Kazan Federal University
3 *vuorinen@utu.fi*; University of Turku, Turku, Finland.

We study one-parametric families of planar ring domains whose complements are linear segments and establish a formula for variation of their moduli in terms of the Weierstrass elliptic functions. We also obtain a system of ODEs to find parameters in the integral representation of functions realizing conformal mappings of annuli onto the domains of the family.

Keywords: conformal module, capacity, elliptic functions.

1. Introduction. The Weierstrass and Jacobian elliptic and theta functions and the Schwarz-Christoffel formula form the foundation for numerous explicit formulas for conformal mappings. During the past thirty years many authors have studied numerical implementation of conformal mappings (see the bibliography in [13]). In particular, the Schwarz-Christoffel toolbox of T. Driscoll and N. Trefethen [4] has become a standard tool in the field. In a series of papers of T. DeLillo, J. Pfaltzgraff, D. Crowdy and their coauthors have extended the Schwarz-Christoffel method to certain cases of multiply connected domains with polygonal boundary components.

In addition to the conformal mapping problem, also the computation of numerical values of conformal invariants is an important issue in geometric function theory. Here one can often use a conformal map onto a canonical domain so as to simplify the computation. Therefore, computation of conformal invariants has a natural link to numerical conformal mapping.

A basic conformal invariant is the module of a ring domain. A ring domain G can be conformally mapped onto an annulus $\{z \in \mathbb{C} : q < |z| < 1\}$ and its conformal module and capacity are defined as $\operatorname{mod} G = (\log(q^{-1}))/(2\pi)$, $\operatorname{cap} G = 2\pi/\log(q^{-1})$. Therefore, $\operatorname{mod} G = 1/\operatorname{cap} G$ and the computation of $\operatorname{mod} G$ can be reduced to the solution of the Dirichlet problem for the Laplace equation and to the computation of the L^2-norm of its gradient. This method was applied in [2, 6, 7] for the case of bounded ring domains.

Here we shall consider unbounded ring domains whose complementary components are segments. To find their modules approximately, we describe one-parametric families of functions $f(z,t)$ each of which maps conformally an annulus $\{q < |\zeta| < 1\}$ onto the exterior $G = G(t)$ of two disjoint segments A_1A_2 and A_3A_4. Here $A_j = A_j(t)$, $1 \le j \le 4$, are some smooth functions and $q = q(t)$; t is a real parameter. We will denote such domains by $G(A_1, A_2, A_3, A_4)$. It is also assumed that the straight lines, containing the segments A_1A_2 and A_3A_4, are fixed.

We note that one-parametric families of conformal mappings were considered earlier. There is the well-known Loewner-Komatu differential equation which is a generalization of the Loewner equation to the doubly-connected case. The approach of Komatu was developed by Goluzin [5] and others (see, e.g. [1]).

We deduce a differential equation for $f(z,t)$ in the considered case (Theorem 2). In contrast to the Loewner-Komatu equation, we do not assume that the family of the images is monotonic as a function of the parameter t. As a corollary, we obtain a system of ODEs to determine the behavior of the accessory parameters, which are the preimages of the points A_j, and the conformal module $m(t) := \operatorname{mod} G(t) = (\log(q(t))^{-1})/(2\pi)$ (Theorem 3). On the base of the system, we can suggest an approximate method for finding the accessory parameters and the conformal module. It is based on the solving of the Cauchy problem for system of ODEs from Theorem 3 (see more in [3]).

2. Integral representation. Consider a conformal mapping g of an annulus $\{q < |\zeta| < 1\}$ onto the exterior $G = G(A_1, A_2, A_3, A_4)$ of two disjoint rectilinear slits A_1A_2 and A_3A_4 in the w-plane. With the help of the exponential map $z \mapsto \zeta = \exp(2\pi i z)$ we can consider the map $f := g(2\pi i z)$ from the horizontal strip $S := \{-m < \Im z < 0\}$, $m = \frac{1}{2\pi}\log(q^{-1})$, onto G. It maps conformally the rectangle $\Pi = \{0 < \Re z < 1, -m < \Im z < 0\}$ with identified vertical sides onto G (Fig. 1). The value m is the conformal module of G. It is evident that f has a unique pole $\bar{z}_0$ in Π. Using the Riemann–Schwarz reflection principle, we can extend f to $\mathbb{C}$ as a meromorphic function.

We will find an integral representation for the conformal mapping f of Schwarz–Christoffel type using the Weierstrass σ-function. We should note that analogs of the Schwarz–Christoffel integral for doubly-connected domains were obtained earlier in [9]; it is based on θ-functions.

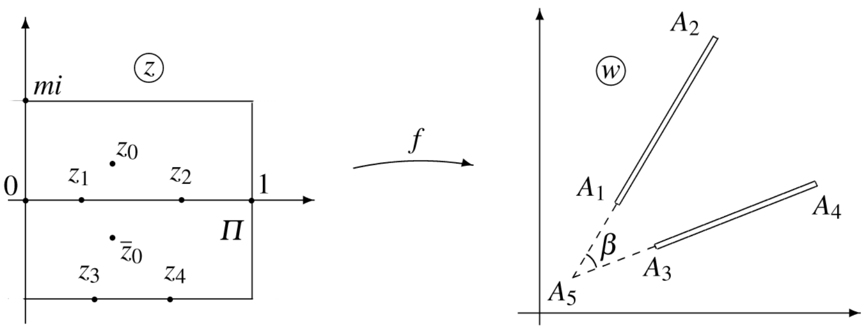


Fig. 1. Conformal mapping of the rectangle Π with identified vertical sides onto $G(A_1, A_2, A_3, A_4)$.

Denote by $\sigma(z)$ and $\zeta(z)$ the Weierstrass σ- and ζ-function with periods $\omega_1 = 1$ and $\omega_2 = 2mi$. Let $\eta_1 = \zeta(\omega_1/2) = \omega_1(0.5)$ and β be the angle between straight lines which contain the slits A_1A_2 and A_3A_4 (Fig. 1).

Theorem 1. *The function, mapping the annulus* $\{q < |\zeta| < 1\}$ *onto* $G(A_1, A_2, A_3, A_4)$, *is* $f(z)$ *where* $z = (2\pi i)^{-1}\log\zeta$ *and* f *is defined by*

$$f(z) = C\int_0^z e^{\gamma\xi}\frac{\prod_{k=1}^4 \sigma(\xi - z_k)}{\sigma^2(\xi - z_0)\sigma^2(\xi - \overline{z}_0)}\,d\xi + C_1. \tag{1}$$

In (1), $\gamma = \beta\eta_1/\pi$, *the points* $z_k = x_k + iy_k$ *correspond to the endpoints* A_k *of the slits and satisfy* $z_1 = x_1$, $z_2 = x_2$, $z_3 = x_3 + im$, $z_4 = x_4 - im$, *with real* x_k *and* $m = (1/(2\pi))\log(q^{-1})$, *the point* $z_0 = iy_0$ *matches to the infinity,* $C \neq 0$ *and* C_1 *are some complex constants. Moreover,* $\sum_{k=1}^4 x_k = \beta/\pi$.

We will call the parameters C, z_k, $1 \le k \le 4$, z_0, and m the accessory parameters. It is an important problem to find their values for a given domain $G(A_1, A_2, A_3, A_4)$.

3. One-parametric families. The parametric method for doubly connected domains was developed by Komatu [8] and Goluzin [5] (in details, see [1], ch. 5). Here we obtain an equation of Loewner type using ideas of the papers [10, 12].

Taking into account the integral representation (1), obtained in Theorem 1, we consider a smooth one-parametric family of conformal mappings

$$f(z,t) = c(t)\int_0^z e^{\gamma(t)\xi}\frac{\prod_{k=1}^4 \sigma(\xi - z_k(t))}{\sigma^2(\xi - z_0(t))\sigma^2(\xi - \overline{z_0(t)})}\,d\xi + c_1(t).$$

Here $\sigma(z) = \sigma(z;1,\omega_2)$ where $\omega_2 = 2mi$, $m = m(t) > 0$. For a fixed t, $f(z,t)$ is periodic with period $\omega_1 \equiv 1$ and maps the half of the fundamental parallelogram (rectangle) $\{0 < \Re x < 1, -m < \Im z < 0\}$ onto the exterior of two rectilinear slits.

Theorem 2. *The family $f(z,t)$ satisfies the PDE $\dot f(z,t)/f'(z,t) = h(z,t)$ where*

$$h(z,t) = \sum_{j=1}^4 \gamma_j(t)[\zeta(z - z_j(t)) - \zeta(z_0(t) - z_j(t)) - \eta_1(t)(z - z_0(t))] - \dot z_0(t). \tag{2}$$

Here $\gamma_k(t) = \dot A_k(t)/D_k(t)$, $\dot A_k(t) := dA_k(t)/dt$ and

$$D_k(t) = c(t)e^{\gamma(t)z_k(t)}\frac{\prod\limits_{j=1,\,j\neq k}^4 \sigma(z_k(t) - z_j(t))}{\sigma^2(z_k(t) - z_0(t))\sigma^2(z_k(t) - \overline{z_0(t)})}.$$

For the Weierstrass ζ-function in (2), the period $\omega_1(t)$ is equal 1, and the period $\omega_2(t)$ satisfies

$$\dot\omega_2(t) = 2\pi i\sum_{j=1}^4 \gamma_j(t).$$

Theorem 3. *The accessory parameters satisfy the system of ODEs:*

$$\begin{aligned}\dot z_l = \dot z_0 - &\sum_{j=1,j\neq l}^4 \gamma_j\left[\zeta(z_l - z_j) - \zeta(z_0 - z_j) - \eta_1(z_l - z_0)\right]\\ &-\gamma_l\Big(\sum_{s=1,s\neq l}^4 \zeta(z_l - z_s) + \gamma - \eta_1(z_l - z_0) - \zeta(z_l - z_0) - 2\zeta(z_l - \overline{z}_0)\Big),\ 1\le l\le n,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot y_0 = -\sum_{k=1}^4 \Im\frac{\mathfrak{P}(z_0 - z_k)}{4\mathfrak{P}(z_0 - \overline{z}_0) - \sum_{j=1}^4\mathfrak{P}(z_0 - z_j)}\dot x_k + \Re\Bigg[&\frac{4\,\partial\zeta(z_0 - \overline{z}_0)/\partial\omega_2}{4\mathfrak{P}(z_0 - \overline{z}_0) - \sum_{k=1}^4\mathfrak{P}(z_0 - z_k)}\\ &+\frac{-\frac{4\beta}{\pi}\partial\zeta(1/2)/\partial\omega_2 - 2\sum_{k=1}^4 \partial\zeta(z_0 - z_k)/\partial\omega_2 - \mathfrak{P}(z_0 - z_3) + \mathfrak{P}(z_0 - z_4)}{4\mathfrak{P}(z_0 - \overline{z}_0) - \sum_{k=1}^4\mathfrak{P}(z_0 - z_k)}\Bigg]\dot m.\end{aligned}$$

$$\dot a(t) = \sum_{j=1}^4 \gamma_j(t)\mathfrak{P}(z_0(t) - z_j(t)) + \eta_1(t),$$

where $a = \log d_{-1}$ *and* d_{-1} *is defined by*

$$d_{-1}(t) = -c(t)e^{\gamma(t)z_0(t)} \frac{\prod_{k=1}^{4} \sigma(z_0(t) - z_k(t))}{\sigma^2(z_0(t) - \overline{z_0(t)})}.$$

The partial derivative $\partial\zeta(z)/\partial\omega_2 = \partial\zeta(z;\omega_1,\omega_2)/\partial\omega_2$ can be found by the formula given in [10, thrm. 3].

Corollary. *The conformal module of the domains satisfies the differential equation*

$$\dot{m}(t) = \pi \sum_{j=1}^{4} \gamma_j(t), \quad \textit{where} \quad \gamma_k(t) := \dot{A}_k(t)/D_k(t),\ D_k(t) = f''(z_k, t).$$

The work of the first author was supported by the Russian Foundation for Basic Research, grant No 18-31-00060; the second author was supported by the Russian Foundation for Basic Research, grant No 17-01-00282. The third author expresses his thanks to the Kazan Regional Scientific and Educational Mathematical Center for a support during his stay at the Kazan Federal University in October-November 2018.

References

1. Aleksandrov I.A. *Parametric continuations in the theory of univalent functions.* – Moscow: Nauka, 1976 (Russian).

2. Betsakos D., Samuelsson K., Vuorinen M. *The computation of capacity of planar condensers* // Publ. Inst. Math. (Beograd) (N.S.). – 2004. – V. 75(89). – P. 233–252.

3. Dautova D., Nasyrov S., and Vuorinen M. *Conformal module of the exterior of two rectilinear slits.* – https://arxiv.org/abs/1908.02459.

4. Driscoll T.A., Trefethen L.N. *Schwarz-Christoffel mapping.* – Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, 8. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. – xvi+132 p.

5. Goluzin G.M. *On the parametric representation of functions univalent in a ring* // Mat. Sb. (N.S.). – 1951. – V. 29(71), No. 2. – P. 469–476 (Russian).

6. Hakula H., Rasila A., Vuorinen M. *On moduli of rings and quadrilaterals: algorithms and experiments* // SIAM J. Sci. Comput. – 2011. – V. 33, No. 1. – P. 279–302.

7. Hakula H., Rasila A., Vuorinen M. *Conformal modulus and planar domains with strong singularities and cusps* // Electron. Trans. Numer. Anal. – 2018. – V. 48. – P. 462–478.

8. Komatu Yu. *Untersuchungen über konforme Abbildung zweifach zusammenhängender Bereiche* // Proc. Phys., Math. Soc. Japan. – 1943. – V. 25. – P. 1–42 (German).

9. Komatu Yu. *Darstellungen der in einem Kreisringe analytischen Funktionen nebst den Anwendungen auf konforme Abbildung über Polygonalringgebiete* // Jap. J. Math. – 1945. – V. 19. – P. 203-215 (German).

10. Nasyrov S.R. *Uniformization of one-parametric families of complex tori* // Russian Mathematics. – 2017. – V. 61, No. 8. – P. 36–45.

11. Nasyrov S.R. *Families of elliptic functions and uniformization of complex tori with a unique point over infinity* // Probl. Anal. Issues Anal. – 2018. – V. 7(25), No. 2. – P. 98–111.

12. Nasyrov S.R. *Uniformization of simply-connected ramified coverings of the sphere by rational functions* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2018. – V. 39, No. 2. – P. 252–258.

13. Papamichael N., Stylianopoulos N. *Numerical conformal mapping. Domain decomposition and the mapping of quadrilaterals.* – Hackensack, NJ: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2010. – xii+229 p.

ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ СЕМЕЙСТВА И КОНФОРМНЫЙ МОДУЛЬ ОБЛАСТИ, ЯВЛЯЮЩЕЙСЯ ВНЕШНОСТЬЮ ДВУХ ОТРЕЗКОВ

Д.Н. Даутова, С.Р. Насыров, М. Вуоринен

Мы изучаем однопараметрические семейства областей на плоскости, которые являются внешностью двух отрезков, и получаем формулу для вариации конформного модуля этих областей. Получена также система дифференциальных уравнений для определения параметров в интегральном представлении функций, осуществляющих конформные отображения колец на области семейства.

Ключевые слова: конформный модуль, емкость, эллиптическая функция.

УДК 517.518

О СТАБИЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ НЕДИВЕРГЕНТНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С РАСТУЩИМИ СТАРШИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В.Н. Денисов[1]

1 *vdenisov2008@yandex.ru*; Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова

Изучаются точные достаточные условия на порядок роста старших коэффициентов недивергентного параболического уравнения второго порядка, при которых решение задачи Коши стабилизируется к нулю с экспоненциальной скоростью, равномерно по x на каждом компакте K в R^N.

Ключевые слова: параболические уравнения, решение задачи Коши, стабилизация.

В полупространстве $\overline{E} = R^N \times [0,\infty), N \geqslant 3$ рассмотрим задачу Коши

$$Lu \equiv L_1 u + C(x)u - u_t = 0, \text{ в } E, \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in R^N, \tag{2}$$

где

$$L_1 u = \sum_{i,k=1}^{N} a_{ik}(x) u''_{x_i x_k}.$$

Предполагается, что выполнены следующие условия:

1) коэффициенты в (1) действительны и непрерывны в R^N, и удовлетворяют условию Гельдера в каждой ограниченной подобласти D в $R^N, a_{ik} = a_{ki}$, $(i,k = 1,\dots,N)$, существуют положительные постоянные λ_0, λ_1, такие, что

$$\lambda_0^2 b(|x|)|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,k=1}^{N} a_{ik}(x)\xi_i\xi_k \leqslant \lambda_1^2 b(|x|)|\xi|^2, \tag{3}$$

для $\forall x, \xi \in R^N$,

$$b(|x|) = (1+|x|^2)^m, 0 < m < 1/2, |x| = x_1^2 + \ldots + x_N^2. \tag{4}$$

2) коэффициент $C(x)$ в (1) удовлетворяет условию (C): существует постоянная $\beta > 0$ такая, что

$$C(x) \leqslant -\beta^2, \forall x \in R^N.$$

3) начальная функция $u_0(x)$ непрерывна в R^N и выполнено условие ограниченности

$$|u_0(x)| \leqslant M. \qquad (5)$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Если* $u(x,t)$ *– решение задачи (1), (2) с начальной функцией (2), удовлетворяющей (5), выполнены условия (3), (4) при* $0 < m < 1/2$*, и коэффициент C(x) удовлетворяет условию (C) для* $\beta > 0$*, то для решения задачи (1), (2) справедливо неравенство*

$$|u(x,t)| \leqslant M_1 \exp(-bt^{\frac{1}{n}}), t \geqslant t_1 > 0,$$

равномерно по x на каждом компакте K в R^N*, где*

$$M_1 = M(K), b = b(k, K, \lambda_0, \lambda_1, \beta), \frac{1}{n} = \frac{1-2m}{3-2m}.$$

Замечание. *Теорема является точной в том смысле, что нельзя в её утверждении заменить компакт на все* R^N .

Обзору работ по стабилизации решений параболических уравнений посвящена работа [1]. Асимптотика решений с растущими коэффициентами изучалась в работах [2], [3]. Асимптотика решений нелинейных параболических уравнений изучалась, например, в [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (проект № 19-11-00223).

Литература

1. Денисов В. Н. *О поведении решений параболических уравнений при больших значениях времени* // УМН. – 2005. – Т. 60. – № 4. – С. 145–212.

2. Денисов В. Н. *Об асимптотике при большом времени решений параболических уравнений с растущими старшими коэффициентами* // Докл. РАН. – 2017. – Т. 475. – № 1. – С. 10–13.

3. Денисов В. Н. *О стабилизации решений параболических уравнений с растущими старшими коэффициентами* // Труды семинара им И.Г. Петровского. – Москва, 2019. – Вып. 32. – С. 134–161.

4. Kon'kov A. A. *On the asymptotic behaviour of solutions of nonlinear parabolic equations* // Proc. Royal Soc. Edinburgh. – 2006. – V. 136. – P. 365–384.

ON STABILIZATION OF SOLUTION OF NONDIVERGENT PARABOLIC EQUATION
WITH INCREASING LEADING COEFFICIENTS

V.N. Denisov

We investigate sharp conditions on the coefficients of a second order nondivergent parabolic equation under which the solutions of the Cauchy problem stabilizes to zero with exponensial rate, uniformly on every compact K in R^N.

Keywords: parabolic equations, solution of the Cauchy problem, stabilization.

УДК 517.956

О ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ БИАНКИ

В.И. Жегалов[1], Л.Б. Миронова[2]

1 *valentin.zhegalov@ksu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского
2 *lbmironova@yandex.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Елабужский институт

Для коэффициентных обратных задач Гурса и Коши для уравнения Бианки третьего порядка, в которых требуется найти решение с дополнительным отысканием коэффициентов уравнения, предлагается новый подход к выделению вариантов разрешимости указанных задач в явном виде. Вместо введения дополнительных граничных условий для этих целей предлагается задать условия, которые позволяют факторизовать дифференциальное уравнение.

Ключевые слова: задача Гурса, задача Коши, факторизация, уравнение Бианки, функция Римана, разрешимость в квадратурах.

В параллелепипеде $D = \{x_0 < x < x_1,\ y_0 < y < y_1,\ z_0 < z < z_1\}$ рассмотрим уравнение

$$u_{xyz} + au_{xy} + bu_{yz} + cu_{xz} + du_x + eu_y + fu_z + gu = 0, \tag{1}$$

представляющее собой одно из уравнений с доминирующей частной производной, теория которых интенсивно развивается в последние десятилетия. Многие из уже полученных результатов можно найти в монографиях [1]–[2].

Задача Гурса для (1) состоит в отыскании его решения, удовлетворяющего условиям

$$u|_{\overline{X}} = \varphi_1(y,z), \quad u|_{\overline{Y}} = \varphi_2(x,z), \quad u|_{\overline{Z}} = \varphi_3(x,y). \tag{2}$$

Здесь X, Y, Z – грани D при $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ соответственно. Предполагаем, что выполняются условия гладкости

$$\begin{gathered} a \in C^{(1,1,0)}, \quad b \in C^{(0,1,1)}, \quad c \in C^{(1,0,1)}, \\ d \in C^{(1,0,0)}, \quad e \in C^{(0,1,0)}, \quad f \in C^{(0,0,1)}, \quad g \in C^{(0,0,0)}, \\ \varphi_1 \in C^{(1,1)}(\overline{X}), \quad \varphi_2 \in C^{(1,1)}(\overline{Y}), \quad \varphi_3 \in C^{(1,1)}(\overline{Z}), \end{gathered} \tag{3}$$

а также условия согласования на ребрах D

$$\varphi_2(x,z_0) = \varphi_3(x,y_0), \quad \varphi_1(y,z_0) = \varphi_3(x_0,y), \quad \varphi_1(y_0,z) = \varphi_2(x_0,z). \tag{4}$$

В [3] методом Римана построено решение этой задачи (см. также [1]), причем полученную там формулу решения следует считать лишь структурной, поскольку о входящей в нее функции Римана известно только то, что она существует. Имеются определенные результаты, связанные с построением функции Римана в явном виде [1, с. 35–46], [2, § 2 из главы 3].

Задача. *Получить в терминах коэффициентов уравнения* (1) *условия разрешимости задачи Гурса.*

Хорошо известен подход к определению в уравнении неизвестных коэффициентов, основанный на введении дополнительных граничных условий. Мы заменяем этот подход ограничениями на структуру уравнения, связанными с возможностями его факторизации. Используем следующие варианты записи уравнения (1) в факторизованном виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \alpha\right)(u_{yz} + \beta u_y + \gamma u_z + \delta u) = 0, \tag{5}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + \beta\frac{\partial}{\partial y} + \gamma\frac{\partial}{\partial z} + \delta\right)(u_x + \alpha u) = 0, \tag{6}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} + \alpha\right)(u_{xz} + \beta u_x + \gamma u_z + \delta u) = 0, \tag{7}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial z} + \beta\frac{\partial}{\partial x} + \gamma\frac{\partial}{\partial z} + \delta\right)(u_y + \alpha u) = 0, \tag{8}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \alpha\right)(u_{xy} + \beta u_x + \gamma u_y + \delta u) = 0, \tag{9}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + \beta\frac{\partial}{\partial x} + \gamma\frac{\partial}{\partial y} + \delta\right)(u_z + \alpha u) = 0. \tag{10}$$

При этом считаем, что $\alpha, \ldots, \delta$ для каждого варианта свои.

Найдем условия, обеспечивающие представление (1) в указанной выше форме. Получаемые при этом результаты запишем в терминах обозначений:

$$h_1 = a_x + ab - e, \quad h_2 = a_y + ac - d, \quad h_3 = b_y + bc - f,$$
$$h_4 = b_z + ab - e, \quad h_5 = c_x + bc - f, \quad h_6 = c_z + ac - d,$$
$$h_7 = d_x + bd - g, \quad h_8 = e_y + ce - g, \quad h_9 = f_z + af - g,$$

$$k_1 = b_{yz} + ab_y + cb_z + bd - g, \quad k_2 = c_{xz} + ac_x + bc_z + ce - g,$$
$$k_3 = a_{xy} + ca_x + ba_y + af - g.$$

Потребуем, чтобы коэффициенты соотношения (5) совпали с коэффициентами уравнения (1). В результате получим равенства $\alpha = b$, $\beta = a$, $\gamma = c$, $\delta = d$, имеющие место, если $h_1 \equiv h_5 \equiv h_7 \equiv 0$.

Аналогично поступаем при рассмотрении остальных вариантов факторизации уравнения (1). В результате получим условия, представляющие собой группы тождеств для $a, \ldots, g$, обеспечивающих представление (1) в любой из перечисленных факторизованных форм.

Каждое из факторизованных уравнений можно представить в виде системы двух уравнений. Например, (6) можно заменить парой

$$u_{yz} + au_y + cu_z + du = v, \quad v_x + bv = 0. \tag{11}$$

Граничные условия переходят при этом в

$$u(x, y_0, z) = \varphi_1(y, z), \quad u(x, y, z_0) = \varphi_3(x, y), \tag{12}$$

$$\begin{gathered} v(x_0, y, z) = \varphi_{1yz}(y, z) + a(x_0, y, z)\varphi_{1y}(y, z) + c(x_0, y, z)\varphi_{1z}(y, z) + d(x_0, y, z), \\ \varphi_1(y, z) = \psi_1(y, z). \end{gathered} \tag{13}$$

Задача (1)–(2) переходит в две, а решать их следует поочередно: сначала нужно из второго уравнения (11) найти функцию $v(x, y, z)$ по условию (13), а затем решать уравнение для $u(y,z)$ с известной уже функцией v (первое уравнение в (11) с условиями (12)). Последняя есть классическая задача Гурса для уравнения второго порядка (x рассматривается как параметр). В остальных случаях также получаются пары последовательно решаемых задач: одна тривиальная (для уравнения первого порядка), другая для уравнения вида $u_{xy} + pu_x + qu_y + ru = \omega$ (задача Гурса). Условия разрешимости этой задачи Гурса в явном виде, получаемые на основе метода Римана по формуле (1.20) из [1], известны [4]–[6]. Они записываются в виде соотношений, связывающих коэффициенты p, q, r. В результате применения указанных соотношений к уравнениям второго порядка, получаемым в процессе замены уравнений (5)–(10) системами уравнений, убеждаемся, что может быть сформулирована

Теорема. *Можно выделить 78 различных случаев условий разрешимости рассматриваемой задачи в квадратурах.*

Предложенная выше схема позволяет также исследовать задачу Коши с дополнительным отысканием коэффициентов.

Литература

1. Жегалов В. И., Миронов А. Н. *Дифференциальные уравнения со старшими частными производными.* – Казань: Изд-во Казанск. матем. общ-ва, 2001. – 226 с.

2. Жегалов В. И., Миронов А. Н., Уткина Е. А. *Уравнения с доинирующей частной производной.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 2014. – 385 с.

3. Жегалов В. И. *Трехмерный аналог задачи Гурса* // Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа. – 1990. – С. 94–98.

4. Жегалов В. И., Сарварова И. М. *К условиям разрешимости задачи Гурса в квадратурах* // Изв. вузов. Математика. – 2010. – № 3. – С. 68–73.

5. Жегалов В. И., Созонтова Е. А. *Дополнение к случаям разрешимости задачи Гурса в квадратурах* // Дифференц. уравнения. – 2017. – Т. 53. – № 2. – С. 270–273.

6. Жегалов В. И., Созонтова Е. А. *К новым случаям разрешимости задачи Гурса в квадратурах* // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2016. – Т. 53. – С. 75–76.

ON CHARACTERISTIC PROBLEMS FOR THE THREE-DIMENSIONAL BIANCHI EQUATION

V.I. Zhegalov, L.B. Mironova

For the coefficient inverse Goursat and Cauchy problems, with an additional search for the coefficients of the equation, a new approach to the allocation of solvability cases of these problems in quadratures is proposed. Instead of introducing additional boundary conditions, restrictions on the structure of the equation associated with the possibilities of its factorization are proposed.

Keywords: Goursat problem, Cauchy problem, factorization, Bianchi equation, Riemann function, solvability in quadratures.

UDC 517.54

ON VALUE RANGE OF SOLUTIONS TO THE CHORDAL LOEWNER EQUATION

A.V. Zherdev[1]

1 *jerdevandrey@gmail.com*; Saratov State University, Petrozavodsk State University

We consider a value range $\{g(i,T)\}$ of solutions to the chordal Loewner equation with the restriction $|\lambda(t)| \le c$ on the driving function. We use reachable set methods and the Pontryagin maximum principle.

Keywords: value range, Loewner equation, Pontryagin maximum principle.

Let $\mathbb{H} = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ be the upper half-plane of the complex plane. Denote $\mathscr{H}(T)$, $T > 0$ the class of all analytic univalent functions $g : \mathbb{H}\backslash K \to \mathbb{H}$, normalized near infinity as $g(z) = z + \frac{2T}{z} + O(|z|^{-2})$. Here $K \subset \mathbb{H}$ is a so-called hull, which means that $K = \mathbb{H} \cap \overline{K}$ and $\mathbb{H}\backslash K$ is simply connected. Solutions of the chordal Loewner differential equation

$$\frac{dg(z,t)}{dt} = \frac{2}{g(z,t) - \lambda(t)}, \quad g(z,0) = z, \quad t \ge 0, \tag{1}$$

where $\lambda(t)$ is a real-valued continuous function, form a dense subclass of $\mathscr{H}(T)$. We call $\lambda(t)$ the driving function of the chordal Loewner equation (1). Thus, the problem of finding the value range $\{g(z_0) : g \in \mathscr{H}(T)\}$, $z_0 \in \mathbb{H}$, is equivalent to describing the set $\{g(z_0, T)\}$ of attainability of the equation (1). Without loss of generality we can put $z_0 = i$. The set

$$D(T) = \{g(i,T) : g \text{ is a solution of (1)}\}$$

has been described by Prokhorov and Samsonova in [1] using the Pontryagin maximum principle. Continuing this research we consider a problem of describing the value range

$$D_c(T) = \{g(i,T) : g \text{ is a solution of (1)},\ |\lambda(t)| \le c\},\ c > 0,$$

that is, we added the restriction $|\lambda(t)| \le c$ on the driving function, which is piecewise continuous on $\mathbb{R}$. We used the Pontryagin maximum principle as the main tool of the research. See [2,3] for reachable set methods developed for the radial Loewner differential equation.

Although $D(T)$ was already described in [1], we give a different description of the boundary of $D(T)$ in the Cartesian coordinates (X, Y).

Theorem 1. *The boundary of the domain $D(T)$, $T > 0$ is given by the equation*

$$2X^2 = \log Y(1 - 4T - Y^2). \tag{2}$$

In the case of $T \le \frac{1}{4}$, the set $D(T)$ is a bounded domain with its boundary crossing the imaginary axis at $y = \sqrt{1-4T}$, $y = 1$. Starting at this point, we only consider this case.

It can be shown that all points of some arc on $\partial D(T)$ near $(0, \sqrt{1-4T})$ are delivered by driving functions with ranges within the interval $[-c, c]$, therefore, this arc belongs to $\partial D_c(T)$. A precise statement is given by the following lemma.

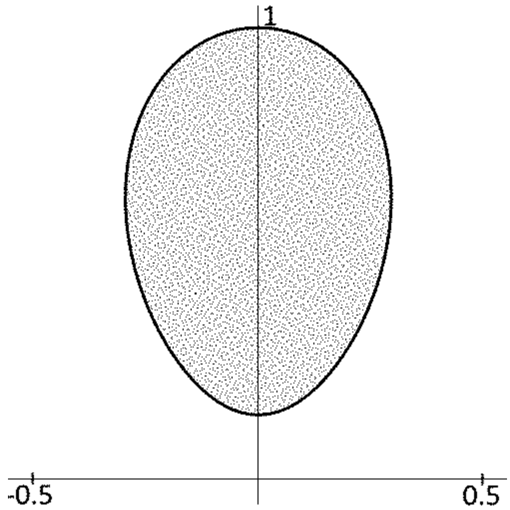


Fig. 1. The value range $D(T)$, T=0.245.

Lemma 1. *A segment of the boundary $\partial D_c(T)$ is given by (2), $Y \in [1-4T, Y_0]$, where Y_0 is a unique solution of one of the equations*

$$2c^2 \log Y + Y^2 = 1 - 4T,\ c^2 \geq T - \frac{1-e^{-4}}{4}, \tag{3}$$

$$\frac{2c^2 \log Y}{(1+\log Y)^2} + Y^2 = 1 - 4T,\ c^2 \leq T - \frac{1-e^{-4}}{4}. \tag{4}$$

Note that if $c^2 = T - \frac{1-e^{-4}}{4}$, both the equations (3), (4) have the same root $Y_0 = e^{-2}$.

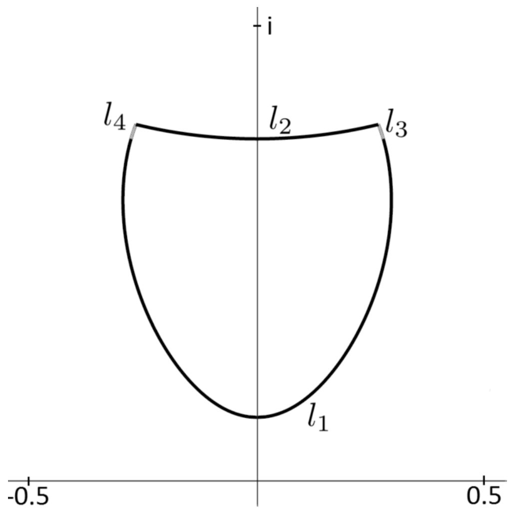


Fig. 2. The boundary of the value range $D_c(T)$, T=0.245, c=1.

The following theorem describes the value range $D_c(T)$ in the case of $c^2 \geq T - \frac{1-e^{-4}}{4}$.

Theorem 2. *Let $c^2 \geq T - \frac{1-e^{-4}}{4}$, $T \leq \frac{1}{4}$ and let curves $l_1 - l_4$ be defined as follows.*

1. The curve l_1 is the segment of the boundary $\partial D(T)$ given by (2), $Y \in [1-4T, Y_0]$, Y_0 is a unique solution of (3).

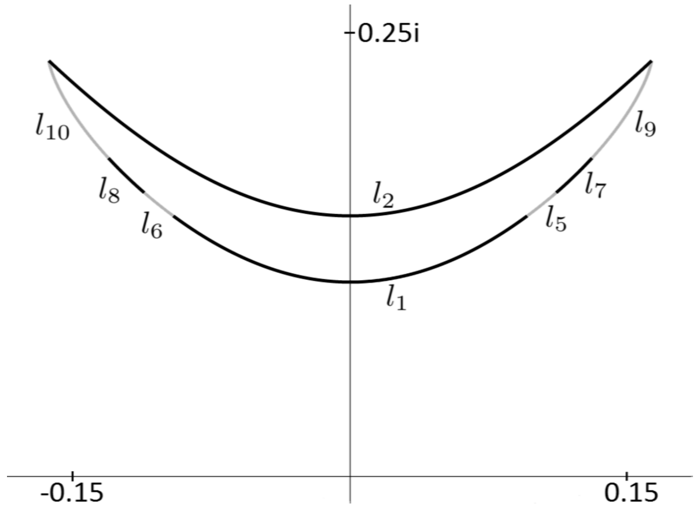


Fig. 3. The boundary of the value range $D_c(T)$, T=0.247, c=0.05.

2. The curve l_2 is given by solutions (X, Y), $X + iY = z$, $\mu \in [0,1]$, of the equation

$$z^2 + 1 - 2c(2\mu - 1)(z - i) + 8\mu c^2(\mu - 1)\ln\frac{z + c(2\mu - 1)}{i + c(2\mu - 1)} = 4T.$$

3. The curve l_3 is given by solutions (X,Y) of the system

$$\begin{cases} 2p^2\log\dfrac{Yp}{c} + Y^2 - p^2 = 1 - 4T - c^2, \\ X = -c + p(1 - \log\dfrac{Yp}{c}), \end{cases} \tag{5}$$

where $p \in [c, p_0]$ and

$$p_0 = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{(4T + c^2 - 1)^2 + 4c^2} + (4T + c^2 - 1))}.$$

The curve l_4 is symmetric to l_3 with respect to the imaginary axis.

If the following equation

$$-4pc + \frac{c^2}{p^2}\exp(-\frac{4c}{p}) - p^2 = 1 - 4T - c^2 \tag{6}$$

has two solutions $p_1 < p_2$ in the interval (c, p_0), then we also define curves $l_5 - l_{10}$.

4. The curve l_5 is given by solutions (X,Y) of the system (5), $p \in [c, p_1]$. The curve l_6 is symmetric to l_5 with respect to the imaginary axis.

5. The curve l_7 is given by solutions (X,Y) of the system

$$\begin{cases} 4cp + (X - c)^2 - Y^2 - 4T = c^2 - 1, \\ -p\log\dfrac{(X - c)Y}{c} = 2c, \end{cases}$$

where $p \in [p_1, p_2]$. The curve l_8 is symmetric to l_7 with respect to the imaginary axis.

6. The curve l_9 is given by solutions (X,Y) of (5), $p \in [p_2, p_0]$. The curve l_{10} is symmetric to l_9 with respect to the imaginary axis.

The following two cases are possible:

(a) $D_c(T)$ *is bounded by curves* $l_1, l_2, l_5 - l_{10}$*, if (6) has two solutions* $p_1 < p_2$ *in the interval* (c, p_0).

(b) $D_c(T)$ *is bounded by curves* $l_1 - l_4$*, if (6) has less than two solutions in the interval* (c, p_0).

This work was supported by the Russian Science Foundation (project no. 17-11-01229).

References

1. Prokhorov D.V., Samsonova K. *Value range of solutions to the chordal Loewner equation* // J. Math. Anal. Appl. – 2015. – Vol. 428, No. 2. – P. 910–919.

2. Prokhorov D.V. *Sets of values of systems of functionals in classes of univalent functions* // Mat. Sb. – 1990. – Vol. 181, No. 12. – P. 1659—1677. English translation: Math. USSR Sb. – 1992. – Vol. 71, No. 2. – P. 499–516.

3. Prokhorov D.V. *Reachable Set Methods in Extremal Problems for Univalent Functions.* – Saratov Univ., Saratov, 1993.

О МНОЖЕСТВЕ ЗНАЧЕНИЙ РЕШЕНИЙ ХОРДОВОГО УРАВНЕНИЯ ЛЁВНЕРА

А.В. Жердев

Рассмотрена задача описания множества $\{g(i,T)\}$ *значений решений хордового уравнения Лёвнера с ограничением на управляющую функцию* $|\lambda(t)| \leq c$*. Использованы методы оптимального управления и принцип максимума Понтрягина.*

Ключевые слова: множество значений, уравнение Лёвнера, принцип максимума Понтрягина.

УДК 517.95

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО *B*-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЕМ ВТОРОГО РОДА

Н.В. Зайцева[1]

1 *n.v.zaiceva@yandex.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Для гиперболического уравнения с оператором Бесселя изучена смешанная задача с интегральным условием второго рода в прямоугольной области. Решение построено в виде ряда Фурье–Бесселя. Доказаны теоремы единственности, существования и устойчивости решения поставленной задачи. Для обоснования существования решения задачи получены достаточные условия относительно начальных условий, гарантирующие сходимость построенного ряда в классе регулярных решений.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, оператор Бесселя, нелокальное интегральное условие, единственность, существование, устойчивость, ряд Фурье–Бесселя, равномерная сходимость.

Рассмотрим в прямоугольной области $D = \{(x,t) | 0 < x < l, 0 < t < T\}$, где $l, T > 0$

– заданные действительные числа, гиперболическое уравнение вида

$$\square_B u(x,t) \equiv u_{tt} - x^{-k}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^k u_x\right) = 0, \tag{1}$$

где $k \neq 0$ – заданное действительное число.

Исследование краевых задач для сингулярных уравнений представляет собой один из важных разделов современной теории дифференциальных уравнений в частных производных [1 – 4], обусловленный их многочисленными приложениями в газовой динамике, магнитной гидродинамике, теории оболочек и других областях науки и техники.

В последнее время в теории дифференциальных уравнений с частными производными бурно развивается направление теории нелокальных задач. Это объясняется необходимостью обобщения классических задач математической физики и постановки качественно новых, вызванной задачами современного естествознания. Нелокальные задачи для различных классов дифференциальных уравнений исследованы в работах многих авторов [5 – 12]. Обширное исследование краевых задач с нелокальными интегральными условиями для гиперболических уравнений представлено в работах [13 – 15].

В работе [16] изучены начальные задачи для уравнения (1) при $k > -1$ с интегральным условием второго рода. В данной работе для уравнения (1) в области D исследуем смешанную задачу с нелокальным интегральным условием второго рода при $k \le -1$. Не теряя общности в дальнейших рассуждениях положим, что $l = 1$, так как уравнение (1) инвариантно относительно замены $x_1 = x/l$, $y_1 = y/l$.

Постановка задачи. Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x,t) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D),$$

$$\square_B u(x,t) \equiv 0, \quad (x,t) \in D,$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \le x \le 1, u(0,t) = 0, \quad 0 \le t \le T,$$

$$\left(x^{k-1}u(x,t)\right)'_x\Big|_{x=1} + \int_0^1 u(x,t)\,x\,dx = 0, \quad 0 \le t \le T,$$

где $\varphi(x), \psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям согласования

$$\left(x^{k-1}\varphi(x)\right)'_x\Big|_{x=1} + \int_0^1 \varphi(x)\,x\,dx = 0, \quad \left(x^{k-1}\psi(x)\right)'_x\Big|_{x=1} + \int_0^1 \psi(x)\,x\,dx = 0. \tag{2}$$

Решение задачи построено в виде ряда Фурье-Бесселя

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x), \tag{3}$$

где

$$u_n(t) = \varphi_n \cos\lambda_n t + \frac{\psi_n}{\lambda_n}\sin\lambda_n t + \frac{1}{\lambda_n^2 - 1}[\varphi'(1) + (k-1)\varphi(1)]J_{\frac{1-k}{2}}(\lambda_n)(\cos t - \cos\lambda_n t) +$$
$$+ \frac{1}{(\lambda_n^2 - 1)\lambda_n}[\psi'(1) + (k-1)\psi(1)]J_{\frac{1-k}{2}}(\lambda_n)\left(\sin t - \frac{1}{\lambda_n}\sin\lambda_n t\right),$$

$$\varphi_n = \int\limits_0^1 \varphi(x)x^k X_n(x)\,dx, \quad \psi_n = \int\limits_0^1 \psi(x)x^k X_n(x)\,dx,$$

$$X_n(x) = \frac{\widetilde{X}_n(x)}{||\widetilde{X}_n||_{L_{2,\rho}(0,1)}}, \quad \widetilde{X}_n(x) = x^{\frac{1-k}{2}} J_{\frac{1-k}{2}}(\lambda_n x), \quad n \in \mathbb{N},$$

собственные значения λ_n суть нули уравнения $J_{\frac{3-k}{2}}(\lambda) = 0$, а норма определяется по формуле

$$||\widetilde{X}_n||^2_{L_{2,\rho}(0,1)} = \int\limits_0^1 \rho(x)\,\widetilde{X}_n^2(x)\,dx, \quad \rho(x) = x^k.$$

Методом спектрального анализа [17] доказаны теоремы единственности, существования и устойчивости решения задачи, а также вспомогательные леммы 1 – 3 для обоснования сходимости ряда (3) в классе регулярных решений.

Теорема 1. *Если существует решение задачи, то оно единственно.*

Лемма 1. *Для достаточно больших n и при любом $t \in [0, T]$ справедливы оценки:*

$$|u_n(t)| \le C_1\left(|\varphi_n| + \frac{|\psi_n|}{n}\right) + \frac{|\varphi'(1)|}{n^{3/2}} + \frac{|\psi'(1)|}{n^{3/2}} + \frac{|\varphi(1)|}{n^{3/2}} + \frac{|\psi(1)|}{n^{3/2}},$$

$$|u'_n(t)| \le C_2\left(n|\varphi_n| + |\psi_n|\right) + \frac{|\varphi'(1)|}{n^{1/2}} + \frac{|\psi'(1)|}{n^{3/2}} + \frac{|\varphi(1)|}{n^{1/2}} + \frac{|\psi(1)|}{n^{3/2}},$$

$$|u''_n(t)| \le C_3\left(n^2|\varphi_n| + n|\psi_n|\right) + n^{1/2}|\varphi'(1)| + \frac{|\psi'(1)|}{n^{1/2}} + n^{1/2}|\varphi(1)| + \frac{|\psi(1)|}{n^{1/2}},$$

где C_i – здесь и далее положительные постоянные.

Лемма 2. *Для достаточно больших n и при всех $x \in [0, 1]$ справедливы оценки:*

$$|X_n(x)| \le C_4, \quad |X'_n(x)| \le C_5 n, \quad |X''_n(x)| \le C_6 n^2.$$

Лемма 3. *Если функция $\varphi(x) \in C^2[0, 1]$ и существует производная $\varphi'''(x)$, имеющая конечное изменение на $[0, 1]$, функция $\psi(x) \in C^1[0, 1]$ и существует производная $\psi''(x)$, которая имеет конечное изменение на $[0, 1]$, и*

$$\varphi(0) = \psi(0) = \varphi(1) = \psi(1) = \varphi'(0) = \psi'(0) = \varphi'(1) = \psi'(1) = \varphi''(0) = \varphi''(1) = 0,$$

то выполняются оценки $|\varphi_n| \le C_7 n^{-4}$, $|\psi_n| \le C_8 n^{-3}$.

Теорема 2. *Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ удовлетворяют условиям леммы 3 и выполнены условия* (2)*, то существует единственное решение задачи, определяемое рядом* (3)*, при этом сумма ряда $u(x,t) \in C^2(\overline{D})$.*

Теорема 3. *Для решения задачи справедлива оценка*

$$||u||_{L_{2,\rho}(0,1)} \leq C_9(||\varphi||_{L_{2,\rho}(0,1)} + ||\psi||_{L_{2,\rho}(0,1)}),$$

где постоянная C_9 не зависит от функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Литература

1. Муравник А. Б. *О стабилизации решений некоторых сингулярных квазилинейных параболических задач* // Матем. заметки. – 2003. – Т. 74. – № 6. – С. 858–865.

2. Муравник А. Б. *Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства решений задачи Коши* // СМФН. – 2014. – Т. 52. – С. 3–141.

3. Катрахов В. В., Ситник С. М. *Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений* // СМФН. – 2018. – Т. 64. – № 2. – С. 211–426.

4. Ситник С. М., Шишкина Э. Л. *Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя.* – М.: Физматлит, 2019. – 224 с.

5. Скубачевский А. Л. *Неклассические краевые задачи. I* // СМФН. – 2009. – Т. 26. – С. 3–132.

6. Скубачевский А. Л. *Неклассические краевые задачи. II* // СМФН. – 2009. – Т. 33. – С. 3–179.

7. Skubachevskii A. L. *Nonlocal problems for the Vlasov–Poisson equations in an infinite cylinder* // Funct. Anal. Appl. – 2015. – V. 49. – P. 234–238.

8. Сабитов К. Б. *Краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа с нелокальным интегральным условием* // Дифференц. уравнения. – 2010. – Т. 46. – № 10. – С. 1468–1478.

9. Сабитов К. Б. *Нелокальная задача для уравнения параболо- гиперболического типа в прямоугольной области* // Матем. заметки. – 2011. – Т. 89. – № 4. – С. 596–602.

10. Ломов И. С. *Сходимость разложений по собственным функциям дифференциального оператора с интегральными краевыми условиями* // ДАН. – 2018. – Т. 481. – № 6. – С. 599–604.

11. Ломов И. С. *Равномерная сходимость разложений по корневым функциям дифференциального оператора с интегральными краевыми условиями* // Дифференц. уравнения. – 2019. – Т. 55. – № 4. – С. 486–497.

12. Muravnik A. B. *Nonlocal problems and functional-differential equations: theoretical aspects and applications to mathematical modelling* // Math. Model. Nat. Phenom. – 2019. – V. 14. – No 6. – С. 1–34.

13. Пулькина Л. С. *Нелокальная задача с интегральным условием для гиперболических уравнений* // Дифференц. уравнения. – 2004. – Т. 40. – № 7. – С. 887–892.

14. Пулькина Л. С. *Краевые задачи для гиперболического уравнения с нелокальными условиями I и II рода* // Изв. вузов. Матем. – 2012. – № 4. – С. 74–83.

15. Пулькина Л. С. *Задачи с неклассическими условиями для гиперболических уравнений.* – Самара: Самарский университет, 2012. – 194 с.

16. Сабитов К. Б., Зайцева Н. В. *Начальная задача для B-гиперболического уравнения с интегральным условием второго рода* // Дифференц. уравнения. – 2018. – Т. 54. – № 1. – С. 123–135.

17. Sabitov K. B., Zaitseva N. V. *Initial-boundary value problem for hyperbolic equation with singular coefficient and integral condition of second kind* // Lobachevskii J. of Mathematics. – 2018. – V. 39. – No 9. – С. 1419–1427.

MIXED PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITION OF THE SECOND KIND
FOR B-HYPERBOLIC SPATIALLY ONE-DIMENSIONAL EQUATION

N.V. Zaitseva

In a rectangular domain we research a mixed problem with integral boundary value condition of the second kind. For a hyperbolic equation with Bessel operator, uniqueness, existence, and stability theorems for the solution of the problem are proved. The solution is obtained in the form of the Fourier–Bessel series. Its convergence is proved in the class of regular solutions.

Keywords: hyperbolic equation, Bessel differential operator, non-local integral boundary value condition, uniqueness, existence, stability, Fourier–Bessel series, uniform convergence.

УДК 514.764

ОБ ОДНОМ СПЕЦИАЛЬНОМ РЕШЕНИИ ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ КИЛЛИНГА

З.Х. Закирова[1]

1 *zakirova-kgeu@mail.ru*; Казанский государственный энергетический университет

В работе проводится исследование 6-мерного псевдориманового пространства $V^6(g_{ij})$ с сигнатурой $[++----]$ специального типа, допускающее негомотетические инфинитезимальные проективные преобразования.

Ключевые слова: дифференциальная геометрия, псевдоримановы многообразия, системы дифференциальных уравнений с частными производными.

В работе проводится исследование 6-мерного псевдориманового пространства $V^6(g_{ij})$ с сигнатурой $[++----]$ специального типа, допускающего негомотетические инфинитезимальные проективные преобразования.

Напомним, что преобразование f псевдориманова многообразия M на себя называется *проективным преобразованием*, если оно переводит геодезические линии в геодезические линии.

Векторное поле X называется *инфинитезимальным проективным преобразованием* или *проективным движением*, если локальная однопараметрическая группа преобразований, порождаемая этим полем в окрестности каждой точки $p \in M$, состоит из локальных проективных преобразований.

Векторное поле X является инфинитезимальным проективным преобразованием на многообразии M с аффинной связностью ∇ тогда и только тогда, когда [1]

$$\nabla_Y(L_X Z - \nabla_X Z) - (L_X - \nabla_X)\nabla_Y Z = R(X,Y)Z - \varphi(Y)Z - Y\varphi(Z),$$

для поля 1-формы φ и всех векторных полей Y, Z на M, где R — тензор кривизны.

Если M — псевдориманово многообразие с метрикой g и римановой связностью ∇, то последнее условие эквивалентно двум уравнениям (см. [1] и [2]):

$$L_X g = h,$$

$$\nabla h(Y,Z,W) = 2g(Y,Z)W\varphi + g(Y,W)Z\varphi + g(Z,W)Y\varphi,$$

где L – производная Ли, $(Y,Z,W) \in T(M)$, $\varphi = \frac{1}{n+1}\mathrm{div}X$. Первое уравнение называется *обобщенным уравнением Киллинга*, второе уравнение называется *уравнением Эйзенхарта*.

В локальных координатах данные уравнения записываются в виде

$$L_\xi g_{ij} = \xi_{i,j} + \xi_{j,i} = h_{ij},$$
$$h_{ij,k} = 2g_{ij}\varphi_{,k} + g_{ik}\varphi_{,j} + g_{jk}\varphi_{,i},$$

где запятая означает ковариантную производную, ξ – векторное поле, задающее проективное движение.

Псевдоримановы многообразия, для которых существуют нетривиальные решения $h_{ij} \neq cg_{ij}$ уравнений Эйзенхарта (см. [1]) называются *h-пространствами*. Чтобы найти псевдориманово пространство, допускающее негомотетические инфинитезимальные проективные преобразования, нужно вначале проинтегрировать уравнение Эйзенхарта. Задача определения таких пространств зависит от типа билинейной формы $L_X g$, определяемой характеристикой Сегре λ-матрицы $(h-\lambda g)$. Если характеристика тензора $L_X g$ есть $[abc...]$, то соответствующее пространство называется h-пространством типа $[abc...]$.

Ранее в работах [3], [4] и [5] было найдено решение уравнения Эйзенхарта в случае h-пространства типа [2211] и доказано, что все проективные движения в рассматриваемом пространстве непостоянной кривизны получаются интегрированием уравнений

$$L_\xi g_{ij} = \xi_{i,j} + \xi_{j,i} = a_1 a_{ij} + (a_1 \sum_{k=1}^{6} f_k + a_2) g_{ij}, \tag{1}$$

где тензоры a_{ij}, g_{ij} и функции f_k найдены в [5], a_1, a_2 — постоянные.

В данной работе продолжено исследование 6-мерного h-пространства типа [2211], а именно, доказана следующая

Лемма. *Если бесконечно малое преобразование $x^{i'} = x^i + \xi^i \delta t$ является негомотетическим проективным движением в h-пространстве типа* [2211] *непостоянной кривизны, то компоненты $\xi^1(x^1,x^2)$, $\xi^2(x^2)$, $\xi^3(x^3,x^4)$, $\xi^4(x^4)$, $\xi^5(x^5)$, $\xi^6(x^6)$ векторного поля ξ, задающего проективное движение, являются функциями указанных переменных.*

Для доказательства этой леммы были выписаны и проинтегрированы те уравнения Киллинга (1), в которых правые части равны нулю в силу равенства нулю тензоров a_{ij} и g_{ij}. Эти уравнения являются дифференциальными уравнениями в частных производных. Также для доказательства леммы были использованы условия интегрируемости обобщенных уравнений Киллинга

$$L_\xi R^i_{jkl} = \xi^h \partial_h R^i_{jkl} - R^h_{jkl}\partial_h \xi^i + R^i_{hkl}\partial_j \xi^h + R^i_{jhl}\partial_k \xi^h + R^i_{jkh}\partial_l \xi^h = \delta^i_l \varphi_{,kj} - \delta^i_k \varphi_{,lj},$$

в которых $(ijkl)$ придавались поочередно разные значения.

В дальнейшем, с использованием этой леммы можно проинтегрировать оставшиеся уравнения Киллинга, в которых правые части равны ненулевым значениям тензоров a_{ij} и g_{ij}. Таким образом, задача о восстановлении векторного поля, определяющего инфинитезимальное проективное преобразование в рассматриваемом пространстве, будет решена полностью.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 19-01-00680).

Литература

1. Эйзенхарт Л. П. *Риманова геометрия.* – М.: ИЛ, 1948. – 316 с.

2. Аминова А. В. *Алгебры Ли инфинитезимальных проективных преобразований лоренцевых многообразий* // Успехи мат. наук. – 1995. – Т. 50. – № 1. – С. 69–142.

3. Закирова З. Х. *Жесткие 6-мерные h-пространства постоянной кривизны* // Теоретическая и математическая физика. – 2009. – Т. 158. – № 3. – С. 293–299.

4. Закирова З. Х. *О проективном движении в 6-мерном псевдоримановом пространстве специального типа* // Краткие сообщения по физике ФИАН. – 2015. – Т. 42. – № 5. – С. 12–20.

5. Закирова З. Х. *Проективно-групповые свойства 6-мерных теорий типа Калуцы-Клейна* // дисс… канд. физ.-мат. наук. – 2001. – С. 129.

ON ONE SPECIAL SOLUTION OF GENERALIZED KILLING EQUATION

Z.Kh. Zakirova

The aim of this paper is to investigate the 6*-dimensional pseudo-Riemannian space* $V^6(g_{ij})$ *with signature* $[++----]$*, which admits continuous transformation groups preserving geodesics.*

Keywords: differential geometry, pseudo-Riemannian manifolds, systems of partial differential equations.

УДК 517.51

УСЛОВИЯ СЛАБОЙ КОМПАКТНОСТИ ДЛЯ МНОЖЕСТВ ОГРАНИЧЕННЫХ РАДОНОВСКИХ МЕР НА РАЗЛИЧНЫХ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

В.К. Захаров[1], Т.В. Родионов[2]

1 *valeriy_zakharov@list.ru*; МГУ имени М.В. Ломоносова
2 *rodionovtv@mail.ru*; МГУ имени М.В. Ломоносова

Предложен критерий C_b*-слабой компактности множеств положительных ограниченных радоновских мер на тихоновском пространстве, восходящий к критерию Прохорова для польского пространства. Для общего хаусдорфова пространства, где пространство* C_b *ограниченных непрерывных функций может быть тривиально и не разделять точки и замкнутые множества, предложен критерий* S*-слабой компактности, где* S *— равномерно замкнутое линейное пространство метаполунепрерывных функций. Эти результаты существенно опираются на решение проблемы Рисса – Радона – Фреше описания радоновских интегралов как линейных функционалов, полученное авторами ранее.*

Ключевые слова: радоновская мера, свойство Прохорова, равномерная узкость, слабая компактность, теорема Рисса о представлении.

Известный критерий Ю. В. Прохорова (1956) утверждает, что для слабой компактности замкнутого множества ограниченных радоновских мер на полном сепарабельном метрическом пространстве $(T,\mathscr{G})$ относительно слабой топологии, порождённой на пространстве $\mathfrak{RM}_b \equiv \mathfrak{RM}_b(T,\mathscr{G})$ ограниченных радоновских мер семейством $C_b \equiv C_b(T,\mathscr{G})$ ограниченных непрерывных функций, необходимо и достаточно выполнение двух условий:

(α^π) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое компактное множество C, что $|\mu|(T \setminus C) < \varepsilon$ для всех $\mu \in M$ (*равномерная узкость*);

(β) $\sup(|\mu|T \mid \mu \in M) \in [0,\infty)$.

Эти условия достаточны для слабой компактности на тихоновском (вполне регулярном) топологическом пространстве [2, IX.5.5]. Однако, они не будут необходимыми даже в случае положительных мер [3, 4.5.3, 4.5.4].

В случае общего хаусдорфова (т. е. отделимого) топологического пространства $(T,\mathscr{G})$ с ансамблями $\mathscr{G}$ и $\mathscr{F}$ открытых и, соответственно, замкнутых множеств не имеет смысла рассматривать C_b-слабую компактность, ввиду возможной тривиальности семейства C_b: оно может состоять из одних только постоянных функций. Поэтому В.К. Захаров рассмотрел в [4] слабую компактность относительно линейного пространства $S \equiv S(T,\mathscr{G})$ *симметризуемых* (*метаполунепрерывных*) *функций*, являющегося равномерным замыканием введённого Ф. Хаусдорфом линейного пространства $SC_b^u + SC_b^l$, состоящего из сумм $f+g$ ограниченных функций, полунепрерывных сверху и, соответственно, полунепрерывных снизу.

Следующие теоремы дают описание семейства S.

Теорема 1. *Пусть $(T,\mathscr{G})$ — топологическое пространство и $\mathscr{K} \equiv \{G \cap F \mid G \in \mathscr{G} \,\&\, F \in \mathscr{F}\}$ — ансамбль симметризуемых множеств. Функция $f : T \to \mathbb{R}$ является симметризуемой тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое конечное покрытие $(K_i \in \mathscr{K} \mid i \in I)$ множества T, что $\omega(f,K_i) \equiv \sup\{|f(t)-f(s)| \mid t,s \in K_i\} < \varepsilon$ для любого $i \in I$.*

Теорема 2. *Пусть $(T,\mathscr{G})$ — топологическое пространство. Тогда семейство S является линейным подпространством линейного пространства F всех функций $f : T \to \mathbb{R}$, замкнутым относительно умножения, модуля, конечных супремума и инфимума, равномерной сходимости последовательностей и деления на функции, отделённые константой от нуля.*

Таким образом, S является самым узким подсемейством в F, содержащим семейство C_b и характеристические функции $\chi(G)$ и $\chi(F)$ для всех $G \in \mathscr{G}$ и $F \in \mathscr{F}$ и обладающим свойствами, перечисленными в теореме 2.

Скажем, что *направленность* $(\mu_n \in \mathfrak{RM}_b \mid n \in N)$ *сходится S-слабо к мере* μ, если $\lim(\int f\,d\mu_n)(n \in N) = \int f\,d\mu$ для любой $f \in S$.

Теорема 3.

(1) *Пусть $(T,\mathscr{G})$ — хаусдорфово пространство. Тогда S-слабая топология на $\mathfrak{RM}_b$ является хаусдорфовой.*

(2) *Пусть $(T,\mathscr{G})$ — тихоновское пространство. Тогда C-слабая топология на $\mathfrak{RM}_b$ является хаусдорфовой.*

Доказательство утверждения (2) является гораздо более тонким, чем доказательство утверждения (1). Так как мы не нашли его в доступных нам источниках, мы были вынуждены доказать его сами. Отметим, что доказательство утверждения (1), представленное в [2, IX.5.3], касается не радоновских мер как функций множеств, а “мер” в смысле Н. Бурбаки.

S-слабая топология на $\mathfrak{RM}_b$ сильнее C_b-слабой топологии, но строго слабее тривиальной топологии сходимости на борелевских множествах, использованной в [3, 5.6.14]. Заменяя условие (α^π) более строгим условием *локально равномерной узкости*

(α^ζ) для любого $G \in \mathcal{G}$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такое компактное подмножество $C \subset G$, что $|\mu|(G \setminus C) < \varepsilon$ для всех $\mu \in M$,

получаем следующий критерий.

Теорема 4. *Пусть* $(T, \mathcal{G})$ *— хаусдорфово пространство и* $M \subset (\mathfrak{RM}_b)_+$. *Замыкание* $\mathrm{cl}\, M$ *множества* M *в* S*-слабой топологии является* S*-слабо компактным тогда и только тогда, когда* M *обладает свойствами* (α^ζ) *и* (β).

Следствие. *Если* $M \subset \mathfrak{RM}_b$ *обладает свойствами* (α^ζ) *и* (β), *то его замыкание* $\mathrm{cl}\, M$ *в* S*-слабой топологии* S*-слабо компактно.*

Для нахождения и доказательства критерия C_b-слабой компактности для тихоновского пространства используется следующее условие *хвостовой узкости*:

(α^z) для любой сети $(\mu_j \in M \mid j \in J)$ существует такая подсеть $(\mu_{j_i} \mid i \in I)$, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся компактное множество C и индекс $i_0 \in I$, для которых $\mu_{j_i}(T \setminus C) < \varepsilon$ при всех $i \geqslant i_0$.

Теорема 5. *Пусть* $(T, \mathcal{G})$ *— тихоновское пространство и* $M \subset (\mathfrak{RM}_b)_+$. *Множество* M *является* C_b*-слабо компактным тогда и только тогда, когда оно замкнуто и обладает свойствами* (α^z) *и* (β).

Следствие. *Если* $M \subset \mathfrak{RM}_b$ *обладает свойствами* (α^π) *и* (β), *то его замыкание* $\mathrm{cl}\, M$ *в* C_b*-слабой топологии* C_b*-слабо компактно.*

Отметим, что некоторые из приведённых результатов были анонсированы в [5] и [6].

Исторически оформились два способа доказательства достаточности в критериях слабой компактности множества M.

Первый способ связан с именами А. Д. Александрова [1], Ю. В. Прохорова [8], Ф. Топсо [9] и др. Подход Топсо состоит в задании предельной радоновской меры $\mu_0 \in M$ для исходной сети $s \equiv (\mu_\kappa \mid \kappa \in K)$ посредством некоторой сложной прямой формулы, выражающей μ_0 через μ_κ.

Второй способ восходит к Н. Бурбаки [2]. Он состоит в переходе от сети мер s к сети интегралов $\sigma \equiv (\int \cdot \, d\mu_\kappa \mid \kappa \in K)$ в двойственном линейном пространстве C'_b всех линейных непрерывных функционалов на банаховом пространстве C_b. Далее используется теорема Алаоглу – Бурбаки о слабой компактности единичного шара в двойственном пространстве [7, теорема 7 (III.3)], согласно которой для сети σ существует предельный непрерывный функционал φ_0.

И, наконец, нужно использовать реализационную теорему Рисса – … – Прохорова – Бурбаки о представлении функционала φ_0 в виде интеграла $\varphi_0 = \int \cdot \, d\mu_0$ по некоторой радоновской мере μ_0. Эта мера μ_0 и является предельной для сети s. В силу важности этой теоремы приведём её точную формулировку [2, IX.5.2].

Теорема (Рисс – … – Прохоров – Бурбаки). *Пусть* $(T, \mathcal{G})$ *— тихоновское пространство.*

1. *Если $\mu \in \mathfrak{RM}_b$, то функционал $\varphi = \int \cdot\, d\mu$ на C_b является линейным и* ***узким****, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое компактное множество C, что из $f \in C_b$ и $|f| \leqslant \chi(T \setminus C)$ следует, что $|\varphi f| < \varepsilon$.*

2. *Если φ — узкий линейный функционал на C_b, то существует единственная мера $\mu \in \mathfrak{RM}_b$, такая что $\varphi = \int \cdot\, d\mu$.*

Данный способ Бурбаки используется в доказательстве теоремы 5.

Для доказательства же теоремы 4 используется подход Бурбаки, но с обобщением реализационной теоремы Рисса – … – Прохорова – Бурбаки на случай хаусдорфова пространства [6].

Теорема (Рисс – … – Прохоров – Бурбаки – Захаров). *Пусть $(T, \mathcal{G})$ — хаусдорфово пространство.*

1. *Если $\mu \in \mathfrak{RM}_b$, то функционал $\varphi = \int \cdot\, d\mu$ на S является линейным, поточечно (монотонно) σ-непрерывным и* ***локально узким****, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ и любого $G \in \mathcal{G}$ существует такое компактное подмножество $C \subset G$, что из $f \in S$ и $|f| \leqslant \chi(G \setminus C)$ следует, что $|\varphi f| < \varepsilon$.*

2. *Если φ — локально узкий, поточечно (монотонно) σ-непрерывный, линейный функционал на S, то существует единственная мера $\mu \in \mathfrak{RM}_b$, такая что $\varphi = \int \cdot\, d\mu$.*

Приведённые реализационные теоремы являются частными случаями общей параметрической реализационной теоремы [10, 3.6.4], решающей проблему Рисса – Радона – Фреше характеризации радоновских интегралов как линейных функционалов.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке программы Президента “Ведущие научные школы РФ” (проект НШ-6222.2018.1).

Литература

1. Александров А. Д. *Additive set functions on abstract spaces. III* // Матем. сборник. – 1943. – Т. 13. – № 3. – С. 169–238.

2. Бурбаки Н. *Интегрирование. Меры на компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространства.* – М.: Наука, 1977.

3. Богачёв В. И. *Слабая сходимость мер.* – М: ИКИ, 2016.

4. Захаров В. К. *Проблема Рисса – Радона характеризации интегралов и слабая компактность радоновских мер* // Труды МИРАН. – 2005. – Т. 248. – С. 106–116.

5. Захаров В. К., Родионов Т. В. *Критерии слабой компактности множеств положительных ограниченных радоновских мер на общих топологических пространствах* // Тезисы докладов 5-й междунар. конфер. “Функц. пространства. Диффер. операторы. Проблемы матем. образования”, посв. 95-летию со дня рожд. Л. Д. Кудрявцева. – Москва: РУДН, 2018. – С. 59–60.

6. Захаров В. К., Родионов Т. В. *Проблема Рисса – Радона – Фреше характеризации интегралов и слабая компактность множеств радоновских мер* // “Современные проблемы математики и механики”. Материалы межд. конф., посв. 80-летию академика РАН В.А. Садовничего. – Москва: МАКС Пресс, 2019. – Т. I. – С. 56–59.

7. Канторович Л. В., Акилов Г. П. *Функциональный анализ.* – М: Наука, 1984.

8. Прохоров Ю. В. *Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей* // Теор. вероятн. и её применения. – 1956. – Т. 1. – С. 177–238.

9. Topsøe F. *Compactness and tightness in a space of measures with the topology of weak convergence* // Math. Scand. – 1974. – V. 34. – P. 239–245.

10. Zakharov V. K., Rodionov T. V., Mikhalev A. V. *Sets, Functions, Measures. Volume II: Fundamentals of Functions and Measure Theory* (De Gruyter Stud. in Math., V. 68/2). – Berlin: Walter de Gruyter, 2018.

CONDITIONS FOR WEAK COMPACTNESS OF SETS OF BOUNDED RADON MEASURES ON VARIOUS TOPOLOGICAL SPACES

V.K. Zakharov, T.V. Rodionov

The paper presents some C_b-weak compactness criterion of a set of positive bounded Radon measures for a Tychonoff space similar to the well-known Prokhorov criterion. Since for a general Hausdorff space the classical space C_b of bounded continuous functions can be trivial and not separate points and closed sets, the S-weak compactness criterion is presented for this case, where S is the new uniformly closed linear space of metasemicontinuous functions. These results are esentially based on the solution of the Riesz – Radon – Frechet problem of characterization of Radon integrals as linear functionals obtained by the authors earlier.

Keywords: Radon measure, Prokhorov property, uniform tightness, weak compactness, Riesz representation theorem.

UDC 517.13, 510.67

SOME INDUCTIVE SEQUENCE OF MODELS OF GENERALIZED SECOND-ORDER DEDEKIND THEORY OF REAL NUMBERS WITH EXPONENTIALLY INCREASING POWERS

V.K. Zakharov[1], T.V. Rodionov[2]

1 *valeriy_zakharov@list.ru*; Lomonosov Moscow State University
2 *rodionovtv@mail.ru*; Lomonosov Moscow State University

The paper is devoted to construction of some inductive sequence of models of the generalized second-order Dedekind theory of real numbers with exponentially increasing powers. These models are not isomorphic whereas all models of the standard second-order Dedekind theory are. The main idea in passing to generalized models is to consider instead of superstructures with the single common set-theoretical equality and the single common set-theoretical belonging superstructures with several generalized equalities and several generalized belongings for first and second orders. The basic tools for the presented construction are the infraproduct of collection of mathematical systems different from the factorized Loś ultraproduct and the corresponding generalized infrafiltration theorem.

Keywords: second-order language, generalized models, infraproduct, ultraproduct, nonstandard analysis.

1. Introduction

It is well known that all *standard* models of the standard second-order Dedekind theory of real numbers are isomorphic (see, for example, [1, 7.2]). The paper is devoted to the exposition of some *generalized* second-order Dedekind theory of real numbers with non-isomorphic generalized models.

More precisely, the paper is devoted to construction of some inductive sequence $\widehat{Re}_i$ $(1 \leqslant i \leqslant \omega_0)$ of models of the generalized second-order Dedekind theory of real numbers with exponentially increasing powers. Since the sequence $\widehat{Re}_i$ $(1 \leqslant i < \omega_0)$ is non-limit (see part I of the Theorem in section 3), some limit generalized model $\widehat{Re}_{\omega_0}$ is constructed such that every $\widehat{Re}_i$ is a submodel of $\widehat{Re}_{\omega_0}$ (see part II of the Theorem). These generalized models are completely different from models of the non-standard first-order non-Dedekind theory of real numbers presented in [2, 2.14] under the name of *non-standard analysis*.

The appropriate for these constructions second-order notions were introduced in papers [4,6] (see also [5, C.1-C.2]), namely: a *generalized second-order signature* Σ_2^g, a *generalized language* $L(\Sigma_2^g)$ *of the signature* Σ_2^g, a *superstructure* S_2^g *of the signature* Σ_2^g *over a set* A, an *interpretation* ($\equiv$ a *mathematical system*) $U \equiv (A, S_2^g)$ *of the signature* Σ_2^g *on the support* A, an *evaluation* γ *on the system* U *of all variables of the signature* Σ_2^g, and a *generalized model* U *for a set* Φ *of formulas of the language* $L(\Sigma_2^g)$.

The main idea in passing to generalized models is to refuse the consideration of superstructures with the single common set-theoretical equality $=$ and with the single common set-theoretical belonging $\in$ and to consider the superstructure S_2^g with several *generalized equalities* $\approx_{\text{first}}$ *and* $\approx_{\text{second}}$ and several *generalized belongings* $\Subset_{\text{first}}$ and $\Subset_{\text{second}}$ for first and second orders. This generalized superstructure S_2^g is the derivative object from some initial generalized second-order signature Σ_2^g containing, in addition to individual and predicative constants and variables, some symbols δ_τ of *generalized equalities* and some symbols ε_τ of *generalized belongings* for first-order types τ and second-order types $\tau \equiv [\tau_0, \ldots, \tau_k]$.

Correspondingly, in the capacity of initial formulas of the language $L(\Sigma_2^g)$ the formulas of the following two forms are taken: the formula $y^\sigma\ \delta_\sigma\ z^\sigma$ and the formula $(x_0^{\tau_0}, \ldots, x_k^{\tau_k})\ \varepsilon_\tau\ u^\tau$, where y^σ and z^σ are the variables of the first- or the second-order type σ and $x_i^{\tau_i}$ and u^τ are the variables of the first-order types τ_i and the second-order type $\tau \equiv [\tau_0, \ldots, \tau_k]$, respectively.

These atomic formulas are interpreted on an evaluated system (U, γ) (with an evaluation γ of variables on U) in the following generalized way: $\gamma(y^\sigma) \approx_\sigma \gamma(z^\sigma)$ and $(\gamma(x_0^{\tau_0}), \ldots, \gamma(x_k^{\tau_k})) \Subset_\tau \gamma(u^\tau)$, where $\approx_\sigma$ is a *generalized ratio of equality* and $\Subset_\tau$ is a *generalized ratio of belonging*. Generalized equalities and generalized belongings are connected with each other by the common initial principle of change of equals.

With respect to the signature Σ_2^g formulas φ in the language $L(\Sigma_2^g)$ are defined by common induction, when we start from the above-mentioned atomic formulas.

To give a semantics of the language $L(\Sigma_2^g)$ a *satisfaction of a formula* φ *on a system* U *with respect to an evaluation of variables* γ is defined according to the above-mentioned generalized interpretation of the atomic formulas.

The semantics for the language $L(\Sigma_2^g)$ differs both from the standard semantics (see [2, Appendix] and [3, § 16]) and from the Henkin semantics (see [2, Appendix] and [3, § 21]), which restricts the range of values of the evaluation $\gamma(x^\tau)$ for a variable x^τ of a second-order type τ by some subset of the set $\mathscr{P}(\tau(A))$ of the *terminal* $\tau(A)$ of the system $U \equiv (A, S)$.

2. The generalized second-order Dedekind theory of real numbers

Consider the first-order type $\pi \equiv 0$, the second-order types $\kappa \equiv [\pi]$, $\rho \equiv [\pi,\pi]$, and $\lambda \equiv [\pi,\pi,\pi]$ and the type domain $\Theta \equiv \Theta^g_{Re,2} \equiv \{\pi,\kappa,\rho,\lambda\}$ with the belonging type subdomain $\Theta_b \equiv \{\kappa,\rho,\lambda\}$.

Put $\Omega_\pi \equiv 2$, $\Omega_\kappa \equiv \varnothing$, $\Omega_\rho \equiv 3$, $\Omega_\lambda \equiv 2$, and consider the collections $\Sigma^\pi_c \equiv (\sigma^\pi_\omega \mid \omega \in \Omega_\pi) = (\sigma^\pi_0, \sigma^\pi_1)$, $\Sigma^\kappa_c \equiv (\sigma^\kappa_\omega \mid \omega \in \Omega_\kappa) = \varnothing$, $\Sigma^\rho_c \equiv (\sigma^\rho_\omega \mid \omega \in \Omega_\rho) = (\sigma^\rho_0, \sigma^\rho_1, \sigma^\rho_2)$, and $\Sigma^\lambda_c \equiv (\sigma^\lambda_\omega \mid \omega \in \Omega_\lambda) = (\sigma^\lambda_0, \sigma^\lambda_1)$.

They compose the signature of constants of the type domain Θ of the form $\Sigma_c = (\Sigma^\tau_c \mid \tau \in \Theta) = ((\sigma^\pi_0, \sigma^\pi_1), \varnothing, (\sigma^\rho_0, \sigma^\rho_1, \sigma^\rho_2), (\sigma^\lambda_0, \sigma^\lambda_1))$ containing the objective first-order constants σ^π_0 and σ^π_1 for denoting the *real numbers* 0 (*null*) and 1 (*unit*), respectively, the predicate second-order constants σ^ρ_0, σ^ρ_1, and σ^ρ_2 for denoting the *ratio of negation*, the *ratio of inversion*, and the *ratio of order*, respectively, and the predicate second-order constants σ^λ_0 and σ^λ_1 for denoting the *ratio of addition* and the *ratio of multiplication*, respectively.

Further, along with σ^π_0, σ^π_1, σ^ρ_0, σ^ρ_1, σ^ρ_2, σ^λ_0, and σ^λ_1 we shall simply write 0, 1, $-$, $/$, $\leqslant$, $+$, and $\cdot$, respectively.

Take the signature of the generalized equalities of the type domain Θ of the form $\Sigma_e \equiv (\delta_\tau \mid \tau \in \Theta) = (\delta_\pi, \delta_\kappa, \delta_\rho, \delta_\lambda)$ containing the first-order equality δ_π, and the second-order equalities $\delta_{[\pi]}$, $\delta_{[\pi,\pi]}$, and $\delta_{[\pi,\pi,\pi]}$.

Take the signature of the generalized belongings of the type domain Θ of the form $\Sigma_b \equiv (\varepsilon_\tau \mid \tau \in \Theta_b) = (\varepsilon_\kappa, \varepsilon_\rho, \varepsilon_\lambda)$.

Finally, take a denumerable set Σ^π_v of objective variables $x^\pi, y^\pi, \dots$ of the first-order type π and denumerable sets Σ^κ_v, Σ^ρ_v, and Σ^λ_v of predicate variables $u^\kappa, v^\kappa, \dots$, $u^\rho, v^\rho, \dots$, and $u^\lambda, v^\lambda, \dots$ of the second-order types κ, ρ, and λ, respectively. They form the signature $\Sigma_v \equiv (\Sigma^\tau_v \mid \tau \in \Theta) = (\Sigma^\pi_v, \Sigma^\kappa_v, \Sigma^\rho_v, \Sigma^\lambda_v)$ of variables of the type domain Θ.

Consider the generalized signature $\Sigma^g_{Re,2} \equiv \Sigma_c|\Sigma_e|\Sigma_b|\Sigma_v$ and the corresponding language $L(\Sigma^g_{Re,2})$. Terms $p, q, r, s, \dots$ of this language are constants and variables only; the atomic equality formulas have the forms $q^\pi\ \delta_\pi\ r^\pi$, $q^\kappa\ \delta_\kappa\ r^\kappa$, $q^\rho\ \delta_\rho\ r^\rho$, and $q^\lambda\ \delta_\lambda\ r^\lambda$. Respectively, the atomic belonging formulas have the forms $q^\pi\ \varepsilon_\kappa\ r^\kappa$, $(p^\pi, q^\pi)\ \varepsilon_\rho\ r^\rho$, and $(p^\pi, q^\pi, r^\pi)\ \varepsilon_\lambda\ s^\lambda$.

The signature $\Sigma^g_{Re,2}$ gives the opportunity to define the language $L(\Sigma^g_{Re,2})$ and to construct the desired models of the generalized second-order theory of real numbers, but the absence of functional variables in this signature makes the writing of generalized axioms for this theory very unusual. For example,

A22 (the *existence of Dedekind cuts*). $\forall\, u^\kappa, v^\kappa\ ((\exists\, x\ (x\ \varepsilon_\kappa\ u^\kappa)) \wedge (\exists\, y\ (y\ \varepsilon_\kappa\ v^\kappa)) \wedge (\forall\, z\ ((z\ \varepsilon_\kappa\ u^\kappa) \vee (z\ \varepsilon_\kappa\ v^\kappa))) \wedge (\forall\, x, y\ ((x\ \varepsilon_\kappa\ u^\kappa) \wedge (y\ \varepsilon_\kappa\ v^\kappa) \Rightarrow x \leqslant y)) \Rightarrow (\exists\, z\ \forall\, x, y\ ((x\ \varepsilon_\kappa\ u^\kappa) \wedge (y\ \varepsilon_\kappa\ v^\kappa) \Rightarrow (x \leqslant z) \wedge (z \leqslant y))))$.

The corresponding theory determined by the language $L(\Sigma^g_{Re,2})$ and the set of proper axioms A1–A22, the set of *equality axioms* E1–E4 [5, C.1.3], and the set of *extension-*

ality properties PE1–PE3 [5, C.3.4] can be called the *generalized second-order Dedekind theory of real numbers* $Th^g_{Re,2}$, where **PE3**: $\forall\, u^\lambda, v^\lambda\ (u^\lambda \delta_\lambda v^\lambda \Leftrightarrow \forall\, x,y,z\ ((x,y,z)\varepsilon_\lambda u^\lambda \Leftrightarrow (x,y,z)\varepsilon_\lambda v^\lambda))$.

Consider the canonical set $\mathbb{R}$ of all real numbers constructed in some fixed set theory ST: NBG, ZF, or LTS (see, e. g., [5, 1.1, A.2, B.1]). For the set $\mathbb{R}$ and the signature $\Sigma^g_{Re,2}$ consider the corresponding superstructure $S_{Re,2} \equiv (S_c, S_e, S_b, S_v)$ of the signature $\Sigma^g_{Re,2}$. The system $(\mathbb{R}, S_{Re,2})$ of the signature $\Sigma^g_{Re,2}$ can be called the *canonical generalized second-order Dedekind real axis in ST*. It will be denoted by Re^g_2.

3. The main theorem

Theorem.

(I) *Let F be a fixed set. Then there exist some sequence $(\widehat{\mathbb{R}}_i \mid i \in \omega_0)$ of sets $\widehat{\mathbb{R}}_i$, some sequence $(\widehat{S}_i \mid i \in \omega_0)$ of superstructures $\widehat{S}_i$ of the signature $\Sigma^g_{Re,2}$ over the sets $\widehat{\mathbb{R}}_i$, and some sequence $(u_i \mid i \in \omega_0)$ of mappings $u_i : \widehat{\mathbb{R}}_i \to \widehat{\mathbb{R}}_{i+1}$ such that:*

(1) $\widehat{Re}_0 \equiv (\widehat{\mathbb{R}}_0, \widehat{S}_0) \equiv (\mathbb{R}, S_{Re,2})$*;*

(2) *every system $\widehat{Re}_i \equiv (\widehat{\mathbb{R}}_i, \widehat{S}_i)$ of the signature $\Sigma^g_{Re,2}$ is a model for the theory $Th^g_{Re,2}$;*

(3) *every mapping u_i is an $(\approx_{\pi,i}, \approx_{\pi,i+1})$-injective homomorphism of the signature $\Sigma^g_{Re,2}$ from the system $\widehat{Re}_i$ into the system $\widehat{Re}_{i+1}$;*

(4) *the image of the system $\widehat{Re}_i$ in the system $\widehat{Re}_{i+1}$ respectively to the homomorphism u_i is a submodel of the model $\widehat{Re}_{i+1}$;*

(6) *the support $\widehat{\mathbb{R}}_{i+1}$ of the system $\widehat{Re}_{i+1}$ is the set $\widehat{\mathbb{R}}^F_i$;*

(7) $(u_i p)(f) = p$ *for every $p \in \widehat{\mathbb{R}}_i$ and every $f \in F$, i. e., $u_i p$ is the $\{p\}$-valued function on F.*

(II) *There exists some superstructure $\widehat{S}_{\omega_0}$ of the signature $\Sigma^g_{Re,2}$ over the set $\widehat{\mathbb{R}}_{\omega_0} \equiv \prod(\widehat{\mathbb{R}}_i \mid i \in \omega_0)$ and some sequence of mappings $w_i : \widehat{\mathbb{R}}_i \to \widehat{\mathbb{R}}_{\omega_0}$ such that:*

(1) *the system $\widehat{Re}_{\omega_0} \equiv (\widehat{\mathbb{R}}_{\omega_0}, \widehat{S}_{\omega_0})$ of the signature $\Sigma^g_{Re,2}$ is a model for the theory $Th^g_{Re,2}$;*

(2) *every mapping w_i is an $(\approx_{\pi,i}, \approx_{\pi,\omega_0})$-injective homomorphism of the signature $\Sigma^g_{Re,2}$ from the system $\widehat{Re}_i$ into the system $\widehat{Re}_{\omega_0}$;*

(3) *the image of the system $\widehat{Re}_i$ in the system $\widehat{Re}_{\omega_0}$ respectively to the homomorphism w_i is a submodel of the model $\widehat{Re}_{\omega_0}$;*

(5) $w_i = w_{i+1} \circ u_i$ *for every $i \in \omega_0$.*

References

1. Feferman S. *The number systems. Foundations of algebra and analysis.* – Reading: Addison-Wesley Publ., 1963.

2. Mendelson E. *Introduction to Mathematical Logic* (4th ed.). – London: CRC, 1997.

3. Takeuti G. *Proof theory.* – Mineola: Dover Publications, 2013.

4. Zakharov V. K. *Compactness theorem for generalized second-order language* // Contemporary problems of fund. and appl. mathematics. – Dolgoprudnii: MPhTI, 2008. – P. 11–31.

5. Zakharov V. K, Rodionov T. V. *Sets, Functions, Measures. Volume I: Fundamentals of Set and Number Theory* (De Gruyter Stud. in Math., V. 68/2). – Berlin: de Gruyter, 2018.

6. Zakharov V. K., Yashin A. D. *Compactness theorem for some generalized second-order language* // J. Math. Research. – 2014. – V. 6, No. 3. – P. 21–38.

ИНДУКТИВНАЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ МОДЕЛЕЙ ОБОБЩЁННОЙ ДЕДЕКИНДОВОЙ ТЕОРИИ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО РАСТУЩИМИ МОЩНОСТЯМИ

В.К. Захаров, Т.В. Родионов

В работе строится индуктивная последовательность моделей обобщённой дедекиндовой второпорядковой теории действительных чисел с экспоненциально растущими мощностями. Эти модели неизоморфны, в то время как все модели стандартной дедекиндовой теории действительных чисел изоморфны. Главная идея перехода к обобщённым моделям состоит в том, чтобы вместо суперструктур с единственным теоретико-множественным равенством и единственным теоретико-множественным отношением принадлежности рассматривать суперструктуры с различными обобщёнными равенствами и различными обобщёнными отношениями принадлежности для первого и для второго порядков. Основными средствами для нашего построения служат инфрапроизведение коллекции математических систем, отличное от факторизованного ультрапроизведения Лося, и соответствующая обобщённая теорема инфрафильтрации.

Ключевые слова: язык второго порядка, обобщённые модели, инфрапроизведение, ультрапроизведение, нестандартный анализ.

УДК 517.9

О НЕКЛАССИЧЕСКИХ СВЕРТКАХ

О.А. Иванова[1]

1 *neo_ivolga@mail.ru*; Южный федеральный университет

Предлагается подход к введению умножения (свертки) в топологическом сопряженном к счетному индуктивному пределу весовых пространств Фреше целых функций одного комплексного переменного. Это умножение определяется с помощью операторов сдвига для оператора обобщенного обратного сдвига (оператора Поммье). Изучены свойства полученной таким образом алгебры аналитических функционалов.

Ключевые слова: свертка, алгебра аналитических функционалов, оператор обобщенного обратного сдвига.

Ниже идет речь об умножении в алгебре аналитических функционалов, отличном от стандартной свертки, задаваемой обычными сдвигами. Произведения подобного рода (например, свертка и произведение Дюамеля) исследуются в монографии И. Димовского [6], в работах М.Т. Караева [5], [7]. Рассматривается следующая ситуация. Пусть $v_{n,k} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ — непрерывные функции такие, что

$v_{n,k+1} \le v_{n,k} \le v_{n+1,k}$, $n,k \in \mathbb{N}$. Веса $v_{n,k}$ удовлетворяют также стандартным техническим условиям. Положим $E := \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} E_{n,k}$, где

$$E_{n,k} := \left\{ f \in H(\mathbb{C}) \middle| \, \|f\|_{n,k} := \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{\exp(v_{n,k}(z))} < +\infty \right\}$$

банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_{n,k}$. При этом $H(\mathbb{C})$ — пространство целых (в $\mathbb{C}$) функций. Снабдим E топологией $\operatorname{ind}\limits_{n\to} \operatorname{proj}\limits_{\leftarrow k} E_{n,k}$ (пределы берутся относительно вложений). Предполагается, что E содержит ненулевую функцию.

Зафиксируем функцию $g_0 \in E$ такую, что $g_0(0) = 1$. Оператор обобщенного обратного сдвига (оператор Поммье) определяется равенством $D_{0,g_0}(f)(t) := \frac{f(t)-g_0(t)f(0)}{t}$, $f \in E$. Он линейно и непрерывно действует в E. Операторы сдвига T_z, $z \in \mathbb{C}$, для D_{0,g_0} задаются равенством

$$T_z(f)(t) := \frac{tf(t)g_0(z) - zf(z)g_0(t)}{t-z}.$$

Они также линейно и непрерывно отображают E в E. Далее E' — топологическое сопряженное к E пространство. Свертка $\varphi \otimes \psi \in E'$ функционалов $\varphi, \psi \in E'$ определяется так:

$$(\varphi \otimes \psi)(f) := \varphi_z(\psi(T_z(f))), \; z \in \mathbb{C}, \; f \in E.$$

С умножением $\otimes$ пространство E' является унитальной ассоциативной и коммутативной алгеброй. Символом $\mathscr{K}(D_{0,g_0})$ обозначим коммутант D_{0,g_0} в кольце (алгебре) всех линейных непрерывных операторов в E; $\mathscr{K}(D_{0,g_0})$ — алгебра с умножением – композицией операторов.

Для $\varphi \in E'$ введем оператор $A_\varphi(f)(z) := \varphi(T_z(f))$, $z \in \mathbb{C}$, $f \in E$, линейно и непрерывно действующий в E. Связь алгебр $(E', \otimes)$ и $\mathscr{K}(D_{0,g_0})$ показывает

Теорема 1 [1]. *Отображение $\omega : (E', \otimes) \to \mathscr{K}(D_{0,g_0})$, $\omega(\varphi) := A_\varphi$, является алгебраическим изоморфизмом "на".*

Изучены топологические свойства отображения ω, как в теореме 1. В частности, установлены условия того, что ω является топологическим изоморфизмом (см. [3]). Указанный изоморфизм применен к доказательству того, что множество многочленов от D_{0,g_0} плотно в $\mathscr{K}(D_{0,g_0})$ со слабо-операторной топологией при наделении E слабой топологией $\sigma(E, E')$, и к определению условий, при которых всякий оператор из $\mathscr{K}(D_{0,g_0})$ является D_{0,g_0}-оператором бесконечного порядка.

Исследована такая конкретная ситуация [6]. Пусть $C^\infty(\Omega)$ — пространство Фреше всех бесконечно дифференцируемых функций в интервале Ω вещественной прямой, содержащем начало; $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — возрастающая последовательность отрезков в Ω, исчерпывающая Ω; $H_{K_n}(x) := \max\limits_{t\in K_n}(xt)$, $x \in \mathbb{R}$, — опорная функция K_n, $n \in \mathbb{N}$. Сильное сопряженное к $C^\infty(\Omega)$ посредством преобразования Фурье-Лапласа $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}(\varphi)(z) := \varphi_t\left(e^{-itz}\right)$, топологически изоморфно счетному индуктивному пределу E банаховых пространств целых функций f таких, что найдутся $n \in \mathbb{N}$ и $C > 0$, для которых $|f(z)| \le C(1+|z|)^n e^{H_{K_n}(\operatorname{Im} z)}$, $z \in \mathbb{C}$. (В этом случае веса $v_{n,k}(z) = H_{K_n}(\operatorname{Im} z) + n\log(1+|z|)$ от k не зависят.) Одно из специфических свойств E состоит в том, что пространство всех многочленов содержится и замкнуто в нем, а значит, не плотно в E. Отображение $\mathscr{F}' : E' \to C^{\infty}(\Omega)$, сопряженное к $\mathscr{F}$, является изоморфизмом алгебр $(E', \otimes)$ и $(C^{\infty}(\Omega), *)$. При этом $*$ — произведение Дюамеля: $(f * h)(t) = \frac{d}{dt}\left(\int\limits_0^t f(t-\tau)h(\tau)d\tau\right)$, $t \in \Omega$, $f, h \in C^{\infty}(\Omega)$.

Теорема 2. *Пусть $\varphi \in E'$. Оператор свертки $S_{\varphi} : E' \to E'$, $\psi \mapsto \varphi \otimes \psi$, является изоморфизмом E' с сильной топологией тогда и только тогда, когда $\mathscr{F}'(\varphi)(0) \neq 0$.*

Литература

1. Dimovski I. *Convolutional Calculus.* – London: Kluwer, 1990.

2. Караев М. Т. *Алгебры Дюамеля и их приложения* // Функц. анализ и его прил. – 2018. – Т. 52. – В. 1. – С. 3–12.

3. Karaev M. T. *Invariant subspaces, cyclic vectors, commutant and extended eigenvectors of some convolution operators* // Methods Funct. Anal. Topology. – 2005. – V. 11. – № 1. – P. 48–59.

4. Иванова О. А., Мелихов С. Н. *Об операторах, перестановочных с оператором типа Поммье в весовых пространствах целых функций* // Алгебра и анализ. – 2016. – Т. 28. – № 2. – С. 114–137.

5. Иванова О. А., Мелихов С. Н. *Об алгебре аналитических функционалов, связанной с оператором Поммье* // Владикавк. матем. журн. – 2016. – Т. 18. – № 4. – С. 34–40.

6. Иванова О. А., Мелихов С. Н. *Коммутант оператора Поммье в пространстве целых функций экспоненциального типа и полиномиального роста на вещественной прямой* // Владикавк. матем. журн. – 2018. – Т. 20. – № 3. – С. 48–56.

ON NON-CLASSICAL CONVOLUTIONS

O.A. Ivanova

We propose an approach to define a multiplication (convolution) in the dual to a countable inductive limit of weighted Fréchet spase of entire functions of one complex variable. This multiplication is introduced with the help of shift operators for the generalized backward shift operator. The properties of the obtained algebra of analytic functionals are studied.

Keywords: convolution, algebra of analytic functionals, generalized backward shift operator.

УДК 517.53

КРАТНЫЕ РЕГУЛЯРНЫЕ МНОЖЕСТВА В ПРОСТРАНСТВАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

М.В. Кабанко[1]

1 *kabankom@gmail.com*; Курский государственный университет

Рассматриваются понятия слабо регулярных кратных множеств в пространствах целых функций конечного порядка. Доказано, что такие множества являются интерполяционными множествами.

Ключевые слова: целая функция, регулярное множество, задача интерполяции.

Термин *регулярное множество* в комплексной плоскости был введен Б.Я. Левиным [1, с. 126]. Было доказано, что такие множества являются интерполяционными в пространстве целых функций вполне регулярного роста с индикатором меньше заданного при данном уточненном порядке. Это понятие обобщалось в различных направлениях. В частности, в работе [2] было введено понятие *слабо регулярного множества* в пространствах целых функций ненулевого конечного порядка и в пространствах целых функций типа не выше чем нормальный относительно ненулевого конечного порядка. В работе [3] понятие слабо регулярного множества было распространено на пространство целых функций типа не выше чем нормальный относительно нулевого конечного порядка. Во всех отмеченных работах и работах, которые попали в поле зрение автора этой статьи, предполагалось, что регулярные множества не имеют кратных точек. Однако, во многих задачах теории функций (например, при построении канонических произведений множеств, задачах интерполяции) приходится рассматривать множества с кратными точками. Целью данной работы является обобщение понятий регулярных множеств на случай с точками, имеющими кратности, отличные от единицы.

Введем необходимые определения и обозначения. Пусть $f(z)$ — целая функция,

$$M(f,r)=\max_{0\leqslant\varphi<2\pi}|f(re^{i\varphi})|.$$

Через $[\rho,\infty]$ обозначим пространство целых функций, порядок которых не превышает ρ, $\rho\geqslant 0$, то есть таких, что

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\ln^+\ln^+ M(f,r)}{\ln r}\leqslant\rho.$$

Пусть $D=\{a_n,q_n\}_{n=1}^{\infty}$ — *дивизор*, т.е. множество различных комплексных чисел $\{a_n=r_ne^{i\theta_n}\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{C}$ вместе с их кратностями $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$. По заданному дивизору D определим меру:

$$\mu_D(z)=\sum_{n=1}^{\infty}q_n\delta(z-a_n),$$

где $\delta(\cdot)$ — дельта функция Дирака. Мы будем употреблять следующее обозначение: $C(z,t)=\{w\in\mathbb{C}:|w-z|\leqslant t\}$ — замкнутый круг с центром в точке z радиуса t.

Определим семейство функций

$$\tilde{\Phi}_D(z,\alpha)=(\mu_D(C(z,\alpha|z|))-q_n)^+,\quad 0<\alpha<1/2,$$

где q_n – кратность ближайшей к z точки дивизора D (если таких точек несколько, то берем точку с наибольшей кратностью; если и таких несколько — любую из них, например, точку с наибольшей мнимой частью). Из формулы Коши для производных нетрудно получить следующее утверждение: если функция $f\in[\rho,\infty]$, то неравенство

$$|f^{(k-1)}(z)|\leqslant(k-1)!\exp[|z|^{\rho+\varepsilon}],\quad k\in\mathbb{N},$$

выполняется при фиксированном $\varepsilon>0$ для всех достаточно больших z, $|z|>r_\varepsilon$. Это неравенство приводит к разумности введения следующего определения.

Определение 1. *Дивизор* $D=\{a_n,q_n\}_{n=1}^{\infty}$ *называется интерполяционным в пространстве* $[\rho,\infty]$, *если для любой последовательности комплексных чисел* $b_{n,k}$,

$k = 1, 2, \ldots, q_n$, $n \in \mathbb{N}$, *удовлетворяющих условию*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\ln|a_n|} \ln^+ \ln^+ \sup_{1\leqslant k\leqslant q_n} \frac{|b_{n,k}|}{(k-1)!} \leqslant \rho\,,$$

существует функция $F \in [\rho, \infty]$ *со свойством*:

$$F^{(k-1)}(a_n) = b_{n,k}, \quad k = 1, 2, \ldots, q_n,\ n \in \mathbb{N}. \tag{I}$$

В такой постановке задача интерполяции относится к задачам свободной интерполяции, когда на значения интерполирующей функции в узлах накладываются минимальные ограничения, связанные с необходимостью получения решения в заданном классе. В работе К. Г. Малютина и О. А. Боженко [4] найдены необходимые и достаточные условия интерполяционности дивизора D в пространстве $[\rho, \infty]$ в терминах канонического произведения дивизора D и в терминах семейства функций $\tilde{\Phi}_D(z, \alpha)$. В частности, было доказано, что дивизор D является интерполяционным в пространстве $[\rho, \infty]$, тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ выполняются соотношения:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{|a_n|^{\rho+\varepsilon}} < \infty, \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln q_n}{\ln|a_n|} \leqslant \rho\,, \tag{1}$$

и

$$\limsup_{z\to\infty} \frac{1}{\ln|z|} \ln^+ \int_0^{1/2} \frac{\tilde{\Phi}_D(z, \alpha)}{\alpha}\, d\alpha \leqslant \rho\,. \tag{2}$$

Заметим, что задача (I) рассматривалась Г. П. Лапиным [5], который исследовал только случай $\rho > 0$ и получил критерии разрешимости задачи (I) в терминах канонических произведений. Задачу (I) Лапин рассматривал при следующих ограничениях на значения в узлах интерполяции:

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\ln|a_n|} \ln^+ \ln^+ \sup_{1\leqslant k\leqslant q_n} |b_{n,k}| \leqslant \rho\,,$$

то есть в такой постановке задача (I) не является задачей свободной интерполяции.

Введем следующее определение.

Определение 2. *Дивизор* $D = \{a_n, q_n\}_{n=1}^{\infty}$ *называется слабо регулярным или короче* $WR(\rho)$*-дивизором, при порядке* $\rho \geqslant 0$, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *выполняются соотношения* (1) *и одно из следующих условий* (C) *или* (C') :

(C) *Точки* a_n *расположены в середине углов с общей вершиной в начале координат, которые не пересекаются, так, что для любых двух точек последовательности* $\{a_n\}$, *расположенных в середине одного из углов, выполняется условие*

$$|a_{n+1}| - |a_n| \geqslant r_n = q_n |a_n|^{1-\rho-\varepsilon}, \quad |a_n| > r(\varepsilon)\,.$$

(C') *Кружки радиусов*

$$r_n = \sqrt{q_n}\, |a_n|^{1-(\rho+\varepsilon)/2}, \quad |a_n| > r(\varepsilon)\,,$$

с центрами в точках a_n *не пересекаются.*

При фиксированном $\varepsilon > 0$ кружки $C(a_n, r_n)$ будем называть *исключительными кружками $WR(\rho)$-дивизора* ($CWR(\rho,\varepsilon)$-кружками).

Справедлива следующая теорема.

Теорема. *Слабо регулярный при порядке $\rho \geqslant 0$ дивизор $D = \{a_n, q_n\}_{n=1}^{\infty}$ является интерполяционным в пространстве* $[\rho,\infty]$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Пусть выполняются условия (1), (C') и точка z не принадлежит ни одному из $CWR(\rho,\varepsilon)$-кружков. Опишем из точки z круг $C(z,\alpha|z|)$, $0 < \alpha < 1/2$ радиусом $\alpha|z|$. Так как центр этого круга не входит ни в один исключительный кружок, то радиусы исключительных кружков с центрами внутри этого круга меньше величины $\alpha|z|$. Так как исключительные кружки не пересекаются, то сумма площадей исключительных кружков с центрами внутри круга $C(z,\alpha|z|)$ меньше площади круга $C(z,2\alpha|z|)$, т.е.

$$\sum_{a_n\in C(z,\alpha|z|)} \pi q_n |a_n|^{2-(\rho+\varepsilon)} \leqslant 4\pi(\alpha|z|)^2, \quad |a_n| > r(\varepsilon)\,. \tag{3}$$

Так как $a_n \in C(z,\alpha|z|)$ и $0 < \alpha < 1/2$, то $|a_n| \geqslant |z|/2$. Отсюда и из неравенства (3) получаем, что

$$\tilde{\Phi}_D(z,\alpha) = \sum_{a_n\in C(z,\alpha|z|)} q_n \leqslant 16\cdot 2^{\rho}\alpha^2|z|^{\rho+\varepsilon}, \quad |a_n| > r(\varepsilon)\,.$$

Из последнего неравенства следует соотношение (2).

Пусть теперь выполняются условия (1), (C) и точка z не принадлежит ни одному из $CWR(\rho,\varepsilon)$-кружков. Спроектируем диаметр круга $C(z,2\alpha|z|)$ и диаметры исключительных кружков, центры которых попали в круг $C(z,\alpha|z|)$, на полуось $\mathbb{R}_+ = \{x : x \geqslant 0\}$. Получим

$$\sum_{a_n\in C(z,\alpha|z|)} q_n |a_n|^{1-(\rho+\varepsilon)} \leqslant 2\alpha|z|, \quad |a_n| > r(\varepsilon)\,.$$

Отсюда получаем неравенство

$$\tilde{\Phi}_D(z,\alpha) = \sum_{a_n\in C(z,\alpha|z|)} q_n \leqslant 2^{1+\rho}\alpha|z|^{\rho+\varepsilon}, \quad |a_n| > r(\varepsilon)\,,$$

из которого, очевидно, следует соотношение (2).

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-51-45004.

Литература

1. Левин Б. Я. *Распределение корней целых функций.* – М.: ГИТТЛ, 1956. – 632 с.

2. Malyutin K.Ġ., Bozhenko O. A. *Weakly regular sets* // Istanbul University Science Faculty the Journal of Mathematics, Physics and Astronomy. – 2013. – Vol. 4. – P. 1–8.

3. Боженко О. А., Гришин А. Ф., Малютин К. Г. *Интерполяционная задача в классе целых функций нулевого порядка* // Изв. РАН. Сер. матем. – 2015. – Т. 79. – Вып. 2. – С. 21–44.

4. Малютин К. Г., Боженко О. А. *Задача кратной интерполяции в классе целых функций нулевого порядка* // Сборник трудов Ин-та математики НАН Украины. – 2013. – Т. 10. – № 4-5. – С. 412–423.

5. Лапин Г. П. *Интерполирование в классе целых функций конечного порядка* // Известия вузов, матем. – 1959. – № 5. – С. 146–153.

MULTIPLE REGULAR SETS IN SPACES OF ENTIRE FUNCTIONS OF FINITE ORDER

M.V. Kabanko

The concepts of weakly regular multiple sets in the spaces of entire functins of finite order are considered. It is proved that such sets are interpolation sets.

Keywords: entire function, regular set, interpolation problem.

УДК 517.986

О ДЕЙСТВИИ ОГРАНИЧЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ В НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С ЭКСТРЕМАЛЬНЫМИ ВЕСАМИ

М.В. Кабанко[1], Е.Л. Мягченкова[2]

1 *kabankom@gmail.com*; Курский государственный университет
2 *lena.4755@mail.ru*; Курский государственный университет

Ранее, профессором Овчинниковым В.И., была высказана гипотеза о связи “количества” интерполяционных пространств со структурой алгебры операторов в паре (семействах) пространств. Точнее, чем в большем количестве пространств действуют операторы и чем больше условий накладываются на действие операторов, тем проще строение алгебры операторов. В этом, собственно, и состоит причина отличия пространств построенных разными методами интерполяции в семействах более чем двух пространств от случая пары пространств. Построенный в работе пример, в некоторой степени, подтверждает эту гипотезу.

Ключевые слова: операторные алгебры, семейства гильбертовых пространств, представление операторных алгебр.

Рассмотрим гильбертову пару $\{l_2(\omega), l_2(\omega^{-1})\}$, где $\omega = (\omega_j)_{j=1}^{\infty}$, $\omega_j = 2^{-2^j}$. Известно, что сумма пространств $l_2(\omega) + l_2(\omega^{-1}) = l_2(\min\{\omega, \omega^{-1}\})$, тогда $l_2(\omega) + l_2(\omega^{-1}) = l_2(2^{-2^j})$. Аналогично, $l_2(\omega) \cap l_2(\omega^{-1}) = l_2(\max\{\omega, \omega^{-1}\}) = l_2(2^{2^j})$. Как известно любое весовое пространство

$$l_2(\omega) = \{\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty} | \{\omega_j \xi_j\}_{j=1}^{\infty} \in l_2\}$$

изометрично пространству l_2, а изометрия устанавливается с помощью мультипликатора

$$M_\omega : \{\xi_j\}_{j=1}^{\infty} \to \{\omega_j \xi_j\}_{j=1}^{\infty}.$$

В итоге при действии оператора T в паре $\{l_2(\omega), l_2(\omega^{-1})\}$ элементы его матрицы будут удовлетворять условиям $|a_{ij}| \le \|A\|_{B(\overline{H})} 2^{-|i-j|}$

Далее рассмотрим другую гильбертову пару $\{l_2(u), l_2(v)\}$, где веса распределены следующим образом:

$$u_{2n-1} = 2^{2^{2n-1}},\ u_{2n} = 2^{2^{2n}},\ u_{2n+1} = 2^{-2^{2n+1}},\ u_{2n+2} = 2^{-2^{2n+2}}$$

и

$$v_{2n-1} = 2^{-2^{2n-1}},\ v_{2n} = 2^{-2^{2n}},\ v_{2n+1} = 2^{2^{2n+1}},\ v_{2n+2} = 2^{2^{2n+2}}.$$

Пусть теперь оператор T действует не только в четырех рассмотренных выше пространствах, но и в пространстве (не замкнутом)

$$N = \{\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty} \in l_2(2^{2^j}) | \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j = 0\}.$$

Теорема. *Оператор T представим в виде суммы скалярного оператора и оператора B, отображающего сумму пространств в пересечение.*

Литература

1. Davidson K. *Nest algebras. Triangular forms for operator algebras on Hilbert space* // Pitman Res. Notes Math. Ser. **191**. – Longman Sci. and Tech., Harlow, 1988.

2. Кабанко М.В. *Алгебра операторов, действующих в гильбертовой паре* // Труды математического факультета ВГУ, вып. **6**. – Воронеж: ВГУ, 2001. – С. 54-61.

3. Кабанко М.В., Овчинников В.И. *О некоторых представлениях алгебры операторов в гильбертовой паре* // Труды математического факультета ВГУ, вып. **5**. – Воронеж: ВГУ, 2001. – С. 32-40.

ACTION OF BOUNDED OPERATORS IN SOME SPACES WITH RAREFIED WEIGHTS

M.V. Kabanko, E.L. Myagchenkova

Prof. V.I. Ovchinnikov suggested the hypothesis on connection of the "number" of interpolation spaces with the structure of the algebra of operators in a couple (family) of spaces. More precisely, in more spaces there are operators and the more conditions are imposed on the action of operators, the simpler is the structure of the algebra of operators. That is, in fact, the reason for the difference in the spaces constructed by different interpolation methods in families of more than two spaces from the case of a pair of spaces. The example, constructed in the paper, confirms this hypothesis to some extent.

Keywords: operator algebras, families of Hilbert spaces, representation of operator algebras.

УДК 517.54

О КРИТИЧЕСКИХ ТОЧКАХ ОБОБЩЕННЫХ ПРИВЕДЕННЫХ МОДУЛЕЙ

А.В. Казанцев[1], М.И. Киндер[2]

1 *avkazantsev63@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет
2 *detkinm@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Исследуются условия существования критических точек обобщенных приведенных модулей относительно различных канонических областей.

Ключевые слова: обобщенный приведенный модуль, функция Митюка, радиус Митюка, каноническая область, конформное отображение.

Классической задачей теории функций является построение конформных отображений

$$F(w, w_0) = (w - w_0) f(w, w_0) \tag{1}$$

плоских конечносвязных областей на канонические области в виде круга с разрезами фиксированных типов: круговыми концентрическими дугами, радиальными разрезами, комбинациями тех и других и т.д. И.П. Митюк [1] указал путь построения обобщенных приведенных модулей, связанных с функциями вида (1). Обобщенный приведенный модуль (функция Митюка) многосвязной области D в точке w относительно канонической области $\Delta = F(D)$ определяется как

$$M_\Delta(w) = \frac{1}{2\pi}\ln\Omega(w), \tag{2}$$

где $\Omega(w) = 1/|f(w,w)|$ — радиус Митюка [2].

Связь функций вида (2) с внешними обратными краевыми задачами восходит к Ф.Д. Гахову [3]. Оказалось, что наличие у функции $M_\Delta(w)$ критических точек эквивалентно разрешимости соответствующей внешней задачи [4]. Обозначим через Λ_Δ множество всех критических точек функции $M_\Delta(w)$ в D; для удобства типы разрезов областей Δ будем обозначать строчными латинскими буквами. Рассмотрим

Свойство A. *Пусть D — плоская $(n+1)$-связная область, функция (1) конформно отображает D на круг $\Delta = F(D)$ с n разрезами фиксированного типа t. Существует натуральное число n_t, зависящее только от t и такое, что если $n \geq n_t$, то множество Λ_Δ не пусто.*

В случае, когда $\Delta = \Delta_c$ — единичный круг с круговыми концентрическими разрезами, свойство A доказано в [5] с $n_c = 1$; переход к кольцу $D = E_q = \{w | q < |w| < 1\}$ в работе [2] позволил продвинуться в получении содержательных условий локализации и минимальности числа (= 2) элементов Λ_{Δ_c}.

Для единичного круга $\Delta = \Delta_{c,r}$ с круговыми концентрическими и радиальными разрезами свойство A доказано в статье [6]. При этом $n_{c,r} = 2$ и граница ∂D — аналитическая; в [7] анонсируется сохранение свойства A при переходе к жордановым областям. В [6] также показано, что если $D = E_q$ и $F(D) = \Delta_r$ — единичный круг с радиальным разрезом, то $\Lambda_{\Delta_r} = \varnothing$. Выше отмечено, что если $n = 1$, то $\Lambda_{\Delta_c} \neq \varnothing$.

Оказывается, можно построить функции F_1 и F_2 вида (1) такие, что тип разрезов областей $F_1(E_q) = \tilde{\Delta}_c$ и $F_2(E_q) = \tilde{\Delta}_r$ сохраняется при переходе от областей Δ_c и Δ_r, соответственно, а внешние компоненты границ $\partial\tilde{\Delta}_c$ и $\partial\tilde{\Delta}_r$ являются звездообразными кривыми специального вида, причем $\Lambda_{\tilde{\Delta}_c} = \varnothing$ и $\Lambda_{\tilde{\Delta}_r} \neq \varnothing$.

В настоящем докладе свойство A исследуется для канонических областей Δ с различными типами разрезов при различных условиях на граничные компоненты их прообразов D. В двусвязном случае рассмотрен ряд примеров.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан в рамках научного проекта № 18-41-160017.

Литература

1. Митюк И. П. *Обобщенный приведенный модуль и некоторые его применения* // Изв. вузов. Матем. – 1964. – № 2. – С. 110-119.

2. Казанцев А. В. *Условия золотого сечения для радиуса Митюка двусвязных областей* // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2017. – Т. 159, кн. 1. – С. 33-46.

3. Гахов Ф. Д. *Об обратных краевых задачах* // Докл. АН СССР. – 1952. – Т. 86, № 4. – С. 649-652.

4. Аксентьев Л. А., Киндер М. И., Сагитова С. Б. *Разрешимость внешней обратной краевой задачи в случае многосвязной области* // Тр. сем. по краев. задачам. – 1983. – Вып. 20. – С. 22-34.

5. Киндер М. И. *О числе решений уравнения Ф.Д. Гахова в случае многосвязной области* // Изв. вузов. Матем. – 1984. – № 8. – С. 69-72.

6. Elizarov A. M., Kazantsev A. V., Kinder M. I. *Generalized reduced module of a domain over the unit disc with circular and radial slits* // Lobachevskii J. Math. – 2018. – V. 39, No. 5. – P. 664-672.

7. Kazantsev A. V., Kinder M. I. *Study of the surface of a generalized reduced module for multiply connected domain* // Комплексный анализ и его приложения: материалы Междунар. школы-конф. – Краснодар: Кубанский гос. ун-т, 2018. - С. 59.

ON THE CRITICAL POINTS OF THE GENERALIZED REDUCED MODULI

A.V. Kazantsev, M.I. Kinder

Existence conditions for the critical points of the generalized reduced modules with respect to various canonical domains are studied.

Keywords: generalized reduced modulus, Mityuk’s function, Mityuk’s radius, canonical domain, conformal mapping.

УДК 517.98

АППРОКСИМАЦИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ГИПОТЕЗА РИМАНА

В.В. Капустин[1]

1 *kapustin@pdmi.ras.ru*; С.-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН

Обсуждаются аппроксимационные утверждения, равносильные гипотезе Римана о нулях дзета-функции Римана.

Ключевые слова: подход Берлинга–Нимана к гипотезе Римана, теорема Бёрлинга об инвариантных подпространствах, формула Дэвенпорта.

Рассматриваются различные унитарно эквивалентные модели, связанные с подходом Берлинга–Нимана к гипотезе Римана о нулях дзета-функции Римана.

Пусть $\mathscr{K}$ — подпространство весового пространства

$$L^2_{1/x^2}(0,+\infty) = \Big\{f:\ \int\limits_0^{+\infty} |f(x)|^2\,\frac{dx}{x^2} < \infty\Big\},$$

состоящее из всех функций, являющихся 1-периодическими (то есть $f(x+1) = f(x)$) и удовлетворяющих соотношению $f(x) + f(1-x) \equiv \mathrm{const}$, $x \in (0,1)$. Пусть $\mathscr{K}_*$ — замкнутая линейная оболочка в пространстве $L^2_{1/x^2}(0,+\infty)$ функций $\rho(nx)$, $n = 1,2,\ldots$, где $\rho(\cdot)$ обозначает дробную часть вещественного числа; имеем $\mathscr{K}_* \subset \mathscr{K}$.

Теорема. *Гипотеза Римана о нулях дзета-функции Римана равносильна соотношению* $\mathscr{K}_* = \mathscr{K}$.

В свете теоремы следующее простое предложение объясняет интерес к изучению подпространства $\mathcal{K}_*$.

Предложение 1. *Пусть s — комплексное число, для которого* $\operatorname{Re} s \in (\frac{1}{2}, 1)$*, и пусть* $f \in \mathcal{K}_*$*. Если* $\zeta(s) = 0$*, то*

$$\int\limits_0^{+\infty} x^{s-2} f(x)\, dx = 0.$$

Аппроксимационный подход опирается на связь между дзета-функцией и пространством Харди, выражаемую следующим образом.

Предложение 2. *Функция* $\frac{\zeta(s)\cdot(s-1)}{s^2}$ *принадлежит пространству Харди* H^2 *в полуплоскости* $\{\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}\}$*, и гипотеза Римана равносильна утверждению, что эта функция является внешней.*

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант № 19-01-00565-а.

Литература

1. Капустин В. В. *Теорема Берлинга, формула Дэвенпорта и гипотеза Римана* // Алгебра и анализ. – 2018. – Т. 30. – № 6. – С. 20–42.

APPROXIMATION IN SPACES OF PERIODIC FUNCTIONS
AND THE RIEMANN HYPOTHESIS

V.V. Kapustin

We discuss approximation statements that are equivalent to the Riemann hypothesis about the zeroes of the Riemann zeta function.

Keywords: approach of Beurling–Nyman to the Riemann hypothesis, Beurling's theorem about invariant subspaces, Davenport's formula.

УДК 514.822

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО НЕСПРЯМЛЯЕМЫМ ДУГАМ СИЛЬНОГО КРУЧЕНИЯ И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ

Б.А. Кац[1]

1 *katsboris877@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

В последние десятилетия появилось немало работ, посвященных переносу понятия контурного интеграла на неспрямляемые контуры и его приложениям при решении краевых задач для аналитических функций. В этой области получены важные результаты, но существуют классы дуг, для которых до сих пор не разработана удовлетворительная теория интегрирования. В данном докладе обсуждаются недавние продвижения в этой области и их приложения при решении краевой задачи Римана.

Ключевые слова: неспрямляемая дуга, сильное кручение, контурный интеграл, интеграл типа Коши, краевая задача Римана.

Решения многих краевых задач комплексного анализа записываются в форме контурных интегралов. Рассмотрим в качестве примера краевую задачу Римана (см., напр., монографии [1–3]).

Эта задача ставится так. Пусть Γ – заданная на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ направленная кривая. Требуется найти аналитическую в $\overline{\mathbb{C}}\setminus\Gamma$ функцию $\Phi(z)$, имеющую во всех внутренних точках t контура Γ предельные значения $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ слева и справа соответственно, удовлетворяющие краевому условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t),$$

где $G(t)$ и $g(t)$ – заданные на Γ функции. Обычно это краевое условие дополняется условием $\Phi(\infty) = 0$ и каким-либо ограничением на рост искомой функции на концах дуги Γ. Это классическая задача комплексного анализа, имеющая большое число приложений.

В классическом случае кусочно-гладкой кривой Γ решения этой задачи строятся в виде интегралов по контуру Γ. Например, при $G(t) \equiv 1$ (так называемая задача о скачке) решением является интеграл типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{g(t)\,dt}{t-z}, \quad z \notin \Gamma.$$

Поскольку задача имеет смысл и для неспрямляемых контуров, то возникает задача о придании смысла такому интегралу по неспрямляемым кривым и дугам. Первое удовлетворительное решение этой задачи было получено в работе [4]. Приведем его краткое описание.

Пусть Γ есть простая ориентированная жорданова дуга с началом и концом a и b соответственно. С каждой такой дугой мы свяжем логарифмическое ядро $K_\Gamma(z)$ – однозначную ветвь функции

$$K_\Gamma(z) := \frac{1}{2\pi i}\ln\frac{z-b}{z-a},$$

выделяемую в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ условием $K_\Gamma(\infty) = 0$. Во внутренних точках дуги Γ ее логарифмическое ядро имеет единичный скачок, а на ее концах может иметь особенности сколь угодно высокого порядка. Далее, пусть заданная на дуге Γ функция $g(t)$ (скачок) является сужением на эту дугу заданной в комплексной плоскости функции с компактным носителем $\hat{g}(z)$, которая непрерывно дифференцируема в $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, а произведение ее производной по $\overline{z}$ на логарифмическое ядро интегрируемо в $\mathbb{C}$ в степени, большей двух. При определенных ограничениях такую функцию можно построить с помощью теоремы Уитни о продолжении [5]. Тогда отображение (распределение)

$$C^\infty(\mathbb{C}) \ni \omega \mapsto -\iint_{\mathbb{C}} \frac{\partial K_\Gamma(z)\hat{g}(z)\omega(z)}{\partial \overline{z}}\,dz\,d\overline{z}$$

в случае кусочно-гладкой дуги Γ совпадает с отображением

$$\omega \mapsto \int_{\Gamma} g(t)\omega(t)\,dt,$$

и поэтому может считаться его переносом на случай неспрямляемой дуги.

С помощью этого обобщенного интеграла к настоящему времени уже получен ряд результатов относительно краевых задач. Однако он может не существовать в случае, когда особенности логарифмического ядра дуги на ее концах имеют достаточно высокий порядок. В геометрическом плане это означает, что эта дуга на концах скручивается в спирали с достаточно высокой степенью закручивания.

В докладе обсуждается ряд ситуаций, когда обобщенный интеграл по неспрямляемой дуге удается определить несмотря на ее сильное кручение, а также применить для вычисления интеграла типа Коши по такой дуге и решения на ней некоторых краевых задач.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и правительства Республики Татарстан (проект 18-41-160003 р-а).

Литература

1. Гахов Ф. Д. *Краевые задачи.* — М.: Наука, 1977. — 649 с.

2. Мусхелишвили Н. И. *Сингулярные интегральные уравнения.* — М.: Наука, 1968. — 513 с.

3. Lu Jian-Ke. *Boundary Value Problems for Analytic Functions.* — Singapore: World Scientific, 1993. — 466 p.

4. Кац Б. А. *Задача Римана на разомкнутой жордановой кривой* // Известия вузов, Математика. — 1983. – № 12. — С. 30–38.

5. Стейн И. *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.* – М.:, Мир, 1973. — 342 с.

INTEGRATION OVER NON-RECTIFIABLE PATHS OF STRONG ROTATION WITH APPLICATIONS

B.A. Kats

A number of contemporary publications are deling with transfer of the concept of curvilinear integration on non-rectifiable contours and applications of this concept to solving of boundary-value problems for analytic functions. There are obtained various important results in this field, but untill now there are known classes of arcs for which satisfactory theory of integration is not developed. In the present report, we discuss recent achievements concerning these problems.

Keywords: non-rectifiable path, strong rotation, curvilinear integral, Cauchy type integral, Riemann boundary-value problem.

УДК 517.53

СПЕКТРАЛЬНЫЙ ПОДХОД К КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ РИМАНА

Д.Б. Кац[1]

1 *katzdavid89@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Мы исследуем зависимость разрешимости однородной краевой задачи Римана на дуге от спектрального параметра. Краевая задача Римана – одна из классических краевых задач комплексного анализа (см [1]– [3] и др.). Приведем ее однородную версию. Дана *ориентированная кривая* Γ *и функция (коэффициент)* $G(t)$*, определенная на этой кривой. Нужно найти голоморфную в* $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ *функцию* $\Phi(z)$ *такую, что*

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t), \tag{1}$$

где $\Phi^\pm(t)$ *есть предельные значения* $\Phi(z)$ *при* $z \to t \in \Gamma$ *слева и справа соответственно, и* $\Phi(\infty) = 0$*. Если* Γ *– замкнутая жорданова кривая, то эта формулировка означает, что предельные значения существуют, и отношение* (1) *верно в любой точке* $t \in \Gamma$*. Но если* Γ *есть жорданова дуга, то мы не можем требовать существования предельных значений, удовлетворяющих* (1) *в конечных точках* a *и* b *этой дуги. Вместо этого, в данной работе мы предполагаем, что требуемая функция ограничена в точках* a *и* b*.*

Мы также включаем в коэффициент G *краевой задачи спектральный параметр* λ*, т. е. переходим к задаче*

$$\Phi^+(t) = \lambda G(t)\Phi^-(t), \tag{2}$$

где $\lambda \neq 0$ *есть постоянный множитель. Мы рассматриваем множество* $\mathscr{S}p(\Gamma, G)$ *всех значений* $\lambda \in \mathbb{C}_0 := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *таких, что задача* (2) *имеет нетривиальные решения, и называем его спектром задачи* (1).

Ключевые слова: краевая задача Римана, неспрямляемые кривые, неспрямляемая кривая, неспрямляемость, фрактал, фракталы.

Работа выполнено при поддержке РФФИ (грант 18-31-00060) и согласно специальной программе Российского правительства, поддерживающей исследования в Казанском федеральном университете.

Литература

1. Гахов Ф.Д. *Краевый задачи.* – Москва: Наука, 1977.
2. Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения.* – Москва: Наука, 1968.
3. Jian-Ke Lu *Boundary value problems for analytic functions.* – Singapore: World Scientific, 1993.

SPECTRAL APPROACH TO THE RIEMANN BOUNDARY VALUE PROBLEM

D.B. Katz

We study the dependance of the solvability of the Riemann boundary value problem on arc on a spectral parameter. The Riemann boundary value problem is one of the classical problems of complex analysis. Let us cosider its homogenous statement. We have an oriented curve Γ *and a function* $G(t)$ *defined on this curve. We seek for holomorphic in* $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ *function* $\Phi(z)$ *such that*

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t), \tag{3}$$

where $\Phi^\pm(t)$ *are the limit values of* $\Phi(z)$ *when* $z \to t \in \Gamma$ *from the left and from the right, respectively, and* $\Phi(\infty) = 0$*. If* Γ *is a closed Jordan curve then this formulation means that the limit values exist and the relation* (1) *is valid in any point* $t \in \Gamma$*. But if* Γ *is a Jordan arc, we cannot require the existence of the limit values which satisfy* (1) *at the end points* a *and* b *of this arc. Instead of this, we assume that the desired function is bounded at the points* a *and* b*.*

We also include the spectral parameter λ *into the coefficient* G *of the boundary value problem, i. e. we get to the problem*

$$\Phi^+(t) = \lambda G(t)\Phi^-(t), \tag{4}$$

where $\lambda \neq 0$ *is a constant factor. We consider the set* $\mathscr{S}p(\Gamma, G)$ *of all values* $\lambda \in \mathbb{C}_0 := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *such that problem* (2) *has a non-trivial solution and call it the spectrum of problem* (1).

The research is supported by RFBR (grant 18-31-00060) and a special programme of the Russian government supporting research at Kazan Federal University.

Keywords: Riemann boundary value problem, non-rectifiable curve, non-rectifiability, fractal.

УДК 517.547

НЕРАВЕНСТВО БОРА ДЛЯ ОПЕРАТОРА ЧЕЗАРО

И.Р. Каюмов[1], Д.М. Хамматова[2], С. Поннусами[3]

1 *ikayumov@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

2 *dianalynx@rambler.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

3 *samy@iitm.ac.in*; Индийский технологический институт Мадраса, отделение математики

Получен аналог теоремы Бора для оператора Чезаро, действующего на пространстве функций, голоморфных и ограниченных в единичном круге. Также изучено асимптотическое поведение аналога суммы Бора для этого оператора.

Ключевые слова: неравенство Бора, оператор Чезаро.

Пусть $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ – единичный круг, $\mathscr{B}$ – класс всех функций, голоморфных в $\mathbb{D}$, таких, что $|f(z)| \leq 1$ в $\mathbb{D}$. Теорема Бора в её окончательном виде [1] гласит:

Теорема. *Если* $f \in \mathscr{B}$, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *и* $M_f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$, *то* $M_f(r) \leq 1$ *для* $r \leq 1/3$ *и константа* $1/3$ *не может быть улучшена.*

В более общем случае можно рассматривать величину

$$m(r) = \sup \frac{M_f(r)}{\|f\|_\infty},$$

где супремум берётся по всем ограниченным и аналитическим в $\mathbb{D}$ функциям $f \not\equiv 0$.

Существует много работ, исследующих величину $m(r)$. Так, Бомбьери [2] доказал, что

$$m(r) = \frac{3 - \sqrt{8(1-r^2)}}{r} \ \text{ для } \ 1/3 \leq r \leq 1/\sqrt{2}.$$

Наиболее простая оценка для $m(r)$, верная для любого r, следует из неравенства Коши-Буняковского:

$$M_f(r) \leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=0}^{\infty} r^{2k}\right)^{1/2} \leq \frac{\|f\|_\infty}{\sqrt{1-r^2}}.$$

В 2004 году Бомбьери и Бургейну [3] удалось показать, что это неравенство является строгим, то есть, что $m(r) < \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}$ для $r > 1/\sqrt{2}$.

В той же работе было исследовано асимптотическое поведение $m(r)$ при $r \to 1$. Оказалось, что для любого $\varepsilon > 0$ существует константа $c(\varepsilon)$, такая, что

$$m(r) \geq (1-r^2)^{-1/2} - \left(c \log \frac{1}{1-r}\right)^{3/2+\varepsilon} \quad r \to 1.$$

Большое количество результатов, связанных с неравенством Бора в различных постановках, можно найти в работах [4–7].

В представленной статье получен аналог неравенства Бора для оператора Чезаро ([8], [9]), который для функции $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, голоморфной в $\mathbb{D}$, может быть определён следующим образом:

$$\mathscr{C} f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k \right) z^n = \int_0^1 \frac{f(tz)}{1-tz}\, dt.$$

Сумма Бора для оператора Чезаро принимает вид

$$\mathscr{C} M_f(r) := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} |a_k| \right) r^n.$$

Следует обратить внимание, что для всех $r \in [0,1)$ верно следующее неравенство:

$$|\mathscr{C} f(z)| \leq \frac{1}{r} \log \frac{1}{1-r}.$$

Тогда естественным аналогом теоремы Бора для оператора Чезаро является следующая

Теорема 1. *Пусть* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathscr{B}$. *Тогда*

$$\mathscr{C} M_f(r) \leq \frac{1}{r} \log \frac{1}{1-r}$$

для $r \leq R$, *где* $R = 0.5335...$ *– положительный корень уравнения* $2x = 3(1-x)\log\frac{1}{1-x}$. *Число* R *не может быть улучшено.*

Также интересной задачей является исследование асимптотического поведения $\mathscr{C} M_f(r)$ при $r \to 1$. Получен следующий результат:

Теорема 2. *Пусть* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathscr{B}$. *Тогда для* $r \in [0,1)$ *выполняется неравенство*

$$\mathscr{C} M_f(r) \leq \frac{1}{r} \sqrt{\frac{1+r}{1-r} \log(1+r) + \log(1-r)}.$$

Полученная оценка верна для всех $r \in [0,1)$. Для r, близких к единице, имеем

$$\mathscr{C} M_f(r) \leq \frac{\sqrt{2\log 2}}{\sqrt{1-r}} \approx \frac{1.17741}{\sqrt{1-r}}.$$

На данный момент удалось найти пример, дающий оценку

$$\mathscr{C}M_f(r) \approx \frac{1.13808\ldots}{\sqrt{1-r}} \quad \text{при} \quad r \to 1.$$

Работа И.Р. Каюмова и Д.М. Хамматовой выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 18-11-00115). Работа Поннусами С. выполнена при финансовой поддержке центра Mathematical Research Impact Centric Support of DST, Индия (проект MTR/2017/000367).

Литература

1. Bohr H. *A theorem concerning power series* // Proc. London Math. Soc. – 1914. – № 13, Vol. 2. – P. 1–5.

2. Bombieri E. *Sopra un teorema di H. Bohr e G. Ricci sulle funzioni maggioranti delle serie di potenze* // Boll. Unione Mat. Ital. – 1962. – № 17. – P. 276–282.

3. Bombieri E., Bourgain J. *A remark on Bohr's inequality* // IMRN International Mathematics Research Notices. – 2004. – № 80. – P. 4307–4330.

4. Ali R.M., Barnard R.W., Solynin A.Yu. *A note on the Bohr's phenomenon for power series* // J. Math. Anal. Appl. – 2017. – № 449, Vol. 1. – P. 154–167.

5. Kayumov I.R., Ponnusamy S. *Bohr inequality for odd analytic functions* // Comput. Methods Funct. Theory. – 2017. – № 17. – P. 679–688.

6. Kayumov I.R., Ponnusamy S. *Improved version of Bohr's inequality* // Comptes Rendus Mathematique. – 2018. – № 356, Vol. 3. – P. 272–277.

7. Kayumov I.R., Ponnusamy S. *Bohr's inequalities for the analytic functions with lacunary series and harmonic functions* // J. Math. Anal. and Appl. – 2018. – № 465. – P. 857–871.

8. Hardy G.H., Littlewood J.E. *Some properties of fractional integrals II* // Math. Z. – 1932. – № 34. – P. 403–439.

9. Stempak K. *Cesáro averaging operators* // Proc. Royal Soc. of Edinburgh. – 1994. – № 124A. – P. 121–126.

ON THE BOHR INEQUALITY FOR THE CESÁRO OPERATOR

I.R. Kayumov, D.M. Khammatova, S. Ponnusamy

We investigate an analog of Bohr's results for the Cesáro operator acting on the space of holomorphic functions defined on the unit disk. Asymptotical behaviour of the corresponding Bohr's sum is also estimated.

Keywords: Bohr inequality, Cesáro operator.

УДК 517.538.5

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА – ПАДЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Е.П. Кечко[1]

1 *ekechko@gmail.com*; Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

Для системы $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^3$, где $\{\lambda_j\}_{j=1}^3$ – различные и отличные от нуля комплексные числа, найдена скорость сходимости аппроксимаций Эрмита – Паде 2-го рода. Сформулированные теоремы дополняют результаты, полученные ранее О. Перроном, Д. Браессом, А. И. Аптекаревым, А. П. Старовойтовым и др.

Ключевые слова: совместные аппроксимации Паде, аппроксимации Эрмита – Паде 2-го рода, асимптотические равенства.

Рассмотрим систему $\vec{f} = \{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$, где $\{\lambda_j\}_{j=1}^k$ – различные не равные нулю комплексные числа. Для индекса $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ и мультииндекса $\vec{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_k)$, $m_j \in \mathbb{N}_0$ существуют многочлены $Q_{n,\vec{m}}(z) = Q_{n,\vec{m}}(z; \vec{f}) \not\equiv 0$, $P^j_{n,\vec{m}}(z) = P^j_{n,\vec{m}}(z; \vec{f})$, $j = 1, 2, \ldots, k$; $\deg Q_{n,\vec{m}} \leqslant m$, $\deg P^j_{n,\vec{m}} \leqslant n_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$, удовлетворяющие условиям

$$R^j_{n,\vec{m}}(z; \vec{f}) = Q_{n,\vec{m}}(z) e^{\lambda_j z} - P^j_{n,\vec{m}}(z) = O(z^{n+|m|+1}),\ z \to 0, \tag{1}$$

где $|m| = \sum_{i=1}^k m_i$, $n_j = n + |m| - m_j$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Тем самым единственным образом определены рациональные функции

$$\pi^j_{n,\vec{m}}(z) = \pi^j_{n,\vec{m}}(z; \vec{f}) = \frac{P^j_{n,\vec{m}}(z)}{Q_{n,\vec{m}}(z)},\ j = 1, 2, \ldots, k,$$

которые называются *аппроксимациями Эрмита – Паде 2-го рода* (или *совместными аппроксимациями Паде*), а многочлены $Q_{n,\vec{m}}(z)$, $P^1_{n,\vec{m}}(z)$, …, $P^k_{n,\vec{m}}(z)$ – *многочленами Эрмита – Паде 2-го рода*. Диагональному случаю соответствует набор индексов $n = m_1 = \ldots = m_k$.

Многочлены Эрмита – Паде 2-го рода для системы $\vec{f} = \{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$ были введены Ш. Эрмитом в работе [1], посвященной доказательству трансцендентности числа e. Им также были найдены явные выражения для многочленов и остаточной функции, удовлетворяющие условиям (1): если $\vec{f} = \{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^k$, то

$$Q_{n,\vec{m}}(z) = \frac{z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!} \int_0^{+\infty} \left[x^n \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i} \right] e^{-xz} dx, \tag{2}$$

$$P^j_{n,\vec{m}}(z) = \frac{e^{\lambda_j z} z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!} \int_{\lambda_j}^{+\infty} \left[x^n \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i} \right] e^{-xz} dx, \tag{3}$$

$$R^j_{n,\vec{m}}(z) = \frac{e^{\lambda_j z} z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!} \int_0^{\lambda_j} \left[x^n \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i} \right] e^{-xz} dx,\ j = 1, 2, \ldots, k.$$

В (2) и (3) $\operatorname{Re} z > 0$. В случае $\operatorname{Re} z \leqslant 0$ значения многочленов $Q_{n,\vec{m}}(z)$ и $P^{j}_{n,\vec{m}}(z)$ определяются с помощью аналитического продолжения.

В случае $k = 1$ А. Паде [2] и О. Перрон [3] доказали, что на компактах из $\mathbb{C}$ дроби $\pi_{n,m}(z)$ равномерно сходятся к e^z при $n/m \to \gamma$, $0 \leqslant \gamma \leqslant +\infty$ и при $n+m \to \infty$, соответственно. На основе результата численного эксперимента Г. Мейнардус сформулировал гипотезу об асимптотике поведения разности $e^z - \pi_{n,m}(z)$. Её решение получил Д. Браесс [4], доказав следующее утверждение: *для любого комплексного z при $n+m \to \infty$*

$$e^z - \pi_{n,m}(z) = (-1)^m \frac{m!n!e^{2mz/(n+m)}}{(n+m)!(n+m+1)!} z^{n+m+1}(1+o(1)).$$

Е. М. Никишиным была поставлена задача об исследовании сходимости совместных аппроксимаций Паде для системы $\vec{f} = \{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^{k}$, где λ_j – различные отличные от нуля комплексные числа. Решение данной задачи было получено А. И. Аптекаревым [5]: *для любого $z \in \mathbb{C}$ при $n + |m| \to +\infty$*

$$Q_{n,\vec{m}}(z) = \exp\left\{ -\frac{\sum_{j=1}^{k} \lambda_j m_j}{n+|m|} z \right\}(1+o(1)), \tag{4}$$

а дроби $\pi^{j}_{n,\vec{m}}(z; e^{\lambda_j \xi})$ сходятся к $e^{\lambda_j z}$ равномерно на компактах в $\mathbb{C}$.

Отметим, что за исключением очень частных случаев (см. [6–8]), до сих пор не известно, какова скорость сходимости аппроксимаций Эрмита – Паде 2-го рода (подробнее см. [8]).

В данной работе сформулированы теоремы об асимптотике остаточной функции и о скорости сходимости аппроксимаций Эрмита – Паде 2-го рода, охватывающие в том числе и недиагональный случай. Методы, применяемые при изучении асимптотических свойств диагональных аппроксимаций Эрмита – Паде, в общем случае не столь эффективны. Поэтому при доказательстве теорем применяется новый подход, который опирается на теорему Тейлора и эвристические соображения, лежащие в основе методов Лапласа и перевала (см. [9]).

Сформулируем основные результаты.

Теорема 1. *Пусть $\vec{m} = (m_1, m_2, m_3)$ и n, m_1, m_2, m_3 – произвольные целые неотрицательные числа, а $\vec{f} = \{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^{3}$, где $\{\lambda_j\}_{j=1}^{3}$ – различные и отличные от нуля комплексные числа. Тогда если $\lim\limits_{n\to\infty} |m|/\sqrt{n} = 0$, то для любого комплексного числа $|z| \leqslant L$ равномерно по всем $|m|$, $0 \leqslant |m| \leqslant m(n)$, при $n \to +\infty$*

$$R^{1}_{n,\vec{m}}(z) = (-1)^{|m|} \frac{\lambda_1^{n+m_1+1}(\lambda_2-\lambda_1)^{m_2}(\lambda_3-\lambda_1)^{m_3} m_1! n! z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!(n+m_1+1)!} e^{\frac{\lambda_1(m_1+1)}{n+m_1+2} z}(1+o(1)),$$

$$R^{2}_{n,\vec{m}}(z) = (-1)^{|m|} \frac{\lambda_2^{n+m_2+1}(\lambda_1-\lambda_2)^{m_1}(\lambda_3-\lambda_2)^{m_3} m_2! n! z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!(n+m_2+1)!} e^{\frac{\lambda_2(m_2+1)}{n+m_2+2} z}(1+o(1)),$$

$$R^{3}_{n,\vec{m}}(z) = (-1)^{|m|} \frac{\lambda_3^{n+m_3+1}(\lambda_1-\lambda_3)^{m_1}(\lambda_2-\lambda_3)^{m_2} m_3! n! z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!(n+m_3+1)!} e^{\frac{\lambda_3(m_3+1)}{n+m_3+2} z}(1+o(1)).$$

С учетом (4) из теоремы 1 следует

Теорема 2. *Пусть n, m_1, m_2, m_3 – произвольные целые неотрицательные числа, а $\pi^j_{n,\vec{m}}(z)$, $j = 1,2,3$ – аппроксимации Эрмита – Паде для $\vec{f} = \{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^3$, где $\{\lambda_j\}_{j=1}^3$ – различные и отличные от нуля комплексные числа. Тогда если $\lim\limits_{n\to\infty} |m|/\sqrt{n} = 0$, то для любого комплексного числа z равномерно по всем $|m|$, $0 \leqslant |m| \leqslant m(n)$, при $n \to +\infty$*

$$e^{\lambda_1 z} - \pi^1_{n,\vec{m}}(z) = (-1)^{|m|} \frac{\lambda_1^{n+m_1+1}(\lambda_2-\lambda_1)^{m_2}(\lambda_3-\lambda_1)^{m_3} m_1! n! z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!(n+m_1+1)!} \times$$
$$\times e^{\frac{\lambda_1(m_1+1)}{n+m_1+2}z} e^{\frac{\lambda_1 m_1+\lambda_2 m_2+\lambda_3 m_3}{n+|m|}z}(1+o(1)),$$

$$e^{\lambda_2 z} - \pi^2_{n,\vec{m}}(z) = (-1)^{|m|} \frac{\lambda_2^{n+m_2+1}(\lambda_1-\lambda_2)^{m_1}(\lambda_3-\lambda_2)^{m_3} m_2! n! z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!(n+m_2+1)!} \times$$
$$\times e^{\frac{\lambda_2(m_2+1)}{n+m_2+2}z} e^{\frac{\lambda_1 m_1+\lambda_2 m_2+\lambda_3 m_3}{n+|m|}z}(1+o(1)),$$

$$e^{\lambda_3 z} - \pi^3_{n,\vec{m}}(z) = (-1)^{|m|} \frac{\lambda_3^{n+m_3+1}(\lambda_1-\lambda_3)^{m_1}(\lambda_2-\lambda_3)^{m_2} m_3! n! z^{n+|m|+1}}{(n+|m|)!(n+m_3+1)!} \times$$
$$\times e^{\frac{\lambda_3(m_3+1)}{n+m_3+2}z} e^{\frac{\lambda_1 m_1+\lambda_2 m_2+\lambda_3 m_3}{n+|m|}z}(1+o(1)).$$

Доказательства теорем аналогичны доказательствам соответствующих теорем из работ [8, 10]. Полученные результаты согласуются с ранее известными результатами [4, 7, 8, 10].

Работа выполнена при финансовой поддержке БРФФИ (проект Ф18М-025).

Литература

1. Hermite C. *Sur la fonction exponentielle* // C.R. Acad. Sci. – 1873. – Vol. 77. – P. 18–24, 74–79, 226–233, 285–293.

2. Бейкер Дж. мл., Грейвс-Моррис П. *Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения.* – М.: Мир, 1986. – 502 с.

3. Perron O. *Die Lehre von den Kettenbrüchen.* – Leipzig: Teubner, 1929. – 524 p.

4. Braess D. *On the conjecture of Meinardus on rational approximation of e^z, II* // J. Approx.Theory. – 1984. – Vol. 40, № 4. – P. 375–379.

5. Аптекарев А. И. *О сходимости рациональных аппроксимаций к набору экспонент* // Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика. Механика. – 1981. – № 1. – С. 68–74.

6. Kuijlaars A. B. J., Stahl H., Van Assche W., Wielonsky F. *Type II Hermite – Padé approximation to the exponential function* // J. of Comput. and Appl. Math. – 2007. – Vol. 207, № 2. – P. 227–244.

7. Старовойтов А. П. *Эрмитовская аппроксимация двух экспонент* // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Математика. Механика. Информатика. – 2013. – Т. 13, Вып. 1, ч. 2. – С. 88–91.

8. Старовойтов А. П. *Аппроксимации Эрмита – Паде функций Миттаг-Леффлера* // Труды МИАН. – 2018. – Т. 301. – С. 241–258.

9. Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. *Лекции по теории функций комплексного переменного: учеб. для вузов.* – М.: Наука, 1989. – 480 с.

10. Кечко Е. П., Сидорцов М. В. *Асимптотика аппроксимаций Эрмита – Паде системы трех экспонент* // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. Сер. Естественные науки. – 2019. – №3 (144). – С. 158–162.

ABOUT THE CONVERGENCE RATE OF HERMITE – PADÉ APPROXIMATIONS
OF EXPONENTIAL FUNCTIONS

E.P. Kechko

The convergence rate of type II Hermite – Padé approximants for system $\{e^{\lambda_j z}\}_{j=1}^3$, where $\{\lambda_j\}_{j=1}^3$ are different nonzero complex numbers, is found. The theorems, proved in the paper, complement the results obtained earlier by O. Perron, D. Braess, A. I. Aptekarev, A. P. Starovoitov, and other authors.

Keywords: simultaneous Padé approximations, type II Hermite – Padé approximations, asymptotic equalities.

УДК 517.544

АНАЛОГ ФОРМУЛЫ ОСТРОГРАДСКОГО-ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ТУРАВНЕНИЙ В ТЕОРИИ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ КУСОЧНО-АНАЛИТИЧЕСКОГО ВЕКТОРА

С.Н. Киясов[1]

1 *sergey.kijasov@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Проведена аналогия между теорией обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и теорией задачи линейного сопряжения для кусочно-аналитического вектора.

Ключевые слова: матрица-функция, задача линейного сопряжения, факторизация.

В курсе обыкновенных дифференциальных уравнений приводится обоснование формулы Остроградского-Лиувилля, согласно которой если у линейного однородного уравнения с непрерывными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0$$

порядка n известно $n-1$ линейно независимое решение $y_1(x), \ldots, y_{n-1}(x)$, то функцию $y(x)$, дополняющую эту систему решений до фундаментальной, можно определить методом вариации постоянных как решение неоднородного линейного уравнения порядка $n-1$:

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & \dots & y_{n-1}(x) & y(x) \\ y_1'(x) & \dots & y_{n-1}'(x) & y'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x) & \dots & y_{n-1}^{(n-1)}(x) & y^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} = Ce^{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)\mathrm{d}t},$$

где C – некоторая постоянная, а функции $y_1(x),\dots,y_{n-1}(x)$ составляют фундаментальную систему решений соответствующего однородного уравнения.

Пусть Γ – простой гладкий замкнутый контур, разбивающий плоскость комплексного переменного на две области D^+ и D^- ($0 \in D^+$, $\infty \in D^-$), $G(t)$ – H–непрерывная на Γ матрица–функция порядка n, $\det G(t) \neq 0$, $t \in \Gamma$.

Однородная задача линейного сопряжения для n–мерного вектора (векторная задача Римана–Гильберта) состоит в отыскании кусочно–аналитической вектор–функции $\mathbf{w}(z) = \left(w^1(z), w^2(z), \dots, w^n(z)\right)$ заданного порядка на бесконечности с H–непрерывными на Γ предельными значениями $\mathbf{w}^{\pm}(t)$, связанными условием

$$\mathbf{w}^+(t) = G(t)\mathbf{w}^-(t). \tag{1}$$

Предположим, что у этой задачи известно $n-1$ решение без конечных полюсов

$$\mathbf{w}_i(z) = \left(w_i^1(z), w_i^2(z), \dots, w_i^n(z)\right), i = \overline{1, n-1}, \tag{2}$$

имеющие на бесконечности некоторые порядки $k_i, i = \overline{1, n-1}$ соответственно (положительный порядок означает порядок полюса).

Искомую каноническую систему решений задачи обозначим

$$\mathbf{v}_k(z) = \left(v_k^1(z), v_k^2(z), \dots, v_k^n(z)\right), k = \overline{1, n} \tag{3}$$

($\mathbf{v}_k(z)$ имеет на бесконечности порядок $(-\kappa_k)$, $k = \overline{1, n}$). Целые числа κ_k — частные индексы матрицы–функции $G(t)$ – будем считать упорядоченными по убыванию $\kappa_1 \geq \kappa_2 \geq \dots \geq \kappa_n$ ($\kappa_1 + \kappa_2 + \dots + \kappa_n = \kappa = \operatorname{ind}\det G(t)$ — суммарный индекс $G(t)$).

В работе [1] получена формула (аналог формулы Остроградского-Лиувилля), которая в случае нулевого суммарного индекса имеет вид

$$\begin{vmatrix} v_k^1(z) & w_1^1(z) & \dots & w_{n-1}^1(z) \\ v_k^2(z) & w_1^2(z) & \dots & w_{n-1}^2(z) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ v_k^n(z) & w_1^n(z) & \dots & w_{n-1}^n(z) \end{vmatrix} = p_k(z)\exp\left(\int_\Gamma \frac{\ln[\det \mathrm{G}(\tau)]}{\tau - \mathrm{z}}\mathrm{d}\tau\right), \mathrm{k} = \overline{1, \mathrm{n}}. \tag{4}$$

Здесь $p_k(z)$ – некоторые полиномы, выражаемые через коэффициенты разложения решений (2) по функциям канонической системы решений (3) (в случае $\kappa \neq 0$, $\det G(\tau)$ заменяется на $\tau^{-\kappa}\det G(\tau)$, а перед экспонентой при $z \in D^-$ следует поставить множитель $z^{-\kappa}$).

Используя формулу (4), и вводя новую неизвестную вектор–функцию, при определенных предположениях относительно решений (2), задача (1) приводим к $(n-1)$-мерной неоднородной задаче линейного сопряжения с матрицей-функцией аналитически продолжимой в область D^+, из которой получены представления для $(n-1)$ компоненты соответствующей функции $\mathbf{v}_k(z)$ канонической системы решений (3). Представление для оставшейся компоненты следует из формулы (4).

Приведены оценки для степеней неопределенных полиномов $p_k(z)$, $k=\overline{1,n}$, и указан алгоритм построения системы (3).

Отметим, что результат подобного вида, основанный на “операторном подходе” к исследованию задачи (1), получен в работе [2].

Литература

1. Киясов С. Н. *Об одном дополнении к общей теории задачи линейного сопряжения для кусочно аналитического вектора* // Сиб. матем. журн. – 2018. – Т. 59. – № 2. – С. 369–377.

2. Camara M.C., Rodman L., Spitkovsky I.M. *One sided invertibility of matrices over commutative rings. corona problems, and Toeplitz operators with matrix symbols* // Linear Algebra Appl. – 2014. – V. 459. – P. 58–82.

AN ANALOGUE OF THE OSTROGRADSKY-LIOUVILLE FORMULA FOR ORDINARY LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE THEORY OF THE LINEAR CONJUGATION PROBLEM FOR A PIECEWISE ANALYTIC VECTOR

S.N. Kiyasov

We establish an analogy between the theory of ordinary linear differential equations and the theory of the linear conjugation problem for a piecewise analytic vector.

Keywords: matrix-function, linear conjugation problem, factorization.

УДК 517.518.234 + 517.548.3

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ВТОРОГО РОДА ДЛЯ РЕШЕНИЙ ОБЩИХ ЛИНЕЙНЫХ РАВНОМЕРНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ

С.Б. Климентов[1]

1 *sbklimentov@sfedu.ru*; Южный федеральный университет, ЮМИ ВНЦ РАН

В работе рассматриваются представления второго рода для решений соболевских классов общей равномерно эллиптической системы первого порядка в односвязной ограниченной плоской области G с границей класса $W_p^{k-\frac{1}{p}}$. Установлено, что при подходящих предположениях о коэффициентах системы и границе области используемые при этом операторы есть изоморфизмы банаховых пространств $W_p^k(\overline{G})$, $k \ge 1$, $p > 2$. Эти результаты являются новыми даже для решений канонической эллиптической системы первого порядка (обобщённых аналитических функций в смысле И.Н. Векуа).

Ключевые слова: эллиптические линейные системы первого порядка, обобщённые аналитические функции, представление решений.

Обозначим через G, $\partial G = \mathscr{L}$, ограниченную односвязную область в комплексной ζ−плоскости. В статье используются следующие стандартные функциональные пространства со стандартными нормами в них: $C_\alpha^k(\overline{G})$, $k \ge 0$, $0 < \alpha < 1$, $W_p^k(\overline{G})$, $p > 2$, пространство $W_p^{k-\frac{1}{p}}(\mathscr{L})$ следов функций из $W_p^k(\overline{G})$.

Будем говорить, что контур $\mathscr{L} \in C_\alpha^k$, $k \ge 1$, $0 < \alpha \le 1$ ($W_p^{l-\frac{1}{p}}(\mathscr{L})$, $l \ge 2$, $p > 2$), если существует гомеоморфное отображение $\zeta = f(z)$ окружности Γ на $\mathscr{L}$ класса

$C_\alpha^k(\Gamma)$ $(W_p^{l-\frac{1}{p}}(\Gamma))$ такое, что $f'(z)\neq 0$. Отметим, что при этом обратное отображение $z=f^{-1}(\zeta)$ будет класса $C_\alpha^k(\mathscr{L})$ $(W_p^{l-\frac{1}{p}}(\mathscr{L}))$. В этом случае отображение $\zeta=f(z)$ (как и обратное) называют диффеоморфизмом класса C_α^k $(W_p^{l-\frac{1}{p}})$ контуров Γ и $\mathscr{L}$. Аналогично определяется диффеоморфизм любых контуров соответствующей гладкости.

Рассмотрим в области G, $\partial G=\mathscr{L}$, ζ-плоскости общую линейную эллиптическую систему первого порядка в комплексной записи

$$\mathscr{D}w \equiv \partial_{\bar\zeta}w + q_1(\zeta)\partial_\zeta w + q_2(\zeta)\partial_{\bar\zeta}\overline{w} + A(\zeta)w + B(\zeta)\overline{w} = R(\zeta), \tag{1}$$

где $\zeta=\xi+i\eta$, $w=w(\zeta)=u(\zeta)+iv(\zeta)$ — искомая комплексная функция, $\partial_{\bar\zeta}=1/2(\partial/\partial\xi+i\partial/\partial\eta)$, $\partial_\zeta=1/2(\partial/\partial\xi-i\partial/\partial\eta)$,— производные в смысле Соболева, $q_1(\zeta)$ и $q_2(\zeta)$ — заданные измеримые комплексные функции, удовлетворяющие условию равномерной эллиптичности системы (1):

$$|q_1(\zeta)|+|q_2(\zeta)|\leq q_0=\mathrm{const}<1,\ \zeta\in\overline{G},$$

$A(\zeta)$, $B(\zeta)$, $R(\zeta)\in L_p(\overline{G})$, $p>2$, — также заданные комплексные функции.

Обозначим

$$Tf(\zeta)=T_Gf(\zeta)=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_G \frac{f(\tau)}{\tau-\zeta}dxdy,\quad \tau=x+iy,\ \partial_{\bar\zeta}Tf(\zeta)=f(\zeta)$$

(см. [1], там же библиографию).

Представление второго рода для решения системы (1) основано на хорошо известной формуле Помпейю [1, с. 41, 57, 69]: если $w(\zeta)\in W_p^1(\overline{G})$, $p>2$, $\partial G=\mathscr{L}\in C^1$, то

$$w(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathscr{L}}\frac{w(\tau)}{\tau-\zeta}d\tau-\frac{1}{\pi}\iint\limits_G\frac{\partial w}{\partial\bar\tau}\cdot\frac{dxdy}{\tau-\zeta},\ \tau=x+iy.$$

и имеет вид:

$$\Omega(w)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathscr{L}}\frac{w(\tau)}{\tau-\zeta}d\tau+TR(\zeta)$$

где

$$\Omega(w)\equiv w(\zeta)+T(q_1\partial_\tau w+q_2\partial_{\bar\tau}\overline{w}+Aw+B\overline{w})(\zeta).$$

При этом естественно возникает вопрос об обратимости оператора Ω. Этот вопрос в случае, когда $G=D$ — единичный круг, исследован в [2], а в случае, когда G — произвольная ограниченная односвязная область, частично изучен в [3], где установлены следующие утверждения (в процитированных статьях можно найти более подробный обзор работ на эту тему).

Теорема 1. *Если $q_1(\zeta),q_2(\zeta)\in C(\overline{G})$, $A(\zeta),B(\zeta)\in L_p(\overline{G})$, $p>2$, $\partial G=\mathscr{L}\in C_\alpha^1$, $0<\alpha<1$, то Ω — (вещественно) линейный изоморфизм банахова пространства $W_p^1(\overline{G})$.*

Теорема 2. *Если $q_1(\zeta)$, $q_2(\zeta)$, $A(\zeta)$, $B(\zeta)\in C_\alpha^k(\overline{G})$, $k\geq 0$, $0<\alpha<1$, $\partial G=\mathscr{L}\in C_\alpha^{k+1}$, то Ω — (вещественно) линейный изоморфизм банахова пространства $C_\alpha^{k+1}(\overline{G})$.*

Серьёзным осложнением при доказательстве этих теорем, по сравнению со случаем $q_1(\zeta) = q_2(\zeta) \equiv 0$, исследованным И.Н. Векуа, является то, что интегро–дифференциальный оператор $T(q_1\partial_\tau w + q_2\partial_{\bar\tau}\overline{w} + Aw + B\overline{w})$, вообще говоря, не будет вполне непрерывным в соответствующих банаховых пространствах.

Основным результатом настоящей работы, дополняющим вышеприведённые теоремы, является

Теорема 3. *Если $q_1(\zeta), q_2(\zeta), A(\zeta), B(\zeta) \in W_p^k(\overline{G})$, $k \geq 1$, $p > 2$, $\partial G = \mathscr{L} \in W_p^{k+1-\frac{1}{p}}$, то Ω — (вещественно) линейный изоморфизм банахова пространства $W_p^{k+1}(\overline{G})$.*

Приведём одно (очевидное) важное следствие теоремы 3.

Теорема 4. *В предположениях теоремы 3 для любой функции $w(z) \in W_p^k(\overline{G})$, $k \geq 1$, имеет место априорная оценка:*

$$\|w\|_{W_p^k(\overline{G})} \leq \mathrm{const}\left\{\|\mathscr{D}w\|_{W_p^{k-1}(\overline{G})} + \|w\|_{W_p^{k-\frac{1}{p}}(\mathscr{L})}\right\},$$

где const *зависит лишь от k, p и норм в $W_p^{k-1}(\overline{G})$ коэффициентов оператора $\mathscr{D}$.*

Замечание. *Следует отметить, что в случае единичного круга рассуждения для классов $C_\alpha^k(\overline{D})$ и $W_p^k(\overline{D})$ отличаются незначительно [2]. При переходе к произвольной односвязной области с границей должной регулярности это не так. Методика перехода от единичного круга к области с границей класса C_α^{k+1}, развитая в статье [3], не работает в случае границы области класса $W_p^{k+1-\frac{1}{p}}$ и решений классов $W_p^k(\overline{G})$. В настоящей работе развит другой метод такого перехода, позволяющий преодолеть возникающие здесь трудности. Метод этот ориентирован на классы Соболева и не является универсальным, он не работает в случае классов C_α^k.*

Результаты теорем 3 и 4 являются новыми даже в частном случае $q_1(\zeta) = q_2(\zeta) \equiv 0$ (для обобщённых аналитических функций в смысле И.Н. Векуа), что связано с тем, что и в этом частном случае при доказательстве необходимо использовать обобщённую теорему Келлога из [4].

Литература

1. Векуа И. Н. *Обобщённые аналитические функции.* – М.: Физматгиз, 1959. – 628 с.

2. Климентов С. Б. *Об изоморфности некоторых функциональных пространств при действии интегро–дифференциальных операторов* // Уфимский матем. журн. – 2019. – Т. 11. – № 1. – С. 39–60.

3. Klimentov S. B. *Representations of the second kind for the solutions to the first order general linear elliptic system in the simply connected plane domain* // Global and Stochastic Analysis. – 2019. – Vol. 6. – № 1.

4. Klimentov S. B. *Another version of Kellogg's theorem* // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2015. – Vol. 60. – № 12. – P. 1647–1657.

REPRESENTATIONS OF THE SECOND KIND FOR SOLUTIONS TO GENERAL LINEAR UNIFORMLY ELLIPTIC SYSTEMS IN THE PLANE

S.B. Klimentov

The representations of the second kind for solutions to first order general elliptic linear systems in the *simply connected plane domain G are considered. We assume that the boundary of the domain is from* $W_p^{k-\frac{1}{p}}$, $k \geq 1$, $p > 2$. *We prove that the used operator is an isomorphism of the Banach space* $W_p^{k+1}(\overline{G})$, *when the coefficients of the system belong to* $W_p^k(\overline{G})$.

Keywords: elliptic linear systems of the first order, generalized analytic functions, representations of the solutions.

УДК 517.956.25

О РЕНОРМАЛИЗОВАННЫХ РЕШЕНИЯХ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ С ДАННЫМИ В ВИДЕ МЕРЫ

Л.М. Кожевникова[1]

1 *kosul@mail.ru*; Башкирский государственный университет, Стерлитамакский филиал

В статье рассмотрен некоторый класс эллиптических уравнений второго порядка с переменным ростом и правой частью в виде меры Радона. Доказано существование ренормализованного решения задачи Дирихле для любой радоновой меры с ограниченной полной вариацией.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение, ренормализованное решение, существование решения, мера Радона, емкость, переменный показатель.

Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n = \{\mathrm{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$, $n \geq 2$. В работе рассматривается задача Дирихле для уравнения вида

$$-\operatorname{div}\mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) + a(\mathrm{x}, u) = \mu, \quad \mathrm{x} \in \Omega, \tag{1}$$

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0, \tag{2}$$

где μ — мера Радона с ограниченной полной вариацией.

Понятие ренормализованного решения служит основным шагом для изучения эллиптических уравнений с данными в виде меры. Первое определение ренормализованного решения уравнения

$$-\operatorname{div}\mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) = \mu, \quad \mathrm{x} \in \Omega, \tag{3}$$

дано в работе [1]. Здесь $u \to -\operatorname{div}\mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u)$ — монотонный оператор, определенный в пространстве Соболева $\mathring{W}_p^1(\Omega)$, $1 < p \leq n$. Существование ренормализованного решения задачи Дирихле (2), (3) получено с помощью аппроксимаций как следствие результата устойчивости. Ключевым моментом доказательства является результат сильной сходимость срезок в пространстве $\mathring{W}_p^1(\Omega)$. В работе [2] предоставлено другое доказательство результата устойчивости, не требующее сильной сходимости срезок в энергетическом пространстве.

В настоящей работе доказывается существование ренормализованного решения задачи Дирихле (1), (2) для оператора $u \to -\operatorname{div}\mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u)$, определенного в пространстве Соболева с переменным показателем $\mathring{W}_{p(\cdot)}^1(\Omega)$, $1 < p(\cdot) < n$. А именно, обобщаются результаты, полученные в работе [1], в контексте постоянной $p(\cdot) \equiv p$.

Для измеримой функции $p(\cdot):\Omega\to\mathbb{R}$ положим $p_-=\inf\limits_{x\in\Omega}p(x)$, $p_+=\sup\limits_{x\in\Omega}p(x)$. Для двух измеримых ограниченных функций $p(\cdot),q(\cdot):\Omega\to\mathbb{R}$ будем писать $q(\cdot)\ll p(\cdot)$, если $(p-q)_->0$.

Будем считать, что $p(\cdot):\Omega\to\mathbb{R}$ измеримая функция такая, что

$$\begin{cases} \exists\, C>0: |p(x)-p(y)|\le -\frac{C}{\ln|x-y|}, \quad x,y\in\Omega, \quad |x-y|\le \frac{1}{2};\\ 1<p_-\le p_+<n. \end{cases} \tag{4}$$

Через

$$p'(\cdot)=\frac{p(\cdot)}{p(\cdot)-1}, \quad p^*(\cdot)=\frac{np(\cdot)}{n-p(\cdot)}$$

обозначим сопряженный показатель и критический показатель Соболева, соответственно.

Определим лебегово пространство с переменным показателем $L_{p(\cdot)}(\Omega)$ как множество измеримых на Ω вещественнозначных функций v таких, что:

$$\rho_{p(\cdot)}(v)=\int\limits_{\Omega}|v(x)|^{p(x)}dx<\infty$$

с нормой Люксембурга

$$\|v\|_{L_{p(\cdot)}(\Omega)}=\|v\|_{p(\cdot)}=\inf\left\{k>0\;\Big|\;\rho_{p(\cdot)}(v/k)\le 1\right\}.$$

Пространство Соболева с переменным показателем $\mathring{W}^1_{p(\cdot)}(\Omega)$ определим как пополнение пространства $C_0^\infty(\Omega)$ по норме

$$\|v\|_{W^1_{p(\cdot)}(\Omega)}=\|v\|_{p(\cdot)}+\|\nabla v\|_{p(\cdot)}.$$

Множество всех мер Радона с ограниченной полной вариацией обозначим через $\mathcal{M}_b(\Omega)$. Мера $\mu\in\mathcal{M}_b(\Omega)$ называется диффузной (абсолютно непрерывной) по емкости $\mathrm{Cap}_{p(\cdot)}$ ($p(\cdot)$–емкости), если $\mu(B)=0$ для любого борелевского множества $B\subseteq\Omega$ такого, что $\mathrm{Cap}_{p(\cdot)}(B,\Omega)=0$. Здесь $p(\cdot)$–емкость компакта K по отношению к Ω определяется формулой

$$\mathrm{Cap}_{p(\cdot)}(K,\Omega)=\inf_{S_{p(\cdot)}(K)}\int\limits_{\Omega}|\nabla v|^{p(x)}dx, \quad S_{p(\cdot)}(K)=\left\{v\in C_0^\infty(\Omega)\;\Big|\;v\ge\chi_K\right\},$$

где χ_K — характеристическая функция множества K. Тогда $p(\cdot)$–емкость борелевского множества $B\subset\Omega$ по отношению к Ω определяется равенством

$$\mathrm{Cap}_{p(\cdot)}(B,\Omega)=\sup\{\mathrm{Cap}_{p(\cdot)}(K,\Omega)\;\Big|\;B\supset K,\ K\ \text{компакт}\}.$$

Через $\mathcal{M}_{0,p(\cdot)}(\Omega)$ обозначим множество всех мер $\mu\in\mathcal{M}_b(\Omega)$ диффузных по $p(\cdot)$-емкости. В работах [3], [4] доказано, что $\mu\in\mathcal{M}_{0,p(\cdot)}(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $\mu\in L_1(\Omega)+W^{-1}_{p'(\cdot)}(\Omega)$ ($W^{-1}_{p'(\cdot)}(\Omega)$ — пространство сопряженное к $\mathring{W}^1_{p(\cdot)}(\Omega)$).

Назовем меру $\mu\in\mathcal{M}_b(\Omega)$ сингулярной по отношению к $p(\cdot)$–емкости, если существует борелевское множество $E\subset\Omega$ такое, что $\mathrm{Cap}_{p(\cdot)}(E,\Omega)=0$ и $\mu=\mu|_E$ — ограничение μ на E. Через $\mathcal{M}_{s,p(\cdot)}(\Omega)$ обозначим множество всех мер $\mu\in\mathcal{M}_b(\Omega)$ сингулярных по $p(\cdot)$–емкости.

Любая мера $\mu \in \mathcal{M}_b(\Omega)$ может быть разложена следующим образом:

$$\mu = \mu_0 + \mu_s = f - \operatorname{div}\mathrm{f} + \mu_s^+ - \mu_s^-,$$

где $\mu_0 \in \mathcal{M}_{0,p(\cdot)}(\Omega)$ и поэтому

$$\mu_0 = f - \operatorname{div}\mathrm{f}, \quad f \in L_1(\Omega), \quad \mathrm{f} = (f_1, \dots, f_n) \in (L_{p'(\cdot)}(\Omega))^n.$$

В то время как $\mu_s \in \mathcal{M}_{s,p(\cdot)}(\Omega)$ и $\mu_s = \mu_s^+ - \mu_s^-$, где μ_s^+ и μ_s^- (положительная и отрицательная части μ_s) две неотрицательные меры в $\mathcal{M}_b(\Omega)$, которые сосредоточены на двух непересекающихся подмножества E^+ и E^- нулевой $p(\cdot)$–емкости, $E = E^+ \cup E^-$.

Предполагаем, что функции

$$\mathrm{a}(\mathrm{x}, \mathrm{s}) = (a_1(\mathrm{x}, \mathrm{s}), \dots, a_n(\mathrm{x}, \mathrm{s})) : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

$$a_0(\mathrm{x}, s_0) : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

входящие в уравнение (1), каратеодориевы. Пусть существуют неотрицательная функция $\Phi \in L_{p'(\cdot)}(\Omega)$, положительные числа $\widehat{a}, \overline{a}$ такие, что при п.в. $\mathrm{x} \in \Omega$, для всех $\mathrm{s}, \mathrm{t} \in \mathbb{R}^n$ справедливы неравенства:

$$|\mathrm{a}(\mathrm{x}, \mathrm{s})| \le \widehat{a}\left(|\mathrm{s}|^{p(\mathrm{x})-1} + \Phi(\mathrm{x})\right); \tag{5}$$

$$(\mathrm{a}(\mathrm{x}, \mathrm{s}) - \mathrm{a}(\mathrm{x}, \mathrm{t})) \cdot (\mathrm{s} - \mathrm{t}) > 0, \quad \mathrm{s} \ne \mathrm{t}; \tag{6}$$

$$\mathrm{a}(\mathrm{x}, \mathrm{s}) \cdot \mathrm{s} \ge \overline{a}|\mathrm{s}|^{p(\mathrm{x})}. \tag{7}$$

Здесь $\mathrm{s} \cdot \mathrm{t} = \sum\limits_{i=1}^{n} s_i t_i$, $\mathrm{s} = (s_1, \dots, s_n)$, $\mathrm{t} = (t_1, \dots, t_n)$.

Кроме того, пусть существует неотрицательная функция $\Phi_0 \in L_1(\Omega)$, положительное число $\widehat{a}_0$ такие, что при п.в. $\mathrm{x} \in \Omega$, для всех $s_0 \in \mathbb{R}$ справедливы неравенства:

$$|a_0(\mathrm{x}, s_0)| \le \widehat{a}_0\left(|s_0|^{p(\mathrm{x})-1} + \Phi_0(\mathrm{x})\right); \tag{8}$$

$$a_0(\mathrm{x}, s_0) s_0 \ge 0. \tag{9}$$

Определим функцию $T_k(r) = \max(-k, \min(k, r))$. Через $\mathring{\mathcal{T}}^1_{p(\cdot)}(\Omega)$ обозначим множество измеримых функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$ таких, что $T_k(u) \in \mathring{W}^1_{p(\cdot)}(\Omega)$ при любом $k > 0$. Положим $q_0(\cdot) = \frac{p^*(\cdot)}{p'_+}$.

Определение. *Пусть* $\mu \in \mathcal{M}_b(\Omega)$, $\mu = \mu_0 + \mu_s$, $\mu_0 \in \mathcal{M}_{0,p(\cdot)}(\Omega)$, $\mu_s \in \mathcal{M}_{s,p(\cdot)}(\Omega)$. *Функция* $u \in \mathring{\mathcal{T}}^1_{p(\cdot)}(\Omega)$ *называется ренормалованным решением задачи (1), (2), если выполняются следующие условия:*

1) $a_0(\mathrm{x}, u) \in L_1(\Omega)$;

2) $|\nabla u|^{p(\cdot)-1} \in L_{q(\cdot)}$, $q(\cdot) \ll \dfrac{q_0(\cdot)}{q_0(\cdot)+1} p'(\cdot)$;

3) *если* $w \in \mathring{W}^1_{p(\cdot)}(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$, *существует* $k > 0$ *и существуют функции* $w^{+\infty}, w^{-\infty} \in$

$W^1_{r(\cdot)}(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$, $r(\cdot) \gg \dfrac{q_0(\cdot)p(\cdot)}{q_0(\cdot)+1-p(\cdot)}$, *такие, что:*

$$\begin{cases} w = w^{+\infty} \text{ почти всюду при } u > k, \\ w = w^{-\infty} \text{ почти всюду при } u < -k, \end{cases}$$

тогда

$$\int\limits_{\Omega} (a_0(\mathrm{x}, u)\, w + \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) \cdot \nabla w)\, d\mathrm{x} = \int\limits_{\Omega} w\, d\mu_0 + \int\limits_{\Omega} w^{+\infty} d\mu_s^{+} - \int\limits_{\Omega} w^{-\infty} d\mu_s^{-}.$$

Основным результатом работы является

Теорема. *Пусть $\mu \in \mathscr{M}_b(\Omega)$, выполнены условия (4)–(9) и, кроме этого, пусть*

$$n < s_-, \quad s(\cdot) = \frac{p(\cdot)p_-(p(\cdot) - 1)}{p(\cdot) - p_-},$$

тогда существует ренормализованное решение задачи (1), (2).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 18-01-00428).

Литература

1. Dal Maso G., Murat F., Orsina L., Prignet A. *Renormalized solutions of elliptic equations with general measure data* // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. – 1999. – V. 28. – № 4. – P. 741–808.

2. Malusa A. *A new proof of the stability of renormalized solutions to elliptic equations with measure data* // Asymptotic Analysis. – 2005. – V. 43. – P. 111–129.

3. Nyanquini I., Ouaro S., Soma S. *Entropy solution to nonlinear multivalued elliptic problem with variable exponents and measure data* // Annals of the University of Craiova, Mathematics and Computer Science Series. – 2013. – V. 40. – № 2. – P. 1–25.

4. Zhang C. *Entropy solutions to nonlinear elliptic equations with variable exponents* // Electronic Journal of Differential Equations. – 2014. – V. 2014. – № 92. – P. 1–14.

ON RENORMALIZED SOLUTIONS OF A QUASILINEAR ELLIPTIC PROBLEM
WITH MEASURE DATA

L.M. Kozhevnikova

In the article, some class of elliptic equations of the second order with variable growth and the right part in the form of radon measure is considered. The existence of a renormalized solution of the Dirichlet problem for any radon measure with bounded total variation is proved.

Keywords: elliptic equation, renormalized solution, existence solution, Radon measure, capacity, variable exponent.

УДК 517.988

ПОЧТИ РАЗРЕШИМОСТЬ КЛАССОВ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

М.Ю. Кокурин[1]

1 *kokurinm@yandex.ru*; Марийский государственный университет

С использованием свойств выпуклости образов вполне непрерывных нелинейных интегральных операторов дано описание выпуклых замкнутых конусов, которые, в зависимости от характеристик интегранта, входят в рецессивный конус, либо в касательный конус для замкнутого образа рассматриваемого оператора. Построенные конусы определяются главной частью асимптотики интегранта на бесконечности и не зависят от вариации его подчиненной части. Обсуждаются приложения к вопросам обобщенной разрешимости нелинейных интегральных уравнений первого рода.

Ключевые слова: нелинейный интегральный оператор, рецессивный конус, касательный конус, уравнение первого рода, разрешимость.

Рассматривается нелинейный интегральный оператор Урысона

$$F(u)(t) = \int\limits_{\Delta} \varphi(t,s,u(s))\,ds, \quad t \in \Delta, \tag{1}$$

где $\Delta \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная замкнутая область, $d \geq 1$. Пусть X, Y — банаховы пространства функций на Δ, пространство Y непрерывно вложено в $C(\Delta)$, интегрант φ характеризуется степенным (с ненулевым показателем) поведением по u на бесконечности и оператор $F: X \to Y$ вполне непрерывен. Изучается уравнение первого рода

$$F(u) = g, \quad u \in K, \tag{2}$$

где K — конус в пространстве X. Для уравнения (2) с фиксированным интегрантом φ описан способ явного построения луча, принадлежащего рецессивному конусу $b(\overline{F(K)})^{-}$, либо касательному конусу $T_0(\overline{F(K)})$ в точке $0 \in \overline{F(K)}$. Центральную роль в этой конструкции играет главная часть ψ интегранта φ по параметру u, которая определяется в зависимости от характера поведения φ при $u \to \infty$. В частности, при естественных дополнительных условиях оказывается, что для любого $h \in K$ элемент

$$F_0(h) = \int\limits_{\Delta} \psi(t,s,h(s))\,ds$$

определяет луч $\mathscr{L}_h(\psi) = \{\mu F_0(h) : \mu \geq 0\}$ такой, что

$$F(u_0) + \mathscr{L}_h(\psi) \subset \overline{F(D)}\ \forall u_0 \in K.$$

Устанавливается, что несмотря на некорректность рассматриваемых уравнений, понимаемое в подходящем смысле свойство обобщенной разрешимости (2) оказывается устойчивым к определенным вариациям элементов задачи F, g. Обсуждаются приложения к вопросам обобщенной разрешимости нелинейных интегральных уравнений первого рода.

Работа поддержана Министерством науки и высшего образования РФ в рамках государственного задания (проект 1.5420.2017/8.9).

Литература

1. Кокурин М. Ю. *Почти разрешимость классов нелинейных интегральных уравнений первого рода на конусах* // Известия РАН. Сер. матем. – 2019. – Т. 83. (принята к печати).

ALMOST SOLVABILITY FOR CLASSES OF NONLINEAR INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND

M.Yu. Kokurin

Using the convexity properties of images of completely continuous nonlinear integral operators, we give the description of convex closed cones, which are included either into the recessive cone, or into the tangent cone for the closed image of the operator under investigation, depending on characteristics of the integrant. The constructed cones are determined by the principal part in the asymptotics of the integrant at infinity and do not depend on the variation of its subordinate part. Applications to the generalized solvability of the first kind nonlinear integral equations are discussed.

Keywords: nonlinear integral operator, recessive cone, tangent cone, equation of the first kind, solvability.

УДК 517.54

НАХОЖДЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ИЗ ПОЛУПЛОСКОСТИ НА КРУГОВОЙ СЧЕТНОУГОЛЬНИК

И.А. Колесников[1]

1 *ia.kolesnikov@mail.ru*; Национальный исследовательский Томский государственный университет

Решается задача об определении параметров конформного отображения из полуплоскости на многоугольник с бесконечным количеством вершин (счетноугольник). Рассматриваются счетноугольники, обладающие свойством симметрии переноса, с границей, состоящей из дуг окружностей. Для определения параметров отображений из полуплоскости на такие области распространяется метод П.П. Куфарева определения параметров в интеграле Шварца-Кристоффеля.

Ключевые слова: конформное отображение, уравнение Шварца, счетноугольник, акцессорные параметры.

Область Δ называют областью с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π, если при линейном преобразовании $L(w) = w+2\pi$ область остается неизменной $L(\Delta) = \Delta$.

Область Δ называют областью типа полуплоскости, если при преобразовании $L(w) = w+2\pi$ среди всех простых концов границы области Δ в бесконечно удаленной точке неподвижным остается только один простой конец.

Круговым счетноугольником типа полуплоскости называется односвязная область Δ типа полуплоскости, обладающая свойством симметрии переноса вдоль вещественной оси на 2π, и такая, что часть границы области от точки w_0 до точки w_0 состоит из конечного числа дуг окружностей.

В работе [1] получена следующая

Теорема 1. *Функция f однолистно и конформно отображающая верхнюю полуплоскость $\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C} : \Im z > 0\}$ на круговой счетноугольник Δ с симметрией переноса вдоль вещественной оси на 2π так, что $f(\infty) = \infty$, удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{L_k}{2}\sin^{-2}\frac{z-a_k}{2} + M_k \cot\frac{z-a_k}{2}\right) + g(z), \qquad (1)$$

где a_k, $k = 1,2,\dots,n$, – прообразы вершин A_k^0 счетноугольника, принадлежащие промежутку $[0,2\pi)$, $L_k = \frac{1}{2}\big(1-\alpha_k^2\big)$; $\alpha_k \in [0,2]$, $\alpha_k\pi$, $k = 1,2,\dots,n$, – углы при вершинах A_k^0; M_k, $k = 1,2,\dots,n$, – вещественные константы (называемые акцессорными параметрами), $g(z)$ – целая функция.

Теорема 2. *Пусть в условиях теоремы 1 функция f удовлетворяет нормировке*

$$\lim_{\Im z \Rightarrow +\infty}\big(f(z) - z\big) = 0$$

(предел здесь равномерный относительно вещественной части z), тогда $g(z) \equiv 0$ и

$$\sum_{k=1}^{n} M_k = 0.$$

Рассмотрим семейство счетноугольников $D(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, получающееся из счетноугольника $D(0)$ проведением разрезов $\Lambda^m = \Lambda^0(t) + 2\pi m$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $m \in \mathbb{Z}$, по дугам окружностей. Точки $\Lambda^0(t) + 2\pi m$ принадлежат границе $D(0)$. При t, изменяющимся от 0 до T, траектория $\Lambda^0(t)$ описывает дугу окружности. Обозначим через λ прообраз подвижного конца разреза $\Lambda^0(t)$. Занумеруем прообразы вершин на промежутке $[0,2\pi)$ так, что $0 \leqslant a_{k+1} < \dots < a_n(t) < a_0(t) < a_1(t) < \dots < a_k(t) < 2\pi$, $0 \leqslant t \leqslant T$, где $a_0 = \lambda$. Соответствующие углы при вершинах обозначим $\alpha_{k+1}\pi,\dots,\alpha_n\pi\alpha_0\pi,\alpha_1\pi,\dots,\alpha_k\pi$, $\alpha_0 = 2$.

Заметим, что произвольный круговой счетноугольник Δ можно рассматривать как ядро семейства счетноугольников $D(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, относительно некоторой точки w_0, $\Delta = D(T)$.

В данной работе метод Куфарева [2,3] определения параметров в интеграле Шварца-Кристоффеля распространяется на случай круговых счетноугольников. В работах [4,5] метод Куфарева обобщен для решения проблемы определения параметров в дифференциальном уравнении Шварца, представляющего конформное отображение верхней полуплоскости на круговой многоугольник.

Теорема 3. *При $0 \leqslant t \leqslant T$, параметры $a_k(t)$, $M_k(t)$, $k = 0,1,\dots,n$, $a_0 = \lambda$, отображения f из верхней полуплоскости Π^+ на круговой счетноугольник $D(t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений*

$$\frac{da_k(t)}{dt} = \cot\mu_k(t), \qquad k = 1,\dots,n,$$

$$\frac{d\lambda(t)}{dt} = -2M_0(t), \tag{2}$$

$$\frac{dM_k(t)}{dt} = \frac{1}{2}\frac{M_k - L_k \cot \mu_k(t)}{\sin^2 \mu_k(t)}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

где $\mu_k(t) = \dfrac{a_k(t) - \lambda(t)}{2}$.

Теорема 4. *Система (2) при* $\alpha_1, \alpha_n \neq 0{,}2$ *имеет на сегменте* $[0, T]$ *единственное относительно параметра* $x = \sqrt{t}$ *решение*

$$\widetilde{a}_0(x) = \widetilde{\lambda}(x) = \sigma + \lambda_1 x + \lambda_2 x^2 + \ldots,$$

$$\widetilde{a}_k(x) = a_{k0} + a_{k1}x + a_{k2}x^2 + \ldots, \quad k = 1, \ldots, n,$$

$$\widetilde{M}_k(x) = m_{k0} + m_{k1}x + m_{k2}x^2 + \ldots, \quad k = 2, \ldots, n-1,$$

$$\widetilde{M}_k(x) = \frac{m_{k,-1}}{x} + m_{k0} + m_{k1}x + m_{k2}x^2 + \ldots, \quad k = 0, 1, n,$$

где $a_k\big(t(x)\big) = \widetilde{a}_k(x)$, $M_k\big(t(x)\big) = \widetilde{M}_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, *удовлетворяющее начальным условиям*

$$a_{11} = 2\sqrt{\frac{\alpha_n}{\alpha_1}},\ a_{n1} = -2\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_n}},\ \lambda_1 = a_{11} + a_{n1},\ a_{k1} = 0,\ k = 2, \ldots, n-1,$$

$$m_{0,-1} = -\frac{\lambda_1}{4},\ m_{1,-1} = \frac{L_1}{2}\frac{a_{11}^3}{4 + a_{11}^2},\ m_{n,-1} = \frac{L_n}{2}\frac{a_{n1}^3}{4 + a_{n1}^2},\ m_{k1} = 0,\ k = 2, \ldots, n-1,$$

$$a_{k2} = \frac{\lambda_2 a_{k1}^2}{a_{k1}^2 + 8},\ k = 1, n,\ a_{k2} = \cot\frac{a_{k0} - \sigma}{2},\ k = 2, \ldots, n-1,\ \lambda_2 = \frac{2}{3}\frac{(2\alpha_1 + \alpha_n)(2\alpha_n + \alpha_1)}{\alpha_1\alpha_n\big((\alpha_1 + \alpha_n)^2 - 1\big)}\sum_{k=2}^{n-1} m_{k0},$$

$$m_{00} = -\frac{\lambda_2}{2},\ m_{k0} = L_k \lambda_2 a_{k1}^2 \frac{12 + a_{k1}^2}{\big(4 + a_{k1}^2\big)\big(8 + a_{k1}^2\big)},\ k = 1, n,$$

$$m_{k2} = \frac{1}{2}\sin^{-2}\frac{a_{k0} - \sigma}{2}\left(m_{k0} - L_k \cot\frac{a_{k0} - \sigma}{2}\right),\ k = 2, \ldots, n-1,$$

$$a_{k3} = \frac{48}{3}\frac{a_{k1}^3\lambda_2^2}{\big(a_{k1}^2 + 8\big)^2\big(a_{k1}^2 + 12\big)} + \frac{3a_{k1}^3\lambda_3 - 16}{3a_{k1}\big(a_{k1}^2 + 12\big)},\ m_{k1} = \frac{3}{2}\frac{L_k a_{k1}^4 \lambda_3}{a_{k1}^4 - 16},\ k = 1, n,$$

$$m_{01} = -\frac{3}{4}\lambda_3,\ a_{k3} = \frac{\lambda_1}{3}\sin^{-2}\frac{a_{k0} - \sigma}{2},\ k = 2, \ldots, n-1,$$

$$m_{k3} = \frac{\lambda_1}{6}\sin^{-2}\frac{a_{k0} - \sigma}{2}\left(2m_{k0}\cot\frac{a_{k0} - \sigma}{2} - L_k\left(1 + 3\cot^2\frac{a_{k0} - \sigma}{2}\right)\right),\ k = 2, \ldots, n-1.$$

Теоремы 3, 4 позволяют найти параметры отображения $f = f(z, t, \lambda_3)$, переводящего верхнюю полуплоскость на круговой счетноугольник с разрезами $\Lambda^m(t) = \Lambda^0(t) + 2\pi m$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $m \in \mathbb{Z}$. Параметр t связан с длиной подвижной дуги $\Lambda^0(t)$, параметр λ_3 связан с кривизной этой дуги.

Проинтегрировав уравнения (2), найдем f_* – одно из решений уравнения (1). Отображение f_* связано с искомым отображением $f = f(z, t, \lambda_3)$ дробно-линейным преобразованием, коэффициенты которого можно определить из условий нормировки $\lim\limits_{\Im z \Rightarrow +\infty} \big(f(z,t) - z\big) = 0$, $f\big(a_k\big) = A_k$, $f\big(a_k + 2\pi\big) = A_k + 2\pi$. Таким образом, параметр λ_3 можно определить численным методом из условия

$$\big|f(z,\lambda_3,t) - \omega\big| = r \quad 0 < t < T,$$

где ω – центр окружности, по которой проводится разрез $\Lambda^0(t)$, r – ее радиус. Значение параметра t, соответствующее нужной длине разреза, удобно находить (численно) после того, как найден параметр λ_3.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 18-31-00190\18

Литература

1. Колесников И. А. *Отображение на круговой счетноугольник с симметрией переноса* // Вестн. Томск. гос. ун-та. Матем. и мех. – 2013. – 2(22). – С. 33–43.

2. Куфарев П. П. *Об одном методе численного определения параметров в интеграле Шварца-Кристоффеля* // ДАН СССР. – 1947. – Т. 57. – 6. – С. 535–537.

3. Александров И. А. *Параметрические продолжения в теории однолистных функций*. – М.: Наука, 1976.

4. Байбарин Б. Г. *Об одном численном способе определения параметров производной Шварца для функции, конформно отображающей полуплоскость на круговые области* // Труды Томского гос. ун-та. – 1966. – Т. 189. – С. 123–136.

5. Kolesnikov I. A. *On the problem of determining parameters in the Schwarz equation* // Issues Anal. – 2018. – Vol. 7(25). – 2. – P. 50–62.

DETERMINING PARAMETERS OF CONFORMAL MAPPINGS FROM THE UPPER HALF-PLANE ONTO CIRCULAR PERIODIC POLYGONS

I.A. Kolesnikov

The paper solves the problem of constructing conformal mapping from the half-plane onto a periodic polygon. A periodic polygon Δ is a simply connected domain with symmetry of transfer, i.e. it has the property $L(\Delta) = \Delta$ where $L(w) = w + 2\pi$. We consider a polygon with boundary consisting of a countable number of circular arcs. Moreover, it has a unique prime end at infinity, fixed under the shift $L(w)$. We use a differential equation of Schwarz type for representation of the mapping. To determine parameters of the equation, we generalize Kufarev's method. It was proposed for solving the problem of finding parameters in the Schwarz-Christoffel integral. The method, based on the Loewner's differential equation, reduces the problem to the Cauchy problem for a system of ordinary differential equations.
Keywords: conformal mapping, Schwartz equation, periodic polygon, accessory parameters.

УДК 517.538.5

О СКОРОСТИ АППРОКСИМАЦИИ В КРУГЕ ПОСРЕДСТВОМ НАИПРОСТЕЙШИХ ДРОБЕЙ, ПОЛЮСЫ КОТОРЫХ ЛЕЖАТ НА ГРАНИЦЕ КРУГА

М.А. Комаров[1]

1 *kami9@yandex.ru*; Владимирский государственный университет

Мы исследуем равномерную аппроксимацию в единичном круге $D = \{z : |z| < 1\}$ логарифмическими производными C-полиномов, т.е. полиномов, все нули которых лежат на единичной окружности $C = \{z : |z| = 1\}$. Получены оценки скорости такой аппроксимации для функций из класса Харди $H^1(D)$ и определённых его подклассов. Показано, что логарифмические производные C-полиномов неплотны в комплексном пространстве $L_2[-1, 1]$.

Ключевые слова: C-полином, логарифмическая производная, наипростейшая дробь, равномерная аппроксимация, пространство Харди.

В связи с работой [1] в последнее время большое внимание уделяется теории аппроксимации наипростейшими рациональными дробями

$$\rho_n(z) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - z_{n,k}}, \qquad z_{n,k} \in \mathbb{C},$$

со свободными полюсами $z_{n,k}$, а также их обобщениями (см. библиографию в [2]). Очевидно, что ρ_n – это логарифмическая производная полинома степени n с корнями $z_{n,k}$.

С точностью до операции комплексного сопряжения, величина $\rho_n(z)$ представляет собой напряжённость в точке z плоского электростатического поля, создаваемого положительными единичными зарядами, находящимися в точках $z_{n,k}$. Тем самым, аппроксимацию суммами ρ_n можно трактовать как задачу о размещении n единичных зарядов, создающих поле, близкое к заданному.

Если $\rho_n(z) \to f(z)$ при $n \to \infty$ равномерно по $z \in K$, то полюсы $z_{n,k}$ с ростом n могут неограниченно удаляться от множества K, что не вполне естественно для физической интерпретации задачи, и потому особый интерес представляет аппроксимация суммами ρ_n при тех или иных ограничениях на $z_{n,k}$.

Мы исследуем важный случай, когда все полюсы аппроксимирующих дробей лежат на единичной окружности $C = \{z : |z| = 1\}$, а аппроксимация происходит внутри единичного круга $D = \{z : |z| < 1\}$. Равномерная аппроксимация суммами вида

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - z_{n,k}}, \qquad |z_{n,k}| = 1 \tag{1}$$

(логарифмическими производными C-полиномов, т.е. полиномов, все нули которых лежат на C), а также обобщения и модификации этой задачи исследовались во многих статьях, например, в [3]— [5]. В частности, известно [3, 4], что любую регулярную в круге D функцию можно аппроксимировать суммами (1) равномерно на каждом компактном подмножестве D. Однако, скорость таких аппроксимаций ещё не изучалась.

Нами получены оценки скорости равномерной аппроксимации суммами (1) в D функций из класса Харди $H^1 = H^1(D)$, т.е. регулярных в D функций f таких, что

$$\|f\|_1 := \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\theta})|d\theta < \infty,$$

а также из определённых его подклассов.

Опишем основную конструкцию.

Пусть $f \in H^1$. В круге $|z| \le 1$ для функций $\alpha(z) = \int_0^z f(\zeta)d\zeta$ и $g(z) = e^{\alpha(z)}$ имеем

$$|\alpha(z)| \le \pi\|f\|_1, \qquad 0 < e^{-\pi\|f\|_1} \le |g(z)| \le e^{\pi\|f\|_1}, \qquad |z| \le 1.$$

Положим, далее, $g(z) = \sum_0^\infty g_n z^n$ ($g_0 = 1$) и

$$s_n(z) = s_n(f;z) = \sum_0^n g_k z^k, \qquad r_n(z) = r_n(f;z) = \sum_{n+1}^\infty g_k z^k$$

($s_n + r_n = g$). При $n \ge 1$ введём полиномы

$$P_n(z) = s_n(z) + z^m p_n(z), \qquad m = 2n+1-q, \tag{2}$$

где $q = \deg s_n$, а $p_n(z) = z^q \cdot \overline{s_n(1/\overline{z})}$ $(0 \le q \le n)$. Поскольку $s_n(0) = 1$, степень полинома p_n равна q, а степень P_n равна $m + q = 2n + 1$. Хорошо известна

Лемма. *Если полином $s_n(z) \ne 0$ при $z \in D$, то корни полинома* (2) *попарно различны и принадлежат C, а $|p_n(z)| \le |s_n(z)|$ при $|z| \le 1$.*

Конструкция C-полиномов вида $s_n(rz) + z^{k+q}\overline{s_n(r/\overline{z})}$ ($q = \deg s_n$, $r \in (0,1)$) использовалась, например, в [4] для аппроксимации регулярных и отличных от нуля в точках $z \in D$ функций. В нашем случае условие, обеспечивающее, согласно лемме, принадлежность всех корней полинома P_n (см. (2)) единичной окружности, выполняется для достаточно больших n, ибо $|g(z)| \ge e^{-\pi\|f\|_1} > 0$ при $|z| \le 1$. Нетрудно увидеть, что существует постоянная $M < \infty$ такая, что

$$|P_n(z) - g(z)| \le |z|^{n+1} M, \qquad |z| < 1,$$

т.е. на каждом компактном множестве в D последовательность P_n равномерно сходится к функции g (отличной от нуля в точках D). Отсюда следует, что последовательность логарифмических производных P_n'/P_n равномерно сходится к $f = g'/g$ на компактах в D.

Сформулируем основной результат.

Теорема 1. *Пусть $f \in H^1$ и $A_1 = e^{\pi\|f\|_1}$, При достаточно больших $n \ge n_0(f)$ на единичной окружности найдутся попарно различные числа $z_1, \dots, z_{2n+1}$ (корни полинома P_n) такие, что при $|z| < 1$*

$$\left| \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{z - z_k} - f(z) \right| \le \frac{2|z|^n}{(1-|z|^{n+1})^2} \frac{(n+1)(1+2|z| \cdot \|f\|_1)(A_1 + A_1^2 \ln A_1)}{1+|z|^{n+1}}.$$

Заметим, что если f ограничена в D (константой $A < \infty$), то числитель второй дроби в мажоранте можно заменить на $(n+1+|z|A)(1+\pi A e^A)e^A$.

Следующий результат усиливает теорему 1 в случае функций f таких, что $f' \in H^1$ (в этом случае, как известно, $\|f\|_{C(D)} := \sup_D |f(z)| < \infty$).

Теорема 2. *Пусть f — регулярная в D функция, $f' \in H^1$,*

$$A_2 = e^{\|f\|_{C(D)}}, \qquad A_3 = e^{2\|f\|_{C(D)}} \left(\|f\|_{C(D)}^2 + \|f'\|_1 \right).$$

При $n \geq \max\{1, A_3\}$ на единичной окружности найдутся попарно различные числа $z_1, \ldots, z_{2n+1}$ (корни полинома P_n) такие, что при $|z| < 1$

$$\left| \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{z - z_k} - f(z) \right| \leq \frac{|z|^n}{1 - |z|^{n+1}} \frac{(2n + 1 + |z| \ln A_2)(A_2 + \pi A_2^2 \ln A_2) + \pi A_3}{1 - A_3 |z|^{n+1}/n}.$$

Приведем еще оценку для случая экспоненциального убывания тейлоровских коэффициентов функции f.

Теорема 3. *Для любой функции f вида*

$$f(z) = f_0 + f_1 z + f_2 z^2 + \ldots, \qquad |f_k| \leq a^{k+1}, \quad a < 1/2,$$

при каждом $n = 1, 2, \ldots$ на единичной окружности найдутся попарно различные числа $z_1, \ldots, z_{2n+1}$ (корни полинома P_n) такие, что

$$\left| \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{z - z_k} - f(z) \right| \leq \frac{|z|^n}{1 - |z|^{n+1}} \frac{2n+2}{1-2a}, \qquad |z| < 1.$$

Последнюю оценку нельзя улучшить более чем в $O(|z|^n)$ раз. В самом деле, при $r < 1$ обозначим $\varepsilon_{n,r}$ наименьшее равномерное уклонение функции $f(z) \equiv 0$ от множества сумм (1) (порядка n) на окружности $|z| = r$. Справедливо

Предложение. *Имеем $\varepsilon_{n,r} \sim n r^{n-1}$ $(n \to \infty)$, точнее, верна оценка*

$$\frac{n r^{n-1}}{1 + r^n} \leq \varepsilon_{n,r} \leq \frac{n r^{n-1}}{1 - r^n} \qquad (r \in (0,1), \quad n \geq 1).$$

Задача о приближении суммами (1) рассматривалась и для других метрик. Например, Чуи и Шен [6] доказали плотность таких сумм в пространствах Берса $A_q(D)$ при $q > 2$ и установили порядок скорости аппроксимации. Напомним, что $A_q(D)$ это пространство регулярных в D функций f, для которых

$$\iint\limits_{|z|<1} |f(z)| \left(1 - |z|^2\right)^{q-2} dx dy < \infty.$$

Ньюман [7] доказал, однако, что плотности в пространстве $A_2(D)$ нет, ибо

$$\iint\limits_{|z|<1} \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - z_k} \right| dx dy \geq \frac{\pi}{18} \qquad (|z_1| = \cdots = |z_n| = 1).$$

Используя технику Ньюмана, мы устанавливаем [8] оценку интеграла по отрезку:

$$\left(\int_{-1}^{1} \left| \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x - z_k} \right|^2 dx \right)^{1/2} > \frac{1}{8}$$

при любых $z_1, \ldots, z_n$, принадлежащих единичной окружности. Этот результат показывает, в частности, что поставленная в 2014 году С.Р. Насыровым задача о плотности наипростейших дробей с плюсами на единичной окружности в комплексном пространстве $L_2[-1,1]$ имеет отрицательное решение. Плотности нет и в пространстве $C[-1,1]$, ибо при любом невещественном $z_k \in C$ действительная часть дроби $1/(x-z_k)$ положительна при $x=1$ (это замечание сделано в работе [5]).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 18-31-00312 мол_а).

Литература

1. Данченко В. И., Данченко Д. Я. *О равномерном приближении логарифмическими производными многочленов* // Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Материалы школы-конференции, посвященной 130-летию со дня рождения Д. Ф. Егорова (Казань, 13–18 сентября 1999 г.). – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 1999. – С. 74–77.

2. Данченко В. И., Комаров М. А., Чунаев П. В. *Экстремальные и аппроксимативные свойства наипростейших дробей* // Изв. вузов. Матем. – 2018. – №. 12. – С. 9–49.

3. Korevaar J. *Asymptotically neutral distributions of electrons and polynomial approximation* // Ann. of Math. (2) – 1964. – Vol. 80. – No. 2. – P. 403–410.

4. Rubinstein Z., Saff E. B. *Bounded approximation by polynomials whose zeros lie on a circle* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1971. – Vol. 29. – No. 3. – P. 482–486.

5. Бородин П. А. *Приближение наипростейшими дробями с ограничением на полюсы. II* // Матем. сб. – 2016. – Т. 207. – № 3. – С. 19–30.

6. Chui C. K., Shen X.–C. *Order of approximation by electrostatic fields due to electrons* // Constr. Approx. – 1985. – Vol. 1. – No. 1. – P. 121–135.

7. Newman D. J. *A lower bound for an area integral* // Amer. Math. Monthly. – 1972. – Vol. 79. – No. 9. – P. 1015–1016.

8. Komarov M. A. *A lower bound for the $L_2[-1,1]$-norm of the logarithmic derivative of polynomials with zeros on the unit circle* // Probl. Anal. Issues Anal. – 2019. – Vol. 8. – No. 2.

RATE OF APPROXIMATION IN THE DISK BY THE SIMPLE PARTIAL FRACTIONS WHOSE POLES LIE ON THE DISK'S BOUNDARY

M.A. Komarov

We study the uniform approximation on the unit disk $D = \{z : |z| < 1\}$ by the logarithmic derivatives of C-polynomials (i.e., polynomials, all of whose zeros lie on the unit circle $C = \{z : |z| = 1\}$). We obtain the rate of such approximation of the functions from the Hardy space $H^1(D)$ and its certain subspaces. We show that the logarithmic derivatives of C-polynomials are not dense in the complex space $L_2[-1,1]$.

Keywords: C-polynomial, logarithmic derivative, simple partial fraction, uniform approximation, Hardy space.

УДК 517.956.2+517.929.8

ОБОБЩЕННАЯ ЗАДАЧА КОШИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ НА КОНЦАХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

А.Н. Кондрашов[1]

1 *alexander.kondrashov@volsu.ru*; Волгоградский государственный университет, Институт математики и информационных технологий

Рассматривается дифференциальное уравнение $\Delta u + c(x)u = 0$, заданное на некомпактном римановом многообразии $\mathscr{M}$, имеющем конец $\mathscr{X}$, на котором метрика g может быть записана в виде $dl^2 = h^2(r)dr^2 + q^2(r)d\theta^2$; здесь $r \in [r_0, +\infty)$, $\theta \in S$, где S – компактное риманово многообразие с метрикой $d\theta^2$. Также предполагаем, что на $\mathscr{X}$ коэффициент $c(x)$ имеет вид $c(x) = c(r)$. Для концов параболического и гиперболического типа с такими метриками и коэффициентом $c(x)$ сформулированы варианты постановки обобщённой задачи Коши с начальными данными $(\varphi(\theta), \psi(\theta))$ в бесконечно удалённой точке и изучены вопросы её локальной разрешимости.

Ключевые слова: некомпактное риманово многообразие, конец многообразия, обобщённая задача Коши.

Пусть $(\mathscr{M}, g)$ – некомпактное риманово многообразие класса C^∞, $\dim \mathscr{M} = N \geq 2$. Допускается, что $\partial\mathscr{M} \neq \emptyset$ и $\mathscr{M}$ не предполагается полным. Обозначим Δ – оператор Лапласа–Бельтрами в метрике g. Будем рассматривать эллиптическое уравнение вида

$$\Delta u + c(x)u = 0, \tag{1}$$

заданное на $\mathscr{M}$.

Множество $\mathscr{X} \subset \mathscr{M}$ будем называть *концом* многообразия (см., например, [2] или [5, с. 212]), если: 1) замыкание $[\mathscr{X}]$ в топологии $\mathscr{M}$ не является компактным; 2) $\partial\mathscr{X}$ – компакт.

Зафиксируем конец $\mathscr{X} \subset \mathscr{M}$. Будем предполагать, что замыкание $[\mathscr{X}]$ изометрично многообразию с краем $R_+ \times S$, где $R_+ = [r_0, +\infty)$, S – компактное риманово многообразие без края ($\dim S = N - 1$), на котором задана метрика

$$dl^2 = h^2(r)dr^2 + q^2(r)d\theta^2. \tag{2}$$

Здесь $h(r), q(r) > 0$ – гладкие функции на R_+, $d\theta^2 = \sum\limits_{i,j=1}^{N-1} \omega_{ij}(\theta)d\theta_i d\theta_j$ – риманова метрика, заданная на S. Далее предполагается, что на $\mathscr{X}$ коэффициент $c(x)$ имеет вид $c(x) = c(r)$.

Обозначим Δ_θ – оператор Лапласа–Бельтрами в метрике $d\theta^2$ и $\{w_n(\theta)\}$ – ортонормированный базис в $L_2(S)$, составленный из собственных функций оператора Δ_θ (см. [3]).

В ряде работ (см., например, работы [1]– [5] и библиографию в них) изучались некомпактные римановы многообразия, представляющие собой компакт с приклеенным к нему конечным набором концов. Для таких многообразий была установлена разрешимость *обобщённой задачи Дирихле* для стационарного уравнения Шрёдингера $\Delta u + c(x)u = 0$ ($c(x) \leq 0$) и для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$, с краевыми условиями в бесконечно удалённых точках концов. Как формулировка этих условий, так и понятие ”иметь граничные значение” понимается в этих работах в некотором обобщённом смысле. Нами получены результаты (теоремы 1, 2) о существовании локальных решений *обобщённой задачи Коши* для уравнения (1) с данными Коши в бесконечно удалённой точке.

Хорошо известно, что задача Коши для эллиптических уравнений является некорректно поставленной по Адамару. Тем не менее, эта задача естественно возникает во многих приложениях: в гидродинамике, геофизике, теории упругости, электродинамике и др., а потому представляет интерес.

Положим $K = \int_{r_0}^{+\infty} \frac{h(s)}{q^{N-1}(s)} ds$ и будем рассматривать концы $\mathscr{X}$ двух видов: $K = +\infty$ (*параболический тип*) и $K < +\infty$ (*гиперболический тип*) (см., например, [2], [4]).

Обобщённая задача Коши для конца гиперболического типа. *Для заданных* $\varphi(\theta)$, $\psi(\theta) \in C^{\infty}(S)$ *найти на конце* $\mathscr{X}$ *решение* $f(r,\theta)$ *уравнения* (1) *с асимптотикой*

$$f(r,\theta) = \varphi(\theta) + \Big(\int\limits_r^{+\infty} \frac{h(s)}{q^{N-1}(s)} ds\Big)\psi(\theta) + \mathrm{o}\Big(\int\limits_r^{+\infty} \frac{h(s)}{q^{N-1}(s)} ds\Big) \ \text{при} \ r \to \infty.$$

Теорема 1. *Пусть* $\mathscr{X} \subset \mathscr{M}$ *– конец гиперболического типа* ($K < \infty$) *и для некоторого* $\alpha < 1$ *выполнено*

$$\sup_{r \in [r_0, +\infty)} \Big(q^{2(N-2)}(r) + |c(r)| q^{2(N-1)}(r)\Big)\Big(\int\limits_r^{+\infty} \frac{h(s)}{q^{N-1}(s)} ds\Big)^{\alpha} < +\infty.$$

Предположим заданы функции $\varphi(\theta), \psi(\theta) \in C^{\infty}(S)$. *Пусть*

$$\varphi(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n w_n(\theta), \quad \psi(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n w_n(\theta)$$

их ряды Фурье. Тогда, если сходятся ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{H}(\nu n^2)|\alpha_n|, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{G}(\nu n^2)|\beta_n|,$$

то на конце $\mathscr{X}$ *существует единственное решение* $f(r,\theta)$ *обобщённой задачи Коши уравнения* (1) *с начальными данными* $(\varphi(\theta), \psi(\theta))$.

Здесь $\nu > 0$ – постоянная, зависящая от $h(r)$, $q(r)$ и $c(r)$; $\mathrm{H}(t)$, $\mathrm{G}(t)$ – вещественно-аналитические функции на $\mathbb{R}$, положительные при $t > 0$, растущие при $t \to +\infty$ быстрее любой степени t^n.

Обобщённая задача Коши для конца параболического типа. *Для заданных* $\varphi(\theta)$, $\psi(\theta) \in C^{\infty}(S)$ *найти на конце* $\mathscr{X}$ *решение* $f(r,\theta)$ *уравнения* (1) *с асимптотикой*

$$f(r,\theta) = \varphi(\theta) + \Big(\int\limits_{r_0}^{r} \frac{h(s)}{q^{N-1}(s)} ds\Big)\psi(\theta) + \mathrm{o}(1), \ \text{при} \ r \to \infty. \tag{3}$$

Теорема 2. *Пусть $\mathscr{X} \subset \mathscr{M}$ – конец параболического типа ($K = +\infty$) и для некоторого $k > 1$ выполнено*

$$\sup_{r\in[r_0,+\infty)}\Big(q^{2(N-2)}(r)+|c(r)|q^{2(N-1)}(r)\Big)\Big(\int\limits_{r_0}^{r}\frac{h(s)}{q^{N-1}(s)}ds\Big)^{k+2}<+\infty. \qquad (4)$$

Пусть заданы функции $\varphi(\theta), \psi(\theta) \in C^\infty(S)$ и

$$\varphi(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n w_n(\theta),\quad \psi(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\beta_n w_n(\theta)$$

их ряды Фурье. Предположим сходятся ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{L}(\nu n^2)|\alpha_n|,\quad \sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{M}(\nu n^2)|\beta_n|. \qquad (5)$$

Тогда на конце $\mathscr{X}$ существует единственное решение $f(r,\theta)$ обобщённой задачи Коши для уравнения (1) *с начальными данными* $(\varphi(\theta),\psi(\theta))$.

Здесь $\nu > 0$ – постоянная, зависящая от $h(r)$, $q(r)$ и $c(r)$; $\mathrm{L}(t)$, $\mathrm{M}(t)$ – вещественно-аналитические функции на $\mathbb{R}$, положительные при $t > 0$, растущие при $t \to +\infty$ быстрее любой степени t^n.

Из теоремы 2 вытекает существование примеров концов параболического типа на которых ограниченные гармонические функций не имеют предела. Чтобы в этом убедиться достаточно рассмотреть многообразие $\mathscr{M}$ с концом $\mathscr{X}$ удовлетворяющим условию (4), и взять решение $f(r,\theta)$ обобщённой задачи Коши для уравнения (1) при $c(r) \equiv 0$, с начальными данными $\varphi(\theta) \in C^\infty(S)$, $\psi(\theta) \equiv 0$, где $\varphi(\theta)$ – непостоянная функция удовлетворяющая условию (5). При стремлении $r \to +\infty$ функция $f(r,\theta)$ будет ограниченной в силу асимптотики (3), но стремиться к какому-либо числу A данная функция не будет. По сути, это пример отсутствия теоремы об устранимой особенности на концах параболического типа, что не соответствует устоявшимся представлениям (см, например, [1, Лемма, с. 16]).

Литература

1. Лосев А.Г. *Некоторые лиувиллевы теоремы на римановых многообразиях специального вида* // Изв. вузов. Матем. – 1991. – № 12. – С. 15–24.

2. Корольков С.А. *Гармонические функции на римановых многообразиях с концами* // Сиб. матем. журн. – 2008. – Т. 49. – № 6. – С. 1319–1332.

3. Лосев А.Г., Мазепа Е.А. *Об асимптотическом поведении решений некоторых уравнений эллиптического типа на некомпактных римановых многообразиях* // Изв. вузов. Матем. – 1999. – № 6. – С. 41–49.

4. Лосев А.Г. *О разрешимости задачи Дирихле для уравнения Пуассона на некоторых некомпактных римановых многообразиях* // Дифф. ур. – 2017. – Т. 53. – № 12. – С. 1643–1652.

5. Grigor'yan A. *Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1999. – (N.S.) 36(2) – P. 135–249.

6. Grigor'yan A. *Heat kernel and analysis on manifolds.* – AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, 47. American Mathematical Society, Providence, RI; International Press, Boston, MA, 2009. xviii+482 pp.

THE GENERALIZED CAUCHY PROBLEM FOR ELLIPTIC EQUATIONS AT THE ENDS OF RIEMANNIAN MANIFOLDS OF A SPECIAL TYPE

A.N. Kondrashov

We consider a linear elliptic differential equation $\Delta u + c(x)u = 0$ defined on a Riemannian manifold M that has an end X on which the metric takes the form $dl^2 = h^2(r)dr^2 + q^2(r)d\theta^2$ in appropriate coordinates. Here $r \in [r_0, +\infty)$, $\theta \in S$, and S is a smooth compact Riemannian manifold with metric $d\theta^2$. At the end X, the coefficient $c(x)$ takes the form $c(x) = c(r)$. For ends of parabolic type and for ends of hyperbolic type with such metrics, we formulate versions of the generalized Cauchy problem with initial data $(\varphi(\theta), \psi(\theta))$ at the infinitely remote point and study its solubility. The results obtained are new and, in the case of ends of parabolic type, somewhat unexpected.

Keywords: non-compact Riemannian manifold, end of a manifold, generalized Cauchy problem.

УДК 517.98

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А.Г. Королев[1]

1 *akorolev5@yandex.com*; Волгоградский государственный университет

В работе предлагается новый параметрический метод решения нелинейного уравнения $F(x) = h$, обобщающий метод Важевского-Лобанова.

Ключевые слова: нелинейные уравнения, параметрический метод.

Наш основной результат есть новый параметрический метод решения нелинейных уравнений в банаховом пространстве. Рассмотрим задачу нахождения решений уравнения $F(x) = h$, где отображение (вообще говоря, нелинейное) F действует из X в Y, X и Y банаховы пространства, а $h \in Y$ есть некоторый фиксированный вектор пространства Y.

Без ограничения общности можно предположить, что $F(0) = 0$. Если это не так, то полагая $F_1(x) = F(x) - F(0)$, $h_1 = h - F(0)$, сводим задачу к указанному случаю.

Если h мало в каком-то смысле, то известны многие, так называемые пертурбационные, методы нахождения решений уравнения для различных классов отображений F. Метод, который предлагается в данной работе для решения уравнения $F(x) = h$, не накладывает явных ограничений на близость правой части h к нулю. Вместо этого предполагается возможность решения уравнения $F(x) = h(t)$, для некоторого пути $h(t)$, соединяющего 0 и h.

А именно, пусть $y(t) : [0,1] \to Y$ непрерывно дифференцируемая(в смысле сильной производной Фреше) кривая в Y такая, что $y(0) = 0$, $y(1) = h$. Также предположим, что для каждого значения параметра t существует решение $x(t) : [0,1] \to X$ уравнения $F(x(t)) = y(t)$ такое, что $x(0) = 0$. Тогда, по определению, $x(1)$ доставляет нам решение изначального уравнения $F(x) = h$.

Таким образом, процесс построения решения состоит в доказательстве возможности продолжения по параметру, начиная с известного нулевого решения, до фиксированного момента времени. Во многих случаях можно гарантировать начальное существование решения для малых значений параметра t, например, по теореме о неявной функции.

Предположим теперь, что наше основное отображение F непрерывно дифференцируемо по Фреше. Тогда мы можем продифференцировать основное параметрическое тождество $F(x(t)) = y(t)$ по параметру t:

$$DF(x(t))x'(t) = y'(t).$$

Теперь наложим условия на кривую $y(t)$. А именно, пусть она удовлетворяет обыкновенному линейному неоднородному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами:

$$y' = Ay + b, \tag{1}$$

где $A : Y \to Y$ есть некоторый линейный ограниченный оператор, а $b = b(A, h) \in Y$ подбирается так, чтобы существовало решение краевой задачи $y(0) = 0$, $y(1) = h$. Подчеркнем, что b зависит от A и h. Оператор A является вспомогательным, и его подбирают по известному h, так, чтобы было выполнено следующее условие.

А именно, для фиксированного A, пусть $V(x) : X \to X$ есть нелинейное векторное поле, удовлетворяющее следующему алгебраическому уравнению:

$$DF(x)V(x) = AF(x) + b. \tag{2}$$

И пусть теперь решение задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$x' = V(x), x(0) = 0, \tag{3}$$

в пространстве X, существует на отрезке $[0, 1]$.

Справедлива следующая

Теорема. *Пусть A и b выбраны так, что краевая задача (1) разрешима при данном h. Пусть векторное поле $V(x)$ является решением уравнения (2) таким, что соответствующая задача Коши для ОДУ (3) имеет решение $x(t)$ на отрезке* $[0, 1]$. *Тогда вектор $a = x(1)$ доставляет решение уравнения $F(x) = h$.*

Из теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно [2], что если для правой части $V(x)$ справедлива оценка $||V(x)||_X \le C_1||x||_X + C_2$, то любое решение (3) неограниченно продолжимо при $t > 0$.

Таким образом, по известному h и известной производной Фреше $DF(x)$, мы подбираем такой вспомогательный оператор A, чтобы для решения $V(x)$ уравнения (2) были выполнены оценки, гарантирующие неограниченную продолжимость решений соответствующего ОДУ (3).

Случай $A = 0$ был рассмотрен в работе [1] под названием метода Важевского, и настоящая работа является ее формальным обобщением. Например, в качестве простейшего вспомогательного оператора A можно взять $A = -aI$, где a – скаляр, а I – единичный оператор. Оказывается, этого достаточно, чтобы полностью проанализировать решение скалярного квадратного уравнения $Lx + bx^2 = h$ и доказать существование решения в случае положительного дискриминанта $L^2 - 4bh > 0$.

Здесь стоит заметить, что предложенный параметрический метод является достаточным, но не необходимым признаком существования решения, и даже в таком простом случае как скалярное квадратное уравнение необходимо дополнительное варьирование вспомогательного оператора $A = -aI$, чтобы покрыть все случаи существования решения. Простейшего выбора оператора $A = 0$ как в работе [1] оказывается недостаточным для доказательства существования решения в случае положительности дискриминанта, потому предложенный метод дает улучшение даже в данном простейшем случае, и тем самым позволяет достаточный признак сделать необходимым и достаточным.

В общем случае, однако, стоит иметь ввиду, что получение необходимых и достаточных признаков предложенным параметрическим методом, если и возможно, то требует предварительного знания подобного критерия с дальнейшим подбором вспомогательных операторов A, покрывающих все известные случаи критерия. При конкретном же выборе оператора A параметрический метод доставляет лишь достаточный признак.

Литература

1. Хартман Ф. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* – М.: Мир, 1970. – 720 с.

2. Лобанов С. Г. *Метод Важевского для нелинейных эволюционных уравнений* // Матем. заметки. – 2008. – Vol. 83, № 5. – С. 705–714.

A PARAMETRIC METHOD OF SOLVING NON-LINEAR EQUATIONS IN BANACH SPACES

A.G. Korolev

In this paper we develop a generalization of so-called Vazhevsky' method solving non-linear equations $F(x) = h$.

Keywords: non-linear equations, parametric method.

УДК 517.5

КРИТЕРИЙ ПОЛНОТЫ СИСТЕМЫ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ МОНОМОВ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

О.А. Кривошеева[1], А.Ф. Кужаев[2]

1 *kriolesya2006@yandex.ru*; Башкирский государственный университет
2 *pozitiv373@gmail.com*; Башкирский государственный университет

В работе исследуется проблема полноты системы экспоненциальных мономов с положительными показателями в пространстве функций аналитических в выпуклой области. Получен критерий полноты такой системы.

Ключевые слова: система экспоененциальных мономов, полнота, выпуклая область.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — кратная последовательность положительных чисел,

$\lambda_k < \lambda_{k+1}$, $k \geq 1$, $\lambda_k \to +\infty$, $n_k \in \mathbb{N}$. Положим

$$n(t,\Lambda) = \sum_{\lambda_k < t} n_k.$$

Верхней плотностью последовательности Λ называются соответственно величины

$$\overline{n}(\Lambda) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{n(t,\Lambda)}{t},$$

а максимальной плотностью последовательности Λ называется величина

$$\overline{n}_0(\Lambda) = \lim_{\delta\to+0} \overline{n}_0(\Lambda,\delta),$$

$$\overline{n}_0(\Lambda,\delta) = \overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{n(t,\Lambda) - n(t(1-\delta),\Lambda)}{t\delta}, \quad \delta \in (0,1).$$

Рассмотрим систему экспоненциальных мономов

$$\mathscr{E}(\Lambda) = \{z^n e^{\lambda_k z}\}_{n=0,k=1}^{n_k-1,\infty}.$$

Наша задача — исследовать проблему полноты системы $\mathscr{E}(\Lambda)$ в области $D \subset \mathbb{C}$, т.е. в пространстве функций аналитических в области D с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах области D. Чаще всего изучается проблема полноты в выпуклой области. Из результата И. Ф. Красичкова-Терновского ([1], теорема 8.3) следует, что при условии $\overline{n}(\Lambda) < +\infty$ система $\mathscr{E}(\Lambda)$ не полна в любой неограниченной выпуклой области, которая содержит вертикальную полуполосу. Выпуклые области, которые не обладают этим свойством лежат в некоторой горизонтальной полосе. Критерий полноты системы $\mathscr{E}(\Lambda)$ в горизонтальной полосе получен П. Мальявеном и Л. Рубелем [2] (он формулируется в терминах логарифмической плотности последовательности Λ). Б. Н. Хабибуллин [3] обобщил этот результат на случай неограниченных областей, лежащих в горизонтальной полосе.

Имеется ряд результатов о полноте системы $\mathscr{E}(\Lambda)$ в круге (см., например, [4], гл. IV, [5], гл. I, §7). В случае произвольных ограниченных областей Б.Я. Левиным ([4], гл. IV, теорема 21) и А.Ф. Леонтьевым [6] независимо друг от друга получен следующий классический результат. Мы сформулируем его для выпуклых областей.

Пусть D — выпуклая область. Вертикальным диаметром области D называется величина

$$d(D) = \sup_x \sup_{y_1,y_2} \{|y_1 - y_2| : x + iy_1, x + iy_2 \in D\}.$$

Теорема 1. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$. Если Λ — измеримая последовательность с плотностью $n(\Lambda) = \tau > 0$, то система $\mathscr{E}(\Lambda)$ полна в любой выпуклой области с вертикальным диаметром $d(D) \leq 2\pi\tau$ и не полна в любой выпуклой области с вертикальным диаметром $d(D) > 2\pi\tau$.*

Проблема полноты системы $\mathscr{E}(\Lambda)$ в ограниченных выпуклых областях изучалась также в работах [7] и [8]. В [8] получено обобщение теоремы 1 для некоторых последовательностей, не имеющих плотность, в одном из классов выпуклых областей (в частности, в классе областей, имеющих вертикальные или горизонтальные оси симметрии).

Цель данной работы — распространение результата теоремы 1 на один из классов последовательностей, не имеющих плотность.

Теорема 2. *Пусть* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $\bar{n}_0(\Lambda) = \tau < \infty$. *Следующие утверждения эквивалентны:*
1) Система $\mathscr{E}(\Lambda)$ *неполна в любой выпуклой области* D *с вертикальным диаметром* $d(D) > 2\pi\tau$, *и полна в любой выпуклой области* D *с вертикальным диаметром* $d(D) \leq 2\pi\tau$;
2) $\bar{n}(\Lambda) = \tau$.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00002).

Литература

1. Красичков-Терновский И. Ф. *Инвариантные подпространства аналитических функций. II. Спектральный синтез на выпуклых областях* // Матем. сб. – 1972. – Т. 88(130). – № 1. – С. 3–30.

2. Malliaven P., Rubel L. A. *On small entire functions of exponential type with given zeros* // Bull. Soc. Math. France. – 1961. – V. 89. – P. 175–201.

3. Хабибуллин Б. Н. *О росте целых функций экспоненциального типа вдоль мнимой оси* // Матем. сб. – 1989. – Т. 180. – № 5. – С. 706–719.

4. Левин Б. Я. *Распределение корней целых функций.* – М.: Гостехиздат, 1956.

5. Леонтьев А. Ф. *Целые функции. Ряды экспонент.* – М.: Наука, 1983.

6. Леонтьев А. Ф. *О полноте системы показательных функций в криволинейной полосе* // Матем. сб. – 1955. – Т. 36. – № 3. – С. 555–568.

7. Абдулнагимов А. И., Кривошеев А. С. *Правильно распределенные подпоследовательности на прямой* // Уфимск. матем. журн. – 2015. – Т. 7. – № 1. – С. 3–12.

8. Кривошеев А. С., Кужаев А. Ф. *Об одной теореме Леонтьева-Левина* // Уфимск. матем. журн. – 2017. – Т. 9. – № 3. – С. 89–101.

A CRITERION OF COMPLETENESS OF A SYSTEM OF EXPONENTIAL MONOMIALS WITH POSITIVE EXPONENTS

O.A. Krivosheeva, A.F. Kuzhaev

The problem of completeness of a system of exponential monomials with positive exponents in the space of analytic functions in convex domain are investigated. A criterion of a completeness of such system is obtained.

Keywords: system of exponential monomials, completeness, convex domain.

УДК 517.9

КЛАССИФИКАЦИЯ ОДНОГО ПОДКЛАССА ИНТЕГРИРУЕМЫХ ДВУМЕРИЗОВАННЫХ ЦЕПОЧЕК

М.Н. Кузнецова[1], И.Т. Хабибуллин[2]

1 *mariya.n.kuznetsova@gmail.com*; Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН
2 *habibullinismagil@gmail.com*; Институт математики с ВЦ УФИЦ РАН, Башкирский государственный университет

Рассматривается задача классификации интегрируемых случаев уравнений типа двумеризованной цепочки Тоды $u_{n,xy} = f(u_{n+1}, u_n, u_{n-1}, u_{n,x}, u_{n,y})$. Известно, что наличие широкого класса интегрируемых редукций указывает на интегрируемость заданного уравнения. Мы используем классификационный алгоритм, основанный на этом наблюдении. Цепочка называется интегрируемой, если существуют условия обрыва, сводящие ее к бесконечному числу систем гиперболического типа, интегрируемых в смысле Дарбу. Исследование полученной конечной системы проводится при помощи характеристических алгебр Ли-Райнхарта. В данной работе мы исследуем подкласс квазилинейных цепочек вида $u_{n,xy} = p(u_{n-1}, u_n, u_{n+1})u_{n,x} + r(u_{n-1}, u_n, u_{n+1})u_{n,y} + q(u_{n-1}, u_n, u_{n+1})$.

Ключевые слова: двумеризованная цепочка, интегрируемая редукция, характеристическая алгебра Ли, вырожденное условие обрыва, интегрируемая по Дарбу система, x-интеграл.

Многомерные уравнения являются наиболее сложными для интегрирования и классификации. При исследовании многомерных уравнений часто используется идея редукции – сведения к системе уравнений с меньшим числом независимых переменных. Наличие широкого класса интегрируемых редукций с двумя независимыми переменными, как правило, указывает на интегрируемость уравнения с тремя независисмыми переменными.

В работах [1–3] мы называем заданное уравнение интегрируемым, если оно допускает бесконечный класс редукций в виде интегрируемых по Дарбу систем уравнений в частных производных гиперболического типа с двумя независимыми переменными. При решении классификационных задач для многомерных уравнений в такой постановке можно использовать аппарат характеристических алгебр Ли.

Рассмотрим нелинейную цепочку

$$u_{n,xy} = f(u_{n+1}, u_n, u_{n-1}, u_{n,x}, u_{n,y}) \tag{1}$$

с тремя независимыми переменными, где искомая функция $u = u_n(x, y)$ зависит от вещественных x, y и целого n. Зададим граничные условия в двух целочисленных точках N_1, $N_2 \in \mathbb{Z}$, $N_1 < N_2 - 1$

$$u_{N_1} = \varphi_1(x, y, u_{N_1+1}, \ldots), \tag{2}$$

$$u_{n,xy} = f(u_{n+1}, u_n, u_{n-1}, u_{n,x}, u_{n,y}), \quad N_1 < n < N_2, \tag{3}$$

$$u_{N_2} = \varphi_2(x, y, u_{N_2-1}, \ldots). \tag{4}$$

Определение 1. *Цепочку* (1) *назовем интегрируемой, если существуют функции*

φ_1 и φ_2 такие, что для любого выбора пары целых чисел N_1, N_2, где $N_1 < N_2 - 1$, система гиперболического типа (2)–(4) *является интегрируемой по Дарбу.*

В данной работе мы продолжаем исследования, начатые в [2,3], где были описаны интегрируемые в смысле определения 1 двумеризованные квазилинейные цепочки вида

$$u_{n,xy} = \alpha_n u_{n,x} u_{n,y} + p_n u_{n,x} + r_n u_{n,y} + q_n, \tag{5}$$

при условии, что $\dfrac{\partial \alpha_n}{\partial u_{n\pm1}} \neq 0$. Здесь коэффициенты зависят от трех последовательных переменных $\alpha_n = \alpha(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})$, $p_n = p(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})$, $r_n = r(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})$, $q_n = q(u_{n+1}, u_n, u_{n-1})$.

Мы рассматриваем подкласс цепочек следующего вида:

$$u_{n,xy} = p(u_{n+1}, u_n, u_{n-1}) u_{n,x} + r(u_{n+1}, u_n, u_{n-1}) u_{n,y} + q(u_{n+1}, u_n, u_{n-1}). \tag{6}$$

Мы требуем, чтобы хотя бы одна из производных

$$\frac{\partial p_n}{\partial u_{n+1}}, \quad \frac{\partial p_n}{\partial u_{n-1}} \tag{7}$$

не равнялись нулю.

Главным результатом работы является следующая

Теорема. *Если цепочка* (6), (7) *интегрируема в смысле определения 1, тогда она приводится посредством точечных преобразований к одной из следующих:*

$$u_{n,xy} = \left(e^{u_n - u_{n-1}} - e^{u_{n+1} - u_n}\right) u_{n,x}, \tag{8}$$

$$u_{n,xy} = \left(-u_{n+1} + 2u_n - u_{n-1}\right) u_{n,x}. \tag{9}$$

Цепочки (8), (9) были известны ранее (см. [4]).

Работа выполнена за счет гранта РНФ (проект 15-11-20007).

Литература

1. Habibullin I. T. *Characteristic Lie rings, finitely-generated modules and integrability conditions for (2+ 1)-dimensional lattices* // Physica Scripta. – 2013. – V. 87. – № 6.

2. Habibullin I. T., Poptsova M. N. *Classification of a subclass of two-dimensional lattices via characteristic lie rings* // SIGMA. – 2017. – V. 13.

3. Попцова М. Н., Хабибуллин И. Т. *Алгебраические свойства квазилинейных двумеризованных цепочек, связанные с интегрируемостью* // УМЖ. – 2018. – Т. 10. – № 3. – С. 89–109.

4. Shabat A. B., Yamilov R. I. *To a transformation theory of two-dimensional integrable systems* // Phys. Lett. A. – 1997. – V. 227. – № 1-2. – С. 15–23.

THE CLASSIFICATION OF A SUBCLASS OF THE TWO-DIMENSIONAL INTEGRABLE LATTICES

M.N. Kuznetsova, I.T. Habibullin

We consider a classification problem of integrable cases of the Toda type two-dimensional lattices $u_{n,xy} = f(u_{n+1}, u_n, u_{n-1}, u_{n,x}, u_{n,y})$. *It is commonly accepted that, for a given equation, existence of*

a large class of integrable reductions indicates integrability. Our classification algorithm is based on this observation. We call the lattice integrable if there are cutting off boundary conditions allowing to reduce the lattice to an infinite number of hyperbolic type systems integrable in the sense of Darboux. The study of the obtained finite system is carried out by means of the characteristic Lie-Rinehart algebras. Here we concentrate on a subclass of quasilinear lattices of the form $u_{n,xy} = p(u_{n-1}, u_n, u_{n+1})u_{n,x} + r(u_{n-1}, u_n, u_{n+1})u_{n,y} + q(u_{n-1}, u_n, u_{n+1})$.
Keywords: two-dimensional lattice, integrable reduction, characteristic Lie algebra, degenerate cutting off condition, Darboux integrable system, x-integral.

УДК 517.923

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ДУФФИНГА

А.Ф. Курин[1]

1 *afkurin@mail.ru*; Воронежский государственный университет

В статье приводится интегрирование уравнения Дуффинга в режимах нестационарных колебаний в большом диапазоне значений параметров уравнения.

Ключевые слова: метод ван дер Поля, осциллятор, потенциал.

Детально изучены (см., например, [1, 3]) режимы стационарных колебаний в решении уравнения Дуффинга

$$\ddot{z} + \Omega^2 z = \varepsilon \nu z^3 + \varepsilon a \cos\Omega_1 t = \varepsilon\varphi(z, t), \tag{1}$$

где $\Omega^2 > 0$, $a > 0$, $\Omega_1 > 0$, ν – постоянные величины, $\varepsilon > 0$ – малый параметр. Приведем здесь анализ нестационарных режимов колебаний осциллятора (1), ограничиваясь первым приближением асимптотического метода усреднения (метод ван дер Поля). Для переменных ван дер Поля (b – амплитуда, ψ – фаза, при этом $z = b\cos\psi$) получаем систему

$$\dot{b} = -\frac{\varepsilon}{\Omega}(\nu b^3 \cos^3\psi \sin\psi + a\cos\Omega_1 t \sin\psi), \quad \dot{\psi} = \Omega - \frac{\varepsilon}{\Omega b}(\nu b^3 \cos^4\psi + a\cos\Omega_1 t \cos\psi).$$

В случае $\Omega - \Omega_1 = \varepsilon h$ (частоты близки) указанную систему дополним уравнением для медленной фазы $\theta = \psi - \Omega_1 t$. После усреднения по фазам быстрых колебаний ψ и $\Omega_1 t$ приходим к усредненной системе для медленных переменных

$$\dot{b} = -\frac{p}{2}\sin\theta, \qquad \dot{\theta} = s - \frac{3q}{8}b^2 - \frac{p}{2b}\cos\theta, \tag{2}$$

где $p = \varepsilon a/\Omega$, $q = \varepsilon\nu/\Omega$, $s = \varepsilon h$.

Из (2) следует интеграл

$$\cos\theta = \frac{s}{p}b - \frac{3q}{16p}b^3 + \frac{C_1}{b},$$

где C_1 – произвольная постоянная. Исключая θ из системы (2) с помощью интеграла, приходим к уравнению осциллятора для амплитуды b

$$\ddot{b} = -\frac{p}{2}\cos\theta\cdot\dot{\theta} = \left(-\frac{s^2}{4} + \frac{3pqC_1}{32}\right)b + \frac{3sq}{16}b^3 - \frac{27q^2}{1024}b^5 + \frac{p^2C_1^2}{4b^3} = F(b). \tag{3}$$

С произвольными начальными значениями $b(0), \theta(0)$, постоянная C_1 записывается как

$$C_1 = b(0)\cos\theta(0) - \frac{s}{p}b(0)^2 + \frac{3q}{16p}b(0)^4.$$

Положения равновесия осциллятора – неотрицательные корни уравнения $F(b) = 0$. Считая $C_1 \neq 0$, из условия $\cos\theta = 0$ получаем

$$b_{1,2} = \sqrt{\frac{8\alpha}{3} \pm \sqrt{D_1}}, \quad D_1 = \frac{64\alpha^2}{9} + \frac{16\beta}{3},$$

из условия $\dot{\Theta} = 0$ -

$$b_{3,4} = \sqrt{\frac{8\alpha}{9} \pm \sqrt{D_2}}, \quad D_2 = \frac{64\alpha^2}{81} - \frac{16\beta}{9}.$$

где $\alpha = s/q, \quad \beta = pC_1/q$.

Потенциал осциллятора (3) определяется формулой

$$\Pi(b) = \frac{q^2}{8}\left(\alpha b - \frac{3}{16}b^3 + \frac{\beta}{b}\right)^2.$$

Анализ показывает, что в зависимости от значений параметров α и β на плоскости (α, β) имеется четыре области с различным поведением потенциала $\Pi(b)$:

1) область A находится в верхней полуплоскости и ограничена полуосью $O\alpha$ со значениями $\alpha < 0$ и параболой $\beta = 4\alpha^2/9$; 2) область B находится также в верхней полуплоскости и граничит с областью A, она ограничена той же параболой $\beta = 4\alpha^2/9$ и полуосью $O\alpha$ с $\alpha > 0$; 3) область C находится в нижней полуплоскости и примыкает к области B, ее границы – полуось $O\alpha$ с $\alpha > 0$ и парабола $\beta = -4\alpha^2/3$; 4) область D расположена в нижней полуплоскости, границами являются указанная парабола $\beta = -4\alpha^2/3$ и полуось $O\alpha$ с $\alpha < 0$.

В области A потенциал имеет минимум $\Pi(b_1) = 0$. В области B – два минимума с $\Pi(b_4) = \frac{q^2}{8}\left(\frac{32\alpha^3}{81} + \frac{8\alpha\beta}{3} - \frac{9D_2\sqrt{D_2}}{16}\right)$ и $\Pi(b_1) = 0$, разделенных патенциальным барьером с максимальным значением потенциала $\Pi(b_3) = \frac{q^2}{8}\left(\frac{32\alpha^3}{81} + \frac{8\alpha\beta}{3} + \frac{9D_2\sqrt{D_2}}{16}\right)$. В области C – также две потенциальные ямы с минимальными значениями $\Pi(b_2) = \Pi(b_1) = 0$ и потенциальный барьер высотой $\Pi(b_3)$. Наконец, в области D потенциал имеет один минимум с $\Pi(b_3)$.

Во всех потенциальных ямах, расположенных в перечисленных областях, и на границах областей приближенно решается уравнение (3) в виде разложения по степеням начального отклонения осциллятора (известный метод Линстедта). Начальное отклонение вычисляется с помощью закона сохранения энергии осциллятора (3). Отметим, что на границе областей C и D при интегрировании уравнения (3) используется метод эквивалентной линеаризации. В результате получаем неизохронные колебания амплитуды b.

Литература

1. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. *Введение в теорию колебаний и волн.* – М.: Наука, 1984. – 432 с.

2. Горяченко В. Д. *Элементы теории колебаний.* – Красноярск: Изд-во Красноярского университета, 1995. – 430 с.

NON-STATIONARY OSCILLATIONS IN A SOLUTION OF THE DUFFING EQUATION

A.F. Kurin

The article provides the integration of the Duffing equation in the modes of non-stationary oscillations in a large values range of parameters.

Keywords: van der Pole method, oscillator, potential.

УДК 519.715

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С РАЗНОТЕМПОВЫМИ БЫСТРЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

Г.А. Курина[1], М.А. Калашникова[2]

1 *kurina@math.vsu.ru*; Воронежский государственный университет, Федеральный исследовательский центр ”Информатика и управление” Российской академии наук
2 *margarita.kalashnikova@mail.ru*; Атос АйТи Солюшенс энд Сервисез

В статье представлен краткий обзор публикаций, посвященных асимптотическому анализу задач оптимального управления с разнотемповыми быстрыми переменными.

Ключевые слова: оптимальное управление, сингулярные возмущения, разнотемповые быстрые переменные, асимптотические разложения.

При построении асимптотического решения задач оптимального управления используются два подхода (см., например, [1]). Первый из них состоит в построении асимптотического решения задачи, вытекающей из условий оптимальности управления. Другой подход, называемый прямой схемой, заключается в непосредственной подстановке постулируемого асимптотического разложения решения в условие задачи и построении серии задач оптимального управления для нахождения членов асимптотики.

Асимптотическое поведение решения задачи минимизации квадратичного функционала

$$J = 1/2 \int_0^{+\infty} (y'y + u'Ru)\,dt,\ R > 0,\ y = C_0 x + \sum_{j=1}^{N} C_j z_j, \tag{1}$$

на траекториях линейной системы

$$\begin{gathered} dx/dt = A_0 x + \sum_{j=1}^{N} A_{0j} z_j + B_0 u,\ x(0) = x_0, \\ \varepsilon_i dz_i/dt = A_{i0} x + \sum_{j=1}^{N} A_{ij} z_j + B_i u,\ z_i(0) = z_{i0},\ i = \overline{1,N}, \end{gathered} \tag{2}$$

в случае постоянных коэффициентов и малых параметров ε_i одинакового порядка изучалось при некоторых условиях в [2] на основе асимптотики решения алгебраического матричного уравнения Риккати, имеющего структуру

$$K = K(\varepsilon) = \begin{pmatrix} K_1(\varepsilon) & \mu(\varepsilon)K_2(\varepsilon) \\ \mu(\varepsilon)K_2'(\varepsilon) & \mu(\varepsilon)K_3(\varepsilon) \end{pmatrix},$$

где штрих означает транспонирование, $\mu(\varepsilon) = (\varepsilon_1 ... \varepsilon_N)^{1/N}$.

В [3] доказано, что значение критерия качества для построенного приближения оптимального управления в форме обратной связи, не зависящей от малых параметров, отличается от оптимального на величину порядка $\varepsilon_1^2 + ... + \varepsilon_N^2$. В этой статье также рассматривается критический (нестандартный) случай, когда быстрая переменная состояния не может быть однозначно выражена из ее уравнения при нулевом значении малого параметра. Отметим здесь статью [4], где для задачи (1), (2) изучался критический случай, с использованием понятия блочной D-детектируемости и блочной D-стабилизируемости.

Для системы вида (2) в случае, когда $\varepsilon_0 = 1$, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \varepsilon_{k+1}/\varepsilon_k = 0$, $\varepsilon = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_N)$, в [5] построено субоптимальное стабилизирующее управление в форме обратной связи, минимизирующее квадратичный функционал на бесконечном промежутке.

Задача об оптимальном линейном регуляторе, минимизирующем квадратичный функционал

$$J = 1/2x(1)'Fx(1) + 1/2\int_0^1 (x(t)'Q(t)x(t) + u(t)'R(t)u(t))\,dt,\ x = (x_1', x_2', x_3')',$$

на траекториях трехтемповой линейной системы с переменными коэффициентами

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + A_{13}x_3 + B_1u, \\ \varepsilon dx_2/dt &= A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + A_{23}x_3 + B_2u, \\ \varepsilon\mu dx_3/dt &= A_{31}x_1 + A_{32}x_2 + A_{33}x_3 + B_3u \end{aligned} \tag{3}$$

с закрепленным левым концом, рассматривается в [6, стр. 195-200].

Оптимальное управление для этой задачи имеет вид $u = -R^{-1}B'Ky$, где K положительно определенное решение матричного дифференциального уравнения Риккати

$$dK/dt = -KA - A'K + KSK - Q,\ S = BR^{-1}B',$$

с конечным условием $K(1,\varepsilon,\mu) = F$. Здесь $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21}/\varepsilon & A_{22}/\varepsilon & A_{23}/\varepsilon \\ A_{31}/\varepsilon\mu & A_{32}/\varepsilon\mu & A_{33}/\varepsilon\mu \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2/\varepsilon \\ B_3/\varepsilon\mu \end{pmatrix}$. При условии, что $F = \begin{pmatrix} F_{11} & \varepsilon F_{12} & \varepsilon\mu F_{13} \\ \varepsilon F_{12}' & \varepsilon F_{22} & \varepsilon\mu F_{23} \\ \varepsilon\mu F_{13}' & \varepsilon\mu F_{23}' & \varepsilon\mu F_{33} \end{pmatrix}$, матрица K ищется в аналогичном виде, ее блоки K_{ij}, $j = \overline{1,3}$, $i = \overline{1,j}$, должны удовлетворять трехтемповой сингулярно возмущенной системе. При некоторых условиях для построения асимптотического решения этой системы при помощи метода интегральных многообразий производится асимптотическое расщепление уравнений и конечных условий.

Алгоритм приведения к блочно диагональной форме линейной нестационарной управляемой системы с множителями при производных вида (3) описан в [6, с. 146-148]. При этом расщепляющие преобразования ищутся в виде асимптотических разложений.

Приведем алгоритм метода прямой схемы для асимптотического решения нелинейной задачи оптимального управления с трехтемповыми переменными состояния

$$\begin{gathered} J_\varepsilon(u) = \int\limits_0^T F(x,u,t,\varepsilon)\,dt \to \min,\ x = (x_1', x_2', x_3')', \\ \varepsilon^{i-1} dx_i/dt = f_i(x,u,t,\varepsilon), \quad x_i(0) = x_i^0, \quad i = \overline{1,3}. \end{gathered} \tag{4}$$

Используя идеи метода пограничных функций из [7], решение задачи (4) ищем в виде разложения

$$\mathrm{v}(t,\varepsilon) = \bar{\mathrm{v}}(t,\varepsilon) + \sum_{i=0}^{1} (\Pi_i \mathrm{v}(\tau_i,\varepsilon) + Q_i \mathrm{v}(\sigma_i,\varepsilon)),\ \mathrm{v} = (x', u')', \tag{5}$$

где $\bar{\mathrm{v}}(t,\varepsilon) = \sum_{j\ge 0} \varepsilon^j \bar{\mathrm{v}}_j(t)$, $t \in [0,T]$, $\tau_i = t/\varepsilon^{i+1} \ge 0$, $\sigma_i = (t-T)/\varepsilon^{i+1} \le 0$, $\Pi_i \mathrm{v}(\tau_i,\varepsilon) = \sum_{j\ge 0} \varepsilon^j \Pi_{ij} \mathrm{v}(\tau_i)$, $Q_i \mathrm{v}(\sigma_i,\varepsilon) = \sum_{j\ge 0} \varepsilon^j Q_{ij} \mathrm{v}(\sigma_i)$, $i = 0,1$, $\bar{\mathrm{v}}_j(t)$ – регулярные функции от аргумента t, $\Pi_{ij}\mathrm{v}(\tau_i)$ – пограничные функции экспоненциального типа в окрестности $t = 0$ от аргумента τ_i, $Q_{ij}\mathrm{v}(\sigma_i)$ – пограничные функции экспоненциального типа в окрестности $t = T$ от аргумента σ_i, т. е. справедливы неравенства $\| \Pi_{ij}\mathrm{v}(\tau_i) \| \le c\exp(-\jmath\tau_i)$, $\tau_i \ge 0$, $\| Q_{ij}\mathrm{v}(\sigma_i) \| \le c\exp(\jmath\sigma_i)$, $\sigma_i \le 0$, где $c > 0$ и $\jmath > 0$ означают положительные постоянные, не зависящие от аргументов рассматриваемых функций.

Подставим разложение (5) в уравнения системы (4) и правую часть представим в виде асимптотической суммы слагаемых, зависящих от t, τ_i, σ_i, $i = 0,1$. Затем, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, отдельно зависящие от t, τ_i, σ_i, $i = 0,1$, получаем соотношения для нахождения регулярных и пограничных членов асимптотики. Подставим разложения (5) в функционал $J_\varepsilon(u)$ и представим подынтегральную функцию в виде асимптотической суммы слагаемых, зависящих от t, τ_i, σ_i, $i = 0,1$. Далее произведем разложение по степеням малого параметра подынтегральной функции, при этом в интегралах от выражений, зависящих от τ_i и σ_i, $i = 0,1$, перейдем к интегрированию соответственно по промежуткам $[0,+\infty)$ и $(-\infty,0]$. В итоге получим разложение функционала по степеням ε

$$J_\varepsilon(u) = \sum_{j\ge 0} \varepsilon^j J_j.$$

Преобразуя коэффициенты J_j, получаем более простые, чем исходная, задачи оптимального управления для определения членов ряда (5). В [8] объясняется получение явного вида задач для нахождения асимптотического решения нулевого порядка, а также приводятся оценки близости построенного асимптотического решения к точному решению для управления, траектории состояния и критерия качества.

Для линейно-квадратичного случая задачи (4) в [9] приведены в явном виде задачи для нахождения членов разложения (5) произвольного порядка. При этом доказано, что соотношения для членов асимптотического решения двухточечной краевой задачи, вытекающей из условия оптимальности управления для исходной возмущенной задачи, соответствуют краевым задачам, полученным из условий оптимальности управления построенных задач для отыскания членов асимптотики при помощи метода прямой схемы.

Иногда разнотемповые быстрые переменные могут быть "скрытыми", т. е. их присутствие не видно из постановки задачи. Например, в задачах с "дешевыми" управлениями разных порядков, критерий качества которых содержит малый параметр в разных степенях при управлении [10], в результате замены переменных появляются уравнения с различными малыми параметрами при производных.

Асимптотика оптимального управления для линейной стационарной терминальной задачи с трехтемповыми переменными состояния и ограничением на управление в форме замкнутого неравенства строится на основе асимптотики точек переключения в [11].

Изучались также задачи управления стохастическими системами, содержащими быстрые переменные различных порядков (см., например, [12]).

Работа первого автора была поддержана Российским научным фондом (проект № 17-11-01220).

Литература

1. Дмитриев М. Г., Курина Г. А. *Сингулярные возмущения в задачах управления* // АиТ. – 2006. – № 1. – С. 3–51.

2. Khalil H. K., Kokotovic P. V. *Control of Linear Systems with Multiparameter Singular Perturbations* // Automatica. – 1979. – V. 15. – Iss. 2. – P. 197–207.

3. Mukaidani H., Xu H., Mizukami K. *New results for near-optimal control of linear multiparameter singularly perturbed systems* // Automatica. – 2003. – V. 39. – Iss. 12. – P. 2157–2167.

4. Wang Y. Y., Frank P. M., Eva Wu N. *Near-optimal control of nonstandard singularly perturbed systems* // Automatica. – 1994. – V. 30. – Iss. 2. – P. 277–292.

5. Drăgan V., Halanay A. *Suboptimal stabilization of linear systems with several time scales* // Int. J. Control. – 1982. – V. 36. – Iss. 1. – P. 109–126.

6. Воропаева Н. В., Соболев В. А. *Геометрическая декомпозиция сингулярно возмущенных систем.* – М.: Физматлит, 2009. – 256 с.

7. Васильева А. Б. *Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми параметрами при старших производных* // Журн. вычислит. математики и матем. физики. – 1963. – Т. 3. – № 4. – С. 611–642.

8. Калашникова М. А., Курина Г. А. *Асимптотика решения трехтемповой задачи оптимального управления* // Тр. XII Всероссийского совещания по проблемам управления. ВСПУ 2014. – Москва: ИПУ РАН, 2014. – С. 1560–1570.

9. Калашникова М. А., Курина Г. А. *Приближения любого порядка асимптотического решения трехтемповой линейно-квадратичной задачи оптимального управления методом прямой схемы* // Вестник ВГУ. Сер.: Системный анализ и информационные технологии. – 2018. – № 3. – С. 33–43.

10. Калашникова М. А., Курина Г. А. *Прямая схема асимптотического решения линейно-квадратичных задач с дешевыми управлениями разной цены* // Дифференциальные уравнения. – 2019. – Т. 55. – № 1. – С. 83–102.

11. Грибковская И. В., Калинин А. И. *Асимптотическая оптимизация линейной сингулярно возмущенной системы, содержащей при производных параметры различных порядков малости* // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1995. – Т. 35. – № 9. – С. 1299–1312.

12. Drăgan V. *On the linear quadratic optimal control for systems described by singularly perturbed Itô differential equations with two fast time scales* // Axioms. – 2019, 8, 30; doi:10.3390/axioms 8010030.

ASYMPTOTIC SOLUTION OF OPTIMAL CONTROL PROBLEMS WITH MULTI-TEMPO FAST VARIABLES

G.A. Kurina, M.A. Kalashnikova

This paper contains a short review of publications devoted to asymptotic analysis of singularly perturbed optimal control problems with multi-tempo fast variables.

Keywords: optimal control, singular perturbations, multi-tempo variables, asymptotic expansions.

УДК 517.927.25

О СТЕПЕНИ ВЛИЯНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ НА СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ СПЕКТРАЛЬНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ

И.С. Ломов[1]

1 *lomov@cs.msu.ru*; Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики

В статье приведён анализ результатов, полученных научной школой В.А. Ильина, по вопросу оценки скорости сходимости и равносходимости с тригонометрическим рядом Фурье спектральных разложений функций по корневым функциям линейных обыкновенных дифференциальных операторов как самосопряженных, так и несамосопряженных, заданных на конечном отрезке числовой прямой. Сформулирована теорема о скорости равносходимости для так называемых нагруженных дифференциальных операторов. Оценки скорости равносходимости разложений получены в интегральной метрике как на любом внутреннем компакте интервала, так и на всем интервале. Установлена зависимость оценки скорости равносходимости разложений на произвольном компакте основного интервала от расстояния этого компакта до границы интервала, а также от некоторых характеристик оператора.

Ключевые слова: обыкновенный дифференциальный оператор, собственные значения, спектральные разложения, скорость сходимости, формула среднего значения.

Тригонометрические ряды Фурье, их свойства, условия сходимости исследованы весьма подробно. Многие математики, изучая спектральные разложения функций, занимались вопросом о равносходимости разложений функций по собственным функциям операторов и в тригонометрический ряд Фурье (например, В.А. Стеклов, Ж. Биркгоф, А. Хаар, Я.Д. Тамаркин, М. Стоун, А.Ч. Титчмарш, Б.М. Левитан, В.А. Ильин, А.П. Хромов, Г.В. Радзиевский, В.А. Садовничий, В.А. Винокуров, И.В. Садовничая, А.М. Савчук).

Насколько нам известно, вопрос об оценке близости частичных сумм указанных разложений был *впервые* рассмотрен В.А. Ильиным и И. Йо в 1978 г. Доказано, что для абсолютно непрерывной функции f разность частичных сумм двух разложений $\sigma_\lambda(x,f)$ и $S_\lambda(x,f)$, первое из которых отвечает произвольному неотрицательному расширению оператора $Lu = -u'' + q(x)u$, а второе – является разложением в тригонометрический ряд Фурье, имеет на любом компакте рассматриваемого интервала тот же порядок малости, что и последний член любого из этих разложений. При этом предполагалось лишь, что потенциал $q(x)$ принадлежит классу $L^r, r > 1$, или L^2_{loc} на интервале $G = (0,1)$.

Этот результат перенесен В.Е. Волковым и И. Йо (1986 г.) на несамосопряженный оператор Шредингера с потенциалом из L^2, затем В.А. Ильиным (1991 г.) и Е.И. Никольской (1992 г.) на случай произвольного суммируемого потенциала, скалярного или матричного. Во всех случаях были получены оценки скорости равномерной равносходимости на *любом компакте* $K \subset G$.

Отметим, что в основе спектрального метода В.А. Ильина находится формула среднего значения. Приведем ее для указанного выше оператора Шредингера L. Пусть u_n собственная функция оператора L, отвечающая спектральному числу λ_n. Тогда имеет место следующее интегральное уравнение (формула среднего значения Титчмарша)

$$\frac{u_n(x+t)+u_n(x-t)}{2} = u_n(x)\cos\lambda_n t - \frac{1}{2\lambda_n}\int_{x-t}^{x+t} q(\xi)\,u_n(\xi)\sin\lambda_n(|x-\xi|-t)\,dt,$$

$(x-t, x+t) \subset G$. Для операторов высокого порядка используется локальная формула среднего Е.И. Моисеева.

Системы функций, по которым ведется разложение, могут удовлетворять разным краевым условиям, поэтому равномерной равносходимости соответствующих рядов на всем отрезке $\overline{G}$ в общем случае не может быть. Некоторые практические задачи, тем не менее, требуют оценки скорости равносходимости разложений или оценки порядка приближения функций спектральными разложениями, именно на всем G, причем оценку достаточно установить в интегральной метрике. Вслед за работами В.А. Ильина, автор получал оценки скорости равносходимости соответствующих разложений *на всем интервале* G в интегральной метрике L^p. Для функции ограниченной вариации для самосопряженного оператора оценка была получена в 1979 г., этот результат перенесен на несамосопряженный оператор Шредингера в 1995 г. и затем на оператор Штурма-Лиувилля с негладким коэффициентом $p_1(x)$ при первой производной в 1996 г. Для произвольного оператора четного порядка результат был получен в 2001 г. и в 2010 г. – для операторов нечетного порядка (совместно с С.В. Афониным). А.С. Марков (2012 г.) перенес эти результаты на системы дифференциальных уравнений, что завершило исследование вопроса для классических дифференциальных операций.

Развить метод Ильина для получения оценок скорости равносходимости разложений на всем интервале G позволило применение теоремы Рисса (обобщающую теорему Рисса-Фишера на пространства L^p) для ортонормированных систем в случае самосопряженных операторов и обобщения этой теоремы на биортогональные системы для несамосопряженных операторов, а также использование указанного ниже условия (1) – оценки скорости убывания нормированных коэффициентов Фурье.

Известно, что наличие у дифференциального оператора интегрального краевого условия с абсолютно непрерывной мерой Стилтьеса или наличие условий сопряжения в некоторых точках G, приводит к необходимости рассматривать так называемые нагруженные дифференциальные операции для сопряженных операторов. На такие операторы результаты об оценках скорости равносходимости разложений также перенесены. Сформулируем кратко результат.

Пусть $T=\{\tau_l\}_{l=0}^{\infty}$ – произвольное разбиение отрезка $\overline{G}$, $\tau_0=0, \tau_1=1, \tau_i\neq\tau_j$ при $i\neq j, i,j\geq 0$. Каждой точке $\tau_l\in T$ поставим в соответствие функции $r_{jl}(x)\in L^1(G)$, $j=\overline{2,2n}$. Рассмотрим оператор L, действующий в $L^2(G)$, порожденный дифференциальной операцией

$$u^{(2n)}(x)+p_1(x)u^{(2n-1)}(x)+\sum_{j=2}^{2n}\left[p_j(x)u^{(2n-j)}(x)+\sum_{l=0}^{\infty}r_{jl}(x)u^{(2n-j)}(\tau_l)\right],$$

где $x\in G, n\geq 1, u(x)\in W_1^{2n}(G), p_1\in L^s(G), s>1, p_j, r_j\in L^1(G), j=\overline{2,2n}$, ряды $r_j(x)=\sum_{l=0}^{\infty}|r_{jl}(x)|$ сходятся почти всюду на $\overline{G}$.

Собственные и присоединенные функции оператора L понимаем в обобщенном (по Ильину) смысле. Зафиксируем некоторые числа $r,p\in[1,\infty)$. Выберем произвольную последовательность чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ (λ_k – корни степени $2n$ из собственных значений оператора) и произвольную систему $\{u_k\}$ корневых функций оператора L, отвечающую числам $\{\lambda_k\}$, удовлетворяющие трем классическим условиям Ильина (в частности, система $\{u_k\}$ замкнута и минимальна в $L^r(G)$). Присоединенные функции выбираем так, что в корневых цепочках справедлива "антиаприорная" оценка $\|\overset{m-1}{u_k}\|_r\leq c\|\overset{m}{u_k}\|_r$, $m=\overline{1,m_k}$, где $\|\cdot\|_r\equiv\|\cdot\|_{L^r(G)}$. Пусть также $\|u_k\|_\infty\leq c\|u_k\|_r$ и для функции $f(x)\in L^r(G)$ с некоторой постоянной $\nu>0$

$$f_k\|v_k\|_{r'}^{-1}=O(|\lambda_k|^{-\nu}), |\lambda_k|\geq 1, f_k=(f,v_k), \tag{1}$$

где $\{v_k\}$ система, биортогонально сопряженная с системой $\{u_k\}, r^{-1}+(r')^{-1}=1$, аналогичное условие справедливо для тригонометрической системы функций.

Рассмотрим разложение $f(x)$ в ряд по $\{u_k\}$, $\sigma_\lambda(x,f)=\sum\limits_{|\lambda_k|\leq\lambda}f_k u_k(x)$, $\lambda>0$, и в тригонометрический ряд Фурье $S_\lambda(x,f)$. Для произвольного отрезка $K\subset G$ обозначим через $\eta=\varrho(K,\partial G)$ – расстояние до границы G и $\|\cdot\|_{p,K}$ – норму в $L^p(K)$.

Теорема. *При выполнении перечисленных условий, для всех достаточно больших* *чисел λ справедливы оценки*

$$\|\sigma_\lambda(x,f)-S_\lambda(x,f)\|_{p,K}\le\frac{c}{\eta}\Big[\max\Big(\frac{1}{\lambda},\frac{\ln\lambda}{\lambda^\nu}\Big)+\|p_1\|_s\max\Big(\frac{1}{\lambda},\frac{\ln^2\lambda}{\lambda^\nu},\frac{\ln\lambda}{\lambda^{\nu+1/p-1/s}}\Big)+$$
$$+\sum_{j=2}^{2n}(\|p_j\|_1+\|r_j\|_1)\max\Big(\frac{\ln\lambda}{\lambda^{\nu+1/p}},\frac{\ln^2\lambda}{\lambda^{\nu+1}}\Big)+\frac{m_0\ln\lambda}{\lambda^\nu}\Big],$$

$$\|\sigma_\lambda(x,f)-S_\lambda(x,f)\|_p\le c\Big[\max\Big(\frac{1}{\lambda},\frac{1}{\lambda^{\nu-1/\delta}},\frac{\ln^{1/\delta}\lambda}{\lambda}\Big|_{\nu=1+1/\delta}\Big)+$$
$$+\frac{\|p_1\|_s}{\lambda^{1/s'}}+\sum_{j=2}^{2n}(\|p_j\|_1+\|r_j\|_1)\max\Big(\frac{1}{\lambda^{1/p}},\frac{\ln\lambda}{\lambda}\Big)+\frac{m_0\ln\lambda}{\lambda^\nu}\Big],$$

$\delta=min(2,q,s), q=p/(p-1), m_0=1$, *если общее число присоединенных функций в* $\{u_k\}$ *конечно, и* $m_0=0$ *в противном случае.*

Следствие. *Пусть* $f\in V(G)$ *– функция с ограниченным на* $\overline{G}$ *изменением,* $p,s\ge 2,\nu=1$ *в оценке (1). Тогда для всех достаточно больших чисел* λ *справедливо соотношение*

$$\|\sigma_\lambda(x,f)-f(x)\|_p\le\frac{c}{\lambda^{1/p}},$$

что совпадает с точной оценкой скорости сходимости тригонометрических рядов Фурье для функций с ограниченным изменением.

Приведем пример нагруженного дифференциального оператора второго порядка, для которого выполняются все условия теоремы.

Оператор L:

$$lu(x)=u''(x)-u(0)\cos(\pi x),\ x\in G,\quad u'(0)=u'(1)=0,\ u\in W_1^2(G).$$

Применение сформулированной теоремы к этому примеру приводит к следующему результату.

Утверждение. *Пусть выполняется условие (1) на коэффициенты Фурье с некоторым показателем* ν*. Тогда справедливы оценки*

$$\|\sigma_\lambda(x,f)-S_\lambda(x,f)\|_{p,K}\le\frac{c}{\eta}\max\Big(\frac{1}{\lambda},\frac{\ln\lambda}{\lambda^\nu}\Big),$$

$$\|\sigma_\lambda(x,f)-S_\lambda(x,f)\|_p\le c\max\Big(\frac{\ln\lambda}{\lambda},\frac{1}{\lambda^{1/p}},\frac{1}{\lambda^{\nu-1/\delta}}\Big),$$

$\delta=min(2,q,s)$*. Если* $f(x)\in V(G)$*, то* $\nu=1$ *в (1) и при* $p,s\ge 2$ *справедлива оценка скорости сходимости биортогонального разложения к функции* $f(x)$ *из следствия из теоремы.*

В заключение отметим, что оценки скорости локальной равносходимости биортогональных разложений функций с их тригонометрическими рядами Фурье для различных интегральных операторов получали киевские математики (Г.В. Радзиевский, А.М. Гомилко) и Саратовские математики – представители научной школы А.П. Хромова. В настоящее время этот вопрос исследуется для операторов

Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами представителями научной школы А.Г. Костюченко и А.А. Шкаликова – И.В. Садовничей, А.М. Савчуком и их учениками. Вопрос о равносходимости разложений по собственным и присоединенным функциям и в тригонометрический ряд Фурье рассматривался также для интегральных и интегродифференциальных операторов А.П. Хромовым.

Литература

1. Ломов И. С. *Нагруженные дифференциальные операторы: сходимость спектральных разложений* // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50. – № 8. – С. 1077–1086.

2. Ломов И. С. *Оценки скорости сходимости и равносходимости спектральных разложений обыкновенных дифференциальных операторов* // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2015. – Т. 15. – Вып. 4. – С. 405–416.

INFLUENCE OF VARIOUS CHARACTERISTICS OF NON-SELF-ADJOINT ORDINARY DIFFERENTIAL OPERATORS ON THE CONVERGENCE RATE OF SPECTRAL DECOMPOSITION

I.S. Lomov

The analysis of the results received by the scientific school of V.A. Ilyin concerning assessment of speed of convergence and equiconvergence with a trigonometrical number of Fourier of spectral decomposition of functions on root functions of linear ordinary differential operators both self-conjugate, and not self-conjugate, set on a final piece of a numerical straight line is provided. The theorem of equiconvergence speed for the so-called loaded differential operators is formulated. Estimates of speed of equiconvergence of decomposition are received in an integrated metrics both on any internal compact of an interval, and on the whole interval. The dependence of assessment of speed of equiconvergence of decomposition on any compact of the main interval from the distance of this compact to the interval border and also from some characteristics of the operator is established.

Keywords: ordinary differential operator, eigenvalues, spectral decomposition, rate of convergence, the formula of the average value.

УДК 517.954

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

А.Г. Лосев[1], Е.А. Мазепа[2]

1 *alexander.losev@volsu.ru*; Волгоградский государственный университет
2 *lmazepa@rambler.ru*; Волгоградский государственный университет

В работе развивается новый подход к постановке краевых задач на произвольных некомпактных римановых многообразиях, основанный на введении специальных классов эквивалентности непрерывных функций. В том числе, установлена зависимость между разрешимостью краевых и внешних краевых задач для неоднородных линейных эллиптических уравнений на некомпактных римановых многообразиях.

Ключевые слова: неоднородные эллиптические уравнения, некомпактные римановы многообразия.

Работа посвящена установлению взаимосвязи между разрешимостью краевых и внешних краевых задач для неоднородного уравнения Пуассона на произвольных некомпактных римановых многообразиях. Изучение асимптотического поведения решений эллиптических уравнений на некомпактных римановых многообразиях является одной из актуальных задач геометрического анализа. Исторически сложившимися в данной области математики являются следующие постановки задач.

1. Найти условия, гарантирующие, что всякое решение из заданного функционального класса является тривиальным (теоремы типа Лиувилля).

2. Найти условия, обеспечивающие однозначную разрешимость краевых и внешних краевых задач.

Данная тематика нашла свое развитие в работах российских и зарубежных математиков: М. Андерсона, А.А. Григорьяна, Е.М. Ландиса, П. Ли, А.Г. Лосева, Е.А. Мазепы, В.Г. Мазьи, В.М. Миклюкова, Н.С. Надирашвили, Д. Сулливана, С.Т. Яу и ряда других авторов. Общее представление о современных исследованиях в данном вопросе можно получить, например, из работы А.А. Григорьяна [1].

В случае произвольного некомпактного риманова многообразия даже сама постановка задачи Дирихле о восстановлении решения эллиптического уравнения по непрерывным граничным данным на «бесконечности» является достаточно затруднительной, поскольку не ясно как понимать граничные данные. В некоторых ситуациях, если многообразие допускает некоторую геометрическую компактификацию (например, многообразия отрицательной секционной кривизны, сферически-симметричные многообразия), постановка краевых задач осуществляется также, как и для ограниченных областей в R^n. Начиная с 70-х годов прошлого века опубликовано большое количество работ, посвященных вопросам разрешимости различных краевых задач для гармонических функций, для решений стационарного уравнения Шредингера, для некоторых других однородных линейных и квазилинейных эллиптических уравнений как в областях R^n, так и на некомпактных римановых многообразиях. Кроме того, в последнее годы стали появляться результаты исследования асимптотического поведения неоднородных эллиптических уравнений на таких многообразиях (напр., [2], [3]).

В данной работе предлагается, развивая подход к постановке краевых задач на некомпактных римановых многообразиях, основанный на введении понятия классов эквивалентных на многообразии M непрерывных функций, исследовать вопросы разрешимости краевых и внешних краевых задач для уравнений вида

$$Lu \equiv \Delta u - c(x)u = g(x), \tag{1}$$

в неограниченных областях некомпактного риманова многообразия M без края. Здесь функции $c(x) \geq 0$, $c(x)$, $g(x) \in C^{0,\gamma}(\Omega)$ для любого предкомпактного подмножества $\Omega \subset M$, $0 < \gamma < 1$. Под решением уравнения (1) на многообразии M будем понимать функцию $u \in C^2(\Omega)$, удовлетворяющую этому уравнению на любом предкомпактном подмножестве $\Omega \subset M$.

Известно, что любое решение линейного уравнения $Lu = g(x)$ класса C^2 является решением класса $C^{2,\gamma}$, если правая часть этого уравнения и коэффициенты оператора L принадлежат C^γ.

Пусть M — связное некомпактное гладкое риманово многообразие без края, $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — исчерпание многообразия M, то есть последовательность предкомпактных открытых подмножеств риманова многообразия M таких, что $\overline{B}_k \subset B_{k+1}$, $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$. Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — произвольные непрерывные на M функции, $G \subset M$ — неограниченное подмножество.

Будем говорить, что функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ *эквивалентны на* G и обозначать $f_1 \overset{G}{\sim} f_2$, если для некоторого исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ многообразия M выполнено

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{G\setminus B_k} |f_1(x) - f_2(x)| = 0.$$

Введенное отношение действительно является отношением эквивалентности и не зависит от выбора исчерпания многообразия M.

Далее пусть Ω — односвязная неограниченная область в M с гладкой границей $\partial\Omega$, такая что $M \setminus \overline{\Omega} \neq \emptyset$. При этом, если $\partial\Omega$ некомпактна, то множества $B_k \cap \Omega$ односвязны.

Всюду далее в качестве подмножества G будем рассматривать область Ω, ее границу $\partial\Omega$ или все многообразие M. Очевидно, что из условия $f_1 \overset{M}{\sim} f_2$ следует выполнение условий $f_1 \overset{\Omega}{\sim} f_2$ и $f_1 \overset{\partial\Omega}{\sim} f_2$.

Будем говорить, что непрерывная на M (на Ω) функция f принадлежит *классу допустимых на* M (на Ω) относительно уравнения (1) функций и обозначать $f \in K_{L,g}(M)$ ($f \in K_{L,g}(\Omega)$), если на M (на Ω) найдется такое решение u этого уравнения, что $u \overset{M}{\sim} f$ ($u \overset{\Omega}{\sim} f$).

Далее пусть $B \subset M$ — произвольное связное компактное подмножество с гладкой границей ∂B и непустой внутренностью. Обозначим v_B — L-потенциал многообразия M относительно компакта B, т.е. решение уравнения $Lu = 0$ на $M \setminus B$ такое, что $0 < v_B \leq 1$, $v_B|_{\partial B} = 1$. Многообразие M будем называть *L-строгим,* если для некоторого компакта $B \subset M$ существует L-потенциал v_B такой, что $v_B \overset{M}{\sim} 0$. Если $L = \Delta$, то функция v_B является емкостным потенциалом многообразия M относительно компакта B.

Далее пусть f – непрерывная на M функция, φ — непрерывная на $\partial\Omega$ функция. Если граница $\partial\Omega$ некомпактная, то будем полагать также, что $\varphi \overset{\partial\Omega}{\sim} f$.

Будем говорить, что на Ω разрешима краевая задача для уравнения (1) с граничными данными (φ, f), если в области Ω существует решение u такое, что

$$Lu = g(x) \text{ на } \Omega, \qquad u(x)|_{\partial\Omega} = \varphi, \qquad u \overset{\Omega}{\sim} f. \tag{2}$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть M — L-строгое риманово многообразие, $\Omega \subset M$ — односвязная неограниченная область в M с гладкой границей $\partial\Omega$, $f \in K_{L,g}(\Omega)$ и φ — непрерывная на $\partial\Omega$ функция. Тогда на Ω однозначно разрешима краевая задача (2) с граничными данными (φ, f).*

Заметим, что если M — L-строгое риманово многообразие, $f \in K_{L,g}(M)$, то для любой неограниченной области $\Omega \subset M$ и любой $\varphi \in C(\partial\Omega)$, такой что $\varphi \overset{\partial\Omega}{\sim} f$ однозначно разрешима краевая задача (2) с граничными данными (φ, f).

Также справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $B \subset M$ — некоторое связное компактное подмножество и на $M \backslash B$ для любой константы A разрешима внешняя краевая задача для уравнения (1) с граничными условиями (A, f). Тогда для любой неограниченной области $\Omega \subset M$, для любой $\varphi \in C(\partial\Omega)$, такой что $\varphi \overset{\partial\Omega}{\sim} f$ однозначно разрешима краевая задача (2) с граничными данными (φ, f).*

Литература

1. Grigor'yan A. *Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds* // Bulletin of Amer. Math. Soc. – 1999. – № 36. – С. 135–249.

2. Лосев А. Г. *О разрешимости задачи Дирихле для уравнения Пуассона на некоторых некомпактных римановых многообразиях* // Дифференциальные уравнения. – 2017. – Т. 53. – № 12. – С. 1643–1652.

3. Мазепа Е. А. *О разрешимости краевых задач для уравнения Пуассона на некомпактных римановых многообразиях* // Математическая физика и компьютерное моделирование. – 2017. – Т. 20. – № 3. – С. 135–145.

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR INHOMOGENEOUS ELLIPTIC EQUATIONS
IN UNBOUNDED DOMAINS OF RIEMANNIAN MANIFOLDS

A.G. Losev, E.A. Mazepa

The paper develops a new approach to the formulation of boundary value problems on arbitrary non-compact Riemannian manifolds; it is based on the introduction of special equivalence classes of continuous functions. In particular, the dependence between the solvability of boundary and external boundary value problems for inhomogeneous linear elliptic equations on arbitrary non-compact Riemannian manifolds is established.

Keywords: inhomogeneous elliptic equations, noncompact Riemannian manifolds.

УДК 514.86

СТАЦИОНАРНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ РЕАЛЬНЫХ ГАЗОВ

В.В. Лычагин[1], М.Д. Рооп[2]

1 *valentin.lychagin@uit.no*; Институт проблем управления имени В.А. Трапезникова РАН, The Arctic University of Norway

2 *mihail_roop@mail.ru*; Институт проблем управления имени В.А. Трапезникова РАН, МГУ имени М.В. Ломоносова

Рассматривается задача стационарной фильтрации реального газа в трехмерном пространстве. Термодинамическое состояние газа описывается уравнением Пенга-Робинсона. Дано описание фазовых переходов в таких газах, приводится решение задачи Дирихле, строятся области, соответствующие различным фазам.

Ключевые слова: фильтрация, закон Дарси, термодинамика, фазовые переходы.

Стационарная фильтрация в пористых средах описывается следующей системой дифференциальных уравнений [1, 2]:

- закон Дарси

$$\mathbf{u} = -\frac{k}{\mu}\nabla p, \tag{1}$$

где $\mathbf{u}(x) = (u_1, u_2, u_3)$ — поле скоростей, $p(x)$ — давление, $x \in \mathbb{R}^3(x_1, x_2, x_3)$, $k = \|k_{ij}\|$ — тензор проницаемости, который является характеристикой среды, так же как и вязкость μ. Закон Дарси (1) справедлив для однокомпонентной фильтрации, то есть для сред, состоящих из одного вида жидкости или газа. Мы будем рассматривать изотропную среду, положив $k_{ij} = k\delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера.

- уравнение неразрывности

$$\operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = 0, \tag{2}$$

где $\rho(x)$ — плотность среды. Уравнение (2) соответствует закону сохранения массы.

В дополнение к (1) и (2) мы предполагаем постоянство удельной энтропии $\sigma(x)$ вдоль потока:

$$(\mathbf{u}, \nabla\sigma) = 0. \tag{3}$$

Система (1) – (3) является недоопределенной, для ее замыкания необходимы уравнения состояния среды, описывающие ее термодинамические свойства.

Пусть $\mathbb{R}^5(\sigma, p, T, v, e)$, где T — температура, $v = \rho^{-1}$ — удельный объем, e — удельная энергия, — контактное пространство со структурной 1-формой

$$\theta = d\sigma - T^{-1}de - T^{-1}p\,dv.$$

Следуя [3, 4], под термодинамическим состоянием будем понимать либо двумерное лежандрово многообразие $\widehat{L} \subset \mathbb{R}^5(\sigma, p, T, v, e)$, на котором форма θ аннулируется: $\theta|_{\widehat{L}} = 0$, либо двумерное лагранжево многообразие $L \subset (\mathbb{R}^4, \Omega)$, такое что $\Omega|_L = 0$, где Ω — симплектическая структура на $\mathbb{R}^4(p, T, e, v)$:

$$\Omega = -d\theta = d(T^{-1}) \wedge de + d(pT^{-1}) \wedge dv.$$

Условия $\theta|_{\widehat{L}} = 0$ или $\Omega|_L = 0$ означают, что на $\widehat{L}$ или на L выполняется первое начало термодинамики. Если лагранжево многообразие L задано с помощью *уравнений состояния*:

$$L = \left\{f(p, T, e, v) = 0,\ g(p, T, e, v) = 0\right\},$$

то скобка Пуассона $[f, g]$ функций f и g относительно формы Ω

$$[f, g]\,\Omega \wedge \Omega = df \wedge dg \wedge \Omega$$

равна нулю на L:

$$[f, g] = 0 \text{ на } L. \tag{4}$$

Теорема 1. *Лежандрово многообразие $\widehat{L}$ задается с помощью потенциала Масье-Планка $\phi(v, T)$ [5]:*

$$p = RT\phi_v, \quad e = RT^2\phi_T, \quad \sigma = R(\phi + T\phi_T),$$

где R — универсальная газовая постоянная.

Лагранжево многообразие L снабжено дифференциальной квадратичной формой κ [3]:

$$\kappa = d(T^{-1}) \cdot de + d(pT^{-1}) \cdot dv.$$

Те области на L, где форма κ отрицательно определенная, соответствуют допустимым состояниям.

Теорема 2. *Дифференциальная квадратичная форма κ в терминах потенциала Масье-Планка имеет вид [5]:*

$$R^{-1}\kappa = -(\phi_{TT} + 2T^{-1}\phi_T)dT \cdot dT + \phi_{vv}dv \cdot dv.$$

Следовательно, в области допустимых состояний

$$\phi_{TT} + 2T^{-1}\phi_T > 0, \quad \phi_{vv} < 0.$$

Области допустимых состояний отделены друг от друга термодинамически нестабильными состояниями, где форма κ не является отрицательно определенной. Переход из одной допустимой точки в другую, сопровождающийся сохранением удельного потенциала Гиббса $\gamma = e - T\sigma + pv$ и интенсивных величин (p, T), — *фазовый переход*. Удельный потенциал Гиббса с помощью потенциала Масье-Планка выражается следующим образом [5]:

$$\gamma = RT(v\phi_v - \phi).$$

Следовательно, справедлива теорема [5]:

Теорема 3. *Точки фазового перехода на лагранжевом многообразии L задаются соотношениями:*

$$\begin{gathered} \phi_v(v_2, T) = \frac{p}{RT}, \quad \phi_v(v_1, T) = \frac{p}{RT}, \\ \phi(v_2, T) - v_2\phi_v(v_2, T) = \phi(v_1, T) - v_1\phi_v(v_1, T), \end{gathered} \tag{5}$$

Уравнение состояния Пенга-Робинсона было предложено в [6] и имеет следующий вид:

$$p = \frac{T}{v-1} - \frac{1}{(v+1)^2 - 2}. \tag{6}$$

Для того чтобы задать лагранжево многообразие для газа Пенга-Робинсона, требуется второе уравнение состояния. Оно может быть найдено с помощью условия (4).

Теорема 4. *Лагранжево многообразие для газов Пенга-Робинсона задано с помощью (6) и следующего соотношения:*

$$e = \frac{nT}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left(\frac{v\sqrt{2} + v - 1}{v\sqrt{2} - v + 1}\right),$$

удельная энтропия σ и потенциал Масье-Планка $\phi(v, T)$ имеют вид:

$$\sigma = \ln\left(T^{n/2}(v-1)\right), \quad \phi(v, T) = \ln\left(T^{n/2}(v-1)\right) - \frac{\sqrt{2}}{4T}\ln\left(\frac{(3-2\sqrt{2})(v\sqrt{2}+v-1)}{v\sqrt{2}-v+1}\right). \tag{7}$$

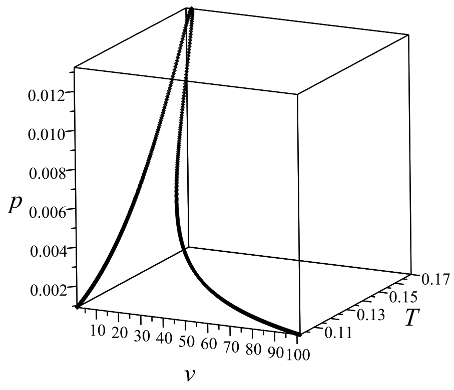


Рис. 1. Кривая фазового перехода для газов Пенга-Робинсона

С помощью (5) и (7) можно построить кривую фазового перехода для газов Пенга-Робинсона. Она имеет вид, представленный на рис. 1.

Пусть в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^3$ с гладкой границей ∂D в точках $a_i \in D$ расположены точечные источники с интенсивностями J_i, $i = \overline{1, N}$. Область D можно разбить на подобласти $\overline{D}_j$ с источниками общей энтропии, поскольку линии тока пересекаются в точках расположения источников, а энтропия на линиях тока постоянна. Фильтрации в $\overline{D}_j$ независимы, поэтому мы полагаем удельную энтропию заданному значению $\sigma(x) = R\sigma_0$. Тогда можно выразить все термодинамические величины через удельный объем v с помощью соотношения $\sigma = R(\phi + T\phi_T)$.

Теорема 5. *Задача (1) – (3) эквивалентна задаче Дирихле для уравнения Лапласа:*

$$\Delta(Q(v(x))) = 0, \quad v|_{\partial D} = v_0,$$

где $Q(v) = -\int kp'(v)(v\mu)^{-1}dv$.

Зная решение задачи (1) – (3), то есть располагая всеми термодинамическими величинами как функциями $x \in \mathbb{R}^3$, можем перенести кривую фазового перехода на физическое пространство, определив тем самым области, соответствующие различным фазам. Распределение фаз для $N = 5$ показано на рис. 2. Закрашенные области соответствуют конденсации газа, светлые — газовой фазе.

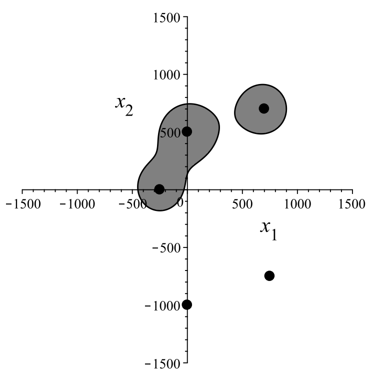


Рис. 2. Распределение фаз в пространстве

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-29-10013).

Литература

1. Leibenson L. *Motion of Natural Liquids and Gases in a Porous Medium.* – Moscow: Gostkhizdat, 1947. – 244 p.

2. Muskat M. *The Flow of Homogeneous Fluids Through Porous Media.* – New-York: McGraw-Hill, 1937. – 169 p.

3. Lychagin V. V. *Contact Geometry, Measurement and Thermodynamics* // Nonlinear PDEs, Their Geometry and Applications. Proceedings of the Wisla 18 Summer School. – Cham: Birkhauser, 2019. – P. 3–52.

4. Duyunova A. A., Lychagin V. V., Tychkov S. N. *Classification of equations of state for viscous fluids* // Dokl. Math. – 2017. – Vol. 95. – Is. 2. – P. 172–175.

5. Lychagin V. V., Roop M. D. *Phase transitions in filtration of real gases.* – https://arxiv.org/abs/1903.00276.

6. Peng B. Y., Robinson D. B. *A New Two-Constant Equation of State* // Industrial and Engi- neering Chemistry: Fundamentals. – 1976. – Vol. 15. – P. 59–64.

STEADY FILTRATION OF REAL GASES

V.V. Lychagin, M.D. Roop

In this paper, we study a three-dimensional steady filtration of real gases in a porous medium. Thermodynamic state of gases is described by the Peng-Robinson state equation. The description of phases transitions in such gases is given, the solution of the Dirichlet boundary problem is provided, the domains in physical space corresponding to different phases are constructed.

Keywords: filtration, Darcy law, thermodynamics, phase transitions.

УДК 517.53

ЗАДАЧА КРАТНОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ В КЛАССЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА В ПОЛУПЛОСКОСТИ

К.Г. Малютин[1], М.В. Кабанко[2]

1 *malyutinkg@gmail.com*; Курский государственный университет, Юго-Западный государственный университет
2 *kabankom@gmail.com*; Курский государственный университет

Целью данной работы является исследование задачи кратной интерполяции в классе аналитических функций конечного порядка $\rho > 1$ в полуплоскости. Получены необходимые и достаточные условия ее разрешимости в терминах канонического произведения Неванлинны, соответствующее узлам интерполяции. Решение интерполяционной задачи построено в виде обобщенного интерполяционного ряда Джонса, который является обобщением интерполяционного ряда Лагранжа.

Ключевые слова: кратная интерполяция, дивизор, произведение Неванлинны, интерполяционный ряд Джонса.

Обозначим через $[\rho,\infty]^+$ пространство аналитических в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+ = \{z : \Im z > 0\}$ функций порядка $\rho > 0$ в смысле эквивалентных между собой определений Говорова и Титчмарша [1, гл. 1]. Для точки $a_n \in \mathbb{C}_+$ обозначим через

$\Lambda_n = \min\{1; \Im a_n\}$. Неравенства Коши для производных голоморфной функции приводят к следующему определению.

Определение 1. *Дивизор* $D = \{a_n, q_n\}_{n=1}^{\infty}$, *т.е. множество различных комплексных чисел* $\{a_n = r_n e^{i\theta_n}\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}_+$ *вместе с их кратностями* $\{q_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{N}$, *называется интерполяционным в пространстве* $[\rho,\infty]^+$, *если для любой последовательности комплексных чисел* $b_{n,k}$, $k = 1,2,\ldots,q_n$, $n \in \mathbb{N}$, *удовлетворяющих условиям*

$$\begin{gathered}\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\ln|a_n|+2} \ln^+ \ln^+ \sup_{1\leqslant k\leqslant q_n} \frac{|b_{n,k}|\Lambda_n^{(k-1)}}{(k-1)!} < \infty,\\ \limsup_{|a|_n\to\infty} \frac{1}{\ln|a_n|+2} \ln^+ \ln^+ \sup_{1\leqslant k\leqslant q_n} \frac{|b_{n,k}|\Lambda_n^{(k-1)}}{(k-1)!} \leqslant \rho,\end{gathered} \tag{1}$$

существует функция $F \in [\rho,\infty]$ *со свойством*:

$$F^{(k-1)}(a_n) = b_{n,k}, \quad k = 1,2,\ldots,q_n,\ n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

В работе [2] Нгуен Тхыонг Уен рассматривал кратную интерполяционную задачу в пространстве $[\rho,\infty]^+$ при $\rho > 1$. Были найдены условия необходимые и условия достаточные (между которыми был разрыв) для ее разрешимости. Точнее, было доказано, что для того чтобы по каждой последовательности $b_{n,k}$, $k = 1,2,\ldots,q_n$, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющей условиям (1) можно было построить функцию из пространства $[\rho,\infty]^+$, удовлетворяющую равенствам (2) необходимо, чтобы при любом $\varepsilon > 0$ сходился ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n \sin(\arg a_n)}{|a_n|^{\rho+\varepsilon}} < \infty \tag{3}$$

и

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\ln|a_n|} \ln^+ \ln \frac{q_n!}{(\Im a_n)^{q_n} |E^{(q_n)}(a_n)|} \leqslant \rho;$$

достаточно, чтобы выполнялось условие (3) и

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\ln|a_n|} \ln^+ \ln \frac{q_n!}{(\Im a_n)^{q_n+1} |E^{(q_n)}(a_n)|} \leqslant \rho, \tag{4}$$

где $E(z)$ – каноническое произведение Неванлинны дивизора D [1, гл. 1]:

$$E(z) = E_D(z) =: \prod_{|a_n|<1} \left(\frac{z-a_n}{z-\bar{a}_n}\right)^{q_n} \prod_{|a_n|\geqslant 1} B_q^{q_n}(z,a_n), \quad q = [\rho],$$

$B_q(u,v)$ — первичный множитель Неванлинны:

$$B_q(u,v) = \begin{cases} \dfrac{\bar{v}(u-v)}{v(u-\bar{v})}, & q = 0,\\ B_0(u,v)\exp\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{q} \frac{u^i}{i}\left(\frac{1}{v^i} - \frac{1}{\bar{v}^i}\right)\right), & q \in \mathbb{N}.\end{cases}$$

При этом дополнительно предполагалось, что множество $\{a_n\}_1^{\infty}$ имеет единственную точку сгущения на бесконечности (хотя это следует и из условия (4)). Условие (4) накладывает ограничение на скорость убывания $\Im a_n$, а именно, для любого

ε справедливо асимптотическое неравенство

$$\Im a_n > \exp(-|a_n|^{\rho+\varepsilon}), \quad |a_n| > R(\varepsilon) > 0,$$

которое позволило авторам строить решение задачи (2) в виде обобщенного интерполяционного ряда Лагранжа.

В предлагаемой постановке задача относится к так называемому классу задач свободной интерполяции, когда на значения функции в узлах интерполяции накладываются минимальные ограничения, обусловленные необходимостью нахождения решения в данном пространстве аналитических функций. Полностью задача простой свободной интерполяции (т. е. $q_n = 1, n \in \mathbb{N}$) в пространстве $[\rho,\infty]^+$, $\rho > 1$, была решена в работе [3]. Задача свободной кратной интерполяции в пространствах функций конечного порядка (включая нулевой) и типа не выше чем нормальный была полностью решена в работах [4], [5].

В представленном исследовании мы находим критерий интерполяционности дивизора D в пространстве $[\rho,\infty]^+$, $\rho > 1$ в случае кратных узлов в терминах произведения Неванлинны, который сформулирован в следующей теореме.

Теорема. *Следующие два утверждения эквивалентны.*

1) *Дивизор* $D = \{a_n, q_n\}_{n=1}^{\infty}$ *является интерполяционным в пространстве* $[\rho,\infty]^+$, $\rho > 1$.

2) *Выполняется условие* (3) *и*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{\ln|a_n|+1} \ln^+ \ln \frac{q_n!}{(\Lambda_n)^{q_n}|E^{(q_n)}(a_n)|} \leqslant \infty,$$

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\ln|a_n|} \ln^+ \ln \frac{q_n!}{(\Lambda_n)^{q_n}|E^{(q_n)}(a_n)|} \leqslant \rho.$$

Решение задачи (2) получено в виде обобщенного ряда Джонса. Чтобы сформулировать это решение, введем некоторые обозначения. Обозначим через

$$\alpha_{n,m} = \frac{(-1)^{m-1}}{(m-1)!} \sum_{i=o}^{q_n-m} \frac{1}{i!} \gamma_{n,q_n+1-m-i} b_{n,i+1},$$

где

$$\gamma_{n,k} = \frac{1}{(k-1)!} \left(\frac{d}{dz}\right)^{k-1} \frac{(z-a_n)^{q_n}}{E(z)}\bigg|_{z=a_n}, \ k = 1,\ldots,q_n, n \in \mathbb{N}.$$

Перенумеровав, если есть необходимость, точки дивизора D, можем считать, что

$$\frac{\Im a_{n+1}}{1+r_{n+1}^2} \leqslant \frac{\Im a_n}{1+r_n^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Положим

$$\alpha_n(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1+\bar{a}_k(z+i\Lambda_n)}{i(\bar{a}_k - z - i\Lambda_n)} \frac{\Im a_k}{(1+r_k^2)^{\frac{[\rho]+3}{2}}}, \quad n = 1,2,\ldots.$$

Ряд, определяющий функции $\alpha_n(z)$, сходится равномерно в каждой области

$$D_{r,\delta}^n = \{z : |z| \leqslant r, \Im z \geqslant -\Lambda_n + \delta, \delta > 0\}.$$

Положим далее

$$P_n(z) = \sum_{m=1}^{q_n} \alpha_{n,m} \left[\frac{\varphi_n(z)}{z-a_n} \right]^{(m-1)} ,$$

где

$$\varphi_n(z) = \left(\frac{1+z\bar{a}_n}{1+r_n^2} \right)^{S_n+[\rho]+3} \left(\frac{2\Im a_n}{z-\bar{a}_n} \right)^2 \exp[\alpha_n(a_n) - \alpha_n(z)] ,$$

S_n — последовательность натуральных чисел, которую выбираем, чтобы обеспечить принадлежность интерполирующего ряда пространству $[\rho,\infty]^+$.

Заметим, что $\varphi_n(a_n) = 1$, $n \in \mathbb{N}$, и формальный ряд

$$F(z) = E(z) \sum_{n=1}^{\infty} P_n(z)$$

решает интерполяционную задачу (2) [4].

Мы показываем, что при надлежащем выборе последовательности натуральных чисел S_n функция $F(z)$ принадлежит классу $[\rho,\infty]^+$.

Замечание 1. В случае простой интерполяции выражение для функций $\alpha_n(z)$ имеет несколько более простой вид [3]:

$$\alpha_n(z) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1+\bar{a}_k z}{i(\bar{a}_k - z)} \frac{\Im a_k}{(1+r_k^2)^{\frac{[\rho]+3}{2}}}, \quad n = 1,2,\dots .$$

Введение дополнительных слагаемых $i\Lambda_n$ в числитель и знаменатель вызвано необходимостью оценок производных функций $P_n(z)$ с помощью интегральной формулы Коши. Точнее, контур интегрирования должен пересекать нижнюю полуплоскость

$$\mathbb{C}_- = \{z : \Im z < 0\}.$$

Замечание 2. Мы не рассматриваем интерполяционную задачу в пространствах $[\rho,\infty]^+$ для случая $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, так как существуют различные определения порядка функции в случае $0 \leqslant \rho \leqslant 1$ (в смысле Гришина, Ронкина, Говорова-Титчмарша и др.), которые при $\rho > 1$ эквивалентны между собой. Поэтому в случае $0 \leqslant \rho \leqslant 1$ требуются различные постановки задач и подходов к их решению.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00236.

Литература

1. Говоров Н. В. *Краевая задача Римана с бесконечным индексом.* – М.: Наука, 1986. – 240 с.

2. Уен Н. Т. *Интерполирование с кратными узлами в полуплоскости в классе аналитических функций конечного порядка* // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – 1978. – Вып. 29. – С. 109–117.

3. Malyutin K. G., Gusev A. L. *The interpolation problem in the spaces of analytical functions of finite order in the half-plane* // Probl. Anal. Issues Anal., Special Issue. – 2018. – Vol. 7(25). – P. 113–123.

4. Малютин К. Г. *Задача кратной интерполяции в полуплоскости в классе аналитических функций конечного порядка и нормального типа* // Матем. сб. – 1993. – Т. 184. – № 2. – С. 129–144.

5. Боженко О. А., Малютин К. Г. *Задача кратной интерполяции в классе аналитических функций нулевого порядка в полуплоскости* // Уфимский математический журнал. – 2014. – Т. 6. – № 1. – С. 18–29.

THE PROBLEM OF MULTIPLE INTERPOLATION IN THE CLASS OF ANALYTICAL FUNCTIONS OF FINITE ORDER IN THE HALF-PLANE

K.G. Malyutin, M.V. Kabanko

The aim of this paper is to study the problem of multiple interpolation in the class of analytical functions of finite order $\rho > 1$ in the half-plane. The necessary and sufficient conditions for its solvability in terms of the canonical Nevanlinna product of nodes of interpolation are obtained. The solution of the interpolation problem is constructed in the form of the generalized Jones interpolation series, that is a generalization of the Lagrange interpolation series.

Keywords: multiple interpolation, divisor, Nevanlinna product, Jones interpolation series.

УДК 517.54

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОТОБРАЖЕНИЙ С *s*-УСРЕДНЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

А.Н. Малютина[1], А.В. Новик[2]

1 *nmd@math.tsu.ru*; Томский государственный университет, механико-математический факультет
2 *novik.anastasiia@mail.ru*; Томский государственный университет, механико-математический факультет

В работе продолжаем развивать геометрический метод для исследования дифференциальных свойств отображений с s-усредненной характеристикой.

Ключевые слова: пространственный, отображение, геометрический, усредненный, характеристика, дифференциальные свойства.

Мы продолжаем исследовать отображения с s-усредненной характеристикой (см. [1]). Рассмотрим

Пример. Пусть $D \subset R^3$ – область, определенная следующим образом $D = \left\{x \in R^3; 0 < |x_1| < \infty, 0 \le x_2 \le |x_1|^{\beta}, 0 \le x_3 \le 1\right\}$, где $0 < \beta \le 2$. Пусть $f : D \to D^*$, $f(x) = \left\{y \in R^3; y_1 = x_1, y_2 = \frac{x_2}{|x_1|+1}, y_3 = x_3(|x_1|+1)^{1-\alpha}\right\}$, где $D^* = \left\{y \in R^3; -\infty < y_1 < +\infty, 1 \le y_2 < |x_1|^{\beta}, 1 \le y_3 \le +\infty\right\}$, $0 < \alpha < 1$.

Нами показано, что построенное отображение является отображением с s-усредненной характеристикой, следовательно, класс исследуемых отображений не пуст, и не является отображением с ограниченным искажением.

Также в работе установлены следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть область $D \subset R^n$, $f : D \to R^n, f = (f^1, f^2, ..., f^n)$ – отображение с s-усредненной характеристикой, такое, что $f^{i_k} \in W^1_{n+\varepsilon_k, loc}(D), \varepsilon_k > 0$. Пусть $a = [1 + \sum_{k=1}^{n}(n+\varepsilon_k)^{-1} - mn^{-1}]^{-1}, 1 \le k \le m < n, s > a(a-1)^{-1}, 1 \le i_1 < i_2 < ... < i_m \le n$. Тогда $f \in W^1_{n+\delta}(D), \delta = n(s(a-1)-a)(s+a)^{-1}$.*

В [1] эта теорема доказана без учета кратности и поднятий кривых при отображении f.

Теорема 2. *Пусть $D_m \subset D'$, m=0,1,2,..., – ограниченные области, $|D'| \le R < \infty$. Пусть $f_m : D \to D_m$ – последовательность отображений с s-усредненной характеристикой, $s > (n-1)^{-1}$ и последовательность $\{f_m\}$ сходится равномерно внутри D к непрерывному отображению f, $f : D \to R^n$. Тогда $K_{O,s}(f) = (\int_D K_O^s(x,f)\,d\sigma_x)^{\frac{1}{s}} \le \lim_{m\to\infty} K_{O,s}(f_m)$.*

Теорема 3. *[2] Пусть $s \le \frac{2}{n-2}$ и отображение $f : D \to D^*$ – есть экстремальное отображение в классе $K_{I,s}(D,D^*)$. Тогда $f \in W_2^2(D')$ для любой подобласти D' такой, что $J(x,f) > 0$ на замыкании $\bar{D}'$ и $\bar{D}' \subset D$.*

Теорема 4. *Пусть $s \le \frac{2}{n-2}$ и отображение $f : D \to D^*$ – есть экстремальное отображение в классе $K_{\hat{I},s}(D,D^*)$. Тогда $f \in W_2^2(D')$ для любой подобласти D' такой, что $J(x,f) > 0$ на замыкании $\bar{D}'$ и $\bar{D}' \subset D$.*

Литература

1. Малютина А. Н., Елизарова М. А. *Об эквивалентности аналитического и геометрического определений отображений s-усредненной характеристикой* // Вестник ТГУ. Математика и механика. Томск, 2014. – № 1(127). – С. 25–41.

2. Стругов Ю. Ф. *Об одном дифференциальном свойстве экстремального отображения, квазиконформного в среднем* // ДАН СССР. – 1978. – Т. 243. – № 5. – С. 1138–1141.

ON DIFFERENTIAL PROPERTIES OF MAPPINGS WITH s-AVERAGED CHARACTERISTIC

A.N. Malyutina, A.V. Novik

In this paper, we continue to develop a geometric method for the study of differential properties of mappings with s-averaged characteristic.

Keywords: spatial, mapping, geometric, averaged, characteristic, differential properties.

УДК 517.51+517.53

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ L_p-ОЦЕНКИ ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ БЛЯШКЕ НА ПРЯМОЙ

Т.С. Мардвилко[1]

1 *mardvilko@mail.ru*; Белорусский государственный университет

В работе обсуждается поведение квазинормы производных произведений Бляшке в пространстве Лебега на прямой. Найден супремум и инфимум рассматриваемой квазинормы.

Ключевые слова: рациональные функции, произведения Бляшке.

Будем рассматривать пространство Лебега $L_p, 0 < p < \infty$, измеримых комплексных функций на $\mathbb{R}$ для которых конечна квазинорма (норма при $1 \le p < \infty$)

$$\|f\|_{L_p} = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx\right)^{1/p}, 0 < p < \infty.$$

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – набор комплексных чисел, лежащих в верхней полуплоскости $\Pi = \{z : \Im z > 0\}$. Через b_n обозначим произведение Бляшке порядка n с нулями в точках $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$b_n(z) = \prod_{k=1}^{n} \frac{z - a_k}{z - \bar{a}_k}.$$

Теорема 1. *Для $n, s \in \mathbb{N}$ и $\frac{1}{s+1} < p < \infty, p \neq \frac{1}{s}$, имеет место равенство*

$$\sup_{a_1, a_2, \ldots, a_n} \|b_n^{(s)}\|_{L_p} = +\infty.$$

Теорема 2. *Для $n, s \in \mathbb{N}$ и $\frac{1}{s+1} < p < \infty, p \neq \frac{1}{s}$, имеет место равенство*

$$\inf_{a_1, a_2, \ldots, a_n} \|b_n^{(s)}\|_{L_p} = 0.$$

Замечание. При $p \leq \frac{1}{s+1}$ квазинорма $\|b_n^{(s)}\|_{L_p} = +\infty$ для любого произведения Бляшке $b_n(z)$ и любых $n, s \in \mathbb{N}$.

В работе [1] автором найден супремум и инфимум квазинормы $\|b_n^{(s)}\|_{L_{1/s}}$. Необходимость исследования квазинормы $\|b_n^{(s)}\|_{L_{1/s}}$ возникла при получении оценок постоянной в неравенстве типа Бернштейна для рациональных функций, полученном А. А. Пекарским [2] (см. также [3]).

Ранее [4], [5] получены экстремальные интегральные неравенства для производных произведений Бляшке для круга.

Работа выполнена в рамках ГПНИ НАН Беларуси “Конвергенция”.

Литература

1. Мардвилко Т. С. *О значении постоянных в неравенствах типа Бернштейна для высших производных рациональных функций на прямой* // Веснік ГрГУ імя Я. Купалы – 2009. – Сер. 2, № 3.(27) – С. 18–25.

2. Пекарский А. А. *Неравенства типа Бернштейна для производных рациональных функций и обратные теоремы рациональной аппроксимации* // Матем. сб. – 1984. – Т. 124 (166). – № 4 (8). – С. 571–588.

3. Lorenz G. G., Golitschek M. V., Makovoz Y. *Constructive Approximation. Advanced Problems*. – Berlin: Springer-Verlag, 1996. – 651 p.

4. Mardvilko T. S. *On the value of the constants in the Bernstein type inequalities for higher derivatives of rational functions* // East Journal on Approximations. – 2009. – Vol. 15. – № 2. – P. 31–42.

5. Мардвилко Т. С. *Интегральные неравенства для высших производных произведений Бляшке для круга* // Журн. Белорус. гос. ун-та. Математика. Информатика. – 2018. – № 1. – С. 10–16.

SHARP L_p-ESTIMATES FOR THE DERIVATIVES OF BLASCHKE PRODUCTS ON THE LINE

T.S. Mardvilko

The behavior of the seminorm for the derivatives of Blaschke products on the line is discussed. The supremum and the infimum of the seminorm are obtained.

Keywords: rational functions, Blaschke products.

УДК 517.16; 517.38; 517.521

ОБОБЩЁННОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ НЕРАВЕНСТВО МИНКОВСКОГО И СИСТЕМЫ ОРТОНОРМИРОВАННЫХ ФУНКЦИЙ

И.А. Марусеев[1], А.Э. Рассадин[2]

1 *maruseev52@yandex.ru*; Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Лаборатория бесконечномерного анализа и математической физики механико-математического факультета
2 *brat_ras@list.ru*; Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Лаборатория бесконечномерного анализа и математической физики механико-математического факультета

В данной статье с помощью обобщённого интегрального неравенства Минковского выяснено новое свойство, которыми обладают системы ортонормированных функций. Это свойство проиллюстрировано содержательными примерами. Также обсуждена связь рассматриваемого свойства со спектральной теорией линейных операторов.

Ключевые слова: функция с компактным носителем, полиномы Лежандра, задача Штурма-Лиувилля.

Хорошо известно, что различного рода неравенства играли и продолжают играть в математике значительную роль (см. [1] и ссылки там). Существенным образом расширяет применение неравенств в функциональном анализе следующая

Теорема. *Пусть $X_n(x)$, $n = 1,2,\ldots$ — система ортонормированных на отрезке $[a,b]$ функций, и пусть $c_n > 0$ — элементы сходящегося числового ряда с суммой $C = \sum_{n=1}^{\infty} c_n$, тогда справедливо следующее неравенство:*

$$\int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} c_n \, |X_n(x)| \right]^2 dx \le C^2 . \tag{1}$$

Для доказательства этой теоремы возьмём функцию вида:

$$\Omega_0(y) = \theta(y)\,\theta(1-y)\,\exp\left[-\frac{1}{4\,y\,(1-y)}\right], \tag{2}$$

где $\theta(y)$ — это функция Хевисайда [3]. Эта функция имеет компактный носитель: $\operatorname{supp}\ \Omega_0(y) = [0,1]$ и с точностью до постоянного множителя есть не что иное, как известная функция "шапочка" [3]: $\Omega_0(y) \sim \omega_{1/2}(y-1/2)$.

Далее, сконструируем из функции (2), констант c_n и функций $X_n(x)$ следующую функцию $f(x,y)$ двух переменных:

$$f(x,y) \equiv \sum_{n=1}^{N} c_n \, X_n(x)\, \Omega_n(y) , \tag{3}$$

в которой N — натуральное число и $\Omega_n(y) = \Omega_0(y-n+1)$.

Функция (3) непрерывна на прямоугольнике $[a,b] \times [0,N]$, следовательно, при $p > 1$ на нём для неё справедливо обобщённое интегральное неравенство Минковского [2]:

$$\left\{ \int_a^b \left[\int_0^N |f(x,y)|\, dy \right]^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \le \int_0^N \left[\int_a^b |f(x,y)|^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}} dy . \tag{4}$$

Результат использования неравенства (4) при $p=2$ имеет вид:

$$\sqrt{\int_a^b \left[\sum_{n=1}^{N} c_n |X_n(x)|\right]^2 dx} \le \sum_{n=1}^{N} c_n\,. \tag{5}$$

При выводе формулы (5) использовалась как ортонормированность системы функций $X_n(x)$, так и компактность носителей целочисленных сдвигов функции (2).

Наконец, поскольку последовательность интегралов в правой части неравенства (5) является монотонно возрастающей последовательностью, ограниченной константой C, то, устремляя N к бесконечности, мы и получим утверждение теоремы.

Проиллюстрируем применение доказанной теоремы рядом примеров.

Пример 1. Пусть $c_n = 1/n^2$ и $P_n(x)$ — полиномы Лежандра [3]:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n\, n!}\,\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\,, \tag{6}$$

тогда согласно доказанной выше теореме функции (6) удовлетворяют неравенству:

$$\int_{-1}^{+1} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+1}}{n^2}\,|P_n(x)|\right]^2 dx \le \frac{\pi^4}{18}\,. \tag{7}$$

Пример 2. Рассмотрим на отрезке $[0,1]$ следующую задачу Штурма-Лиувилля:

$$-\frac{d^2u(x)}{dx^2} = \lambda\, u(x)\,, \qquad u(0)=0\,, \qquad \frac{du(1)}{dx} = u(1)\,. \tag{8}$$

Собственные значения λ_n задачи (8) выражаются через корни μ_n трансцедентного уравнения:

$$\sin\mu = \mu\cos\mu \tag{9}$$

следующим образом: $\lambda_n = \mu_n^2$, причём $n=0$ соответствует собственное значение $\lambda_0 = 0$, а ортонормированные собственные функции задачи (8) равны:

$$X_0(x) = \sqrt{2}\,x\,, \qquad X_n(x) = \sqrt{2}\,\frac{\sin(\mu_n x)}{|\sin\mu_n|}\,, \qquad n \ge 1. \tag{10}$$

Положим $c_n = 1/\mu_n^2$, где μ_n — положительные корни уравнения (9), тогда в силу неравенства (1):

$$\int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2}\,\frac{|\sin(\mu_n x)|}{|\sin\mu_n|}\right]^2 dx \le \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2}\right)^2. \tag{11}$$

Для точной оценки правой части в неравенстве (11) воспользуемся следующим известным результатом (см. [4], задача 30.09):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2 + z^2} = \frac{\tanh z}{z - \tanh z} - \frac{3}{z^2}\,. \tag{12}$$

Устремляя в тождестве (12) переменную z к нулю, найдём, что $\sum_{n=1}^{\infty} 1/\mu_n^2 = 1/5$.

Таким образом, для функций (10) с натуральным n справедливо неравенство:

$$\int_0^1 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_n^2} \frac{|\sin(\mu_n x)|}{|\sin \mu_n|} \right]^2 dx \le \frac{1}{50}. \tag{13}$$

Интересно отметить, что неравенство (13) указывает на связь доказанной выше теоремы со спектральной теорией линейных операторов [5].

Очевидно, что неравенства (7) и (13) не исчерпывают все следствия нашей теоремы, поэтому в докладе приведены и другие примеры применения неравенства (1).

Перспективой данной работы является распространение полученных результатов на ортонормированные системы функций, определённые на ограниченных областях пространств R^d с размерностями $d \ge 2$.

В заключение необходимо отметить, что выбор функции вида (2) для конструирования вспомогательной функции (3) не является принципиальным для доказательства сформулированной выше теоремы, то есть в качестве функции с компактным носителем могут быть использованы и другие бесконечно дифференцируемые функции, например, атомарная функция Рвачёва $up(x)$, подчиняющаяся следующему линейному функционально-дифференциальному уравнению [6]:

$$\frac{d\,up(x)}{dx} = 2\,up(2\,x+1) - 2\,up(2\,x-1).$$

Литература

1. Авхадиев Ф. Г. *Точные оценки в теории функций.* – Казань: Казанский федеральный университет, 2013. – 40 с.

2. Кудрявцев Л. Д. *Курс математического анализа. В 3 т. Т. 2.* – М.: Высшая школа, 1988. – 576 с.

3. Владимиров В. С. *Уравнения математической физики.* – М.: Наука, 1988. – 512 с.

4. Евграфов М. А., Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И., Бежанов К. А. *Сборник задач по теории аналитических функций.* – М.: Наука, 1969. – 388 с.

5. Гельфанд И. М. *О тождествах для собственных значений дифференциального оператора второго порядка* // УМН. – 1956. – Т. 11. – № 1(67). – С. 191–198.

6. Рвачёв В. Л., Рвачёв В. А. *Неклассические методы теории приближений в краевых задачах.* – Киев: Наукова думка, 1979. – 196 с.

THE GENERALIZED INTEGRAL MINKOWSKI INEQUALITY AND SYSTEMS OF ORTHONORMAL FUNCTIONS

I.A. Maruseev, A.E. Rassadin

In this paper new property of systems of orthonormal functions has been established by means of the generalized integral Minkowski inequality. This property has been illustrated by a number of meaningful examples. Connection between this property and spectral theory of linear operators also has been discussed.

Keywords: function with compact support, Legendre polynomials, the Sturm–Liouville problem.

УДК 517.956

О ФУНКЦИИ РИМАНА-АДАМАРА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ БИАНКИ

А.Н. Миронов[1]

1 *miro73@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Елабужский институт

Рассматриваются задачи Дарбу для уравнений Бианки третьего и четвертого порядка. Определены соответствующие функции Римана-Адамара, позволяющие представить решения указанных задач в явном виде. Доказаны существование и единственность функций Римана-Адамара.

Ключевые слова: уравнение Бианки, задача Дарбу, функция Римана-Адамара.

Задача Дарбу для гиперболического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными рассматривалась многими авторами. Можно указать, например, работы [1], [2, с. 228–233], [3]–[5].

Здесь рассматривается вопрос об определении, существовании и единственности соответствующей функции Римана-Адамара для уравнений Бианки третьего и четвертого порядка, которые рассмотрены, например, в работах [6]–[15].

Уравнением Бианки третьего порядка ряд авторов [11], [12], [13, с. 6], [14] называет уравнение

$$\begin{aligned} u_{xyz} + a_{110}(x,y,z)u_{xy} + a_{101}(x,y,z)u_{xz} + a_{011}(x,y,z)u_{yz} + a_{100}(x,y,z)u_x + \\ + a_{010}(x,y,z)u_y + a_{001}(x,y,z)u_z + a_{000}(x,y,z)u = f(x,y,z). \quad (1) \end{aligned}$$

Определим класс функций $C^{(k,l,m)}$ следующим образом: функция $u \in C^{(k_1,k_2,k_3)}$, если существуют непрерывные производные

$$\frac{\partial^{r_1+r_2+r_3}u}{\partial x^{r_1}\partial y^{r_2}\partial z^{r_3}} \quad (r_i = 0,\dots,k_i).$$

Решение класса $C^{(1,1,1)}$ назовем регулярным. Пусть D — область, ограниченная плоскостями $x=0$, $y=0$, $y=y_0>0$, $z=x$, $z=z_0>0$. Считаем, что коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям гладкости $a_{ijk} \in C^{(i,j,k)}(\overline{D})$. Обозначим через X, Y, T грани D при $x=0$, $y=0$, $z=x$ соответственно.

Задача Дарбу для уравнения Бианки третьего порядка. *В области D найти регулярное решение уравнения* (1)*, удовлетворяющее граничным условиям*

$$\begin{gathered} u|_{\overline{X}} = \varphi_1(y,z), \quad u|_{\overline{Y}} = \varphi_2(x,z), \quad u|_{\overline{T}} = \psi(x,y), \\ \varphi_1(y,0) = \psi(0,y),\ \varphi_2(x,x) = \psi(x,0),\ \varphi_1(0,z) = \varphi_2(0,z), \\ \varphi_1 \in C^{(1,1)}(\overline{X}), \quad \varphi_2 \in C^{(1,1)}(\overline{Y}), \quad \psi \in C^{(1,1)}(\overline{T}). \end{gathered}$$

Данная задача рассмотрена в работе [16].

Возьмем внутри области D произвольную точку $P(\xi,\eta,\zeta)$. Она определяет область, которая состоит из двух частей — параллелепипеда D_1 и призмы D_2.

Определим функцию Римана-Адамара задачи Дарбу $H(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)$. Пусть

$$H(x,y,z,\xi,\eta,\zeta) = \begin{cases} R(x,y,z,\xi,\eta,\zeta), & (x,y,z) \in D_1, \\ V(x,y,z,\xi,\eta,\zeta), & (x,y,z) \in D_2. \end{cases}$$

В результате дальнейших рассуждений мы приходим к задаче Дарбу для определения функции V с известными граничными условиями. Решение указанной задачи Дарбу существует и единственно. Итак, можем сделать вывод, что функция Римана-Адамара для уравнения Бианки третьего порядка определена, существует и единственна в $\overline{D}$.

Наличие функции Римана-Адамара позволяет построить решение задачи Дарбу для уравнения Бианки третьего порядка в явном виде.

Уравнением Бианки четвертого порядка называют уравнение

$$\begin{aligned} u_{xyzt} &+ a_{1110}u_{xyz} + a_{1101}u_{xyt} + a_{1011}u_{xzt} + a_{0111}u_{yzt} + \\ &+ a_{1100}u_{xy} + a_{1010}u_{xz} + a_{1001}u_{xt} + a_{0110}u_{yz} + a_{0101}u_{yt} + a_{0011}u_{zt} + \\ &+ a_{1000}u_x + a_{0100}u_y + a_{0010}u_z + a_{0001}u_t + a_{0000}u = f(x,y,z,t). \quad (2) \end{aligned}$$

Коэффициенты уравнения (2) зависят от (x,y,z,t). Решение уравнения (2) класса $C^{(1,1,1,1)}$ назовем регулярным. Пусть G — область, ограниченная плоскостями $x=0$, $y=0$, $y=y_0>0$, $z=0$, $z=z_0>0$, $t=x$, $t=t_0>0$. Считаем, что коэффициенты уравнения (2) удовлетворяют условиям гладкости $a_{ijkl}\in C^{(i,j,k,l)}(\overline{G})$. Обозначим через X, Y, Z, S грани G при $x=0$, $y=0$, $z=0$, $t=x$ соответственно.

Задача Дарбу для уравнения Бианки четвертого порядка. *В области G найти регулярное решение уравнения* (3)*, удовлетворяющее граничным условиям*

$$\begin{gathered} u|_{\overline{X}} = \varphi_1(y,z,t), \quad u|_{\overline{Y}} = \varphi_2(x,z,t), \\ u|_{\overline{Z}} = \varphi_2(x,y,t), \quad u|_{\overline{S}} = \psi(x,y,z), \\ \varphi_1(y,0,t) = \varphi_3(0,y,t),\ \varphi_1(0,z,t) = \varphi_2(0,z,t), \\ \varphi_2(x,0,t) = \varphi_3(x,0,t),\ \varphi_1(y,z,0) = \psi(0,y,z), \\ \varphi_2(x,z,x) = \psi(x,0,z),\ \varphi_3(x,y,x) = \psi(x,y,0), \\ \varphi_1 \in C^{(1,1,1)}(\overline{X}), \quad \varphi_2 \in C^{(1,1,1)}(\overline{Y}), \\ \varphi_3 \in C^{(1,1,1)}(\overline{Z}), \quad \psi \in C^{(1,1,1)}(\overline{S}). \end{gathered}$$

Методом интегральных уравнений доказаны существование и единственность решения указанной задачи Дарбу.

Возьмем внутри области G произвольную точку $P(\xi,\eta,\zeta,\tau)$. Она определяет область G_P, ограниченную плоскостями $x=0$, $x=\xi$, $y=0$, $y=\eta$, $z=0$, $z=\zeta$, $t=\tau$, $t=x$. Очевидно, область G_P можно разбить на две части: G_1, которая ограничена плоскостями $x=0$, $x=\xi$, $y=0$, $y=\eta$, $z=0$, $z=\zeta$, $t=\tau$, $t=\xi$; G_2, которая ограничена плоскостями $x=0$, $x=\xi$, $y=0$, $y=\eta$, $z=0$, $z=\zeta$, $t=\xi$, $t=x$. В рассмотренном выше трехмерном случае им соответствуют параллелепипед и призма.

Определим функцию Римана-Адамара задачи Дарбу $H(x,y,z,t,\xi,\eta,\zeta,\tau)$

$$H(x,y,z,t,\xi,\eta,\zeta,\tau) = \begin{cases} R(x,y,z,t,\xi,\eta,\zeta,\tau), & (x,y,z,t)\in G_1, \\ V(x,y,z,t,\xi,\eta,\zeta,\tau), & (x,y,z,t)\in G_2. \end{cases}$$

Доказаны существование и единственность функции Римана-Адамара для уравнения Бианки четвертого порядка. Построена формула, дающая решение задачи Дарбу в явном виде в терминах функции Римана-Адамара.

Литература

1. Пулькин С. П. *Некоторые краевые задачи для уравнений* $u_{xx} \pm u_{yy} + \frac{p}{x} u_x = 0$ // Уч. зап. Куйбышевского гос. пед. ин-та. – 1958. – Вып. 21. – С. 3–54.

2. Бицадзе А. В. *Некоторые классы уравнений в частных производных.* – М.: Наука, 1981. – 448 с.

3. Моисеев Е. И. *Уравнения смешанного типа со спектральным параметром.* – М.: Изд-во МГУ, 1988. – 150 с.

4. Сабитов К. Б. *Построение в явном виде решений задач Дарбу для телеграфного уравнения и их применение при обращении интегральных уравнений. I* // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26. – № 6. – С. 1023–1032.

5. Джохадзе О. М., Харибегашвили С. С. *Некоторые свойства функций Римана и Римана-Адамара для линейных гиперболических уравнений второго порядка и их приложения* // Дифференц. уравнения. – 2011. – Т. 47. – № 4. – С. 477–492.

6. Волкодавов В. Ф., Николаев Н. Я., Быстрова О. К., Захаров В. Н. *Функции Римана для некоторых дифференциальных уравнений в n-мерном евклидовом пространстве и их применения.* – Самара.: Самарский университет, 1995. – 76 с.

7. Жегалов В. И. *Трехмерный аналог задачи Гурса* // Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа. – 1990. – С. 94–98.

8. Севастьянов В. А. *Метод Римана для трехмерного гиперболического уравнения третьего порядка* // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 5. – С. 69–73.

9. Жегалов В. И., Севастьянов В. А. *Задача Гурса в четырехмерном пространстве* // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т. 32. – № 10. – С. 1429–1430.

10. Севастьянов В. А. *Об одном случае задачи Коши* // Дифференц. уравнения. – 1998. – Т. 34. – № 12. – С. 1706–1707.

11. Миронов А. Н. *Об инвариантах Лапласа одного уравнения четвертого порядка* // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45. – № 8. – С. 1144–1149.

12. Миронов А. Н. *О некоторых классах уравнений Бианки четвертого порядка с постоянными отношениями инвариантов Лапласа* // Дифференц. уравнения. – 2013. – Т. 49. – № 12. – С. 1572–1581.

13. Жегалов В. И., Миронов А. Н. *Дифференциальные уравнения со старшими частными производными.* – Казань: Изд-во Казанск. матем. общ-ва, 2001. – 226 с.

14. Миронов А. Н. *Некоторые классы уравнений Бианки третьего порядка* // Матем. заметки. – 2013. – Т. 94. – Вып. 3. – С. 489–400.

15. Жегалов В. И., Миронов А. Н., Уткина Е. А. *Уравнения с доинирующей частной производной.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 2014. – 385 с.

16. Миронов А. Н. *Задача Дарбу для уравнения Бианки третьего порядка* // Матем. заметки. – 2017. – Т. 102. – Вып. 1. – С. 63–70.

ON RIEMANN-HADAMARD FUNCTIONS FOR THE BIANCHI EQUATIONS

A.N. Mironov

The Darboux problems for the Bianchi equations of the third and fourth order are considered. We define the Riemann-Hadamard functions which allow to present solutions these problems explicitly. The existence and uniqueness of the Riemann-Hadamard functions are proved.

Keywords: Bianchi equation, Darboux problem, Riemann-Hadamard function.

УДК 517.53

ОДИН АНАЛОГ ОБРАТНОЙ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ АППРОКСИМАЦИИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПЛОСКОЙ МЕРЫ

В.Р. Мисюк[1]

1 *misiuk@grsu.by*; Гродненский государственный университет им. Янки Купалы, г. Гродно, Беларусь

Рассматривается вопрос об одном аналоге теоремы типа Бернштейна теории рациональной аппроксимации в случае плоской меры Лебега.

Ключевые слова: наилучшее рациональное приближение, неравенство типа Бернштейна, обратные теоремы, пространство Харди–Бесова.

Пусть m_2 — плоская мера Лебега в комплексной области $\mathbb{C}$, E — m_2-измеримое множество в $\mathbb{C}$. Для $0 < p \leqslant \infty$ через $L_p(E)$ обозначим пространство Лебега комплексных функций f на E относительно плоской меры m_2 с обычной квазинормой $\|f\|_{L_p(E)}$ (нормой при $1 \leqslant p \leqslant \infty$). Именно, $f \in L_p(E)$, если f – m_2-измерима и

$$\|f\|_{L_p(E)} = \left(\int\limits_E \left|f(z)\right|^p dm_2(z)\right)^{\frac{1}{p}} < \infty \text{ при } 0 < p < \infty\,,$$

$$\|f\|_{L_p(E)} = ess\sup_{z\in E}\left|f(z)\right| < \infty \text{ при } p = \infty\,.$$

Будем далее полагать, что $E = D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Пусть функция f аналитична в D. Через $\widehat{f}(k)$ обозначим её k-ый коэффициент Маклорена. Если $\alpha \geqslant 0$, то следующая функция, также является аналитической

$$J^\alpha f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^\alpha \widehat{f}(k) z^k\,,$$

она называется производной f в смысле Вейля. Очевидно, если $\alpha = l$ — натуральное, то

$$J^l f(z) = \left[\left(\frac{d}{dz}\right)z\right]^l f(z)\,.$$

Если $\alpha < 0$ функцию $J^\alpha f$ называют так же интегралом порядка $|\alpha|$.

Пусть $\alpha \in \mathbb{R}$ и $0 < p \leqslant \infty,\ 0 < q \leqslant \infty$. Следуя работам [1] и [2], через B_q^α обозначим пространство Харди—Бесова. Именно, $f \in B_q^\alpha$, если при некотором $\beta > \alpha$ функция

$$\left(1 - |z|^2\right)^{\beta-\alpha-\frac{1}{q}} \cdot \left(J^\beta f\right)(z)$$

принадлежит $L_q(D)$. Квазинорма (норма при $1 \leqslant q \leqslant \infty$) в пространстве B_q^α определяется следующим образом

$$\|f\|_{B_q^\alpha} = \left\|\left(1-|z|^2\right)^{\beta-\alpha-\frac{1}{q}} \cdot \left(J^\beta f\right)(z)\right\|_{L_q(D)} =$$

$$= \left(\int_D \left|\left(1-|z|^2\right)^{\beta-\alpha-\frac{1}{q}} \cdot \left(J^\beta f\right)(z)\right|^q dm_2(z)\right)^{\frac{1}{q}} < \infty\,.$$

Определение пространства B_q^α не зависит от β: при различных β соответствующие квазинормы эквивалентны. Ради удобства, как правило, полагают $\beta = \alpha + 1$.

Говорим, что функция f принадлежит пространству Бергмана[1] $A_p(D)$, $0 < p \leqslant \infty$, если она аналитична в D и конечна квазинорма $\|f\|_{A_p} = \|f\|_{L_p(D)}$ (норма при $1 \leqslant p \leqslant \infty$).

Через

$$R_n\left(f, A_p\right) = \inf_{r_n \in \mathscr{R}_n} \left\|f - r_n\right\|_{A_p},\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

обозначим наилучшее приближение f посредством рациональных функций степени не выше n.

Далее приведём некоторые сведения из теории интерполяционных пространств. Пусть X_0 и X_1 — совместимые квазинормированные абелевы группы по сложению [4]. Для $x \in X_0 + X_1$ введём K–функционал Я. Петре

$$K(t) = \inf\left\{\|x_0\|_{X_0} + t\ \|x_1\|_{X_1} : x_0 + x_1 = x\,,\ \ x_0 \in X_0\,,\ \ x_1 \in X_1\right\},\quad t > 0\,,$$

где $\|\cdot\|_{X_s}$ $(s = 0,\ 1)$ — квазинорма в X_s. Мы обозначим через

$$(\ \cdot\ ,\ \cdot\ )_{\theta,\ q}\qquad \left(0 < \theta < 1\,,\quad 0 < q \leqslant \infty\right)$$

интерполяционный функтор Я. Петре [4]. Именно, $x \in \left(X_0,\ X_1\right)_{\theta,\ q} = X_{\theta,\ q}$, если

$$\|x\|_{X_{\theta,\ q}} = \left(\int_0^\infty \left(t^{-\theta}\ K(t)\right)^q\ \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty\ \text{ при }\ q \neq \infty\,,$$

$$\|x\|_{X_{\theta,\ \infty}} = \sup_{t>0}\ t^{-\theta}\ K(t)\,.$$

Следуя Я. Петре [4]–[6], введём аппроксимационное пространство

$$\mathscr{R}^\alpha_{p,q} = \mathscr{R}^\alpha_q(A_p) := \left\{f \in A_p : \|f\|_{\mathscr{R}^\alpha_{p,q}} < \infty\right\},\ \ \alpha > 0;\ \ p, q \in (0, \infty]\,,$$

где

$$\|f\|_{\mathscr{R}^\alpha_{p,q}} := \left[\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{n}\ \left(n^{\alpha+\frac{1}{p}}\, R_n(f, A_p)\right)^q\right]^{\frac{1}{q}},\ \ q \neq \infty,$$

1 Иногда это пространство носит название *пространство М.М. Джрбашяна*. Здесь мы примем название *пространство Бергмана*, т.к. оно наиболее часто встречается в литературе.

$$\|f\|_{\mathscr{R}^{\alpha}_{p,\infty}} := \sup_{n\geqslant 1} n^{\alpha+\frac{1}{p}} R_n(f, A_p), \quad q=\infty.$$

Теорема 1.[3]. *Пусть* $0<\alpha_0,\ \alpha_1,\ \sigma_0,\ \sigma_1<\infty$, $0<\theta<1$, $\alpha=(1-\theta)\alpha_0+\theta\alpha_1$ *и*

$$\frac{1}{\sigma}=\frac{1-\theta}{\sigma_0}+\frac{\theta}{\sigma_1}\,.$$

Тогда $\left(B^{\alpha_0}_{\sigma_0},\ B^{\alpha_1}_{\sigma_1}\right)_{\theta,\ q}=B^{\alpha}_{\sigma}$.

Теорема 1 хорошо известна для $1\leqslant\sigma_0,\ \sigma_1,\ q_0,\ q_1\leqslant\infty$ (см., например, [4], гл. 6). С точки зрения обобщённых функций в вещественном случае она получена в книгах Я. Петре [7] и Х. Трибеля [6]. Для аналитических функций эта теорема доказана А.А. Пекарским [3] отлично от методов, применяемых в [4], [7], [6].

Теорема 2. [4], [5]. *Пусть* $0<p,\ q_0,\ q_1\leqslant\infty$, $0<\alpha_0,\ \alpha_1<\infty$, *причём* $\alpha_0\neq\alpha_1$, $0<\theta<1$ *и* $\alpha=(1-\theta)\alpha_0+\theta\alpha_1$. *Тогда*

$$\left(\mathscr{R}^{\alpha_0}_{p,\ q_0},\ \mathscr{R}^{\alpha_1}_{p,\ q_1}\right)_{\theta,\ q}=\mathscr{R}^{\alpha}_{p,\ q}.$$

Следуя теоремам 1 и 2, а также [8], приходим к следующему утверждению

Теорема 3. *Пусть* $2<p<\infty$, *и*

$$\frac{1}{q}=\alpha+\frac{2}{p}.$$

Тогда имеет место вложение $\mathscr{R}^{\alpha}_{q,\ p}\subset B^{\alpha}_{q}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке государственной программы научных исследований “Конвергенция - 2020”.

Литература

1. Flett T. M. *Lipschitz spaces of functions on the circle and the disk* // J. Math. Anal. and Appl. – 1972. – V. 39. – № 1. – P. 121–158.

2. Пекарский А. А. *Неравенства типа Бернштейна для производных рациональных функций и обратные теоремы рациональной аппроксимации* // Мат. сборник. – 1984. – Т. 124. – № 4. – С. 571–588.

3. Пекарский А. А. *Рациональные приближения выпуклых функций* // Мат. заметки. – 1985. – Т. 38. – № 5. – С. 679–690.

4. Берг Й. *Интерполяционные пространства. Введение.* – М.: Мир, 1980. – 264 с.

5. Peetre J. *Interpolation of normed Abelian groups* // Ann. Mat. Pura Appl. – 1972. – V. 92. – P. 217–262.

6. Трибель Х. *Теория функциональных пространств.* – М.: Мир, 1986. – 447 с.

7. Peetre J. *New thoughts on Besov spaces.* – Math. Dept.: Duke Univ., 1976. – 264 с.

8. Мисюк В. Р. *Теоремы типа Джексона и Бернштейна для наилучших полиномиальных приближений в пространстве Бергмана* // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 1 (2). – С. 34–37.

AN ANALOGUE OF THE INVERSE THEOREM OF THE APPROXIMATION THEORY WITH RESPECT TO THE PLANAR MEASURE

V.R. Misiuk

The question of one analogue of a Bernstein-type theorem of rational approximation theory with respect to a planar Lebesgue measure is considered.

Keywords: best rational approximation, Bernstein-type inequality, inverse theorems, Hardy-Besov space.

УДК 517.955

О РАЗРЕШИМОСТИ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

В.С. Мокейчев[1], А.М. Сидоров[2]

1 *valery.mokeychev@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет
2 *anatoly.sidorov@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В пространстве φ_B-распределений со значениями в банаховом пространстве рассматривается начальная задача для дифференциального уравнения с частными производными.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение с частными производными, пространство φ_B-распределений, φ_B-решение.

В [1], [2] было определено и изучено понятие φ-распределения, оказавшееся удобным средством нахождения решений некоторых дифференциальных уравнений с частными производными. С целью расширить класс уравнений, к которым применим подход, основанный на этом понятии, в [3], [4] было введено φ_B-распределение, где B – банахово пространство.

В настоящей работе мы, в рамках пространства φ_B-распределений, продолжаем начатое в [5] исследование разрешимости начальной задачи для дифференциального уравнения с частными производными.

Пусть Φ – конечное множество мультииндексов $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $C_{\alpha,j}(t)$, $j = 0, \ldots, M$, – линейные операторы, при каждом $t \in [a, b) \subset R$ отображающие некоторое банахово пространство B в себя, Ω – область в R^n, $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega$, $D_t^j = \frac{\partial^j}{\partial t^j}$, $D_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$, $k = 1, \ldots, n$; $D_x^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$. Изучается разрешимость уравнения

$$\sum_{j=0}^{M} \sum_{\alpha \in \Phi} C_{\alpha,j}(t) D_t^j D_x^\alpha U = f(t, x), t \in [a, b), x \in \Omega. \quad (1)$$

Искомая функция $U = U(t, x)$ должна удовлетворять условиям

$$D_t^j U|_{t=a} = g_j(x), j = 0, \ldots, M - 1. \quad (2)$$

Решение задачи (1), (2) ищется в пространстве $D'_\varphi(B)$ [4] ϕ_B-распределений со значениями в банаховом пространстве B, где $\varphi = \{\exp((\mu + ip)x), p \in Z^n\}$, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in C^n$. Поскольку $U(t, x)$ и $f(t, x)$ – φ_B-распределения, то для почти всех t

$$U(t,x)=\sum_p U_p(t)\exp((\mu+ip)x), \tag{3}$$

$$f(t,x)=\sum_p f_p(t)\exp((\mu+ip)x) \tag{4}$$

разложения в ряд Фурье [4] по системе $\phi \quad \phi_B$-распределений $U(t,x), f(t,x)$.

Определение 1. *Функция $V(t):[a,b)\to B$ называется абсолютно непрерывной, если существует функция $W(t):[a,b)\to B$ такая, что $\|W(t)\|_B \in L^1_{loc}([a,b))$ и $V(t)=\int_a^t W(s)ds$, $\|\cdot\|_B$ – норма в пространстве B.*

Определение 2. *φ_B-распределение U называется φ_B-решением задачи (1), (2), если $U_p(t)$ абсолютно непрерывны, в $D'_\varphi(B)$ выполнены равенства (2) и почти всюду равенство (1).*

Зададим операторы $Q_{p,j}(t):B\to B$, $t\in[a,b)$, формулой $Q_{p,j}(t)=\sum_{\alpha\in\Phi}(\mu+ip)^\alpha C_{\alpha,j}(t)$, $p\in Z^n$, $j=0,\dots,M$.

Теорема. *Пусть при некотором μ операторы $Q_{p,M}(t)$ при всех $p\in Z^n$ имеют обратные, $\|(Q_{p,M}(t))^{-1}Q_{p,j}(t)\|_B\le C(t)$, где $C(t)\in L^1_{loc}([a,b))$ и $\|(Q_{p,M}(t))^{-1}f_p(t)\|_B\in L^1_{loc}([a,b))$. Тогда задача (1), (2) однозначно разрешима в пространстве $D'_\varphi(B)$.*

Замечание. *Если $U(t,x)$ – решение уравнения (1), почти всюду по t принадлежащее пространству Соболева $W^{2,\Phi}(\Omega)$, то, как легко видеть, выполнены равенства (3), (4). Поэтому если $U(t,x)$ – такое решение, то оно является и φ_B-решением. Пример, приведенный в [3], показывает, что обратное утверждение неверно.*

Литература

1. Мокейчев В. С., Мокейчев А. В. *Новый подход к теории линейных задач для систем дифференциальных уравнений в частных производных. I* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 1. – С. 25–35.

2. Mokeychev V. S., Sidorov A. M. *On an expansion in the series by given system of elements* // Исследования по прикладной математике и информатике. – Казань: Казанский гос. университет. – 2004. – Вып. 25. – С. 163–167.

3. Мокейчев В. С. *Пространство, элементы которого и только они разлагаются в ряды Фурье по заданной системе элементов* // Евразийское Научное Объединение. Физ.–матем.науки. – 2016. – № 10(22). – С. 24–31.

4. Мокейчев В. С. *Метрические, банаховы, гильбертовы пространства φ_B-распределений* // Изв. вузов. Математика. – 2018. – № 5. – С. 64–70.

5. Мокейчев В. С., Сидоров А. М. *Корректно разрешимые задачи для линейных дифференциальных уравнений в частных производных* // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2017. – Т. 54. – С. 264–265.

ON SOLVABILITY OF INITIAL PROBLEM FOR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION

V.S. Mokeychev, A.M. Sidorov

In the space of φ_B-distributions whose values belong to a Banach space, an initial problem for partial differential equation is considered.

Keywords: partial differential, space of φ_B-distributions, φ_B-solution.

УДК 517.544.8

СВОЙСТВА ОДНОГО ОПЕРАТОРА

Ж.Э.Р. Муангу[1]

1 *gmouangou@yahoo.fr*; Северный (Арктический) федеральный университет имени М.В. Ломоносова

В статье обсуждается интегральные равенства, содержащие полуунитарный оператор A в вещественном гильбертовом пространстве $L_2(0,\pi)$, являющиеся фундаментальными в теории обратных задач для аналитических функций.

Ключевые слова: полуунитарный оператор, операторные функции, теория обратных задач для аналитических функций.

В вещественном гильбертовом пространстве $L_2(0,\pi)$ определим линейные оператор A по значениям, которые он принимает на базисных векторах $\cos nt$, $n=0,1,\ldots$:

$$A(\cos nt) = \sin nt.$$

Оператор A является полуунитарным оператором. При этом $AA^* = E$ и $A^*A = E-P$, где E – единичный оператор, P – оператор проектирования на ядро $Ker(A) = \{1\}$, а A^* – оператор, сопряженный к оператору A.

Известно, что для любых натуральных чисел m и n таких, что $n \geq m$ справедливы равенства

$$A(\cos mt \cdot \cos nt) = \cos mt \cdot \sin nt,$$

$$A(\sin mt \cdot \sin nt) = -\sin mt \cdot \cos nt$$

и равенство, напоминающее формулу Муавра:

$$(\cos t - \sin t \cdot A)^n = \cos nt - \sin nt \cdot A.$$

Пусть далее $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ – действительные числа и $|\beta| < \alpha$. Тогда функция $\frac{\gamma+\delta\cos t}{\alpha+\beta\cos t}$ принадлежит пространству $L_2(0,\pi)$ и

$$A\left(\frac{\gamma+\delta\cos t}{\alpha+\beta\cos t}\right) = \frac{\alpha\delta-\beta\gamma}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\cdot\frac{\sin t}{\alpha+\beta\cos t}.$$

Эти формулы и многие другие приведены и доказаны в работе [1].

Рассмотрим функцию $\theta \in L_2(0,\pi)$ такую, что $\operatorname{ch} A\theta \in L_2(0,\pi)$. Тогда

$$A(\cos\theta\cdot\operatorname{ch}\theta) = -\sin\theta\cdot\operatorname{sh} A\theta \quad \text{и} \quad A(\sin\theta\cdot\operatorname{ch}\theta) = \cos\theta\cdot\operatorname{sh} A\theta.$$

В докладе устанавливаются следующие равенства

$$\int_0^\pi e^{A^*\theta}\cos\theta\,dt = \pi, \qquad \int_0^\pi e^{A^*\theta}\sin\theta\sin t\,dt = \int_0^\pi \theta\sin t\,dt,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\theta\operatorname{ch} A\theta\,dt = \cos\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \theta\,dt\right) \quad \text{и} \quad \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\theta\operatorname{ch} A\theta\,dt = \sin\left(\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \theta\,dt\right),$$

являющиеся фундаментальными в теории обратных задач для аналитических функций.

Эти формулы являются весьма полезными и эффективными при вычислении интегралов. Так, например, если взять

$$\theta = a + b\frac{\sqrt{\lambda^2 - 1}}{\lambda + \cos t},$$

где a, b, λ вещественный числа и $\lambda > 1$, то получим, что

$$A\theta = -\frac{b\sin t}{\lambda + \cos t} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \theta\, dt = a + b.$$

Следовательно, справедливо равенство

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\left(a + b\frac{\sqrt{\lambda^2 - 1}}{\lambda + \cos t}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{b\sin t}{\lambda + \cos t}\right)dt = \cos(a + b),$$

которое не под силу установить мощнейшим системам аналитических вычислений – Maple и Mathematica.

Литература

1. Муангу Ж. Э. Р. *Фильтрация из каналов. Структура решения и оценка расхода* // Изв. РАН. МЖГ. – 2006. – № 1. – С. 108-120.

2. Елизаров А. М, Касимов А. Р., Маклаков Д. В. *Задачи оптимизации формы в аэродинамике.* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 480 с.

3. Аптекарев А. И, Сорокин В. Н., Маклаков Д. В. *Спектральная теория разностных операторов. Учебное пособие.* – М.: Издательство механико-математического факультета МГУ, 2002. – 168 с.

PROPERTIES OF ONE OPERATOR

G.A.R. Mouangou

This paper describes integral equalities containing the semi-unitary operator A in the real Hilbert space $L_2(0, \pi)$, which are fundamental in the theory of inverse problems for analytic functions.

Keywords: semi-unitary operator, operator functions, theory of inverse problems for analytic functions.

УДК 517.93

О ПОСТРОЕНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ И СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Р.Г. Мухарлямов[1], К.З. Аскарова[2], И.Е. Каспирович[3]

1 *robgar@mail.ru*; Институт физических исследований и технологий Российского университета дружбы народов Россия, 117198, Москва, Миклухо-Маклая, 6
2 —; Российский университет дружбы народов Россия, 117198, Москва, Миклухо-Маклая, 6
3 *kaspirovich.ivan@mail.ru*; Российский университет дружбы народов Россия, 117198, Москва, Миклухо-Маклая, 6

Излагаются методы составления уравнений динамики аналитической механики и управляемых систем. Предлагаются общие подходы к решению задачи стабилизации связей применительно к системам с дифференциальными связями и системам непрямого регулирования. Приводятся результаты моделирования решения задач неголономной механики и задач управления робототехническими системами, производственными предприятиями, летательными аппаратами.

Ключевые слова: моделирование, уравнения, динамика, связь, управление, устойчивость, стабилизация, система, неголономный.

1. Введение

Процесс описания аналитической динамики механических систем состоит в построении дифференциальных уравнений движений, решения которых удовлетворяют требуемым условиям. Известные динамические аналогии [1,2] позволяют использовать принципы и методы классической механики для построения уравнений динамики управляемой системы, состоящей из элементов различной физической природы. Необходимые кинематические свойства системы задаются некоторыми соотношениями между координатами и скоростями точек системы, которые определяются уравнениями контактных связей [3], уравнениями сервосвязей [4], или уравнениями программных связей [5], соответствующих целям управления [6,7], когда накладываются дополнительные условия на движения системы вдоль интегрального многообразия, определяемого уравнениями связей, и в его окрестности. Определение управляющих воздействий в соответствии с традиционным методом множителей Лагранжа, используемым в классической механике, приводит к тому, что связи, наложенные на систему, представляют первые интегралы уравнений динамики замкнутой системы, что приводит к необходимости согласования начальных условий с уравнениями связей. При этом численное решение уравнений динамики замкнутой системы оказывается неустойчивым по отношению к уравнениям связей, и стабилизация связей обеспечивается представлением возмущений связей линейными дифференциальными уравнениями [8]. Однако, это может привести к неустойчивости тривиального решения уравнений возмущений связей, если характеристическое уравнение имеет равные корни [9].

В общей постановке задача стабилизации связей сводится к определению выражений множителей Лагранжа или управляющих воздействий, при которых связи описываются частными интегралами уравнений динамики управляемой системы, и соответствующее интегральное многообразие устойчиво асимптотически. Правая часть системы дифференциальных уравнений $\mathrm{d}\mathbf{x}/\mathrm{d}t = \mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} = (x^1, \ldots, x^n)$, допускающей частные интегралы $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = 0$, $\mathbf{f} = (f^1, \ldots, f^m)$, $m \leqslant n$, определяется из равенств:

$$\mathbf{F}\mathbf{X} + \mathbf{f}_t = \Phi(\mathbf{f}, \mathbf{x}, t),\ \ \mathbf{X} = \mathbf{v}^\tau + \mathbf{v}^\nu,\ \ \mathbf{F}\mathbf{v}^\tau = 0,\ \ \mathbf{F} = \left\langle \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right\rangle,$$
$$\mathbf{v}^\nu = \mathbf{F}^+(\Phi(\mathbf{f}, \mathbf{x}, t) - \mathbf{f}_t),\ \ \mathbf{F}^+ = \mathbf{F}^T\left(\mathbf{F}\mathbf{F}^T\right)^{-1},\ \ \Phi(0, \mathbf{x}, t) = 0.$$

Стабилизация связей, заданных уравнениями

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v},\ \ \mathbf{M}(\mathbf{x})\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{X}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \left(\mathbf{B}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t), \boldsymbol{\lambda}\right). \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = 0,\ \ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = 0,\ \ \boldsymbol{\sigma} = (\sigma^1, \ldots, \sigma^r),\ \ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0,\ \ \mathbf{v}(t_0) = \mathbf{v}^0,\end{gathered} \tag{1}$$

обеспечивается, если левая часть уравнения дифференциальных связей $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = 0$, $\boldsymbol{\varphi} = \left(\dot{\mathbf{f}}, \boldsymbol{\sigma}\right)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)}{\mathrm{d}t} = \Phi(\mathbf{f}, \boldsymbol{\varphi}, \mathbf{x}, \mathbf{v}, t),\ \ \Phi(0, 0, \mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = 0,\ \ \dot{\mathbf{f}} = \left(\frac{\mathrm{d}f^1}{\mathrm{d}t}, \ldots, \frac{\mathrm{d}f^m}{\mathrm{d}t}\right), \tag{2}$$

из которого определяются множители $\boldsymbol{\lambda}$ в правой части уравнения динамики (1). В частности, равенство (2) можно представить линейным дифференциальным уравнением:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}\mathbf{f} \\ \dot{\mathbf{f}} \\ \boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & \mathbf{I}_m & 0 \\ \mathbf{K}_{10} & \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{20} & \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{f} \\ \dot{\mathbf{f}} \\ \boldsymbol{\sigma}\end{pmatrix},$$

которое при $\mathbf{K}_{10} = \omega^2\mathbf{I}_m$, $\mathbf{K}_{11} = 2\alpha\mathbf{I}_m$, $\mathbf{K}_{12} = \mathbf{K}_{20} = \mathbf{K}_{21} = 0$, $\mathbf{K}_{22} = \gamma\mathbf{I}_r$ соответствует методу J. Baumgarte [8].

Известные модификации метода J. Baumgarte применительно к системам индекса $(m+1)$, $m > 2$, либо ограничиваются частным видом комбинации уравнений связей с их производными [9], либо непосредственно используют для подсистемы, описываемой уравнениями механики [10]. Решение задачи управления системой с учетом динамики исполнительных устройств приводит к необходимости разработки общих методов стабилизации связей в системах более высокого порядка [11].

2. Уравнения динамики замкнутой системы

Динамика управляемой системы с учетом приводов описывается дифференциальными уравнениями

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}t} = v^i, \\ \dfrac{\mathrm{d}v^i}{\mathrm{d}t} = a^i(\mathbf{q}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, t), \\ \dfrac{\mathrm{d}w^j}{\mathrm{d}t} = b^j(\mathbf{q}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, t) + b^j k(\mathbf{q}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, t)u_k,\end{cases} \tag{3}$$

$$q^i(t_0) = q^i_0,\ v^i(t_0) = v^i_0,\ w^j(t_0) = w^j_0,\ i = 1, \dots, n,\ j = 1, \dots, m,\ k = 1, \dots, s,$$
$$\mathbf{q} = (q^1, \dots, q^n),\ \mathbf{v} = (v^1, \dots, v^n),\ \mathbf{w} = (w^1, \dots, w^m).$$

Управляющие воздействия $\mathbf{u} = (u^1, \dots, u^s)$ призваны обеспечить выполнение уравнений связей, наложенных на обобщенные координаты и скорости объекта:

$$f^\mu(\mathbf{q}, t) = 0,\ \mu = 1, \dots, m,\ \varphi^k(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t) = 0,\ k = m+1, \dots, r.$$

Уравнения динамики (3) замкнутой системы принимают следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}q^i}{\mathrm{d}t} = v^i, \\ \dfrac{\mathrm{d}v^i}{\mathrm{d}t} = a^i(\mathbf{q}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, t), \\ \dfrac{\mathrm{d}w^j}{\mathrm{d}t} = b^j(\mathbf{q}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, t) + b^j k(\mathbf{q}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, t)\left(u^0 u^\tau_k - \delta_{kl} g^{\sigma l} w_{\sigma\rho}\left(\dfrac{\tilde{\mathrm{d}}\psi^\rho}{\mathrm{d}t} - \dot{\psi}^\rho\right)\right). \end{cases} \tag{4}$$

Здесь u^0 – произвольный множитель, u^τ_k – определитель, первая строка которого состоит из величин δ_{kl}, $\delta_{kl} = 0$, $l \neq k$, $\delta_{ll} = 1$, последующие строки заполнены элементами матрицы $\left(g^{\rho k}\right)$, $g^{\rho k} = \psi^\rho_j b^{jk}(\mathbf{q}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, t)$, и произвольными величинами $g^{\sigma k}$, $\sigma = r+1, \dots, s-1$, $w_{\sigma\rho} w^{\rho\gamma} = \delta^\gamma_\sigma$, $\gamma = 1, \dots, r$, $w^{\rho\sigma} = g^{\rho k}\delta_{kl} g^{\sigma l}$, $l = 1, \dots, s$, $\dot{\psi}^\rho = \mathrm{d}\psi^\rho/\mathrm{d}t$.

$$\psi^\rho(\mathbf{q}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, t) = \frac{\partial\varphi^\rho}{\partial q^i} v^i + \frac{\partial\varphi^\rho}{\partial v^i} a^i + \frac{\partial\varphi^\rho}{\partial t},\ \varphi^\mu(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t) = \frac{\partial f^\mu}{\partial q^i} v^i + \frac{\partial f^\mu}{\partial t},$$
$$\frac{\tilde{\mathrm{d}}\psi^\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\psi^\rho}{\partial q^i} v^i + \frac{\partial\psi^\rho}{\partial v^i} a^i + \frac{\partial\psi^\rho}{\partial w^j} b^j + \frac{\partial\psi^\rho}{\partial t},\ \mu = 1, \dots, m.,\ \rho = 1, \dots, r,\ k = 1, \dots, s.$$

3. Устойчивость интегрального многообразия и стабилизация связей

Системе (4) соответствуют уравнения возмущений связей

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y^\mu}{\mathrm{d}t} = y^{m+\mu}, \\ \dfrac{\mathrm{d}y^{m+\rho}}{\mathrm{d}t} = y^{m+r+\rho}, \\ \dfrac{\mathrm{d}y^{m+r+\rho}}{\mathrm{d}t} = \Phi^\rho(\mathbf{q}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, y^\mu, y^{m+\rho}, y^{m+r+\rho}, t), \end{cases}$$

где $y^\mu = f^\mu(\mathbf{q}, t)$, $y^{m+\rho} = \varphi^\rho(\mathbf{q}, \mathbf{v}, t)$, $y^{m+r+\rho} = \psi^\rho(\mathbf{q}, \mathbf{v}, \mathbf{w}, t)$.

Принимая за функцию Ляпунова положительно определенную квадратичную форму с постоянными коэффициентами $V = (1/2) m_{\alpha\beta} y^\alpha y^\beta$, $\alpha, \beta = 1, \dots, m+2r$, определяем условия, накладываемые на функции Φ^ρ, для экспоненциальной устойчивости интегрального многообразия. Получены условия стабилизации связей при численном решении уравнений динамики замкнутой системы.

4. Прикладные задачи

Исследованы некоторые задачи динамики систем с дифференциальными связями [12]. Построены алгоритмы моделирования решения задач управления электромеханической системой, мобильным роботом, элементами адаптивной оптической системы, системами твердых тел, скелетонами и антропоморфными механизмами, управления движением транспортного средства с обходом препятствий. Рассмотрены задачи планирования и управления производственными предприятиями нефтехимической и автомобильной промышленности. Рассмотрена задача стабилизации и устойчивости движения многозвенной модели сноубордиста, катящегося по заданной траектории по наклонной плоскости. Также метод стабилизации применялся при искусственных локальных модификациях разностной схемы численного интегрирования для обхода точек сингулярностей при интегрировании уравнений движения твердого тела.

5. Заключение

Модифицированные методы стабилизации связей, основанные на построении систем дифференциальных уравнений, имеющих асимптотически устойчивые частные интегралы, позволяют существенно расширить множество управляющих воздействий, обеспечивающих стабилизацию связей и их производных в системах высокого порядка.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 19-08-00261).

Литература

1. Ольсон Г. *Динамические аналогии.* – М.: Изд-во иностр. лит., 1947. – 224 с.

2. Layton R.A. *Principles of Analytical System Dynamics.* – N.Y.: Springer, 1998. – 158 p.

3. Журавлев В. Ф. *Понятие связи в аналитической механике* // Нелинейная динамика. – 2012. – Т. 8. – № 4. – С. 853–860.

4. Берген А. *Теория гироскопических компасов Аншютца и Сперри и общая теория систем с сервосвязями.* – М.: Наука, 1967. – 171 с.

5. Мухарлямов Р. Г. *Об уравнениях движения механических систем* // Дифференц. уравнения. – 1983. – Т. 19. – № 12. – С. 2048–2056.

6. Корнеев Г.В. *Цель и приспособляемость движения.* – М.: Наука, 1974. – 524 с.

7. Галиуллин А.С., Мухаметзянов И.А. *Построение систем программного движения.* – М.: Наука, 1971. – 352 с.

8. Baumgarte J. *Stabilization of Constraints and Integrals of Motion in Dynamical Systems* // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 1972. – V. 1. – P. 1–16.

9. Ascher U., Hongsheng C., Reich S. *Stabilization of DAEs and Invariant Manifolds* // Numer. Math. – 1994. – V. 67. – Is 2. – P. 131–149.

10. Shih-Tin L., Ming-Chong H. *Stabilization Method for the Numerical Integration of Controlled Multibody Mechanical System* // JSME International J. Ser. – 2001. – V. 44. – Is 1. – P. 79–88.

11. Мухарлямов Р.Г., *Управление динамикой системы с дифференциальными связями* // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2019. – № 4. – С. 16–28.

12. Каспирович И.Е., Мухарлямов Р.Г. *О методах построения уравнений динамики с учетом стабилизации связей* // Известия РАН. МТТ. – 2019. – № 3. – С. 124–135.

ON CONSTRUCTION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS OF ANALYTICAL DYNAMICS AND CONTROL SYSTEMS

R.G. Mukharlyamov, K.Z. Askarova, I.E. Kaspirovich

The constrútive methods of dynamics equations of analytical mechanics and control systems are presented. General approaches are proposed to solve the problem of constraint stabilization in relation to systems with differential constraints and systems of indirect regulation. The results of modeling the solution of nonholonomic mechanical system problems and problems of control for robotic systems, manufacturing enterprises, aircraft are discribed.

Keywords: modeling, equations, dynamics, constraint, control, stability, stabilization, system.

УДК 517.51

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ВЕРСИЯ НЕРАВЕНСТВ ТИПА ХАРДИ-РЕЛЛИХА

Р.Г. Насибуллин[1]

1 *nasibullinramil@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Доказаны новые геометрические версии неравенств типа Харди-Реллиха, весовые функции которых содержат функцию расстояния до границы области $\Omega \in \mathbb{R}^n$, диаметр и объем области Ω, а также псевдодистанцию. Полученные неравенства связывают функцию и ее частные производные первого и второго порядков в интегральном соотношении. Мы доказываем неравенства в произвольных и регулярных областях, в областях, удовлетворяющих условию θ-конуса, а также в выпуклых областях.

Ключевые слова: неравенство типа Харди, неравенство Реллиха, функция Бесселя, константа Лямба, оператор Лапласа, функция расстояния, дополнительное слагаемое.

Данная работа посвящена пространственным неравенствам типа Харди-Реллиха в областях Ω евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$. Рассматриваемые неравенства содержат функцию расстояния до границы $\partial\Omega$ области Ω, диаметр и объем Ω. Обозначим через $C_0^1(\Omega)$ семейство непрерывно-дифференцируемых функций $f : \Omega \to \mathbb{R}$ с компактным носителем в Ω. Известно, что если Ω — выпуклая область, то для любой функции $f \in C_0^1(\Omega)$ справедливо следующее неравенство Харди

$$\int\limits_{\Omega} |\nabla f(x)|^2 dx \geq \frac{1}{4} \int\limits_{\Omega} \frac{|f(x)|^2}{\delta(x)^2} dx, \tag{1}$$

где ∇f — градиент функции f и $\delta(x)$ — функция расстояния от точки $x \in \Omega$ до границы области $\partial\Omega$, т.е.

$$\delta(x) = \inf_{y \in \partial\Omega} |x - y|.$$

Обширная литература посвящена различным обобщениям и модификациям неравенства (1) (см., например, [1]– [6] и литературу в ней). Отметим, что соотношение (1) связывает функцию и её частные производные первого порядка.

С другой стороны, неравенства Реллиха связывают функцию с её частными производными второго порядка. Если $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклая область, причем, $\Omega \neq \mathbb{R}^n, n \geq 1$, то для любой функции $f \in C_0^\infty(\Omega)$ имеет место неравенство Реллиха

$$\int_\Omega |\Delta f(x)|^2 dx \geq \frac{9}{16} \int_\Omega \frac{|f(x)|^2}{\delta(x)^4} dx,$$

где Δ — оператор Лапласа. В статьях [2], [3], [6], [9], [10] и [14] можно найти более подробную информацию о развитии и модификациях неравенств типа Реллиха.

Известны неравенства, связывающие частные производные первого и второго порядков. Например, в [14] доказано, что если $n \geq 5$ и $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, то

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta f(x))^2 dx \geq \frac{n^2}{4} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla f(x)|^2}{|x|^2} dx.$$

Константа $n^2/4$ является наилучшей.

Как мы уже упоминали выше, неравенства Харди и Реллиха обобщались и модифицировались в различных направлениях. Например, один из способов обобщения — это добавление дополнительного слагаемого в соответствующее неравенство Харди или Реллиха ([6], [7], [10], [11], [12]). Далее приведем один пример неравенства с дополнительным слагаемым. Пусть $f \in C_0^2(\Omega)$. Тогда имеет место неравенство

$$\int_\Omega |\Delta u(x)|^2 dx \geq \frac{9}{16} \int_\Omega \frac{|u(x)|^2}{\delta(x)^4} + Kn(n+2) \left(\frac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n|\Omega|} \right)^{\frac{4}{n}} \int_\Omega |u(x)|^2 dx, \tag{2}$$

где $K \approx 1.25$, Ω — выпуклая область в $\mathbb{R}^n$, $|\mathbb{S}^{n-1}|$ — площадь поверхности n-мерной единичной сферы $\mathbb{S}^{n-1}$ и $|\Omega|$ — объем области Ω. Последнее неравенство было доказано в [10]. Добавим, что в [10] также получены неравенства типа Харди и Реллиха в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, которые включают вместо функции расстояния до границы области псевдодистаницию.

Естественный вопрос — справедливо ли неравенство, связывающее функцию с её частными производными первого и второго порядков. Мы даем положительный ответ на этот вопрос. Для начала введем некоторые обозначения.

Пусть Ω — выпуклая область в $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$, $|\mathbb{S}^{n-1}|$ площадь поверхности n-мерной единичной сферы $\mathbb{S}^{n-1}$, $|\Omega|$ — объем области Ω, Γ — гамма функция Эйлера и $D(\Omega)$ — диаметр Ω. Положим, что

$$B(n,s) = \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{n+s}{2}\right)}, \qquad k(q) := \begin{cases} \left(1 - 2^{\frac{1}{q-2}-1}\right)^{2-q}, & 0 < q < 2, \\ 1, & 2 \leq q < 3. \end{cases}$$

Положим также, что $0 < q \leq 3$, $\nu \geq 0$ и $f \in C_0^2(\Omega)$. Если $\nu \geq 1/q$ и $n \geq 4 - q$, то справедливо следующее неравенство типа Харди-Реллиха

$$\frac{1}{n(n+2)}\int\limits_{\Omega}|\Delta u(x)|^2dx+\frac{\nu^2q^2-1}{4n}\int\limits_{\Omega}\frac{|\nabla u(x)|^2}{\delta(x)^2}dx\geq$$

$$\frac{q^2\lambda_\nu^2(2/q)(3-q)^2}{16}\left(\frac{2}{D(\Omega)}\right)^q\left(B(n,4-q)\int\limits_{\Omega}\frac{|u(x)|^2}{\delta(x)^{4-q}}dx+2^{4-q}k(q)\left(\frac{\mathbb{S}^{n-1}}{n|\Omega|}\right)^{\frac{4-q}{n}}\int\limits_{\Omega}|u(x)|^2dx\right), \tag{3}$$

а если $\nu\in[0,1/q]$ и $n\geq 4-q$, то имеет место следующая оценка

$$\frac{1}{n(n+2)}\int\limits_{\Omega}|\Delta u(x)|^2dx-\frac{1-\nu^2q^2}{4n}\left(\frac{2}{D(\Omega)}\right)^2\int\limits_{\Omega}|\nabla u(x)|^2dx$$

$$\geq\frac{q^2\lambda_\nu^2(2/q)(3-q)^2}{16}\left(\frac{2}{D(\Omega)}\right)^q\left(B(n,4-q)\int\limits_{\Omega}\frac{|u(x)|^2}{\delta(x)^{4-q}}dx+2^{4-q}k(q)\left(\frac{\mathbb{S}^{n-1}}{n|\Omega|}\right)^{\frac{4-q}{n}}\int\limits_{\Omega}|u(x)|^2dx\right),$$

где $\lambda_\nu(2/q)$ — константа Лямба, определяемая как первый положительный корень уравнения

$$\frac{J_\nu(z)}{q}+zJ'_\nu(z)=0$$

для функции Бесселя порядка ν:

$$J_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^kx^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu}k!\Gamma(k+1+\nu)},\ \nu\geq 0.$$

Заметим, что когда $\nu=1/q$, неравенство (2) получается из (3) предельным переходом при $q\to 0$.

Также мы доказали, что если $\sigma\in(-\infty,\infty)$, $0<q\leq 2$, $\nu\geq 0$ и $n\geq 3-q$, то для всех функций $f\in C_0^2(\Omega)$

$$\frac{D(\Omega)}{2n(n+2)}\int\limits_{\Omega}|\Delta u(x)|^2dx+\frac{\nu^2q^2}{4n}\int\limits_{\Omega}\frac{|\nabla u(x)|^2}{\delta(x)}dx$$

$$\geq\alpha_0(\Omega)B(n,3-q)\int\limits_{\Omega}\frac{|u(x)|^2}{\delta(x)^{3-q}}dx+\frac{\beta_0(\Omega)}{|\Omega|^{\frac{3-q}{n}}}\int\limits_{\Omega}|u(x)|^2dx,$$

а если $1-q>0$, $\sigma\geq 1-q$ и $n\geq 1-q-\sigma$, то при любом $f\in C_0^2(\Omega)$

$$\frac{D(\Omega)}{2n(n+2)}\int\limits_{\Omega}|\Delta u(x)|^2dx+\frac{\nu^2q^2}{4n}\int\limits_{\Omega}\frac{|\nabla u(x)|^2}{\delta(x)}dx\geq$$

$$\geq\alpha_0(\Omega)B(n,3-q)\int\limits_{\Omega}\frac{u(x)|^2}{\delta(x)^{3-q}}dx+\frac{\beta_0(\Omega)}{|\Omega|^{\frac{3-q}{n}}}\int\limits_{\Omega}|u(x)|^2dx+\frac{\gamma_0(\Omega)}{|\Omega|^{\frac{3-q-\sigma}{n}}}\int\limits_{\Omega}|u(x)|^2\delta(x)^{\sigma}dx,$$

где

$$\alpha_0(\Omega) := \frac{q^2 j_\nu'^2 (2-q)^2}{16} \left(\frac{2}{D(\Omega)}\right)^q,$$

$$\beta_0(\Omega) := \frac{q^2 j_\nu'^2 (2-q)^2}{16} \left(\frac{2}{D(\Omega)}\right)^q 2^{3-q} k(0;q) \left(\frac{\mathbb{S}^{n-1}}{n}\right)^{\frac{3-q}{n}},$$

$$\gamma_0(\Omega) := \frac{q^2 j_\nu'^2 (2-q)^2}{16} \left(\frac{2}{D(\Omega)}\right)^q 2^{2(2-q)} k(0;q)^2 \left(\frac{\mathbb{S}^{n-1}}{n}\right)^{\frac{3-q+\sigma}{n}},$$

$$k(0;q) := \begin{cases} \left(1 - 2^{\frac{1}{q-1}-1}\right)^{1-q}, & 0 < q \le 1, \\ 1, & 1 \le q \le 2, \end{cases}$$

и j_ν' — первый положительный корень производной J_ν' функции Бесселя J_ν.

Используя соответствующие неравенства из [5] и [10], мы получили одномерные неравенства типа Харди-Реллиха. Далее, применяя эти одномерные неравенства и следуя подходу из [10], мы получили новые пространственные неравенства. Кроме вышеуказанных неравенств в выпуклых областях, мы также доказали аналогичные неравенства в произвольных, регулярных областях и в областях, удовлетворяющих условию θ-конуса.

Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности (1.9773.2017/8.9)

Литература

1. Avkhadiev F. G. *A geometric description of domains whose Hardy constant is equal to 1/4* // Izvestiya: Mathematics. – 2014. – V. 78, Is. 5. – P. 855–876.

2. Avkhadiev F. G. *Integral inequalities of Hardy and Rellich in domains satisfying an exterior sphere condition* // Algebra i Analiz. – 2018. – V. 30, Is. 2. – P. 18–44.

3. Avkhadiev F. G. *Rellich inequalities for polyharmonic operators in plane domains* // Sbornik Mathematics. – 2018. –V. 209, Is. 3. – P. 292–319.

4. Avkhadiev F. G., Nasibullin R. G. *Hardy-type inequalities in arbitrary domains with finite inner radius* // Siberian Mathematical Journal. – V. 55, Is. 2. – P. 239–250.

5. Avkhadiev F. G., Wirths K.-J. *Sharp Hardy-type inequalities with Lamb's constants* // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. – 2011. – 18. – P. 723–736.

6. Balinsky A. A., Evans W. D., Lewis R. T. *The Analysis and Geometry of Hardy's Inequality.* – Heidelberg - New York - Dordrecht - London: Universitext, Springer, 2015.

7. Brezis H., Marcus M. *Hardy's inequality revisited* // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4). – 1997. – V. 25, Is. 1-2. – P. 217–237.

8. Filippas S., Maz'ya V. G., Tertikas A. *On a question of Brezis and Marcus* // Calc. Var. Partial Differential Equations. – 2006. – V. 25, 4. – P. 491–501.

9. Edmunds D. E., Evans W. D. *The Rellich inequality* // Revista Matemática Complutense. – 2016. – V. 29, Is. 3. – P. 511–530.

10. Evans W. D, Lewis R. T. *Hardy and Rellich inequalities with remainders* // J. Math. Inequal. – 2007. – V. 1, Is. 4. – P. 473–490.

11. Hoffmann-Ostenhof M., Hoffmann-Ostenhof T., Laptev A. *A geometrical version of Hardy's inequality* // J. Funct. Anal. – 2002. – V. 189, Is. 2. – P. 539–548.

12. Marcus M., Mizel V. J., Pinchover Y. *On the best constants for Hardy's inequality in R^n* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1998. – V. 350. – P. 3237–3250.

13. Matskewich T., Sobolevskii P. E. *The best possible constant in a generalized Hardy's inequality for convex domains in R^n* // Nonlinear Anal. – 1997. – V. 28. – P. 1601–1610.

14. Tertikas A., Zographopoulos N. B. *Best constants in the Hardy-Rellich inequalities and related improvements* // Advances in Mathematics. – 2007. – V. 209, Is. 2. – P. 407-459.

A GEOMETRICAL VERSION OF HARDY AND RELLICH TYPE INEQUALITIES

R.G. Nasibullin

In a domain $\Omega \in \mathbb{R}^n$, we obtained a version of Hardy-Rellich type inequality, which involves the distance to the boundary, the diameter, and the volume of Ω. Weight functions in the inequalities depend on the "mean-distance" function and on the distance function to the boundary of Ω. The proved inequalities connect function to its first and second order derivatives by integral relations.

Keywords: Hardy inequality, Rellich inequality, Bessel function, Lamb constant, distance function, Laplace operator, additional term.

УДК 517.54

О ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ОПРЕДЕЛЕНИИ ОТОБРАЖЕНИЯ С *s*-УСРЕДНЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

А.В. Новик[1], А.Н. Малютина[2]

1 *novik.anastasiia@mail.ru*; Томский государственный университет, механико-математический факультет

2 *nmd@math.tsu.ru*; Томский государственный университет, механико-математический факультет

В работе развивается геометрический метод для изучения свойств отображений с s-усредненной характеристикой.

Ключевые слова: пространственный, отображение, геометрический, усредненный, характеристика.

Определение 1. *Пусть Г – некоторое семейство кривых в $\overline{R}^n$. Борелевскую функцию $p : R^n \to [0;\infty]$ назовем допустимой метрикой семейства* Γ*, если $\int_\gamma p\,dl_x \geqslant 1$ для каждой кривой $\gamma \in \Gamma$, где $dl_x = \frac{dl}{1+|x|^2}$.* В дальнейшем запись $p \wedge \Gamma$ будет означать, что p есть допустимая метрика семейства Г.

Определение 2. *Сферический модуль семейства* Γ *определим по формуле $M_\alpha = \inf \int_{R^n} p^\alpha d\sigma_x$, где $d\sigma_x = \frac{dx}{(1+|x|^2)^n}$ и инфимум берется по классу всевозможных метрик $p \wedge \Gamma$.*

Пусть теперь $y \in V^* \setminus f(B \cap V)$ и $f_i^{-1}(y) = \{x_i\}$, где V^* – образ при отображении f множества $(B \cap V)$, B – шар радиуса r с центром в точке x и V – нормальная область, т.е. $f(\partial V) = \partial f(V)$. Тогда связная компонента $f^{-1}(B^n(y,r))$, содержащая точку x, имеет вид $U(x,f,r) \cap f^{-1}(f(x)) = \{x\}$. Назовем гомеоморфизм $f : D \to D'$ отображением класса $\widetilde{W}^1_{n,loc}(D)$, если $f \in \widetilde{W}^1_{n,loc}(D)$, $f_i^{-1} \in \widetilde{W}^1_{n,loc}(D')$ и обладает N, N^{-1}

свойствами. Известно, что если $f \in \widetilde{W}^1_{n,loc}(D)$, то для любой точки $x \in U$ существует число $r_o(x)$ такое, что окрестность $U(x,f,r)$ нормальна при $r \le r_o(x)$. Существуют окрестности $V_i = U(x_i,f,r)$ точек x_i такие, что $f|_{V_i}$ – гомеоморфизм. Поэтому можно рассмотреть отображения $f_i^{-1} : B^n(y,r) \to V$, причем $f \circ f_i^{-1}$ – тождественное отображение. Отображения f_i^{-1} – тоже отображения с s-усредненной характеристикой.

Для отображения $f \in \widetilde{W}^1_{n,loc}(D)$, определены следующие величины:

– внутренняя дилатация отображения f в точке x,

$K_I(x,f) = \frac{|J(x,f)|}{l^n(f,x)}$, где $l(x,f) = l(f'(x)) = \min_{|h|=1}|f'(x)h|$

– внешняя дилатация отображения f в точке x,

$K_O(x,f) = \frac{L^n(f,x)}{|J(x,f)|}$, где $L(x,f) = |f'(x)| = \max_{|h|=1}|f'(x)h|$, а также $\lambda(x,f) = n^{-n/2}\frac{|\nabla f(x)|^n}{|J(x,f)|}$, $K(x,f) = \frac{L(x,f)}{l(x,f)}$.

Определение 3. *Отображение $f : D \to R^n$ называется отображением с $K_{\hat{I},s}$-усредненной характеристикой, если: 1) f – непрерывное, открытое, изолированное и $f \in \widetilde{W}^1_{n,loc}(D)$; 2) существует постоянная $K_{\hat{I},s} \ge 0$, такая что выполняется неравенство $K_{\hat{I},s}(f) = (\int_D K_O^s(x,f)d\sigma_x)^{\frac{1}{s}} \le K_{O,s}$.*

Определение 4. *Отображение f называется отображением с $K^*_{\hat{I},s}$-усредненной характеристикой, если: 1) f – непрерывное, открытое, изолированное и $f \in \widetilde{W}^1_{n,loc}(D)$; 2) существует постоянная $K^*_{\hat{I},s} \ge 0$, такая что выполняется неравенство $K^*_{\hat{I},s}(f) = (\int_D K^*_{\hat{I},s}(x,f)J(x,f)d\sigma_x)^{\frac{1}{s}} \le K^*_{\hat{I},s}$.*

Определение 5. *Пусть $f \in \widetilde{W}^1_{n,loc}(D)$ и γ^* – кривая в $f(D)$, тогда поднятием γ^* в D называется кривая $\gamma \in D$, такая что $f \circ \gamma = \gamma^*$. Дуга кривой γ – это сужение отображения γ на отрезок, содержащийся в $[0,1]$. Частичным поднятием γ^* назовем поднятие ее дуги. Два частичных поднятия γ_1 и γ_2 кривой γ^* существенно различны, если $\Lambda_1(\gamma_1 \cap \gamma_2) = 0$($\Lambda_1(S)$ – одномерная мера Хаусдорфа множества S).*

Теорема 1. *Пусть $D, D' \subset R^n$ – области, $f : D \to D'$ – отображение с $K^*_{O,s}$ усредненной характеристикой, $s > 1$, $D' = f(D)$. Пусть $A \subset D$ – борелевское множество такое, что кратность $N(f,A) < \infty$. Пусть $\Gamma \subset D$ – кривых, причем любая кривая $\gamma^* \in f\Gamma$ имеет, по крайней мере, m существенно различных поднятий. Тогда существует ограниченная, неотрицательная, аддитивная, абсолютно непрерывная функция $\Phi^*_{O,s}$ борелевских множеств в D такая, что для любого семейства кривых $\Gamma \subset A$ выполнено неравенство $M_n^s \le N^{s-1}(f,A)\Phi^*_{O,s}(A)\frac{1}{m}M^{s-1}_{\frac{ns}{s-1}}(f\Gamma)$, где $\Phi^*_{O,s}(A) = \int_A K_O^s(x,f)|J(x,f)|d\sigma_x$.*

Теорема 2. *$D \subset R^n$ – нормальная область, $D' \subset R^n$ – область. Пусть $f : D \to D'$ отображение с $K_{\hat{I},s}$ и $K_{I,s}$-усредненными характеристиками, $s > n-1$. Пусть $\Gamma \subset D$ – семейство кривых, причем любая кривая $\gamma^* \in f\Gamma$ имеет, по крайней мере, m существенно различных поднятий, принадлежащих Γ. Тогда справедливы неравенства: $M_n^s(f\Gamma) \le \frac{1}{m}K^s_{I,s}M^{\frac{s}{\beta}}_{n\beta}(\Gamma)$, $M_n^s(f\Gamma) \le \frac{1}{m}K^s_{\hat{I},s}M^{\frac{s}{\beta}}_{n\beta}(\Gamma)$, где $\beta = \frac{s}{s-1}$.*

Литература

1. Сычев А. И. *Модули и пространственные квазиконформные отображения*. – Новосибирск: Наука, 1983.

2. Решетняк Ю. Г. *Пространственные отображения с ограниченным искажением*. – Новосибирск: Наука, 1982. – 288 с.

3. Малютина А. Н., Елизарова М. А. *Об эквивалентности аналитического и геометрического определений отображений s-усредненной характеристикой* // Вестник ТГУ. Математика и механика. Томск, 2014. – № 1(127). – С. 25–41.

ON THE GEOMETRIC DEFINITION OF A MAPPING WITH s-AVERAGED CHARACTERISTIC

A.V. Novik, A.N. Malyutina

The paper develops a geometric method for studying the properties of maps with s-averaged characteristic.

Keywords: spatial, mapping, geometric, averaged, characteristic.

УДК 517.98

О СХОДИМОСТИ ДИСКРЕТНЫХ СУММ ФУРЬЕ ПО МНОГОЧЛЕНАМ, ОРТОГОНАЛЬНЫМ НА ПРОИЗВОЛЬНЫХ СЕТКАХ

А.А. Нурмагомедов[1], И.А. Нурмагомедов[2]

1 *alimn@mail.ru*; Дагестанский государственный аграрный университет им. М.М. Джамбулатова
2 *nurmagomedov-02@mail.ru*; МБОУ № 37

В данной работе для произвольной непрерывной на отрезке $[-1,1]$ *функции* $f(x)$ *построены дискретные суммы Фурье* $S_{n,N}(f,x)$ *по системе многочленов* $\{\hat{p}_{k,N}(x)\}_{k=0}^{N-1}$, *образующих ортонормированную систему на неравномерных системах точек, состоящих из конечного числа* N *точек отрезка* $[-1,1]$ *с весом* $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$. *Исследуются аппроксимативные свойства построенных частных сумм* $S_{n,N}(f,x)$ *порядка* $n \le N-1$. *В частности, получена оценка отклонения частной суммы* $S_{n,N}(f,x)$ *от* $f(x)$ *при* $n = O(\delta_N^{-2/7})$, *которая зависит от* n *и положения точки* $x \in [-1,1]$.

Ключевые слова: многочлен, ортогональная система, сетка, вес, асимптотическая формула, дискретные суммы Фурье, функция Лебега.

Пусть $\Omega = \{t_j\}_{j=0}^{N}$ — дискретное множество (сетка), состоящее из конечного числа различных точек отрезка $[-1,1] : -1 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = 1$. Рассмотрим также еще одну сетку $\Omega_N = \{x_0, x_1, ..., x_{N-1}\}$, состоящую из N точек x_j, где $x_j = (t_j + t_{j+1})/2$, $j = 0,1,...,N-1$.

Через

$$\hat{p}_{k,N}(x) = \hat{p}_k(x;\Omega_N) \ \ (k = 0,1,\ldots,N-1),$$

обозначим последовательность многочленов, образующих ортонормированную систему на сетке Ω_N в следующем смысле ($0 \le n, m \le N-1$):

$$(\hat{p}_{n,N}, \hat{p}_{m,N}) = \sum_{j=0}^{N-1} \hat{p}_{n,N}(x_j)\hat{p}_{m,N}(x_j)\Delta t_j = \delta_{nm},$$

где $\triangle t_j = t_{j+1} - t_j, j = 0, 1, \ldots, N-1$.

Далее, пусть $\delta_N = \max_{0\le j\le N-1}\Delta t_j$, $\jmath_2$ — наименьшая константа в неравенстве типа В.А. Маркова для оценки производных алгебраических многочленов в метрике пространства $L_1[-1,1]$:

$$\int_{-1}^{1} |q_n''(x)|\,dx \le \jmath_2 n^4 \int_{-1}^{1} |q_n(x)|\,dx,$$

$\widehat{P}_n(x)$ — ортонормированный многочлен Лежандра, $C[-1, 1]$ — пространство непрерывных на отрезке $[-1, 1]$ функций $f(x)$ с нормой $\| f \| = \max_{-1\le x\le 1} | f(x) |$, $\mathscr{P}_n$ — пространство алгебраических многочленов степени не выше n, $E_n(f)$ — наилучшее приближение функции f алгебраическими многочленами степени не выше n.

Далее, через $S_{n,N}(f) = S_{n,N}(f,x)$ обозначим частную сумму n–ого порядка ряда Фурье функции $f(x)$ по системе $\{\hat{p}_{k,N}(x)\}_{k=0}^{N-1}$, т.е.

$$S_{n,N}(f) = \sum_{k=0}^{n} \hat{f}_k \hat{p}_{k,N}(x),$$

где $\hat{f}_k = \sum_{j=0}^{N-1} f(x_j)\hat{p}_{k,N}(x_j)\Delta t_j$.

Как известно, задача об оценке отклонения частной суммы $S_{n,N}(f)$ ряда Фурье функции $f \in C[-1,1]$ по системе $\{\hat{p}_{k,N}(x)\}_{k=0}^{N-1}$ от самой функции f при $x \in [-1, 1]$ посредством неравенства Лебега:

$$| f(x) - S_{n,N}(f,x) | \le (1 + L_{n,N}(x))E_n(f)$$

сводится к оценке функции Лебега

$$L_{n,N}(x) = \sum_{j=0}^{N-1} \left|K_{n,N}(x,x_j)\right| \Delta t_j,$$

где $K_{n,N}(x,x_j) = \sum_{k=0}^{n} \hat{p}_{k,N}(x)\hat{p}_{k,N}(x_j)$.

Здесь и далее через $c, c(a,b)$ обозначаются положительные постоянные, зависящие лишь от указанных параметров и, вообще говоря, разные в разных местах.

В прикладных задачах, связанных с обработкой, сжатием и передачей дискретной информации, вопросы приближения функций, заданных на дискретных системах точек, часто решаются с помощью рядов Фурье по соответствующей системе ортонормированных на этих сетках многочленов. В свою очередь, как известно, решение этого вопроса сводится к оценке функции Лебега частных сумм Фурье по этим многочленам — они позволяют устанавливать достаточные условия равномерной сходимости рядов Фурье на всем промежутке ортогональности. И здесь следует отметить, что эти вопросы были предметом исследования в работах многих авторов, среди которых мы укажем лишь некоторые из них, которые посвящены изучению функции Лебега сумм Фурье-Якоби, сходимости рядов Фурье-Якоби и их дискретных аналогов.

Ранее в работе [10] авторами были доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $f \in C[-1,1]$, $0 < b < 1$, $0 < a \le \left(\frac{1-b}{2J2}\right)^{\frac{1}{4}}$, $n = O(\delta_N^{-2/7})$. *Тогда справедливо неравенство* $(-1 \le x \le 1)$

$$L_{n,N}(x) \le c(a,b)\left[\ln(n+1) + |\hat{p}_{n,N}(x)| + |\hat{p}_{n+1,N}(x)|\right].$$

Теорема 2. *Пусть* $f \in C[-1,1], 0 < b < 1, 0 < a \le \left\{\frac{1-b}{2J2}\right\}^{1/4}, n = O(\delta_N^{-2/7})$. *Тогда равномерно относительно* $-1 \le x \le 1$ справедлива оценка

$$L_{n,N}(x) \le c(a,b)\left(\ln(n+1) + \frac{n^{\frac{1}{2}}}{(n\sqrt{1-x^2})^{\frac{1}{2}}+1}\right).$$

В частности отметим, что полученная нами в данной работе оценка модуля разности $|\ f(x) - S_{n,N}(f,x)\ |$ также учитывают величину номера n и положение точки $x \in [-1,1]$.

Теорема 3. *Пусть* $f \in C[-1,1], 0 < b < 1, 0 < a \le \left\{\frac{1-b}{2J2}\right\}^{1/4}, n = O(\delta_N^{-2/7})$. *Тогда равномерно относительно* $-1 \le x \le 1$ *справедлива оценка*

$$|f(x) - S_{n,N}(f,x)| \le c(a,b)E_n(f)\left(\ln(n+1) + \frac{n^{\frac{1}{2}}}{(n\sqrt{1-x^2})^{\frac{1}{2}}+1}\right).$$

Из теоремы 3 и теоремы Джексона вытекают следующие утверждения.

Теорема 4. *Пусть* $f \in Lip_\gamma M, \gamma > 1/2, 0 < b < 1, 0 < a \le \left\{\frac{1-b}{2J2}\right\}^{1/4}, n = O(\delta_N^{-2/7})$. *Тогда*

$$||f(x) - S_{n,N}(f,x)|| \le c(a,b,\gamma,M)(n+1)^{1/2-\gamma}.$$

Теорема 5. *Пусть* $0 < \varepsilon < 1, 0 < b < 1, 0 < a \le \left\{\frac{1-b}{2J2}\right\}^{1/4}, n = O(\delta_N^{-2/7})$. *Если функция* $f \in C[-1,1]$ *удовлетворяет условию Дини-Липшица:*

$$\lim_{\delta\to 0} \ln\frac{1}{\delta}\omega(f,\delta) = 0$$

где $\omega(f,\delta)$ *– модуль непрерывности функции* f, *то* $S_{n,N}(f,x)$ *сходится к* $f(x)$ *при* $n \to \infty$ *равномерно относительно* $-1+\varepsilon \le x \le 1-\varepsilon$.

Литература

1. Сеге Г. *Ортогональные многочлены.* – М.: Физматгиз, 1962. – 500 с.

2. Rau H. *Uber die Lebesgueschen Konstanten der Reihentwicklungen nach Jacobischen* // Polynomen. Journ. fur Math. – 1929. – 161. – С. 237–254.

3. Gronwall T. *Uber die Laplacische Reihe* // Math. Ann. – 1913. – 74. – С. 213–270.

4. Агаханов С. А., Натансон Г. И. *Приближение функций суммами Фурье–Якоби* // ДАН СССР. – 1966. – Т. 166. – 1. – С. 9–10.

5. Агаханов С. А., Натансон Г. И. *Функция Лебега сумм Фурье–Якоби* // Вестник Ленингр. ун-та. – 1968. – Т. 1. – С. 11–23.

6. Шарапудинов И. И. *О сходимости метода наименьших квадратов* // Матем. заметки. – 1993. – Т. 53. – 3. – С. 131–143.

7. Нурмагомедов А. А. *Многочлены, ортогональные на неравномерных сетках* // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2011. – Т. 11. –вып. 3, – ч. 2. – С. 29–42.

8. Нурмагомедов А. А. *Сходимость сумм Фурье по многочленам, ортогональным на произвольных сетках* // Изв. вузов. Математика. – 2012. – 7. – С. 60–62.

9. Нурмагомедов А. А. *Об асимптотике многочленов, ортогональных на произвольных сетках* // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2008. – Т. 8, вып. 1. – С. 25–31.

10. Nurmagomedov A. A., Rasulov N. K., *Two-Sided Estimates of Fourier Sums Lebesgue Functions with Respect to Polynomials Orthogonal on Nonuniform Grids* // Vestnik St. Petersburg University, Mathematics. – 2018. – Vol. 51. – No. 3. – P. 249–259; – Т. 8, вып. 1. – С. 25–31.

11. Коркмасов Ф. М. *Аппроксимативные свойства средних Валле-Пуссена для дискретных сумм Фурье–Якоби* // Сиб. мат. журн. – 2004. – Т. 45. – 2. – С. 334–355.

12. Шарапудинов И. И. *Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Теория и приложения.* – Махачкала : ДНЦ РАН, 2004. – 276 с.

13. Шарапудинов И. И. *Об ограниченности в* $C[-1,1]$ *средних Валле-Пуссена для дискретных сумм Фурье-Чебышева* // Матем. сб. – 1996. – Т. 187. – 1. – С. 143–160.

14. Алексич Г. *Проблемы сходимости ортогональных рядов.* – М. : Изд. иностр. лит. – 1963. – 369 с.

15. Бадков В. М. *Двусторонние оценки функции Лебега и остатка ряда Фурье по ортогональным многочленам* // Сб. Аппроксимация в конкретных и абстрактных банаховых пространствах. АН СССР, Уральск. научн. центр. – 1987. – С. 31–45.

CONVERGENCE OF DISCRETE FOURIER SUMS OVER POLYNOMIALS ORTHOGONAL ON ARBITRARY GRIDS

A.A. Nurmagomedov, I.A. Nurmagomedov

For an arbitrary continuous function $f(x)$ *on the segment* $[-1,1]$*, we construct discrete Fourier sums* $S_{n,N}(f,x)$ *by a system of polynomials* $\{\hat{p}_{k,N}(x)\}_{k=0}^{N-1}$ *forming an orthonormal system on any finite non-uniform set of N points from the segment* $[-1,1]$ *with weight* $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$*. Approximation properties of the constructing partial sums* $S_{n,N}(f,x)$ *of order* $n \le N-1$ *are investigated. In particular, we obtain an estimate of deviation of partial sums* $S_{n,N}(f,x)$ *from* $f(x)$ *for* $n = O(\delta_N^{-2/7})$*; it depends on* n *and position of* x *on the segment* $[-1,1]$.

Keywords: polynomial, orthogonal system, set, asymptotic formula, Fourier sums, Lebesgue function.

УДК 517.544

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ $\mathbb{R}$-ЛИНЕЙНОГО СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ 3-Х ФАЗНОГО ПРАВИЛЬНОГО ГЕКСАГОНАЛЬНОГО ШАХМАТНОГО ПОЛЯ

Ю.В. Обносов[1]

1 *yobnosov@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В работе дается замкнутое решение задачи сопряжения силовых полей в трехфазной плоской двоякопериодической гексагональной гетерогенной среде. Рассмотрен случай, когда поле порождается тремя бесконечными наборами вихре-источников/стоков, одинаковыми в каждой однородной фазе. Получено необходимое и достаточное условие разрешимости поставленной задачи, связывающее между собой мощности источников/стоков и интенсивности вихрей в разнородных фазах. С помощью полученного решения восстановлена картина поля (линии тока и эквипотенциали) для ряда наборов проводимостей различных фаз и фиксированных мощностей и интенсивностей вихре-источников/стоков. Рассмотрены предельные случаи вырождения трехфазной среды в двухфазную и однородную.

Ключевые слова: двоякопериодическая гетерогенная среда, комплексный анализ, кусочно-мероморфное решение, конформное отображение.

Для правильного гексагонального трехфазного шахматного поля (см. Рис.1) рассматривается задача построения кусочно-мероморфной в плоскости $\mathbb{C}$ функции

Рис. 1.

$v(z)$ с фиксированными в центрах O_k всех шестиугольников простыми полюсами (одинаковыми в каждой из трех фаз Ω_k, $k = 1,2,3$), т.е. заданы

$$\operatorname{res}_{O_j} v_j(z) = \frac{Q_j - \mathrm{i}\Gamma_j}{2\pi}, \qquad j = 1,2,3.$$

На линиях сочленения разнородных фаз выполняются обычные условия сопряжения: непрерывность нормальных и пропорциональность касательных составляющих $\overline{v(z)}$ (коэффициент пропорциональности равен отношению коэффициентов сопротивления ρ_k соответствующих соседних фаз).

Сначала, с помощью соответствующего конформного отображения $\zeta(z)$, показывается, что поставленная задача приводится к краевой задаче $\mathbb{R}$-линейного сопряжения на замкнутой трехлистной римановой поверхности $\mathfrak{R}_\zeta$ функции $(1-\zeta^3)^{1/3}$. При этом носителями краевых условий оказываются лучи, выходящие из начала координат под углами $\pm\pi/3$ и π. Затем, путем ведения новой вспомогательной функции, удается получить эквивалентную плоскую задачу $\mathbb{R}$-линейного сопряжения для трех равных секторов. Замечательным оказался факт совпадения последней задачи с ранее решенной в работе [1]. Это позволило получить в явном виде единственное решение поставленной задачи при выполнении необходимых и достаточных условий

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0, \qquad \rho_1\Gamma_1 + \rho_2\Gamma_2 + \rho_3\Gamma_3 = 0.$$

Изучены предельные случаи вырождения трехфазной среды в двухфазную и однородную, а также случай когда одна из фаз становится непроводящей. Рассматриваются многочисленные примеры распределения линий тока и эквипотенциалей для фиксированных значений сопротивлений ρ_k, мощностей Q_k и интенсивностей Γ_k. Один из таких примеров приведен ниже (сверху дана общая картина поля, а ниже в каждой отдельной фазе).

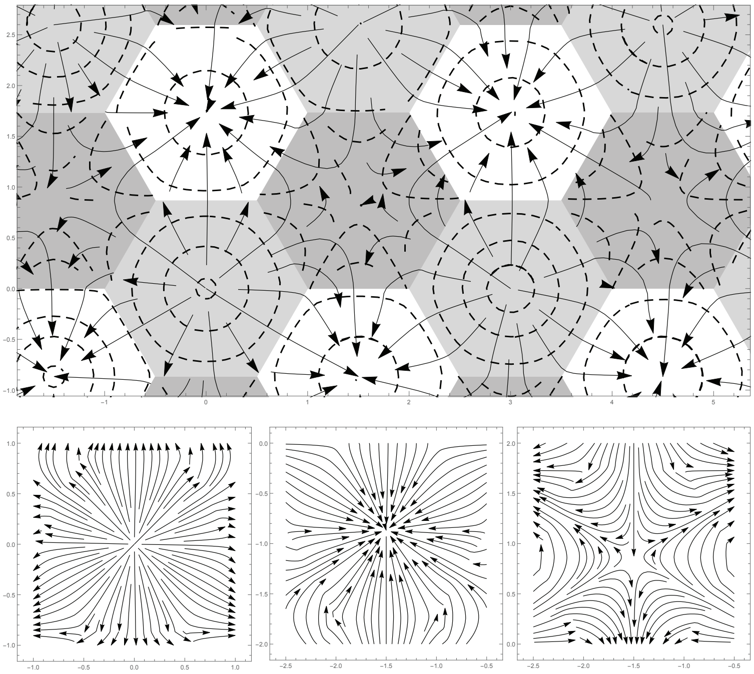


Рис. 2. $\rho_1 = 1$, $\rho_2 = 10$, $\rho_3 = 0.1$, $Q_1 = 1$, $Q_2 = -1$, $\Gamma_1 = 0$, $\Gamma_2 = 0$

This work was supported by the subsidy allocated to Kazan Federal University for the state assignment in the sphere of scientific activities, project № 1.13556.2019/13.1.

Литература

1. Craster R.V., Obnosov Y.V. *A three phase tessellation: solution and effective properties* // Proc. R. Soc. Lond. A. – 2004. – V. 460. – P. 1017–1037.

SOLUTION OF THE $\mathbb{R}$-LINEAR CONJUGATION PROBLEM FOR A REGULAR HEXAGONAL THREE-PHASE CHECKERBOARD

Yu.V. Obnosov

The paper gives a closed solution to the problem of conjugation of power fields in a three-phase planar doubly periodic hexagonal heterogeneous medium. The case when the field is generated by three

infinite sets of vortex/sources/sinks that are identical in each homogeneous phase is considered. A necessary and sufficient condition for the solvability of the problem is obtained, which relates the power of sources/sinks and the intensity of vortices in dissimilar phases. Using the obtained solution, the flow networks (streamlines and equipotentials) for a number of sets of conductivities of different phases and fixed powers of the sources/sinks and intensities of the vortexes was reconstructed. The limiting cases of the degeneracy of a three-phase medium into two-phase and homogeneous are considered.
Keywords: doubly periodic heterogeneous structure, complex analysis, piece-wise meromorphic solution, conformal mapping.

УДК 517.51

СМЕШАННЫЙ ОБОБЩЕННЫЙ МОДУЛЬ ГЛАДКОСТИ И ПРИБЛИЖЕНИЕ “УГЛОМ” В ПРОСТРАНСТВАХ L_p, $0 < p \le +\infty$

Н.В. Омельченко[1]

1 *nvomelchenko@mail.ru*; Севастопольский государственный университет

Прямая и обратная теоремы о приближении „углом“ из тригонометрических полиномов установлены для смешанных обобщенных модулей гладкости в пространствах L_p, $0 < p \le +\infty$, периодических функций многих переменных.

Ключевые слова: приближение „углом“, смешанный обобщенный модуль гдадкости.

Для изучения классов функций, классический смешанный модуль гладкости которых обладает теми или иными свойствами, в [1] было введено понятие приближения „углом“

$$Y_n(f)_p = \inf_{\substack{g_j \in \mathscr{T}^{(j)}_{n_j,p}, \\ j=1,\dots,d}} \Big\| f - \sum_{j=1}^{d} g_j \Big\|_p , n = (n_1,\dots,n_d) \in \mathbb{N}_0^d ,$$

где $\mathscr{T}^{(j)}_{n,p}$, $n \in \mathbb{N}_0$, – множество функций из L_p, являющихся тригонометрическими полиномами порядка не выше n по переменной x_j для почти всех $x_{\hat{j}} = (x_1,\dots,x_{j-1}, x_{j+1},\dots,x_d)$ из $[0,2\pi)^{d-1}$, $j = 1,\dots,d$. В этой же работе были доказаны прямая и обратная теоремы о приближении „углом“ для классических смешанных модулей гладкости в пространствах L_p, где $1 \le p \le +\infty$. На случай $0 < p < 1$ эти результаты были перенесены в [2].

Обобщенный модуль гладкости периодической функции одной переменной, произведенный произвольным периодическим генератором, был введен в [3]. На многомерный случай это понятие было распространено в [4]. Следуя [4], скажем, что функция g одной переменной принадлежит классу $\mathscr{G}$, если она является 2π-периодической, комплекснозначной, симметричной ($g(-\xi) = \overline{g(\xi)}$) и непрерывной, при этом набор ее коэффициентов Фурье $g^\wedge = \{g^\wedge(\nu), \nu \in \mathbb{Z}\}$ принадлежит пространству l_1, а также $g(0)=0$. Символом $\mathscr{G}(d)$ будем обозначать класс функций

$$\theta(\xi)=\prod_{j=1}^{d}\theta_j(\xi_j),\ \xi=(\xi_1,\ldots,\xi_d)\in\mathbb{R}^d,\ \theta_j\in\mathscr{G},\ j=1,\ldots,d.$$

Функция $\theta\in\mathscr{G}(d)$ порождает величины

$$\Delta_h^{(\theta)}f(x)=\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^d}\theta^\wedge(\nu)\,f(x+\nu\cdot h),\quad \Omega_\theta(f,\delta)_p=\sup_{\substack{0\le h_j\le\delta_j,\\ j=1,\ldots,d}}\left\|\Delta_h^{(\theta)}f(x)\right\|_p,\ h,\delta\in\mathbb{R}_0^d,\qquad(1)$$

которые будем называть смешанной θ-разностью и, соответственно, смешанным θ-модулем гладкости функции $f(x)$, $x=(x_1,\ldots,x_d)$, из пространства L_p, $0<p<+\infty$, вещественнозначных 2π-периодических функций d переменных, снабженном стандартной интегральной p-нормой (квазинормой при $0<p<1$) или, в случае $p=+\infty$, из пространства C непрерывных 2π-периодических функций с нормой Чебышева.

В (1) и всюду в дальнейшем, $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{R}_0^d$, $\mathbb{R}_+^d$, $\mathbb{Z}^d$, $\mathbb{N}^d$ и $\mathbb{N}_0^d$ – это d-мерные пространства векторов с вещественными, вещественными неотрицательными, вещественными положительными, целыми, натуральными и, соответственно, целыми неотрицательными компонентами, $xy=x_1y_1+\ldots+x_dy_d$, $x\cdot y=(x_1y_1,\ldots,x_dy_d)$. Отметим, что классический смешанный модуль гладкости порядка $k_j\in\mathbb{N}$ по переменной x_j, $j=1,\ldots,d$, является специальным случаем конструкции (1), соответствующим генератору

$$\theta(\xi)=\prod_{j=1}^{d}(1-e^{i\xi_j})^{k_j},\ \xi=(\xi_1,\ldots,\xi_d).$$

Прямая и обратная теоремы о приближении „углом“ для модулей (1) при определенных условиях на их генераторы были доказаны в [4] для $1\le p\le+\infty$. Оказывается, что при некоторых дополнительных условиях эти результаты могут быть распространены также и на случай $0<p<1$, а сами эти условия формулируются в терминах близости в некотором смысле генератора однородной функции.

Рассмотрим сначала одномерный случай. Символом $\mathscr{H}_\alpha$, $\alpha>0$, будем обозначать класс симметричных непрерывных на $\mathbb{R}$ бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ и не тождественно равных нулю функций ψ, для которых выполняется условие однородности порядка α: $\psi(t\xi)=t^\alpha\psi(\xi)$, $t>0,\xi\in\mathbb{R}$. Для непрерывных на $\mathbb{R}$ функций v и w, $0<q\le+\infty$ и для бесконечно дифференцируемой на $\mathbb{R}$ функции η с компактным носителем (тест-функция), будем говорить, что $v(\cdot)\overset{(q,\eta)}{\prec}w(\cdot)$, если $\mathscr{F}((\eta v)/w)$ принадлежит $L_q(\mathbb{R})$. Символ $v(\cdot)\overset{(q,\eta)}{\asymp}w(\cdot)$ будет обозначать, что $v(\cdot)\overset{(q,\eta)}{\prec}w(\cdot)$ и $w(\cdot)\overset{(q,\eta)}{\prec}v(\cdot)$. Периодическое продолжение некоторой функции η с носителем, сосредоточенным в интервале длины не больше 2π, обозначим символом η_*. Символом $\mathscr{D}(a,b)$, где $0<a<b$, будем обозначать множество бесконечно дифференцируемых вещественнозначных четных функций η, таких, что $\eta(\xi)=1$ для $|\xi|\le a$ и $\eta(\xi)=0$ для $|\xi|\ge b$. Пару тест-функций $\Lambda_*=(\eta,\zeta)$ плоским периодическим разбиением единицы, если существует $0<\rho<\pi/2$, такое, что $\eta\in\mathscr{D}(\rho,2\rho)$, $\zeta(\cdot+\pi)\in\mathscr{D}(\pi-2\rho,\pi-\rho)$ и $\eta_*(\xi)+\zeta_*(\xi)=1$ на $\mathbb{R}$.

Обозначим $P_\theta = \{p \in (0,+\infty] : \theta^\wedge \in l_p(\mathbb{Z})\}$, $\tilde{p} = \min(1,p)$. Для $\alpha > 0$ и $0 < p \le +\infty$ введем в рассмотрение класс $\mathscr{G}_{\alpha,p}$, состоящий, по определению, из функций $\theta \in \mathscr{G}$, для которых $p \in P_\theta$, а также существуют $\psi \in \mathscr{H}_\alpha$ и плоское периодическое разбиение единицы $\Lambda_*(\eta,\zeta)$, такие, что $\theta(\cdot) \overset{(\tilde{p},\eta)}{\asymp} \psi(\cdot)$ и $1 \overset{(\tilde{p},\zeta)}{\prec} \theta(\cdot)$. Скажем, что $\theta \in \mathscr{G}^{(+)}_{\alpha,p}$, если $\theta \in \mathscr{G}$, $p \in P_\theta$, при этом существуют $\psi \in \mathscr{H}_\alpha$ и плоское периодическое разбиение единицы $\Lambda_*(\eta,\zeta)$, такие, что $\psi(\cdot) \overset{(\tilde{p},\eta)}{\prec} \theta(\cdot)$ и $1 \overset{(\tilde{p},\zeta)}{\prec} \theta(\cdot)$. Скажем также, что $\theta \in \mathscr{G}^{(-)}_{\alpha,p}$, если $\theta \in \mathscr{G}$, $p \in P_\theta$, при этом существуют $\psi \in \mathscr{H}_\alpha$ и $\eta \in \mathscr{D}(\rho,2\rho)$, $0 < \rho < \pi/2$, такие, что $\theta(\cdot) \overset{(\tilde{p},\eta)}{\prec} \psi(\cdot)$. Ясно, что

$$\mathscr{G}_{\alpha,p} = \mathscr{G}^{(+)}_{\alpha,p} \bigcap \mathscr{G}^{(-)}_{\alpha,p},\ \alpha > 0,\ 0 < p \le +\infty.$$

Следующее утверждение определяет те допустимые параметры α и p, при которых введенные классы являются содержательными. Положим

$$\Omega = \mathbb{N} \times (0,+\infty] \bigcup \{(\alpha,p) : \alpha \notin \mathbb{N},\ p > 1/(\alpha+1)\}.$$

Утверждение 1. *Пусть $\alpha > 0$ и $0 < p \le +\infty$. Класс $\mathscr{G}_{\alpha,p}$ не пуст тогда и только тогда, когда $(\alpha,p) \in \Omega$.*

Перейдем теперь к многомерному случаю. Пусть $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_d) \in \mathbb{R}^d_+$ и $0 < p \le +\infty$. Скажем, что функция ψ переменной $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_d) \in \mathbb{R}^d$ принадлежит классу $\mathscr{H}_\alpha(d)$, если

$$\psi(\xi) = \prod_{j=1}^d \psi_j(\xi_j),\ \psi_j \in \mathscr{H}_{\alpha_j},\ j = 1,\dots,d.$$

Также введем в рассмотрение классы

$$\mathscr{G}_{\alpha,p}(d) = \Big\{\theta(\xi) = \prod_{j=1}^d \theta_j(\xi_j), \theta_j \in \mathscr{G}_{\alpha_j,p},\ j = 1,\dots,d\Big\},$$

$$\mathscr{G}^{(+)}_{\alpha,p}(d) = \Big\{\theta(\xi) = \prod_{j=1}^d \theta_j(\xi_j), \theta_j \in \mathscr{G}^{(+)}_{\alpha_j,p},\ j = 1,\dots,d\Big\},$$

$$\mathscr{G}^{(-)}_{\alpha,p}(d) = \Big\{\theta(\xi) = \prod_{j=1}^d \theta_j(\xi_j), \theta_j \in \mathscr{G}^{(-)}_{\alpha_j,p},\ j = 1,\dots,d\Big\}.$$

Ясно, что

$$\mathscr{G}_{\alpha,p}(d) = \mathscr{G}^{(+)}_{\alpha,p}(d) \bigcap \mathscr{G}^{(-)}_{\alpha,p}(d),\ \alpha \in \mathbb{R}^d_+,\ 0 < p \le +\infty.$$

Полагая

$$\Omega(d) = \Big\{(\alpha,p) \in \mathbb{R}^d_+ \times (0,+\infty] : (\alpha_j,p) \in \Omega,\ j = 1,\dots,d\Big\},$$

приведем многомерный аналог утверждения 1.

Утверждение 2. *Пусть $\alpha \in \mathbb{R}^d_+$ и $0 < p \le +\infty$. Класс $\mathscr{G}_{\alpha,p}(d)$ не пуст, тогда и только тогда, когда $(\alpha,p) \in \Omega(d)$, $j = 1,\dots,d$.*

Прямая и обратная теоремы о приближении „углом“ для смешанных обобщенных модулей гладкости формулируются следующим образом.

Теорема 1. *Пусть* $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_d) \in \mathbb{R}^d_+$, $0 < p \le +\infty$, $\theta \in \mathscr{G}^{(+)}_{\alpha,p}(d)$ *и* $\lambda = (\lambda_1,\dots,\lambda_d) \in \mathbb{R}^d_+$. *Тогда для* $f \in L_p$ *и* $n = (n_1,\dots,n_d) \in \mathbb{N}^d_0$ *и справедливо неравенство*

$$Y_n(f)_p \le c\,\Omega_\theta(f,\lambda\cdot(n+1)^{-1})_p\,, \tag{2}$$

где положительная постоянная c *не зависит от* f *и* n.

Теорема 2. *Пусть* $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_d) \in \mathbb{R}^d_+$, $0 < p \le +\infty$, $\theta \in \mathscr{G}^{(-)}_{\alpha,p}(d)$. *Тогда для* $f \in L_p$ *и* $\delta = (\delta_1,\dots,\delta_d) \in \mathbb{R}^d_+$ *справедливо неравенство*

$$\Omega_\theta(f,\delta)_p \le c\prod_{j=1}^{d}\min(\delta_j^{\alpha_j},1)\Big(\sum_{\substack{0\le\nu_j<1/\delta_j\\ j=1,\dots,d}}\ \prod_{j=1}^{d}(\nu_j+1)^{\alpha_j\widetilde{p}-1}\,Y_\nu(f)_p^{\widetilde{p}}\Big)^{1/\widetilde{p}}, \tag{3}$$

в котором положительная постоянная c *не зависит от* f *и* δ.

Приведем пример. Пусть $j \in \Lambda_m$, $m = 1,\dots,d$ – мультииндкекс, $\widehat{j} \in \Lambda_{d-m}$ – дополнительный к j мультииндекс, компонентами которого являются номера, не попавшие в набор j. Пусть также $\alpha_j = (\alpha_{j_1},\dots,\alpha_{j_m}) \in \mathbb{R}^m_+$, $\alpha_{\widehat{j}} = (\alpha_{\widehat{j}_1},\dots,\ \alpha_{\widehat{j}_{d-m}}) \in (0,1]^{d-m}$. Введем в рассмотрение смешанный модуль гладкости $\Omega_{\alpha_{(j)}\langle\alpha_{(\widehat{j})}\rangle}(f,\delta)_p$, который по определению про- изводится 2π-периодическим по каждой переменной генератором, заданном на периоде формулой

$$\theta(\xi) = \prod_{\nu=1}^{m}(1-e^{i\xi_{j_\nu}})^{\alpha_{j_\nu}}\prod_{\nu=1}^{d-m}\sum_{k\ne 0}|k|^{-\alpha_{\widehat{j}_\nu}-1}(e^{ik\xi_{\widehat{j}_\nu}}-1)\,,\ \xi\in[-\pi,\pi]^d\,, \tag{4}$$

ассоциированный с производными Вейля по переменным с индексами из набора j и с производными Рисса по оставшимся переменным. Специальный случай (4) с $m = d$ соответствует смешанному модулю гладкости произвольных положительных порядков, для которого справедливость прямой и обратной теорем в случае $1 \le p \le +\infty$ была установлена в [5]. Случай $d = 1$, $m = 0$, $0 < p \le +\infty$ был изучен в [6].

Из теорем 1 и 2 вытекает справедливость оценок (2) и (3) для

$$p \in P_{\alpha_j,\langle\alpha_{\widehat{j}}\rangle} = \Big(1/\Big(1+\min\Big(\min_{\substack{\nu=1,\dots,m:\\ \alpha_{j_\nu}\notin\mathbb{N}}}\alpha_{j_\nu},\ \min_{\nu=1,\dots,d-m}\alpha_{\widehat{j}_\nu}\Big)\Big),+\infty\Big].$$

В заключение отметим, что в случае $0 < p < 1$ этот результат является новым даже для смешанных модулей гладкости произвольных положительных порядков.

Литература

1. Потапов М. К. *Приближение „углом“ и теоремы вложения* // Math. Balkanica. –1972. – № 2. – P. 183–198.

2. Руновский К. В. *О приближении семействами линейных полиномиальных операторов в пространствах L_p,* $0 < p < 1$ // Мат. сборник. – 1994. – Т. 185. – № 8. – С. 81–102.

3. Руновский К. В. *Прямая теорема теории приближений для общего модуля гладкости* // Матем. заметки. – 2014. – Т. 95. – № 6. – С. 900–911.

4. Руновский К. В., Омельченко Н. В. *Смешанный обобщенный модуль гладкости и приближение „углом“ из тригонометрических полиномов* // Матем. заметки. – 2016. – Т. 100. – № 3. – С. 421–432.

5. Потапов М. К., Симонов Б. В. *Свойства смешанного модуля гладкости положительного порядка в смешанной метрике* // Вестник МГУ. Сер. матем. мех. – 2014. – Т. 69. –№ 6. – С. 31–40.

6. Runovski K., Schmeisser H.-J. *Moduli of smoothness related to fractional Riesz-derivatives* // ZAA. – 2015. – Vol. 34. – № 1. – P. 109–125.

MIXED GENERALIZED MODULE OF SMOOTHNESS AND APPROXIMATION BY THE “ANGLE” IN THE SPACES L_p, $0 < p \le +\infty$

N.V. Omelchenko

For mixed generalized module of smoothness in the L_p-spaces, $0 < p \le +\infty$, of periodic functions of several variables, the direct and inverse theorems on the approximation by the “angle” of trigonometric polynomials are proved.

Keywords: approximation by the “angle”, mixed generalized module of smoothness.

УДК 504.519.24

РАЗВИТИЕ ГИДРОДИНАМИКО-СТАТИСТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПРОГНОЗА СИЛЬНЫХ ЛЕТНИХ ОСАДКОВ, ШКВАЛОВ И СМЕРЧЕЙ ПО ТЕРРИТОРИИ ТАТАРСТАНА И ПОВОЛЖЬЯ

Э.В. Переходцева[1]

1 *perekhod@mecom.ru*; РГТУ(МИРЭА), ФГБУ “Гидрометцентр России”

Представлены результаты гидродинамико-статистических прогнозов, основанных на различных моделях и касающихся опасных ветров, включая шквалистые ветры и торнадо, а также сильных осадков на территории Республики Татарстан, Верхней и Средней Волги. Штормовые предупреждения об этих явлениях даются синоптиками за три часа. В настоящее время гидродинамическая модель прогноза не является эффективной; предупреждения на ее основе выдаются в 20-30% случаев. Эти явления приносят большой экономический ущерб. Успешный прогноз за 12-48 часов позволяет уменьшить этот ущерб. Сейчас прогноз шквалов, торнадо и сильных осадков, использующий последние статистические модели распознавания этих явлений является оперативным, он осуществляется 2 раза в день для использования на практике в качестве существенной помощи синоптикам.

Ключевые слова: территория Республики Татарстан, статистическая модель распознавания, гидродинамико-статистический прогноз, опасное явление, шквалы, торнадо, сильные осадки, проверка с помощью критерия Пирси-Обухова.

В настоящее время ни российские, ни зарубежные гидродинамические модели прогноза (даже на 12 ч) явлений сильных (количеством $Q \ge 14$ мм/12 ч) и опасных (количеством $Q \ge 45$ мм/12 ч) осадков не дают успешных результатов. Предупрежденность явлений сильных осадков не превышает 25-30% (в докладе подробно будут даны последние результаты гидродинамического прогноза сильных полусуточных осадков различной заблаговременности, представленные Багровым А.Н., заведующим лабораторией независимых испытаний Гидрометцентра России.

Создание автоматизированного прогноза этих явлений с использованием результатов разработанной автором статистической модели распознавания и прогноза таких осадков позволяет повысить успешность гидродинамических прогнозов. В Верхне-Волжском Управлении гидрометслужбы (ВВУГМС) в 90-х годах и в Управлении гидрометслужбы Республики Татарстан (ТатУГМС) в 2003-2006 гг. были успешно проведены испытания гидродинамико-статистического прогноза сильных летних полусуточных осадков с использованием выходных прогностических полей первой оперативной гидродинамической модели Гидрометцентра России (автор – Беркович Л.В.). По результатам испытаний методы были рекомендованы Техсоветами Управлений для использования в оперативной практике.

Также и для гидродинамико-статистических методов прогноза сильных шквалов, в которых скорость ветра прогнозировалась в градациях $V \geq 20$ м/с и $V \geq 25$ м/с использовались статистические модели распознавания метеорологических ситуаций как векторов n-мерного пространства признаков с предварительным отбором из n ($n = 38$) наиболее информативных и слабо зависимых признаков (параметров атмосферы). Для обеих градаций были построены две дискриминантные функции, разделяющие ситуации с явлением и без явления (они приводятся в докладе). При этом, в дискриминантных функциях использовались прогностические значения выбранных параметров из первой оперативной полусферной гидродинамической модели с горизонтальным разрешением 300х300 км (автор-Беркович Л.В.). И в ТатУГМС, и в ВВУГМС были успешно проведены оперативные испытания автоматизированных статистических методов прогноза обеих градаций сильного ветра с использованием гидродинамических прогнозов полусферной модели. Предложенные методы прогноза (заблаговременностью 12 и 36 ч) были рекомендованы Техсоветами УГМС для использования в оперативной синоптической практике. Результаты испытаний подробно приводятся в докладе.

В настоящее время в Гидрометцентре России в качестве основной региональной модели функционирует гидродинамическая модель по полным уравнениям с горизонтальным разрешением 75х75 км. Гидродинамические прогнозы этой модели автоматически записываются в банк данных Гидрометцентра России. Теперь для прогноза и сильных шквалов и смерчей, и сильных летних осадков используются статистические решающие правила, зависящие от прогностических значений выбранных ранее параметров атмосферы, полученных из региональной модели. Автором была проведена адаптация статистических решающих правил к этим параметрам. Затем проводились авторские и независимые испытания методов прогноза указанных явлений в Гидрометцентре России. По результатам испытаний гидродинамико-статистические методы прогноза на текущий день сильных осадков и сильного ветра, включая шквалы и смерчи, были рекомендованы Центральной методической комиссией Гидрометцентра России к оперативному использованию. В настоящее время разработаны и прошли испытания методы прогноза с заблаговременностью 24, 36 и 48 ч. Создана технология представления цветных карт прогноза на сервере Гидрометцентра, откуда их могут брать синоптики всех УГМС.

В докладе будут при ведены примеры прогноза сильных осадков и ветра по станциям территории Татарстана за 2017-2018 гг. Их предупрежденность существенно выше предупрежденности гидродинамических и синоптических прогнозов. На рис. 1 в качестве прогноза сильного ветра приводится черно-белая прогностическая карта с изолиниями вероятностей прогноза возникновения ветра скоростью $V \geq 25$ м/с. По ней прогноз опасного ветра дается при вероятностях свыше 65% (вероятности рассчитываются в узлах сетки прогноза 75x75 км). На рис. 1 видно, что в день гибели «Булгарии» 10.07.11 г. и Казань, и Самара, и территория Куйбышевского водохранилища находились в области, где с высокой вероятностью (85-90%) ожидалось возникновение сильного ветра и его порывов скоростью 25 м/с. Синоптики также дали предупреждение. В Казани и Самаре был зафиксирован ветер скоростью 23 м/с (прогноз считается оправдавшимся).

Летом 2019 г. данные методы прогноза с использованием статистических моделей прогноза пройдут верификацию в ТатУГМС, они будут сравниваться по результатам испытаний с прогнозами других гидродинамических моделей (в том числе и зарубежных) и с прогнозами синоптиков. Надеемся, что их использование в оперативной практике будет эффективной помощью синоптикам при составлении ежедневных прогнозов.

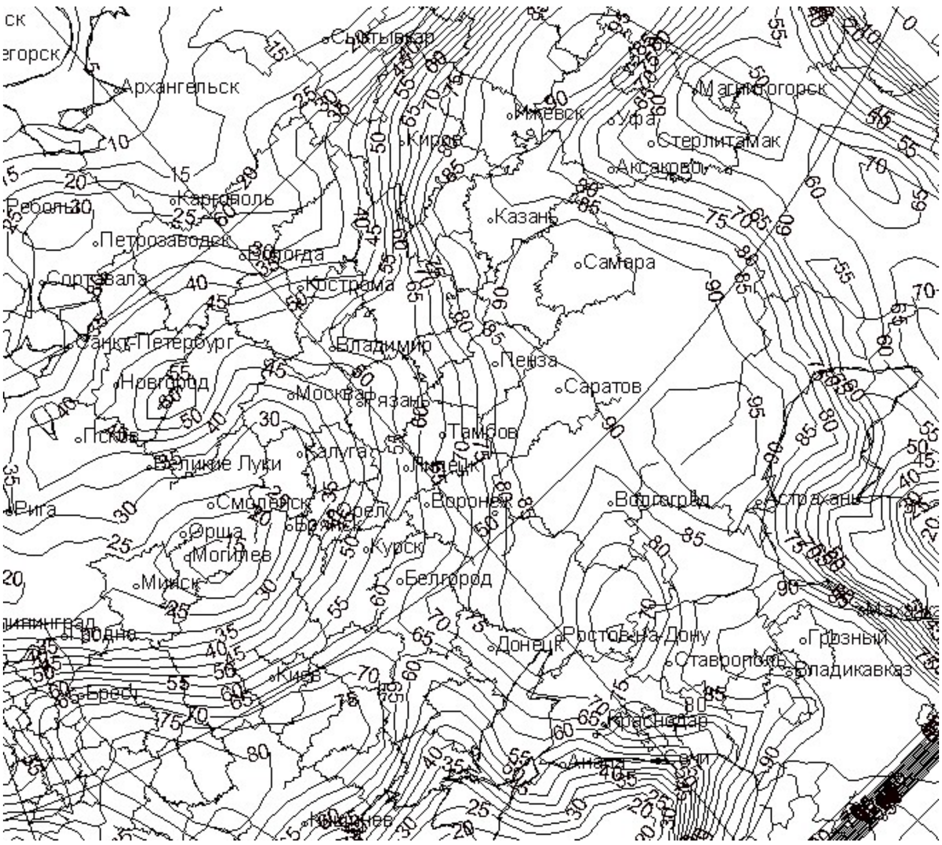


Рис. 1. Карта изолиний вероятностей прогноза опасного ветра скоростью $V \geq 25$ м/с с выделением областей прогноза опасного ветра

THE DEVELOPMENT OF HYDRODYNAMIC-STATISTICAL MODELS OF THE FORECAST OF HEAVY SUMMER PRECIPITATION, SQUALLS AND TORNADOES OVER THE TERRITORIES OF REPUBLIC TATARSTAN AND OF HIGH AND MIDDLE VOLGA

E.V. Perekhodtseva

The results of the hydrodynamic-statistical forecasts, based of different recognition forecast models of dangerous wind including squalls and tornadoes and heavy precipitation over the territories of Republic Tatarstan and high and middle Volga, are submitted at this paper. The storm warning about these phenomena is given by synoptic to 3 hours ahead. The hydrodynamic model forecast is not successful now. The phenomena warning is 20-30%. These phenomena bring the great economic losses. The successful forecast to 12-48 hours ahead allows to reduce the economic losses. Nowdays the forecast of squalls, tornadoes and heavy precipitation, used the last statistical recognition models of these phenomena, is operative, it calculated two times per day for the using in the operative practice as a great effective help to synoptic.

Keywords: the territory of Republic Tatarstan, the statistical recognition model, the hydrodynamic-statistical forecast, the dangerous phenomenon, the squalls, tornado, heavy precipitation, the verification by criterion of Pirsy-Obukhov.

УДК 514.752, 514.764.274, 517.97

ПРИМЕРЫ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВРАЩЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИОНАЛА ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ

Н.М. Полубоярова[1], И.А. Романова[2]

1 *natasha_medvedeva@volsu.ru*; Волгоградский государственный университет, Институт математики и информационных технологий

2 *irina.romanova@volsu.ru*; Волгоградский государственный университет, Институт математики и информационных технологий

Данная статья является продолжением исследования экстремалей функционала потенциальной энергии. Такие экстремали моделируют состояния равновесных жидкостей в гравитационном поле с потенциалом, тентовые покрытия, магнитные жидкости, капиллярные поверхности. Мы накладываем условия на функционал и с их помощью приводим примеры экстремальных поверхностей вращения.

Ключевые слова: вариация функционала, экстремальная поверхность, функционал типа площади, функционал объемной плотности сил, функционал потенциальной энергии, средняя кривизна экстремальной поверхности.

Изучению минимальных поверхностей в евклидовом и псевдоевклидовом пространствах посвящены работы Ю. А. Аминова, В. А. Клячина, В. М. Миклюкова, А. В. Погорелова, В. Г. Ткачева, А. А. Тужилина, А. Т. Фоменко, М. до Кармо, Ч. К. Пенга, Ш. Яу, Р. Финна, Дж. Саймонса и др.

Так же как минимальные поверхности есть экстремали функционала площади, так и рассматриваемые нами гладкие поверхности – экстремали специального функционала. Для того чтобы учитывать нагрузки поверхности (системы) извне и изнутри, требуется рассматривать поверхности, «минимальные» с точки зрения более сложных функционалов, чем давно изучаемые функционалы площади. В работе [1] автором и В.А. Клячиным был рассмотрен функционал типа площади, а в статье [2], в частности, были исследованы функционалы с подынтегральными функциями, описывающими поверхностную и объемную плотности сил. Например, функционал (энергия) может быть комбинацией энергии поверхностного натяжения, гравитационной энергии, энергии изгибной деформации. Рассматриваемый в данной работе функционал потенциальной энергии представляет собой сумму функционалов типа площади и объемной плотности сил. Экстремальные такого моделируют состояния равновесных жидкостей в гравитационном поле с потенциалом, тентовые покрытия, магнитные жидкости, капиллярные поверхности. Поэтому их изучение на устойчивость и неустойчивость не теряет актуальности. В работе [3] были получены уравнения экстремалей функционала потенциальной энергии.

Целью настоящей статьи является получение примеров экстремалей функционала потенциальной энергии. Перейдем к общей постановке задачи.

Пусть M – n-мерное связное ориентируемое многообразие класса C^2. Рассмотрим ориентируемую гиперповерхность $\mathcal{M} = (M, u)$, полученную C^2-погружением $u : M \to \mathbf{R}^{n+1}$. Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^{n+1}$ некоторая область, такая что $\mathcal{M} \subset \partial\Omega$; Φ, $\Psi : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}$ — C^2-гладкие функции. Если ξ – поле единичных нормалей к поверхности $\mathcal{M}$, то для любой C^2-гладкой поверхности $\mathcal{M}$ определен *функционал потенциальной энергии*

$$W(\mathcal{M}) = \int\limits_{\mathcal{M}} \Phi(\xi)\, d\mathcal{M} + \int\limits_{\Omega} \Psi(x)\, dx, \tag{1}$$

который не зависит от выбора нормали ξ.

Поверхность $\mathcal{M}$ является *экстремальной*, если первая вариация функционала (1) равна нулю при всех бесконечно малых деформациях поверхности $\mathcal{M}$ (см. [4]).

Для функционала (1) введем обозначения для матрицы

$$G = \{G_{ij}\}_{i,j=1}^{n+1},\ G_{ij} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \delta_{ij}(\Phi - \langle D\Phi, \xi\rangle),$$

где $D\Phi = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_2}, \ldots, \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_{n+1}}\right)$, δ_{ij} – символ Кронекера. Пусть div – дивергенция в метрике поверхности $\mathcal{M}$, $H = \langle \vec{H}, \xi\rangle$ – средняя кривизна поверхности $\mathcal{M}$ относительно нормали ξ, тогда справедлива теорема о вариациях функционала потенциальной энергии, установленной в [3].

Теорема 1. *Если $W(t) = W(\mathcal{M}_t)$, то*

$$W'(0) = \int\limits_{\mathcal{M}} (\mathrm{div}(D\Phi(\xi))^T - nH\Phi(\xi) + \Psi(x))h(x)\, d\mathcal{M},$$

где $h(x) \in C_0^1(\mathcal{M})$.

Из теоремы 1 получаем следствия об уравнениях экстремалей функционала потенциальной энергии (1).

Следствие 1. *Поверхность $\mathcal{M}$ класса C^2 является экстремалью функционала (1) тогда и только тогда, когда выполнено равенство*

$$\sum_{i=1}^{n} k_i G(E_i, E_i) = \Psi(x), \tag{2}$$

где E_i – главные направления, k_i – главные кривизны поверхности $\mathcal{M}$.

Следствие 2. *Если $f = x_{n+1}$ и $\Phi(\xi) = \Phi(\xi_{n+1})$, то выполнено равенство*

$$\operatorname{div}((\xi_{n+1}\Phi'(\xi_{n+1}) - \Phi(\xi_{n+1}))\nabla f) = \Psi(x)\xi_{n+1}.$$

Заметим, что при $\Psi(x) = 0$ следствие 2 обобщает хорошо известное свойство гармоничности координатных функций минимальных поверхностей. В работе [5] для p-минимальных поверхностей ($\Psi(x) = 0, \Phi(\xi) = 1$) аналогичное равенство было положено в основу их определения.

Далее будем рассматривать частный случай функционала (1) и поверхности $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Пусть C^2-гладкая поверхность $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ задана радиус-вектором

$$\vec{R}(t,\theta) = (t, r(t)\rho(\theta)), \tag{3}$$

$\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$, $\rho(\theta)$ – радиус-вектор сферы $\mathbb{S}^{n-1}$, $t \in (a,b) \subset \mathbb{R}$, $r(t)$ – C^2-гладкая функция на (a,b), ξ_{n+1} – координата единичной нормали к поверхности $\mathcal{M}$. В работе [3] в качестве примера были получены уравнения экстремалей для функционала (1) при $\Phi(\xi) = \phi(\xi_{n+1})$. Напомним основные моменты.

Если обозначить $\tau = \xi_{n+1} = -\dot{r}(t)/\sqrt{1+\dot{r}^2(t)}$, то производные будут в виде

$$\phi'(\tau) = d\phi/d\xi_{n+1},\ \phi''(\tau) = d^2\phi/d\xi_{n+1}^2,\ \dot{r}(t) = dr(t)/dt,\ \ddot{r}(t) = d^2r(t)/dt^2.$$

Выпишем необходимые компоненты для уравнения (2).

Главные кривизны по формулам [6] выражаются $k_1 = \ddot{r}(t)/(1+\dot{r}^2(t))^{3/2}$, $k_i = -1/r(t)\sqrt{1+\dot{r}^2(t)}$, где $i = \overline{2,n}$, главные направления поверхности $\mathcal{M}$ выписываются $E_1 = R_t/|R_t| = \left(1/\sqrt{1+\dot{r}^2(t)},\ \dot{r}(t)\rho(\theta)/\sqrt{1+\dot{r}^2(t)}\right)$, $E_i = R_{\theta_i}/|R_{\theta_i}| = (0,\ \dot{\rho}_{\theta_i}/|\dot{\rho}_{\theta_i}|)$, значения матрицы G принимают вид

$$G(E_1,E_1) = \frac{\phi''(\tau)}{1+\dot{r}^2(t)} + \phi(\tau) + \frac{\phi'(\tau)\dot{r}(t)}{\sqrt{1+\dot{r}^2(t)}},\ G(E_i,E_i) = \phi(\tau) + \frac{\phi'(\tau)\dot{r}(t)}{\sqrt{1+\dot{r}^2(t)}}.$$

Тогда, с учетом обозначений

$$B(t) = \frac{\phi''(\tau)}{(1+\dot{r}^2(t))\left(\phi(\tau) + \dfrac{\phi'(\tau)\dot{r}(t)}{\sqrt{1+\dot{r}^2(t)}}\right)},\ C(t) = \frac{r(t)\sqrt{1+\dot{r}^2(t)}}{\phi(\tau) + \dfrac{\phi'(\tau)\dot{r}(t)}{\sqrt{1+\dot{r}^2(t)}}},$$

уравнение (2) принимает вид

$$\frac{r(t)\ddot{r}(t)}{1+\dot{r}^2(t)} - \frac{(n-1)+\Psi(x)C(t)}{B(t)+1} = 0. \tag{4}$$

Таким образом, получено уравнение экстремалей для поверхностей вращения.

Замечание. В работах [7] - [8] были получены уравнения экстремалей для поверхностей вращения при $\Psi(x) = 0$.

Заметим, что $|x| = \sqrt{R^2 - \langle R, e_{n+1}\rangle^2} = \sqrt{t^2+r^2-t^2} = r$.

Тогда при $\Phi(\xi) = 1$ и $\Psi(x) = \psi(|x|) = \psi(r)$ функционал (1) принимает вид

$$W(\mathscr{M}) = \int\limits_{\mathscr{M}} d\mathscr{M} + \int\limits_{\Omega} \psi(|x|)\, dx. \tag{5}$$

Уравнение экстремалей (4) для функционала (5) есть дифференциальное уравнение вида $F(r, r', r'') = 0$, допускающее понижение порядка:

$$\frac{r(t)\ddot{r}(t)}{1+\dot{r}^2(t)} = (n-1) + \psi(r)r(t)\sqrt{1+\dot{r}^2(t)}.$$

Заменой $p = \sqrt{1+\dot{r}^2(t)}$ оно сводится к уравнению Бернулли

$$p' = (n-1)\frac{p}{r(t)} + \psi(r)p^2,$$

решая которое, имеем

$$t = \int \left(r^{2(n-1)}(t) \left(\int \psi(r) r^{n-1}(t)\, dr + C_1 \right)^{-2} - 1 \right)^{-1/2} dr + C_2.$$

Следствие 3. *Поверхность $\mathscr{M}$ вида (3) с функцией $r(t)$, заданной уравнением*

$$t = \int \left(r^{2(n-1)}(t) \left(\int \psi(r) r^{n-1}(t)\, dr + C_1 \right)^{-2} - 1 \right)^{-1/2} dr + C_2,$$

является экстремальной для функционала (5).

В работе [9] для поверхностей вращения получена вторая вариация функционала (1), которая позволяет определить области устойчивости для найденных экстремалей.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №19-47-340015 p_a).

Литература

1. Клячин В. А., Медведева Н. М. *Об устойчивости экстремальных поверхностей некоторых функционалов типа площади* // Сибирские электронные математические известия. Статьи. – 2007. – Т. 4. – С. 113–132.

2. Клячин В. А. *О некоторых свойствах устойчивых и неустойчивых поверхностей предписанной средней кривизны* // Изв. РАН. Сер. матем. – 2006. – Т. 70, № 4. – С. 77–90.

3. Полубоярова Н. М. *Уравнения экстремалей функционала потенциальной энергии* // Вестник ВолГУ. Серия 1. Математика. Физика. – 2016. – № 5(36). – С. 60–72.

4. Клячин В. А., Миклюков В. М. *Признаки неустойчивости поверхностей нулевой средней кривизны в искривленных лоренцевых произведениях* // Матем. сб. – 1996. – Т. 187, № 11. – С. 67–88.

5. Vladimir G. Tkachev. *External geometry of p-minimal surfaces*. – Geometry from the Pacific Rim, de Gruyter, Berlin, 1997. – P. 363–375.

6. Позняк Э. Г., Шикин Е. В. *Дифференциальная геометрия: первое знакомство*. – М.: МГУ, 1990. – 384 с.

7. Медведева Н. М. *Исследование устойчивости экстремальных поверхностей вращения* // Известия Саратовского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. – 2007. – Т. 7, Вып. 2. – С. 25–32.

8. Полубоярова Н. М. *Исследование устойчивости n-мерных экстремальных поверхностей вращения*// Изв. вузов. Матем. – 2011. – № 2. – С. 106–109.

9. Полубоярова Н. М. *О неустойчивости экстремалей функционала потенциальной энергии* // Уфимск. матем. журн. – 2018. – V. 10. – № 3. – С. 79–88.

EXAMPLES OF EXTREME ROTATION SURFACES
FOR THE POTENTIAL ENERGY FUNCTIONAL

N.M. Poluboyarova, I.A. Romanova

We study the extremals of the potential energy functional. Such extremals model the state of equilibrium liquids in a gravitational field with a potential, awning coatings, magnetic fluids, and capillary surfaces. Imposing conditions on the functional, we managed to construct examples of extremal surfaces of revolution.

Keywords: the variation of functional, extreme surface, functional type area, volumetric power density functional, the functional of potential energy, the mean curvature of the extreme surface.

УДК 517.54

ПУТЕШЕСТВИЕ К НЕРАВЕНСТВУ БОРА: ВЧЕРА, СЕГОДНЯ И ЗАВТРА

С. Поннусами[1]

1 *samy@iitm.ac.in*; Индийский технологический институт Мадраса

Лекция основана на моем недавнем активном сотрудничестве с Ильгизом Каюмовым, и следовательно, результаты, которые будут рассмотрены, основаны на нашей совместной работе. Результаты относительно неравенств типа Бора касаются следующих двух основных семейств функций, а именно:

1. *семейства всех ограниченных аналитических в единичном круге функций,*
2. *семейства сохраняющих ориентацию гармонических отображений единичного круга,*

а остальные получаются путем обобщения или улучшения неравенства Бора.

В этом докладе будет дан обзор ряда результатов, включая последние достижения в отношении классического неравенства Бора. В частности, будут описаны решения ряда задач о радиусе Бора для различных пространств аналитических функций. Мы также обсудим несколько неопубликованных результатов и сформулируем некоторые новые проблемы.

Ключевые слова: неравенство Бора, ограниченные аналитические функции.

JOURNEY TO BOHR'S INEQUALITY: YESTERDAY, TODAY AND TOMORROW

S. Ponnusamy

The lecture is based on my recent active cooperation with Ilgiz Kayumov, and thus, the results that

will be addressed will mainly be my joint work with lgiz Kayumov and his team. Results concerning Bohr-type inequality are motivated by the following two fundamental family of functions, namely,

1. *The family of all bounded analytic functions in the unit disk,*

2. *The family of sense-preserving harmonic mappings of the unit disk,*

and the rest are evolved through these by way of generalizing as Bohr's phenomenon or by improving the Bohr inequality in different setting. In this talk, an overview on the number of results including recent trend on the classical inequality of Bohr will be addressed.In particular, we indicate solutions to a number of problems on the Bohr radius for different spaces of analytic functions. A sequence of events led to new problems will be discussed. We shall address few unpublished results and discuss some new problems.

Keywords: Bohr's inequality, bounded analytic functions.

УДК 514.635.4

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКИХ ПЛЕНОК ПРИ ТЕПЛОМАССООБМЕНЕ

Л.А. Прокудина[1], Д.А. Бухарев[2]

1 *prokudinala@susu.ru*; Южно-Уральский государственный университет
2 *needleinspace@gmail.com*; Южно-Уральский государственный университет

Представлено нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных для отклонения свободной поверхности жидкой пленки от невозмущенного состояния в процессах тепло- и массообмена. Проведены вычислительные эксперименты по расчету волновых характеристик жидкой пленки: частоты, инкремента, фазовой скорости в процессах испарения и конденсации, а также компьютерное моделирование состояния свободной поверхности вертикальной пленки воды с учетом градиентов температуры, поверхностной вязкости.

Ключевые слова: жидкая пленка, волновые характеристики, свободная поверхность, градиенты температуры.

Исследованы тонкие слои вязкой жидкости (жидкие пленки), движущиеся по твердой поверхности под действием силы тяжести для умеренных чисел Рейнольдса при тепло- массообмене (испарение, конденсация). Акутальность и практическая значимость изучения течений тонких слоев вязкой жидкости связана с их широкой реализацией в многочисленных тепло-массообменных аппаратах теплоэнергетической, химической, металлургической, пищевой, фармацевтической промышленности (пленочные ректификаторы, колонны с плоско-параллельной насадкой, абсорберы) и др. Сочетание малой толщины пленки и большой поверхности контакта позволяет значительно интенсифицировать химические, тепловые, диффузионные процессы [1, 2].

Представлено нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных [3] для отклонения $\psi(x, t)$ свободной поверхности жидкой пленки от невозмущенного состояния в процессах тепло- и массообмена

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=b_0\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial t}+b_1\frac{\partial\psi}{\partial x}+b_2\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+b_3\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}+b_4\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4}+b_5\psi\frac{\partial\psi}{\partial x}+b_6\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+b_7\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2,$$

где

$$b_0=\frac{5}{24}Re^2F_x;b_1=-ReF_x-Re\tau_x;b_2=-\frac{ReM}{2}+\frac{3}{40}Re^3F_x(\tau_x+F_x);b_3=-\frac{Re^2F_xN}{2};$$
$$b_4=-\frac{Re\sigma}{3};b_5=-2ReF_x-Re\tau_x;b_6=-ReM+\frac{3}{8}Re^3F_x\tau_x+\frac{9}{20}Re^3F_x^2;b_7=b_6;$$

где x – пространственная координата, t – время. Коэффициенты уравнения включают параметры: поверхностное натяжение σ, поверхностную вязкость N, параметр Марангони M, постоянное касательное напряжение τ_x.

В рамках этой модели проведены вычислительные эксперименты по расчету волновых характеристик жидкой пленки: частоты, инкремента и фазовой скорости. Выделены режимы течения пленки с максимальным значением инкремента (рис. 1). Проведено компьютерное моделирование состояния свободной поверхности вертикальной пленки воды с учетом градиентов температуры, стабилизирующего влияния нерастворимых поверхностно активных веществ, препятствующих разрушению жидких пленок.

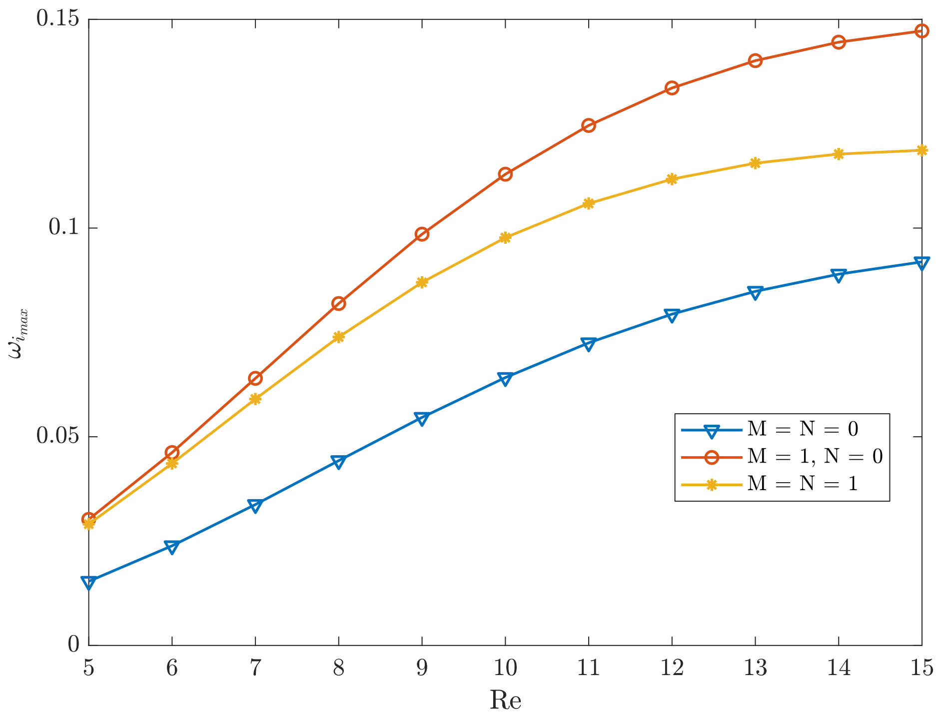


Рис. 1. Режимы течения пленки с максимальным значением инкремента

Литература

1. Холпанов Л., Шкадов В. *Гидродинамика и тепломассообмен с поверхностью раздела.* – М.: Наука, 1990. – 271 с.

2. Гогонин И., Шемагин И., Будов В., Дорохов А. *Теплообмен при пленочной конденсации и пленочном кипении в элементах оборудования АЭС.* – М.: Энергоатомиздат, 1993. – 208 с.

3. Прокудина Л. А. *Влияние неоднородности поверхностного натяжения на волновое течение жидкой пленки* // Инж.-физ. журн. – 2014. – Т. 87. – № 1. – С. 158–166.

SIMULATION OF WAVE FLOW OF LIQUID FILMS IN HEAT AND MASS TRANSFER

L.A. Prokudina, D.A. Bukharev

A nonlinear partial differential equation for the deviation of the free surface of the liquid film from the undisturbed state in the processes of heat and mass transfer is presented. Computational experiments were carried out to calculate the wave characteristics of the liquid film: frequency, increment, phase velocity in the process of evaporation and condensation, as well as computer simulation of the free surface of the vertical water film taking into account temperature gradients and surface viscosity.
Keywords: liquid film, wave characteristics, free surface, temperature gradients.

УДК 517.54

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РАЗРЕЗОВ В ЭВОЛЮЦИИ ЛЕВНЕРА

Д.В. Прохоров[1]

1 *prokhorovdv@info.sgu.ru*; Саратовский государственный университет, Петрозаводский государственный университет

В статье рассматриваются решения $g(z,t)$ хордового дифференциального уравнения Левнера, для которых обратные конформные отображения $f(w,t) = g^{-1}(w,t)$ переводят верхнюю полуплоскость на полуплоскость с аналитическим разрезом Γ. Изучаются асимптотические связи между $f(w,t)$, Γ и управляющей функцией $\lambda(t)$ в уравнении Левнера при малых значениях $t > 0$, когда Γ имеет с вещественной осью касание некоторого порядка. Модельным случаем служит разрез по круговой дуге или степени круговой дуги. Выводятся достаточные условия, позволяющие соединить асимптотическое представление отображения в аналитическом угле раствора π и в аналитическом каспе.

Ключевые слова: однолистная функция, уравнение Левнера, касательный разрез, управляющая функция.

Конформное отображение f верхней полуплоскости $\mathbb{H} = \{w \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} w > 0\}$ на односвязную область G с локально связной границей допускает непрерывное продолжение на ось $\mathbb{R} = \partial\mathbb{H}$. Граница ∂G области G имеет угол раствора $\alpha\pi$, $0 \le \alpha \le 2$, в точке простого конца, соответствующей $x_0 \in \mathbb{R}$, $f(x_0) \neq \infty$, если $\lim_{x\to x_0-} \arg(f(x) - f(x_0)) = \Psi$ и $\lim_{x\to x_0+}(f(x) - f(x_0)) = \Psi + \alpha\pi$, $x \in \mathbb{R}$. Поведение f в полуокрестности точки x_0 описано, например, в монографии Поммеренке [7], теорема 3.11 для $0 < \alpha < 2$ и теорема 11.16 для $\alpha = 0$. Угол нулевого раствора называют каспом. Более детальное асимптотическое поведение f в окрестности прообраза вершины каспа исследовано в [2], [3], [8].

Специальный случай каспа возникает для полуплоскости $\mathbb{H}$ с разрезом Γ, касательным к $\mathbb{R}$, например, в точке $z_0 = 0$, то есть $G = \mathbb{H} \setminus \Gamma$, $\Gamma \subset (\mathbb{H} \cup \{0\})$. Разрез Γ можно задать в виде функции параметра t, который служит емкостью кривой $\Gamma[0,t]$ относительно $\mathbb{H}$. А именно, для всякого $t, 0 \le t \le T$, существует конформное отображение $g(\cdot,t) : \mathbb{H} \setminus \Gamma[0,t] \to \mathbb{H}$ с гидродинамической нормировкой

$$g(z,t) = z + \frac{2t}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad z \to \infty.$$

Эволюция $g(z,\cdot)$ во времени t описывается хордовым дифференциальным уравнением Левнера

$$\frac{\partial g(z,t)}{\partial t} = \frac{2}{g(z,t) - \lambda(t)}, \quad g(z,0) = z, \quad z \in \mathbb{H}, \quad 0 \le t \le T,$$

с непрерывной вещественной управляющей функцией $\lambda(t) = g(\Gamma(t),t)$.

Рассмотрим разрез Γ, который имеет касание порядка $N-2$, $N \ge 3$, с осью $\mathbb{R}$ в точке 0. Пусть касательный вектор к $\Gamma[0,t]$ в точке $z_0 = 0$ имеет нулевой аргумент. Отрицательная вещественная полуось $\mathbb{R}^-$ образует с Γ угол раствора π, в то время как положительная вещественная полуось $\mathbb{R}^+$ образует касп с Γ. Две стороны разреза $\Gamma[0,t]$ имеют образы $[\alpha(t),\lambda(t)] \subset \mathbb{R}$ и $[\lambda(t),\beta(t)] \subset \mathbb{R}$ при отображении $w = g(z,t)$, соответственно. Для аналитического разреза и угла раствора π из результатов Левай [5] следует асимптотическое представление поведения $f(w,t) = g^{-1}(w,t)$ при фиксированном $t \in [0,T]$ в окрестности точки $\alpha(t)$,

$$f(w,t) = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{n} q_{nm}(w-\alpha(t))^{n+1}\log^m(w-\alpha(t)) + o((w-\alpha(t))^{N+1}\log^N(w-\alpha(t))), \quad q_{00} \ne 0,$$

где w стремится к $\alpha(t)$ по любому пути в $\mathbb{H}$, включая граничные сегменты. Потребуем определенную равномерность по t условия Левай, положив $w = \lambda(t)$ и устремив t к 0.

Будем говорить, что управляющая функция λ в уравнении Левнера, генерирующая Γ, обладает свойством 1, если при $t \to +0$

$$f(\lambda(t),t) = \sum_{n=0}^{N-2}\sum_{m=0}^{n} q_{nm}(\lambda(t)-\alpha(t))^{n+1}\log^m(\lambda(t)-\alpha(t)) + o((w-\alpha(t))^{N-1}\log^{N-2}(\lambda(t)-\alpha(t))).$$

Согласно Поммеренке, запишем для каспа асимптотическое представление $f(w,t)$ в окрестности точки $\beta(t)$

$$\frac{1}{f^{N-2}(w,t)} = -\frac{\log(w-\beta(t))}{\pi} + o(\log(w-\beta(t))), \quad a > 0, \quad w \to \beta(t), \quad w \in \mathbb{H} \cup \mathbb{R}.$$

Вновь потребуем некоторую равномерность условия Поммеренке в условиях свойства 1, положив $w = \beta(t)$ и устремив t к 0.

Будем говорить, что управляющая функция λ в уравнении Левнера, генерирующая Γ, обладает свойством 2, если

$$\frac{1}{f^{N-2}(\lambda(t),t)} = \left(\frac{1}{q_{00}(\lambda(t)-\alpha(t))}\right)^{N-2} - \frac{a\log(\lambda(t)-\beta(t))}{\pi} + o(\log(\lambda(t)-\alpha(t))^{2-N}) + o(\log(\lambda(t)-\beta(t))), \quad t \to 0+.$$

Наконец, назовем управляющую функцию $\lambda(t)$ уравнения Левнера допустимой, если она обладает свойствами 1 и 2.

Найдем асимптотическое представление разреза, генерируемого допустимым управлением уравнения Левнера.

Теорема 1. *Пусть управляющая функция*

$$\lambda(t)=\sum_{n=1}^{\infty} l_n \sqrt[N]{t^n}, \quad l_1=1, \; N\in\mathbb{N}, \quad N\geq 3, \quad 0\leq t\leq T,$$

в уравнении Левнера генерирует аналитический разрез $\Gamma[0,T]$, $\Gamma[0,T]\subset\mathbb{H}\cup\{0\}$. *Тогда этот разрез имеет касание порядка* $N-2$ *с осью* $\mathbb{R}$ *в точке 0 и справедливо асимптотическое представление*

$$\operatorname{Re}\Gamma(t)=\sqrt[N]{t}+\frac{a\sqrt[N]{t^{N-1}}}{3(N-2)\pi}\log t+o(\sqrt[N]{t^{N-1}\log t}), \quad t\to 0+,$$

$$\operatorname{Im}\Gamma(t)=\frac{a\sqrt[N]{t^{N-1}}}{N-2}+o(\sqrt[N]{t^{N-1}})=\frac{a(\operatorname{Re}\Gamma(t))^{N-1}}{N-2}+o(\sqrt[N]{t^{N-1}}), \quad t\to 0+,$$

где $2a$ *является кривизной кривой* Γ^{N-2} *в точке 0.*

Теорема 1 дает положительный ответ о справедливости гипотезы 3 из [9], в которой предполагается, что управляющая функция, заданная условиями теоремы, генерирует разрез $\Gamma(0,t]$, имеющий в точке 0 касание порядка $(N-2)$ с осью $\mathbb{R}$. При этом следует понимать, насколько обременительно требование допустимости управления. Заметим, что управляющая функция, генерирующая разрез $\sqrt[N-2]{\gamma}$, $N\in\mathbb{N}$, $N\geq 3$, в виде степени дуги окружности γ в $\mathbb{H}$,

$$\gamma[0,t]=\{z=i(1-e^{i\varphi}):0\leq\varphi\leq\varphi_0(t)\}, \quad 0<\varphi_0(t)<\pi,$$

с касанием порядка $(N-2)$, является допустимой, см. [4].

Рассмотрим общие свойства управляющей функции, генерируемого разреза и конформного отображения $g(z,t)$. Аналитический разрез Γ может генерироваться только вещественно аналитической управляющей функцией λ, см. [1], [6]. Следовательно, представление λ в теореме 1 не может быть иным. Для w в аналитическом угле раствора π справедливо асимптотическое представление [5],

$$f(w,t)\sim\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} q_{nm}(w-\alpha(t))^{n+1}\log^m(w-\alpha(t)), \quad q_{00}\neq 0.$$

Обозначение $h(w)\sim\sum_{n=0}^{\infty}A_n\chi_n(w)$ означает, что для любых $N\geq 0$,

$$h(w)=\sum_{n=0}^{N}A_n\chi_n(w)+o(\chi_N(w)), \quad \frac{\chi_{N+1}(w)}{\chi_N(w)}\to 0,$$

где w стремится к 0 произвольно в замыкании $\overline{\mathbb{H}}$ полуплоскости $\mathbb{H}$.

Достаточным условием справедливости свойства 1 является сходимость ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} q_{nm}(\lambda(t)-\alpha(t))^{n+1}\log^m(\lambda(t)-\alpha(t))$$

при $|t| < t_0$ для некоторого $t_0 > 0$. Это условие выполняется, в частности, для степени кругового разреза $\sqrt[N-2]{\gamma[0,t]}$.

Перейдем к формулировке достаточного условия справедливости свойства 2. Для этого предположим, что разрез $\Gamma(0,t]$ параметризуется как функция $s(\tau)$ переменного $\tau \in [-\epsilon_0, 0)$, $\epsilon_0 > 0$, в виде

$$s(\tau) = \frac{-2\pi}{a\log\tau}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_{nk}\tau^k}{\log^n\tau}\right), \quad -\epsilon_0 \le \tau < 0,$$

с $a > 0$ и вещественными коэффициентами c_{nk}, удовлетворяющими следующим условиям:

(1) множество $\{\sqrt[k]{|c_{nk}|} : n \ge 1, k \ge 0\}$ ограничено;

(2) существует $R > 0$ такое, что множество $\{\sqrt[n]{|\sum_{k=0}^{\infty} c_{nk}z^k|} : n \ge 1, \operatorname{Im} z \ge 0, |z| < R\}$ ограничено.

Согласно [8], свойство 2 выполняется для w в аналитическом каспе с граничными аналитическими компонентами $[0, R'] \subset \mathbb{R}$, $R' > 0$, и $\Gamma(0,T]$, допускающей параметризацию $s(\lambda(t) - \beta(t))$, $0 < t \le t_0$, $t_0 > 0$. Вновь заметим, что степень кругового разреза $\sqrt[N-2]{\gamma(0,t]}$ имеет такую параметризацию и потому обладает свойством 2.

Кайзер и Ленер [3] вывели формулу асимптотического поведения конформного отображения f верхней полуплоскости $\mathbb{H}$ на аналитический касп, которая при условиях, отличных от [8], тоже приводит к выводу о справедливости свойства 2 для управляющей функции эволюции Левнера. В принятых обозначениях результат в [3] обеспечивается, если $\Gamma(0,t]$ параметризуется в виде

$$\sigma(\tau) = \tau\exp\left(i\sum_{j=N}^{\infty} a_j\tau^j\right), \quad 0 < \tau < R,$$

с вещественным сходящимся на $[0,R]$ степенным рядом $\sum_{j=N}^{\infty} a_j\tau^j$, который положителен на $(0,R]$.

Наконец, отметим интересный результат в [10], который позволяет переносить асимптотические соотношения между управляющей функцией λ в дифференциальном уравнении Левнера и генерируемым ею разрезом Γ со случая кругового разреза $\Gamma = \gamma$ на случай разреза $\varphi(\gamma)$, где

$$\varphi(z) = \sum_{j=1}^{\infty} b_j z^j, \quad b_1 > 0, \quad b_n \in \mathbb{R}, \quad n \ge 1,$$

а степенной ряд сходится в окрестности точки начала координат. А именно, авторы [10] доказали, что если управляющая функция λ в уравнении Левнера генерирует разрез $\varphi(\gamma)$ с круговым разрезом γ, то

$$\lambda(t) = \sqrt[3]{12\pi b_1 t} + o(\sqrt[3]{t}), \quad t \to 0+.$$

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01229).

Литература

1. Earle C. F., Epstein A. L. *Quasiconformal variation of slit domains* // Proc. Amer. Math. Soc. – 2001. – V. 129. – № 11. – P. 3363–3372. DOI: 10.1090/S0002-9939-01-05991-3.

2. Kaiser T. *Asymptotic behaviour of the mapping function at an analytic cusp with small perturbation of angles* // Comput. Methods Funct. Theory. – 2010. – № 1. – V. 10. – P. 35–47. DOI: 10.1007/BF03321753.

3. Kaiser T., Lehner S. *Asymptotic behaviour of the Riemann mapping function at analytic cusps* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 2017. – V. 42. – P. 3–15. DOI: 10.5186/aasfm.2017.4201.

4. Lau K.-S., Wu H.-H. *On tangential slit solution of the Loewner equation* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. – 2016. – V. 41. – P. 681–691. DOI: 10.5186/aasfm.2016.4142.

5. Lewy H. *Developments at the confluence of analytic boundary conditions* // Univ. California Publ. Math. – 1950. – V. 1. – № 7. – P. 247–280.

6. Marshall D. E., Rohde S. *The Loewner differential equation and slit domains* // J. Amer. Math. Soc. – 2005. – V. 18. – № 4. – P. 763–778. DOI: 10.1090/S0894-0447-05-00492-3.

7. Pommerenke Ch. *Boundary behaviour of conformal maps.* – Berlin: Springer Verlag, 1992. – 300 p.

8. Prokhorov D. *Conformal mapping asymptotics at a cusp* // Rev. Mat. Complut. – 2017. – V. 30. – № 1. – P. 79–89. DOI: 10.1007/s13163-016-0202-5.

9. Prokhorov D. *Harmonic measures of slit sides, conformal welding and extremum problems* // Trends in Mathematics. Complex analysis and dynamical systems. Agranovsky M., Golberg A., Jacobzon F., Shoikhet D., Zalcman L. (Eds.). – Cham: Birkhäuser, 2018. – P. 219–230. DOI: 10.1007/978-3-319-70154-7_12.

10. Wu H.-H., Jiang Y.-P., Dong X.-H. *Perturbation of the tangential slit by conformal maps* // J. Math. Anal. Appl. – 2018. – V. 464. – № 2. – P. 1107–1118. DOI: 10.1016/j.jmaa.2018.04.042.

PARAMETRIC SLIT CHARACTERISTICS IN LOEWNER'S EVOLUTION

D.V. Prokhorov

In the paper, we consider solutions $g(z,t)$ to the chordal Loewner differential equation for which the inverse conformal mappings $f(w,t)=g^{-1}(w,t)$ transfer the upper half-plane onto a half-plane slit along an analytic curve Γ. We study asymptotical connections between $f(w,t)$, Γ and the driving function $\lambda(t)$ in the Loewner equation under small values $t>0$ if Γ is the given order tangential to the real axis. Circular slits and their powers serve as the model curve case. We derive sufficient conditions which allow us to join an asymptotical map representation in the analytic corner of opening π and in the cusp.

Keywords: univalent function, Loewner equation, tangential slit, driving function.

УДК 517.5

О РАЦИОНАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ МАРКОВА ЧАСТИЧНЫМИ СУММАМИ РЯДА ФУРЬЕ-ЧЕБЫШЁВА

Е.А. Ровба[1], П.Г. Поцейко[2]

1 *rovba.ea@gmail.com*; Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, г. Гродно, респ. Беларусь
2 *pahamatby@gmail.com*; Гродненский государственный университет имени Янки Купалы, г. Гродно, респ. Беларусь

Рассматриваются приближения функций Маркова специального вида на отрезке $[-1,1]$ *посредством частичных сумм ряда Фурье по системе рациональных дробей Чебышёва – Маркова. Устанавливаются поточечная и равномерная оценки приближений, асимптотическое выражение равномерной оценки, оптимальное значение параметра, обеспечивающее наибольшую скорость приближений.*

Ключевые слова: функция Маркова, частичные суммы ряда Фурье, дроби Чебышёва – Маркова, асимптотические оценки.

Пусть μ – положительная борелевская мера с компактным носителем $F = \operatorname{supp}\mu \subset \mathbb{R}$. Преобразование Коши меры μ

$$\hat{\mu}(z) = \int\limits_F \frac{d\mu(t)}{t-z}, \quad z \in \mathbb{C}$$

называется *функцией Маркова*. Функция Маркова голоморфна в $\overline{\mathbb{C}}\setminus F$ и рациональная аппроксимация таких функций является хорошо известной классической задачей. Одной из первых работ, посвященных этой тематике является статья А.А. Гончара [1]. Дж. Андерссон [2] нашёл нижние порядковые оценки наилучших рациональных L_p-приближений $\hat{\mu}(z)$ для $p \in (1,+\infty)$ в единичном круге и на отрезке, когда мера μ удовлетворяет следующим условиям: $\operatorname{supp}\mu = [1,a]$, $a > 1$,

$$d\mu(t) = \varphi(t)\,dt \quad \text{и} \quad \varphi(t) \sim (t-1)^{\alpha} \quad \text{при} \quad 1 \le t \le a,$$

где $\alpha > -1/p$. А. А. Пекарский [3] получил верхние порядковые оценки наилучших равномерных рациональных приближений функций Маркова при аналогичных условиях на меру μ. Дальнейшее развитие данная проблематика нашла в работах многих авторов (см., например, [4]- [6]).

В данной работе рассматривается аппроксимация функций Маркова на отрезке $[-1,1]$ частичными суммами ряда Фурье по одной системе рациональных дробей Чебышёва – Маркова с двумя геометрически различными полюсами. Найдено интегральное представление для погрешности приближений, а при условиях, когда мера $\mu^{'}(t) \sim t^{\gamma}$, $0 < \gamma < 2$, получена оценка погрешности приближений на отрезке $[-1,1]$ в зависимости от положения точки x, равномерная оценка и её асимптотическое выражение. Найдено значение параметра, при котором обеспечивается наилучшая скорость приближений.

Как известно [7], алгебраическая косинус-дробь Чебышёва – Маркова на отрезке $[-1,1]$ с двумя геометрически различными комплексно - сопряжёнными мнимыми полюсами имеет вид

$$M_n(x) = \cos n \arccos x \sqrt{\frac{1+p^2}{1+p^2x^2}}, \quad x \in [-1,1],\ p \geq 0, \quad n = 0,1,\ldots,$$

и при $p = 0$ представляет собой классический полином Чебышёва первого рода. Система рациональных дробей является ортогональной на отрезке $[-1,1]$ с весом

$$\rho(x,p) = \frac{\sqrt{1+p^2}}{(1+p^2x^2)\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1,\ p \geq 0.$$

Функции $f(x)$, абсолютно суммируемой с весом $\rho(x,p)$ на отрезке $[-1,1]$, поставим в соответствие ряд Фурье по системе рациональных дробей Чебышёва – Маркова

$$f(x) \sim \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n M_n(x), \quad c_n = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} f(t) M_n(t) \rho(t,p)\, dt, \quad n = 0,1,\ldots. \tag{1}$$

Для частичных сумм ряда (1) чётной функции $f \in C[-1,1]$ имеет место представление

$$s_{2n}(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\cos v)\frac{\sin[(2n+1)\varphi(u,v)]}{\sin\varphi(u,v)}\lambda(v)\,dv, \quad x = \cos u, \tag{2}$$

где

$$\lambda(y) = \frac{1-\alpha^4}{1+2\alpha^2\cos 2y+\alpha^4}, \quad \varphi(u,v) = \int_u^v \lambda(y)\,dy,\ x = \cos u,\ \alpha \in [0,1).$$

В дальнейшем будем рассматривать голоморфные функции, представимые в виде интеграла Стилтьеса с компактным носителем

$$\hat{\mu}(x) = \int_F \frac{t\,d\mu(t)}{t^2+x^2}, \quad F = \operatorname{supp}\mu \subset [0,+\infty), \tag{3}$$

где $\mu(t)$ – ограниченная неубывающая функция, принимающая бесконечно много различных значений. Предполагается также, что

$$\int_F \frac{d\mu(t)}{t} < \infty. \tag{4}$$

Изучим приближения частичными суммами (1) функции $\hat{\mu}(x)$, определённой в (3). С этой целью введём обозначения

$$\varepsilon_{2n}(x,\alpha) = \hat{\mu}(x) - s_{2n}(\hat{\mu}(x),x), \quad x \in [-1,1], \tag{5}$$

$$\varepsilon_{2n}(\alpha) = \left\|\hat{\mu}(x) - s_{2n}(\hat{\mu}(x),x)\right\|_{C[-1,1]}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Теорема 1. *Пусть мера* μ *удовлетворяет условию* (4), *а мера* ν *определяется соотношением*

$$d\nu(y) = \frac{4y^2}{1+y^2}d\mu(\varphi(y)), \quad \varphi(y) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y} - y\right),\ 0 < y < 1.$$

Тогда для погрешности приближений (5) *при* $x \in [-1,1]$ *имеет место равенство*

$$\varepsilon_{2n}(x,\alpha) = (-1)^{n+1} \int \sqrt{\frac{1+2\alpha^2\cos 2u+\alpha^4}{1+2y^2\cos 2u+y^4}} \frac{y\cos\psi_n(x,y,\alpha)}{1-\alpha^2y^2} \chi_n(y)\, d\nu(y), \quad x = \cos u, \tag{7}$$

где $\alpha \in [0,1)$,

$$\psi_n(x,y,\alpha) = \arg\pi_n(\xi) + \arg\frac{(\xi^2+y^2)(\xi^2+\alpha^2)}{\xi^2}, \quad \chi_n(y) = \left(\frac{y^2-\alpha^2}{1-\alpha^2y^2}\right)^n, \xi = \mathrm{e}^{iu}.$$

Следствие. *В условиях теоремы 1 равномерно при* $x \in [-1,1]$, $x = \cos u$ *справедливо неравенство*

$$|\varepsilon_{2n}(x,\alpha)| \le \varepsilon_{2n}(\alpha) \le \left\| \int \sqrt{\frac{1+2\alpha^2\cos 2u+\alpha^4}{1+2y^2\cos 2u+y^4}} |\chi_n(y)| \frac{y\, d\nu(y)}{1-\alpha^2y^2} \right\|_{C[-1,1]},$$

где $\varepsilon_{2n}(\alpha)$ *из* (6).

При исследовании приближений функций Маркова часто рассматривается случай, когда мера $\mu(t)$ слабо эквивалентна степенной функции. Такой случай изучается нами далее.

Теорема 2. *Пусть* $\operatorname{supp}\nu \in [a,1]$, $0 \le a < 1$ *и* $\mu'(t) \sim t^\gamma$, $0 < \gamma < 2$. *Тогда в условиях теоремы 1:*

1) для погрешности приближений функций Маркова на отрезке $[-1,1]$ *частичными суммами ряда Фурье-Чебышёва* (5) *справедливо неравенство:*

$$|\varepsilon_{2n}(x,\alpha)| \le \frac{1}{2^{\gamma-1}} \int_a^1 \sqrt{\frac{1+2\alpha^2\cos 2u+\alpha^4}{1+2t^2\cos 2u+t^4}} \frac{(1-t^2)^\gamma}{t^{\gamma-1}} \frac{|\chi_n(t)|dt}{1-\alpha^2t^2}, \; x = \cos u, \; x \in [-1,1], \tag{8}$$

2) имеет место равномерная оценка:

$$\varepsilon_{2n}(\alpha) \le \varepsilon^*_{2n}(\alpha), \tag{9}$$

где

$$\varepsilon^*_{2n}(\alpha) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\gamma-1}} \left[I_1(\alpha,n) + I_2(\alpha,n)\right], & 0 \le a < \alpha < 1, \\ \dfrac{1}{2^{\gamma-1}} I_1(\alpha,n), & 0 \le \alpha \le a < 1, \end{cases} \tag{10}$$

$$I_1(\alpha,n) = (1-\alpha^2)\int_\alpha^1 \left(\frac{1-t^2}{t}\right)^{\gamma-1} \frac{\chi_n(t)\,dt}{1-\alpha^2t^2}, \quad I_2(\alpha,n) = (1+\alpha^2)\int_a^\alpha \frac{(1-t^2)^\gamma}{(1+t^2)t^{\gamma-1}} \frac{|\chi_n(t)|\,dt}{1-\alpha^2t^2}.$$

Неравенство (8) *является точным в том смысле, что если полюсы имеют чётную кратность, то равенство достигается в точке* $x = 0$, *а также при* $x = \pm 1$.

Рассмотрим здесь также полиномиальный случай. Положив в соотношениях (8) и (9) значение $\alpha = 0$, получим поточечную и равномерную оценки погрешности приближений функции (3) частичными суммами ряда Фурье по системе многочленов Чебышёва первого рода при условии, что мера удовлетворяет условию в теореме 2. Тогда,

$$|\varepsilon_{2n}(x)| \leq \frac{1}{2^{\gamma-1}} \int_a^1 \frac{(1-t^2)^{\gamma-1}}{\sqrt{1+2t^2\cos 2u+t^4}} t^{2n-\gamma-1}\, dt, \quad x=\cos u,\ x\in[-1,1],$$

$$\varepsilon_{2n} = \max_{x\in[-1,1]} |\varepsilon_{2n}(x)| \sim \frac{\Gamma(\gamma)}{(2n)^\gamma}, \quad n\to\infty,$$

где $\Gamma(\gamma)$ - гамма - функция Эйлера. В полиномиальном случае ограничения на параметр γ снимаются в предположении, что $n+1>\gamma/2$.

Получим асимптотическое выражение правой части оценки (9) при $n\to\infty$.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия теоремы 2. Тогда при $n\to\infty$ для величины $\varepsilon^*_{2n}(\alpha)$, определяемой соотношением* (10)*, справедливы асимптотические тождества:*

$$\varepsilon^*_{2n}(\alpha) \sim \begin{cases} \left(\dfrac{\beta}{2n}\right)^\gamma \Gamma(\gamma) + \dfrac{A^\gamma}{2}\dfrac{A-\beta}{\beta n(\sqrt{1-A^2})^\gamma} \mathrm{e}^{-2\beta n/A}, & 0\leq a\leq\alpha<1,\\ \left(\dfrac{\beta}{2n}\right)^\gamma \Gamma(\gamma), \quad 0\leq\alpha\leq a<1, \end{cases}$$

где $\beta=(1-\alpha^2)/(1+\alpha^2)$, $\alpha\in[0,1)$, $A=(1-a^2)/(1+a^2)$.

Представляет интерес минимизировать правую часть последнего соотношения посредством выбора оптимального для этой задачи параметра $\beta=\beta^*$, другими словами, искать оценку наилучшего равномерного приближения функций Маркова в условиях на меру $\mu(t)$ частичными суммами (3). С этой целью положим

$$\varepsilon_{2n} = \inf_{\alpha\in[0,1)} \varepsilon_{2n}(\alpha), \quad \varepsilon^*_{2n} = \inf_{\alpha\in[0,1)} \varepsilon^*_{2n}(\alpha).$$

Теорема 4. *В условиях теоремы 2 справедливы соотношения*

1. $\varepsilon^*_{2n} \sim \left(\dfrac{A\gamma}{2}\right)^\gamma \Gamma(\gamma) \left(\dfrac{\ln n}{n^2}\right)^\gamma, \quad n\to\infty,$

2. $\varepsilon_{2n} \sim \left(\dfrac{A\gamma}{2}\right)^\gamma \Gamma(\gamma) \left(\dfrac{\ln n}{n^2}\right)^\gamma, \quad n\to\infty,\ n$ *– чётное.*

Литература

1. Гончар А. А. *О скорости рациональной аппроксимации некоторых аналитических функций* // Матем. сб. – 1978. – Т. 105(147). – № 2. – С. 147–163.

2. Andersson J. -E. *Best Rational Approximation to Markov Functions* // Journal of approximation theory. – 1994. – Vol. 76. – Issue 2. – P. 219–232.

3. Пекарский А. А. *Наилучшие равномерные рациональные приближения функций Маркова* // Алгебра и анализ. – 1995. – Т. 7. – № 2. – С. 121–132.

4. Baratchart L., Stahl H., Wielonsky F. *Asymptotic Error Estimates for L2 Best Rational Approximants to Markov Functions* // Journal of Approximation Theory. – 2001. – Vol. 108. – Issue 1. – P. 53–96.

5. Vyacheslavov N. S., Mochalina E. P. *Rational approximations of functions of Markov – Stieltjes type in Hardy spaces H_p, $p\in(0,+\infty)$* // Moscow University Mathematics Bulletin. – 2008. – Vol. 63. – Issue 4. – P. 125–134.

6. Пекарский А. А., Ровба Е. А. *Равномерные приближения функций Стилтьеса посредством ортопроекции на множество рациональных функций* // Матем. заметки. – 1999. – Т. 65. – № 3. – С. 362–368.

7. Rouba Y., Patseika P., Smatrytski K. *On a system of rational Chebyshev – Markov fractions* // Analysis Math. – 2018. – Vol. 44. – Issue 1. – P. 115–140.

ON RATIONAL APPROXIMATION OF MARKOV FUNCTIONS
BY PARTIAL SUMS OF A FOURIER-CHEBYSHEV SERIES

Y.A. Rovba, P.G. Potseiko

On the segment $[-1,1]$*, approximation of Markov functions of a special type by partial sums of Fourier seriesis by the system of Chebyshev-Markov rational fractions is considered. Pointwise and uniform estimates of approximations, asymptotic expression of uniform estimate, and optimal value parameter providing the highest rate of approximations are established. Examples of approximations of individual functions are given.*

Keywords: Markov functions, partial sums of a Fourier series, Chebyshev – Markov fractions, asymptotics estimates.

УДК 517.53

КРАТНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ В КЛАССАХ И.И. ПРИВАЛОВА В КРУГЕ

Е.Г. Родикова[1], В.А. Беднаж[2]

1 *evheny@yandex.ru*; Брянский государственный университет имени акад. И. Г. Петровского
2 *vera.bednazh@mail.ru*; Брянский государственный университет имени акад. И. Г. Петровского

В работе решена задача интерполяции на множестве кратных узлов в классах И.И. Привалова Π_q $(q>1)$ *в круге.*

Ключевые слова: интерполяция, кратные узлы, классы Привалова, аналитические функции.

Пусть $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость, D – единичный круг на $\mathbb{C}$, $H(D)$ – множество всех функций, аналитических в D. При всех $0<q<+\infty$ определим класс И.И. Привалова Π_q:

$$\Pi_q = \left\{ f \in H(D) : \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\ln^+ |f(re^{i\theta})| \right)^q d\theta < +\infty \right\}.$$

Отметим, что классы Π_q при $q>1$ были введены И.И. Приваловым в [5]. Исследованию некоторых свойств этих пространств посвящена монография В.И. Гаврилова, А.В. Субботина, Д.А. Ефимова [2]. Если $q=1$, класс Привалова совпадает с хорошо известным в научной литературе классом Р. Неванлинны (см., например, [4]). Случай $0<q<1$ в научной литературе изучен мало.

В данной работе исследуется вопрос интерполяции на множестве кратных узлов в классах Π_q $(q>1)$. Сформулируем задачу кратной интерполяции в классе Привалова: пусть $\{z_k\}_1^\infty$ и $\{w_k\}_1^\infty$ – произвольные последовательности комплексных чисел из D; обозначим через p_j – кратность появления числа z_j во всей последовательности $\{z_k\}_1^\infty$, $s_j \geq 1$ – кратность появления числа z_j на отрезке $\{z_k\}_1^j$. Очевидно, что $1 \le s_j \le p_j \le +\infty$. При каких условиях, налагаемых на рост $\{z_k\}$ и распределение точек w_k, можно построить функцию из класса Π_q, такую что

$$f^{(s_k-1)}(z_k) = w_k,\ k = 1,2,\ldots? \tag{1}$$

Последовательность $\{z_k\}$ в этом случае называют *интерполяционной.* В том случае, если $s_k = 1$, интерполяция осуществляется на множестве простых узлов $\{w_k\}$.

Отметим, что аналогичная задача в классах аналитических функций с ограничениями на характеристику Р. Неванлинны решалась в работах [1], [6], [7]. Фундаментальный результат в теории интерполяции принадлежит Л. Карлесону (см. [8]). Задача интерполяции при условии равномерной разделенности простых узлов в классах Π_q $(q > 1)$ решена в работе [9].

Обозначим через $B(z)$ произведение Бляшке с нулями в точках последовательности $\{z_k\} \subset D$, т.е.

$$B(z) = \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{\overline{z}_k}{|z_k|} \cdot \frac{z_k - z}{1 - \overline{z}_k z},$$

$B_k(z)$ — произведение Бляшке без k-го фактора. Хорошо известно, что произведение $B(z)$ сходится абсолютно и равномерно в D тогда и только тогда, когда выполняется условие Бляшке

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (1 - |z_k|) < +\infty.$$

Углом Штольца $\Gamma_\delta(\theta)$ с вершиной в точке $e^{i\theta}$ называется угол раствора $\pi\delta$, $0 < \delta < 1$, биссектриса которого совпадает с отрезком $re^{i\theta}$, $0 \le r < 1$.

Последовательность комплексных чисел $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset D$, удовлетворяющая условию Бляшке, а также условиям

$$|B_k(z_k)| \ge \exp \frac{-\mu(k)}{(1 - |z_k|)^{\frac{1}{q}}},$$

для всех $1 < q < +\infty$, где $\mu(k) > 0$, $\mu(k) = o(1)$, $k \to +\infty$,

$$\sup_{k \ge 1}\{p_k\} < +\infty,$$

отнесем к классу $\widetilde{\Delta}$.

Для заданной последовательности $\{z_k\} \subset D$ и фиксированного $1 < q < +\infty$ обозначим через $\tilde{l}^q(z_k)$ пространство последовательностей $\{w_k\} \subset D$, для которых

$$\ln^+ |w_k| = o\left((1 - |z_k|)^{-1/q}\right),\ k \to +\infty,$$

т.е.

$$|w_k| = \exp \frac{\mu_1(k)}{(1 - |z_k|)^{1/q}}, \tag{2}$$

$\mu_1(k) > 0$, $\mu_1(k) = o(1)$, $k \to +\infty$.

Отметим, что класс $\tilde{l}^q$, а вместе с ним и выражение (2) являются естественными для решения интерполяционной задачи в классах И.И. Привалова Π_q $(q > 1)$, ввиду справедливости следующей теоремы:

Теорема 1. (см. [2], с. 40). *Если* $f \in \Pi_q\,(q > 1)$, $M(r, f) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$, $z \in D$, *то*

$$\ln^+ M(r, f) = o\left(\frac{1+r}{1-r}\right)^{1/q}, \quad r \to 1-0,$$

причем данная оценка является точной.

Основным результатом работы является доказательство следующего утверждения:

Теорема 2. *Пусть* $1 < q < +\infty$; $\{z_k\}_{k=1}^{+\infty}$ *– произвольная последовательность комплексных чисел из* D*, расположенных в конечном числе углов Штольца:*

$$\{z_k\}_1^\infty \subset \bigcup_{s=1}^{n} \Gamma_\delta(\theta_s)$$

при некотором $0 < \delta < 1$.

Если $\{z_k\}_1^\infty \in \widetilde{\Delta}$*, то для любой последовательности* $\{w_k\}_1^\infty \in \tilde{l}^q(z_k)$ *можно построить в явном виде функцию* $f \in \Pi_q\,(q > 1)$*, являющуюся решением интерполяционной задачи* (1) *при всех* $s_k \geq 1$.

Отметим, что при доказательстве теоремы использовались методы работ [3] и [7].

Первый автор поддержан Российским фондом фундаментальных исследований (проект 18-31-00180 мол-а).

Литература

1. Беднаж В. А. *Описание следов, характеризация главных частей в разложении Лорана классов мероморфных функций с ограничениями на рост характеристики Р. Неванлинны*: автореф. дис ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.01. — СПб. —2007. — 16 с.

2. Гаврилов В.И., Субботин А.В., Ефимов Д.А. *Граничные свойства аналитических функций (дальнейший вклад)*. — М.: Изд-во Московского ун-та, 2012. — 264 с.

3. Джрбашян М.М. *Базисность некоторых биортогональных систем и решение кратной интерполяционной задачи в классах* H^p *в полуплоскости* // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1978. — Т. 42. – 6. —С. 1322—1384.

4. Неванлинна Р. *Однозначные аналитические функции.* — М.-Л.: ГИТТЛ, 1941. — 388 с.

5. Привалов И. И. *Граничные свойства однозначных аналитических функций* — М.: Изд. МГУ, 1941. — 206 с.

6. Родикова Е.Г. *О кратной интерполяции в классе аналитических в единичном круге функций с характеристикой Неванлинны из Lp-пространств* // Сиб. электрон. матем. изв. — 2017. — Вып. 14. — С. 264—273.

7. Bednazh V.A., Rodikova E.G., Shamoyan F.A. *Multiple interpolation and principal parts of a Laurent series of meromorphic functions in the unit disk with power growth of the Nevanlinna characteristic* // Complex Analysis and Operator Theory. — 2017. — V. 11. — Issue 1. — P.197–215.

8. Carleson L. *An interpolation problem for bounded analytic functions* // Amer. J. Math. – 1958. – Issue 80. – P. 921–930.

9. Mestrovic R., Susic J. *Interpolation in the spaces* $N^p(1 < p < +\infty)$ // Filomat. – 2013. – V. 27. – 2. – P. 291–299.

MULTIPLE INTERPOLATION FOR THE PRIVALOV SPACES IN A DISK

E.G. Rodikova, V.A. Bednazh

The problem of interpolation on the set of multiple nodes for the Privalov classes of analytic functions in the unit disk is solved.

Keywords: interpolation, multiple nodes, the Privalov spaces, analytic functions.

УДК 512.643

ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ МАТРИЦЫ ИЗМЕРЕНИЙ С МАЛЫМИ ПО ВЕЛИЧИНЕ ЭЛЕМЕНТАМИ

К.С. Рютин[1]

1 *kriutin@yahoo.com*; Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

В работе обсуждается возможность построения целочисленных матриц измерений с малыми элементами и оценивается скорость работы алгоритмов восстановления.

Ключевые слова: восстановление векторов, целочисленные матрицы измерений.

Рассматривается задача восстановления целочисленного разреженного вектора по малому числу линейных измерений, тесно связанная с теорией сжатых измерений (см., например, [1]). Проблематику восстановления векторов по линейным измерениям, задаваемым целочисленными матрицами, вероятно, первыми рассмотрели Л. Фукшански, Д. Ниделл и Б. Судаков в [2].

Зафиксируем обозначения и дадим некоторые определения. Рассматривается уравнение $y = Ax$, где A — целочисленная $m \times d$ матрица (мы будем называть её матрицей измерений). Под $|A|$ понимается максимальный из модулей элементов матрицы $A = (a_{ij})$, вектор x предполагается *s–разреженным*, то есть его носитель имеет мощность s, а $M = \max|x_j|$. Основные вопросы таковы: когда можно построить целочисленную $m\times d$ матрицу A такую, что любой s–разреженный вектор $x \in \mathbb{Z}^d$ может быть однозначно восстановлен по вектору Ax ? Такую матрицу будем называть хорошей (или s–хорошей). Насколько малыми можно сделать элементы такой матрицы? Представить алгоритм восстановления и оценить его сложность.

Опишем известные результаты: в [2] показано, что для матрицы из $A \in \mathbb{Z}^{m\times d}$, у которой $|A| \le k$, а все $(m \times m)$-подматрицы имеют полный ранг необходимым образом выполняется условие $d = O(k^2 m)$. Подобные матрицы обеспечивают однозначность восстановления векторов при $s \le m/2$. Существование таких матриц авторами [2] доказано при $d = \Omega(\sqrt{k}m)$. Данные результаты были существенно улучшены в работах [3], [5]. Точнее, в [5] доказано, что при больших k для существования указанной выше матрицы необходимо, чтобы $d \le 100k\sqrt{\log k}m$ при $m \ge \log k$ и $d \le 400k^{m/(m-1)}m^{3/2}$ при $2 \le m < \log k$. Из известных гипотез относительно свойств случайных матриц следует, что при $m \ge \log k$ эта оценка близка к оптимальной. Кроме того, в работе С.В. Конягина и Б. Судакова [5] предложена весьма естественная конструкция матрицы A с $|A| \le k$, у которой все $(m \times m)$-подматрицы имеют полный ранг в предположениях $m < d \le \max(k+1, k^{m/(m-1)}/2$. Вопрос об эффективном алгоритме восстановления фактически не рассматривался. Пусть $\Phi = \Phi_{m\times p}$ — матрица из элементов $\phi_{ij} \in \mathbb{Z}$, где $\phi_{ij} = k_j j^{i-1} \pmod{p}, 1 \le j \le p, 1 \le i \le m$, p – простое число и $m \le p$, k_j – фиксированные целые числа $1 \le k_j < p$ (тем самым, зафиксирован некоторый представитель класса вычетов для каждого элемента матрицы). Именно такая конструкция рассматривалась в [5], при этом элементы выбирались так, чтобы $|\phi_{ij}| \le p^{1-1/m}$. Мы хотим восстановить вектор $x \in \mathbb{Z}^p$, с s ненулевыми координатами ($s \le m/2$) по данному вектору $y = (y_0, \ldots, y_{m-1}) = \Phi x \in \mathbb{Z}^m$.

Мы не знаем значение s и оценку трудоемкости алгоритма проводим в терминах $m, p, M = \max|x_j|$. Известно, что за $O(t^\omega)$ операций в конечном поле F можно решить заданную систему $t \times t$ линейных неоднородных уравнений, где наилучшее известное на сегодня $\omega < 2.4$. В [4] доказана

Теорема. *Существует детерминированный алгоритм, позволяющий находить по вектору y вектор x за $O(m^\omega \log_p M + m^{2+o(1)} p^{1/2+o(1)})$ арифметических операций в поле $\mathbb{F}_p$ и за $O(m^2 \log_p M)$ операций в кольце $\mathbb{Z}$. При этом в $\mathbb{Z}$ вычисления производятся с числами не большими по модулю, чем $\max\{Mp, \max_j |y_j| + mp^{1-1/m}\}$.*

Возникает естественное желание построить хорошие матрицы измерений с как можно меньшими по величине элементами. Этому вопросу посвящен препринт [6]. Например, булевы матрицы. Оказывается, имеется простая конструкция, которая по заданной $m \times d$ целочисленной матрице A и числу $z \in \mathbb{N}, 2 \le z < |A|$ строит $(mr) \times d$ матрицу $\tilde{A}$ с $|\tilde{A}| < z$, где $r = [\log_z |A|] + 1$. При этом справедливо (см. [6])

Предложение 1. *Пусть дана целочисленная $m \times d$ матрица A и алгоритм восстановления, который находит любой целочисленный вектор $x \in \mathbb{Z}^d$ с носителем размера не более s по известному Ax. Тогда имеется и алгоритм, позволяющий восстанавливать вектор x по $\tilde{y} = \tilde{A}x$ и при этом трудоемкость возрастает на $O(mr)$ арифметических операций в $\mathbb{Z}$ с числами, не превосходящими $\|\tilde{y}\|_\infty |A|$.*

Следствие. *При больших N и любом $s \le c_1 N/\log N$ существует булева $(c_2 s \log N) \times N$ матрица с однозначным восстановлением любых векторов из $\mathbb{Z}^N$ с носителем мощности не более s.*

Кроме того, с применением обобщения конструкции матрицы Φ на случай поля $\mathbb{F}_{p^r}$ удалось показать, что выполнено (см. [6])

Предложение 2. *Для любого простого числа p и чисел $r, s \in \mathbb{N}, s < p^r/2$ существует целочисленная матрица Φ размера $(r(2s-1)+1) \times p^r$ с элементами из $\{0, \pm 1, \ldots, \pm\frac{p-1}{2}\}$ при $p > 2$ и $\{0, 1\}$ при $p = 2$, для которой по вектору $y = \Phi x$ однозначно определяется вектор x с носителем мощности не более s.*

Интерес представляет случай $r(2s-1)+1 < p^r$ (количество измерений меньше размерности). Тем самым, $s < \frac{p^r-1}{2r} + \frac{1}{2}$.

Ещё один класс примеров хороших матриц измерения даёт вероятностная конструкция. Пусть $\Lambda_k(m \times d)$ случайная $(m \times d)$-матрица, все элементы которой — независимые одинаково распределенные случайные величины принимающие равновероятно значения из $\{-k, \ldots, k\}$. Такая конструкция рассматривалась в [2], где показано, что для достаточно больших m и $d = 1{,}2938m$ существует реализация A случайной матрицы Λ_1, для которой $|A| = 1$ и она будет хорошей при $s \le m/2$. При больших k авторы доказывают (с помощью Λ_k) существование хороших матриц при $s \le m/2, d = \Omega(\sqrt{k}m)$. Оказывается справедливо (см. [6])

Предложение 3. *При фиксированном k (и больших s) для $m > cs\log_k(ed/s)$ некоторая реализация случайной матрицы $\Lambda_k(m \times d)$ будет s–хорошей.*

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта правительства РФ (проект 14.W03.31.0031).

Литература

1. Foucart S., Rauhut H. *A Mathematical Introduction to Compressive Sensing.* – New York: Springer–Birkhauser, 2013. – 634 p.

2. Fukshansky L., Needell D., Sudakov B. *An algebraic perspective on integer sparse recovery* // Appl. Mathem. and Comp. – 2019. – V. 340. – P. 31–42.

3. Конягин С.В. *О восстановлении целочисленного вектора по линейным измерениям* // Матем. заметки. – 2018. – Т. 104. – Вып. 6. – С. 863–871.

4. Ryutin K.S. *The algorithm for the recovery of integer vector via linear measurements*, 2019. – https://arxiv.org/abs/1905.02687

5. Konyagin S.V., Sudakov B. *An extremal problem for integer sparse recovery*, 2019. – https://arxiv.org/abs/1904.08661.

6. Рютин К.С. *Целочисленные матрицы измерения с малыми элементами, обеспечивающие восстановление векторов*. – Матем. заметки. – 2019 (подано в печать).

MEASUREMENT MATRICES OF INTEGERS WITH SMALL ELEMENTS

K.S. Ryutin

In this paper, we discuss constructions of measurement matrices of integers with small elements and give estimates for the complexity of the recovery algorithms.

Keywords: recovery of vectors, measurement matrices of integers.

УДК 517.95

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА И СВЯЗЬ С ПРОБЛЕМОЙ ФЕРМА

К.Б. Сабитов[1]

1 *sabitov_fmf@mail.ru*; Стерлитамакский филиал БашГУ, Стерлитамакский филиал Института стратегических исследований РБ

В работе для различных классов уравнений гиперболического типа в прямоугольных областях изучена первая граничная задача. Установлен критерий единственности. Решение построено в виде суммы ортогональных рядов. При обосновании сходимости ряда возникает проблема малых знаменателей от одной и двух переменных. Установлены оценки об отделенности от нуля с соответствующей асимптотикой, что позволило доказать сходимость рядов в классе регулярных решений и устойчивость решения относительно граничных функций.

Ключевые слова: волновое уравнение, волновое уравнение высоких порядков, задача Дирихле, критерий единственности, существование, ряд, малые знаменатели, устойчивость.

1. Задача Дирихле для уравнения струны

Исследование вопросов неустойчивых колебаний (резонансов колебаний в жидкости в тонкостенных баках ракет с собственными колебаниями) тесно связано с задачей Дирихле для волнового уравнения. Эта задача изучалась многими математиками (см. [1, 2]). Вначале рассмотрим задачу Дирихле для уравнения струны

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \tag{1.1}$$

в прямоугольной области $G = \{(x,t)|\, 0 < x < l, 0 < t < T\}$, $l, T > 0$.

Задача Дирихле. *Найти в области G решение уравнения* (1.1) *из класса $C^2(G) \cap C(\overline{G})$, удовлетворяющее граничным условиям*

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{1.2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u(x,T) = \psi(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{1.3}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$– заданные достаточно гладкие функции, при этом $\varphi(0) = \varphi(l) = \psi(0) = \psi(l) = 0$.

Теорема 1.1. *Если существует решение задачи* (1.1) – (1.3)*, то оно единственно только тогда, когда $\sin \alpha\pi m \ne 0$ при всех $m \in \mathbb{N}$, т.е. когда отношение сторон $T/l = \alpha$ прямоугольника G является иррациональным числом.*

Перейдем к обоснованию существования решения задачи (1.1) – (1.3). Пусть при всех $m \in \mathbb{N}$ выполнено условие $\sin \alpha\pi m \ne 0$. Тогда решение задачи Дирихле можно определить в виде суммы ряда Фурье

$$u(x,t) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{m=1}^{+\infty} u_m(t) \sin \mu_m x, \tag{1.4}$$

где

$$u_m(t) = \varphi_m \cos \mu_m t + \frac{\psi_m - \varphi_m \cos \alpha\pi m}{\sin \alpha\pi m} \sin \mu_m t,$$

$$\varphi_m = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \varphi(x) \sin \mu_m x\, dx,$$

$$\psi_m = \sqrt{\frac{2}{l}} \int_0^l \psi(x) \sin \mu_m x\, dx.$$

Теорема 1.2. *Если число $\alpha = T/l$ является алгебраическим числом степени $n > 2$ и функции $\varphi(x)$, $\psi(x) \in C^5[0,l]$, $\varphi^{(j)}(0) = \varphi^{(j)}(l) = 0$, $\psi^{(j)}(0) = \psi^{(j)}(l) = 0$, $j = 0,2,4$, то существует единственное решение задачи* (1.1) – (1.3) *и оно определяется рядом* (1.4).

Теорема 1.3. *Если число α имеет ограниченные элементы и функции $\varphi(x)$, $\psi(x) \in C^4[0,l]$, $\varphi^{(j)}(0) = \varphi^{(j)}(l) = \psi^{(j)}(0) = \psi^{(j)}(l) = 0$, $j = 0,2$, то существует единственное решение задачи* (1.1) – (1.3) *и оно определяется рядом* (1.4).

Замечание. Отметим, что в работе [3, § 14] доказана однозначная разрешимость задачи Дирихле для уравнения струны для всех чисел $\mu = \frac{T}{T+l}$, удовлетворяющих неравенству

$$\left|\mu - \frac{m}{n}\right| > \frac{K}{n^3}$$

при любых $m, n \in \mathbb{N}$ и некотором $K = const > 0$, методом теории отображений.

2. Задача Дирихле для двумерного уравнения гиперболического типа высокого порядка

Рассмотрим уравнение в частных производных

$$Lu = \frac{\partial^{2p} u}{\partial t^{2p}} - \frac{\partial^{2p} u}{\partial x^{2p}} = f(x,t) \tag{2.1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,t) |\ 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$, где l, T – заданные положительные числа, $p \in \mathbb{N}$, и поставим следующую задачу.

Задача Дирихле. *Найти функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую условиям:*

$$u \in C^{2p-1}(\overline{D}) \cap C^{2p}(D), \tag{2.2}$$

$$Lu(x,t) \equiv f(x,t), \quad (x,t) \in D, \tag{2.3}$$

$$\left.\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}}\right|_{x=l} = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{2.4}$$

$$\left.\frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}}\right|_{t=0} = 0, \quad 0 \le x \le l, \tag{2.5}$$

$$\left.\frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}}\right|_{t=T} = 0, \quad 0 \le x \le l, \quad k = \overline{0, p-1}. \tag{2.6}$$

Теорема 2.1. *Если существует решение задачи* (2.2) – (2.6)*, то оно единственно только тогда, когда отношение сторон $\alpha = T/l$ прямоугольника D является иррациональным числом.*

Решение задачи (2.2) – (2.6) строится в виде суммы двойного ряда

$$u(x,t) = \frac{2}{\sqrt{lT}} \sum_{m,n=1}^{+\infty} u_{mn} \sin\frac{\pi m}{l} x \sin\frac{\pi n}{T} t. \tag{2.7}$$

Теорема 2.2. *Если число $\alpha > 0$ является иррациональным алгебраическим числом степени $n \ge 2$ и функция $f(x,t) \in C^{2p+5}(\overline{D})$,*

$$f_x^{(i)}(0,t) = f_x^{(i)}(l,t) = \begin{cases} 0, & i = 0,2,\dots,p+1, \quad \textit{когда} \;\; p+3 - \textit{четное}, \\ 0, & i = 0,2,\dots,p+2, \quad \textit{когда} \;\; p+3 - \textit{нечетное}, \end{cases}$$

$$f_t^{(j)}(x,0) = f_t^{(j)}(x,T) = \begin{cases} 0, & j = 0,2,\dots,p+1, \quad \textit{когда} \;\; p+2 - \textit{нечетное}, \\ 0, & j = 0,2,\dots,p, \quad \textit{когда} \;\; p+2 - \textit{четное}, \end{cases}$$

то существует единственное решение задачи (2.2) – (2.6)*, которое определяется рядом* (2.7).

3. Задача Дирихле для трехмерного уравнения гиперболического типа второго порядка

Рассмотрим уравнение колебаний мембраны

$$Lu \equiv u_{tt} - a^2(u_{xx} + u_{yy}) + bu = 0 \tag{3.1}$$

в прямоугольном параллелепипеде

$$Q = \{(x, y, t) | (x, y) \in D, 0 < t < T\},$$

с основанием

$$D = \{(x, y) | 0 < x < p, 0 < y < q\},$$

a, p, q и T – заданные положительные действительные числа, и b – любое заданное действительное число, и поставим первую граничную задачу.

Задача Дирихле. *Найти функцию $u(x, y, t)$, удовлетворяющую следующим условиям:*

$$u(x, y, t) \in C^1(\overline{Q}) \cap C^2(Q); \tag{3.2}$$

$$Lu(x, y, t) \equiv 0, \quad (x, y, t) \in Q; \tag{3.3}$$

$$u(x, y, t)\big|_{x=0} = u(x, y, t)\big|_{x=p} = u(x, y, t)\big|_{y=0} = u(x, y, t)\big|_{y=q} = 0; \tag{3.4}$$

$$u(x, y, t)\big|_{t=0} = \tau(x, y), \;\; u(x, y, t)\big|_{t=T} = \psi(x, y), \;\; (x, y) \in \overline{D}, \tag{3.5}$$

где $\tau(x, y)$ и $\psi(x, y)$ – заданные достаточно гладкие функции, удовлетворяющие условиям согласования с граничными условиями (3.4).

Если задача Дирихле для одномерного волнового уравнения в прямоугольной области изучена достаточно полно [4], [5, с. 112–118], то эта задача для многомерного волнового уравнения практически не исследована. Только работы Р. Денчева [6, 7] посвящены задаче Дирихле для уравнения (3.1) при $b = 0$, $a = 1$ с ненулевой правой частью и однородными граничными условиями в области Ω, когда Ω – эллипсоид, цилиндр с образующими, параллельными оси t, и параллелепипед. В этих работах установлены критерий единственности и существование решения задачи в пространстве Соболева $W_2^1(\Omega)$ при определенных условиях на правую часть, связанных со сходимостью числовых рядов. При этом возникающие малые знаменатели не изучены.

В данной работе в классе регулярных решений уравнения (3.1), т.е. удовлетворяющих условиям (3.2) и (3.3), установлен критерий единственности решения задачи (3.2) – (3.5) и само решение построено в явном виде как сумма ряда Фурье. При обосновании сходимости ряда возникает проблема малых знаменателей от двух переменных более сложной структуры, чем в ранее известных работах [4, 8, 9]. В связи с этим установлены оценки об отделенности от нуля малых знаменателей, на основании которых доказана сходимость ряда в классе функций $C^2(\overline{Q})$ при некоторых условиях относительно функций $\tau(x, y)$ и $\psi(x, y)$, а также получены оценки об устойчивости решения по отношению граничных условий.

Теорема 3.1. *Если существует решение задачи* (3.2) – (3.5)*, то оно единственно только тогда, когда при всех m и n выполнены условия*

$$\Delta_{mn}(T) = \sin \lambda_{mn} T \neq 0, \tag{3.6}$$

где

$$\lambda_{mn}^2 = b + a^2\pi^2\left[\left(\frac{m}{p}\right)^2 + \left(\frac{n}{q}\right)^2\right]. \tag{3.7}$$

Отметим, что в дальнейшем в (3.7) будем считать, что $b = \alpha^2 \geq 0$ ($\alpha \geq 0$), так как если $b < 0$, то начиная с некоторых номеров $n > n_0$ или $m > m_0$ правая часть (3.7) принимает только положительные значения, т.е. знак коэффициента b не влияет на полученные результаты.

Равенство $\Delta_{mn}(T) = \sin\lambda_{mn}T = 0$ имеет место только тогда, когда

$$T = \frac{\pi k}{\lambda_{mn}}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{3.8}$$

Равенство (3.8) на основании (3.7) принимает вид

$$\left(\frac{k}{aT}\right)^2 - \left(\frac{m}{p}\right)^2 - \left(\frac{n}{q}\right)^2 = \left(\frac{\alpha}{a\pi}\right)^2. \tag{3.9}$$

Таким образом, $\Delta_{mn}(T)$ обращается в нуль, когда T определяется по формуле (3.8) или неоднородное диофантовое уравнение (3.9) имеет решение на множестве целых чисел. На основании (3.8) по отношению уравнения (3.9) можно сформулировать следующее утверждение: придавая в (3.8) k, m и n натуральные значения, получим счетное множество значений T, которые при заданных фиксированных значениях a, α, p и q удовлетворяют уравнению (3.9). Следовательно, при определенном подборе значений T сложное диофантовое уравнение (3.9) имеет счетное множество решений в целых числах. Хотя, как известно из теории чисел, уравнение (3.9), например, при $a = 1$, $\alpha = 0$, $p = q = T$ имеет бесконечное множество решений в целых числах.

При выполнении условий (3.6) решение задачи (3.2) – (3.5) формально можно представить в виде суммы ортогонального ряда

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} u_{mn}(t)\, v_{mn}(x, y), \tag{3.10}$$

где

$$v_{mn}(x, y) = \frac{2}{\sqrt{pq}} \sin\frac{m\pi x}{p} \sin\frac{n\pi y}{q},$$

$$u_{mn}(t) = \tau_{mn}\frac{\sin\lambda_{mn}(T - t)}{\sin\lambda_{mn}T} + \psi_{mn}\frac{\sin\lambda_{mn}t}{\sin\lambda_{mn}T},$$

$$\tau_{mn} = \iint_D \tau(x, y)\, v_{mn}(x, y)\, dxdy,$$

$$\psi_{mn} = \iint_D \psi(x, y)\, v_{mn}(x, y)\, dxdy.$$

Обозначим через

$$\nu = \frac{aT}{q}\sqrt{1 + \left(\frac{q\alpha}{p}\right)^2}.$$

Теорема 3.2. *Пусть* $b = 0$ *и* ν *принимает не целые рациональные значения или иррациональные алгебраические числа степени 2, а функции* $\tau(x,y), \psi(x,y) \in C^5(\overline{D})$ *и* $\tau(0,y) = \tau_{xx}(0,y) = \tau(p,y) = \tau''_{xx}(p,y) = 0$, $\psi(0,y) = \psi_{xx}(0,y) = \psi(p,y) = \psi''_{xx}(p,y) = 0$, $0 \le y \le q$, $\tau(x,0) = \tau_{yy}(x,0) = \tau(x,q) = \tau_{yy}(x,q) = 0$, $\psi(x,0) = \psi_{yy}(x,0) = \psi(x,q) = \psi_{yy}(x,q) = 0$, $0 \le x \le p$. *Тогда существует единственное решение задачи* (3.2) – (3.5) *и оно определяется рядом* (3.10).

4. Задача Дирихле для трехмерного уравнения гиперболического типа высокого порядка и связь с проблемой Ферма

Далее для трехмерного аналога уравнения (2.1), т.е. для уравнения вида

$$Lu = \frac{\partial^{2p} u}{\partial t^{2p}} - \frac{\partial^{2p} u}{\partial x^{2p}} - \frac{\partial^{2p} u}{\partial y^{2p}} = f(x,y,t), \tag{4.1}$$

в прямоугольном параллелепипеде $Q = \{(x,y,t)|\ (x,y) \in D, t \in (0,T)\}$, где $D = \{(x,y)|\ 0 < x < l,\ 0 < y < q\}$, l, q, T – заданные положительные числа, $f(x,y,t)$ – заданная в Q функция, $p \in \mathbb{N}$, исследуется следующая

Задача Дирихле. *Найти в области* Q *функцию* $u(x,y,t)$, *удовлетворяющую следующим условиям:*

$$u \in C^{2p-1}(\overline{Q}) \cap C^{2p}(Q), \tag{4.2}$$

$$Lu(x,y,t) \equiv f(x,y,t), \quad (x,y,t) \in Q, \tag{4.3}$$

$$\left.\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial^{2k} u}{\partial x^{2k}}\right|_{x=l} = \left.\frac{\partial^{2k} u}{\partial y^{2k}}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial^{2k} u}{\partial y^{2k}}\right|_{y=q} = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{4.4}$$

$$\left.\frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial^{2k} u}{\partial t^{2k}}\right|_{t=T} = 0, \quad (x,y) \in \overline{D}, \quad k = \overline{0, p-1}. \tag{4.5}$$

Здесь установлен следующий результат.

Теорема 4.1. *Если существует решение задачи* (4.1) – (4.5), *то оно единственно только тогда, когда уравнение*

$$\left(\frac{m}{l}\right)^{2p} + \left(\frac{n}{q}\right)^{2p} = \left(\frac{k}{T}\right)^{2p}, \quad m,n,k \in \mathbb{N}, \tag{4.6}$$

не разрешимо во множестве натуральных чисел.

Если $l = q = T$, т.е. Q является кубом, то (4.6) переходит в известное уравнение Ферма

$$m^{2p} + n^{2p} = k^{2p}. \tag{4.7}$$

Если $q = l \ne T$, $\frac{l}{T} \in \mathbb{Q}$ или $q = T \ne l$, $\frac{T}{l} \in \mathbb{Q}$, то уравнение (4.6) также сводится к уравнению типа (4.7). Следовательно, в этих случаях в силу полученного результата единственность решения задачи Дирихле для уравнения (4.1) при любом натуральном p равносильна великой проблеме Ферма.

Решение задачи (4.1) – (4.5) ищется в виде суммы тройного ряда

$$u(x,y,t) = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{lqT}} \sum_{m,n,k=1}^{+\infty} u_{mnk} \sin\frac{\pi m}{l} x \sin\frac{\pi n}{q} y \sin\frac{\pi k}{T} t,$$

$$u_{mnk} = \frac{1}{\pi^2} \frac{(-1)^p f_{mnk}}{(k/T)^{2p} - (m/l)^{2p} - (n/q)^{2p}},$$

$$f_{mnk} = \iiint\limits_Q f(x,y,t) \sin\frac{\pi m}{l} x \sin\frac{\pi n}{q} y \sin\frac{\pi k}{T} t \, dx dy dt.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда РФФИ, 17-41-020516.

Литература

1. Соболев С. Л. *Пример корректной краевой задачи для уравнения колебания струны с данными на всей границе* // ДАН СССР. – 1956. – Т. 109. – 4. – С. 707–709.

2. Арнольд В. И. *Математическое понимание природы.* – М.: Изд-во МЦНМО, 2010.

3. Арнольд В. И. *Малые знаменатели. I* // Известия АН СССР. Серия математическая. – 1961. – 25. – С. 21–86

4. Сабитов К. Б. *Задача Дирихле для уравнений с частными производными* // Матем. заметки. – 2015. – Т. 97. – № 2. – С. 262–276.

5. Сабитов К. Б. *Уравнения математической физики.* – М.: Физматлит, 2013.

6. Денчев Р. *О спектре одного оператора* // Докл. АН СССР. – 1959. – Т. 126. – 2. – С. 259–262.

7. Денчев Р. *О задаче Дирихле для волнового уравнения* // Докл. АН СССР. – 1959. – Т. 127. – 3. – С. 501–504.

8. Сабитова Ю. К. *Задача Дирихле для телеграфного уравнения в прямоугольной области* // Изв. вузов. Матем. – 2017. – 12. – С. 46–56.

9. Сабитова Ю. К. *Задача Дирихле для уравнения гиперболического типа со степенным вырождением в прямоугольной области* // Дифференциальные уравнения. – 2018. – Т. 54. – 2. – С. 228 – 237.

DIRICHLET PROBLEM FOR HYPERBOLIC EQUATIONS

K.B. Sabitov

In the work, the first boundary value problem was studied for various classes of hyperbolic type equations in rectangular domains. The uniqueness criterion is established. The solution is constructed as a sum of orthogonal series. In justifying the convergence of a series, the problem of small denominators arises from one and two variables. Estimates of separation from zero with the corresponding asymptotics are established, which allowed us to prove the convergence of series in the class of regular solutions and the stability of the solution with respect to boundary functions.

Keywords: wave equation, high order wave equation, Dirichlet problem, uniqueness criterion, existence, series, small denominators, stability.

УДК 517.95

ЗАДАЧА КЕЛДЫША ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ ВЫРОЖДЕНИЕМ В ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Ю.К. Сабитова[1]

1 *sabitovauk@rambler.ru*; Стерлитамакский филиал Башкирский государственный университет

Для уравнения смешанного эллиптико – гиперболического типа с характеристическим вырождением изучена задача Келдыша в прямоугольной области. Решение построено в виде суммы ряда. Доказаны теоремы единственности и существования решения задачи.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа с характеристическим вырождением, задача Келдыша, единственность, существование, ряд, оценки, равномерная сходимость.

Для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа

$$Lu = u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)\, y\, u_{yy} + a u_y - b^2 u = 0 \tag{1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x, y)|\, 0 < x < l, -\alpha < y < \beta\}$, где $l > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $a > 1$, b – заданные действительные числа, поставим следующую задачу.

Задача Келдыша. *Найти функцию* $u(x, y)$, *удовлетворяющую следующим условиям*:

$$u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^1_x(\overline{D}) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \tag{2}$$

$$Lu(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in D_+ \cup D_-; \tag{3}$$

$$u(0, y) = u(l, y) = 0, \qquad -\alpha \le y \le \beta; \tag{4}$$

$$u(x, \beta) = f(x), \quad 0 \le x \le l, \tag{5}$$

где $D_- = D \cap \{y < 0\}$, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $f(x)$ *– заданная достаточно гладкая функция, удовлетворяющая условию* $f(0) = f(l) = 0$.

М.В. Келдыш [1] впервые исследовал более общее эллиптическое уравнение, чем уравнение (1) при $y > 0$, второго порядка от двух переменных с характеристическим вырождением. Он показал, что корректность первой граничной задачи существенным образом зависит от показателя степени вырождения и коэффициента при младшей производной u_y.

Опираясь на эту работу, И.Л. Кароль [2] исследовал задачу Трикоми для уравнения смешанного типа (1) при $b = 0$ в области G, где G – область плоскости XOY, ограниченная простой жордановой кривой Γ, лежащей в полуплоскости $y > 0$, с концами в точках $O(0,0)$ и $A(1,0)$, характеристиками OC и AC уравнения, расположенными в полуплоскости $y < 0$. И.Л. Кароль доказал, что характер краевых задач, которые могут быть поставлены для уравнения (1) в области G, в отличие от уравнений с нехарактеристическим вырождением, существенно зависит от коэффициента a и класса решений уравнения (1). Например, классическая задача Трикоми в случае $a < 0$ недоопределена, при $a > 0$ – переопределена.

Опираясь на работы [3] – [8], мы решаем задачу Келдыша в прямоугольной области для уравнения (1). Решение построено в виде суммы ряда. Доказаны теоремы единственности и существования решения задачи (2) – (5).

Решение задачи (2) – (5) построено в виде суммы ряда

$$u(x,y)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sum_{k=1}^{\infty}u_k(y)\sin\frac{\pi k}{l}x. \tag{6}$$

В формуле (6) функция $u_k(y)$ определена формулой

$$u_k(y)=\begin{cases} f_k\Big(\dfrac{y}{\beta}\Big)^{\frac{1-a}{2}}\dfrac{I_{a-1}(p_k y^{\frac{1}{2}})}{I_{a-1}(p_k\beta^{\frac{1}{2}})}, & y\ge 0,\\ f_k\Big(\dfrac{-y}{\beta}\Big)^{\frac{1-a}{2}}\dfrac{J_{a-1}(p_k(-y)^{\frac{1}{2}})}{I_{a-1}(p_k\beta^{\frac{1}{2}})}, & y\le 0,\end{cases}$$

где $f_k=\sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l f(x)\sin\lambda_k x dx$, $p_k=2\sqrt{b^2+\lambda_k^2}$, $I_{a-1}(p_k y^{\frac{1}{2}})$ – модифицированная функция Бесселя первого рода, $J_{a-1}(p_k(-y)^{\frac{1}{2}})$ – функция Бесселя первого рода.

Решение $u(x,y)$ задачи (2) – (5) удовлетворяет условиям:

$$\lim_{x\to l+0}u_x(x,y)\sin\frac{\pi k}{l}x=\lim_{x\to l-0}u_x(x,y)\sin\frac{\pi k}{l}x=0,\quad 0\le y\le\beta. \tag{7}$$

Доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. *Если существует решение задачи* (2) – (5), *удовлетворяющее условиям* (7), *то оно единственно.*

Теорема 2. *Если функция* $f(x)\in C^3[0,l]$ *и выполнены условия* $f(0)=f(l)=0$, $f''(0)=f''(l)=0$, *то существует единственное решение задачи* (2) – (5) *и это решение определяется рядом* (6).

Если вместо условия (5) задать граничное условие на нижнем основании прямоугольника

$$u(x,-\alpha)=g(x),\quad 0\le x\le l,$$

тогда функции $u_k(y)$ в формуле (6) будут иметь вид

$$u_k(y)=\begin{cases} -g_k\Big(\dfrac{y}{\alpha}\Big)^{\frac{1-a}{2}}\dfrac{I_{a-1}(p_k y^{\frac{1}{2}})}{J_{a-1}(p_k\alpha^{\frac{1}{2}})}, & y\ge 0,\\ g_k\Big(\dfrac{-y}{\alpha}\Big)^{\frac{1-a}{2}}\dfrac{J_{a-1}(p_k(-y)^{\frac{1}{2}})}{J_{a-1}(p_k\alpha^{\frac{1}{2}})}, & y\le 0,\end{cases}$$

где $g_k=\sqrt{\frac{2}{l}}\int\limits_0^l g(x)\sin\lambda_k x dx$.

Из данной формулы видно, что функции $u_k(y)\to\infty$ при $k\to\infty$ и фиксированных $y>0$. Следовательно, показать равномерную сходимость ряда (6) не удастся.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 183100111 мол_а).

Литература

1. Келдыш М.В. *О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области* // ДАН. – 1951. – Т. 77. – № 2. – С. 181–184.

2. Кароль И.Л. *Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа второго рода* // ДАН. – 1953. – Т. 88. – № 2. – С. 197–200.

3. Моисеев Е.И. *О разрешимости одной нелокальной краевой задачи* // Дифференциальные уравнения. – 2001. – Т. 37. – № 11. – С. 1565–1567.

4. Сабитов К.Б. *Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области* // Докл. РАН. – 2007. – Т. 413. – № 1. – С. 23–26.

5. Хайруллин Р.С. *О существовании решения задачи Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода* // Дифференц. уравнения. – 2017. – Т. 53. – 5. – С. 684–692.

6. Сабитова Ю. К. *Краевые задачи с нелокальным условием для уравнений смешанного типа в прямоугольной области* // Дисс … канд. физ.-мат. наук. – Стерлитамак, СГПА. 2007.

7. Сабитова Ю.К. *Критерий единственности решения нелокальной задачи для вырождающегося уравнения смешанного типа в прямоугольной области* // Дифференц. уравнения. – 2010. – Т. 46. – № 8. – С. 1205–1208.

8. Сабитова Ю.К. *Краевая задача с нелокальным интегральным условием для уравнений смешанного типа с вырождением на переходной линии* // Матем. заметки. – 2015. – Т. 98. – Вып. 3. – С. 393–406.

KELDYSH PROBLEM FOR EQUATION OF MIXED TYPE
WITH CHARACTERISTIC DEGENERATION IN RECTANGLE DOMAIN

Yu.K. Sabitova

We study the Keldysh problem for equation of mixed type with characteristic degeneration in a rectangular domain. A solution to the problem is constructed in the form of the sum of a series. We prove the theorems of uniqueness and existence of the solution of the problem.

Keywords: equation of mixed type with characteristic degeneration, Keldysh problem, uniqueness, existence, series, estimate, uniform convergence.

УДК 517.972.5

ОБ ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКОЙ МОНОТОННОСТИ ФУНКЦИОНАЛОВ ДЛЯ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРА

Р.Г. Салахудинов[1]

1 *rsalakhud@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

В статье рассматриваются физические и геометрические функционалы области, зависящие от свободного параметра. Эти функционалы построены с целью обобщения классических изопериметрических неравенств, доказанных Полиа, Пейном и другими. Показано, что изопериметрическая монотонность некоторых функционалов по свободному параметру распространяется на отрицательный диапазон изменения.

Ключевые слова: жесткость кручения, изопериметрические неравенства, евклидовы моменты области относительно границы, экстремальные области.

Рассмотрим функционал

$$\mathbf{H}(G;p) := \frac{(p+1)(p+2)}{\rho(G)^p}\left(\mathbf{I}_p(G) - \frac{l(\boldsymbol{\rho}(G))\boldsymbol{\rho}(G)^{p+1}}{p+1}\right),$$

где $\mathbf{I}_p(G)$ — евклидовый момент инерции области G порядка p, $\boldsymbol{\rho}(G)$ — супремум радиусов кругов, целиком лежащих в области, $l(\boldsymbol{\rho}(G))$ — длина множества, лежащего на расстоянии $\boldsymbol{\rho}(G)$ от границы и $p(> -1)$ — параметр.

Будем называть выпуклую область G растяжением выпуклой области G_0, если область G_0 можно получить из G путем вырезания прямоугольного фрагмента и объединения оставшихся частей так, что $\boldsymbol{\rho}(G_0) = \boldsymbol{\rho}(G)$. Далее, обозначим через Γ подмножество выпуклых областей, содержащие описанные около некоторой окружности многоугольники, а также круговые многоугольники, получаемые из описанных многоугольников заменой некоторых сторон или их частей дугами вписанной окружности. Формирование множества Γ закончим добавлением областей, являющихся растяжением элементов из Γ.

Теорема. *Пусть G — выпуклая область ограниченной площади на плоскости. Функционал $\mathbf{H}(G;p)$ является монотонно возрастающей функцией от p, если область $G \not\in \Gamma$ и $-1 < p < 0$. Для областей из множества Γ функционал $\mathbf{H}(G;p)$ является постоянным.*

Изорериметрическая монотонность функционала $\mathbf{H}(G;p)$ при $p \geq 0$ ранее была изучена автором совместно с Л.И. Гафиятуллиной.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ (проект 17-01-00282-а) и за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности (1.9773.2017/8.9).

ON ISOPERIMETRIC MONOTONICITY OF FUNCTIONALS
FOR NEGATIVE VALUES OF THE PARAMETER

R.G. Salakhudinov

Physical and geometrical functionals of a domain that depend on a free parameter are discussed in the article. These functionals are built with the aim to generalize the classical isoperimetric inequalities, proved by Polya, Payne, and others. It is shown that the isoperimetric monotony of some functionals with respect to the free parameter extends to the negative range of change.

Keywords: isoperimetric inequality, torsional rigidity, Euclidean moment of domain with respect to the boundary, extremal domain.

УДК 517.98

О НЕКОТОРЫХ СВЕРТОЧНО-МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ УРАВНЕНИЯХ В АЛГЕБРЕ ВЛАДИМИРОВА В.С.

Л.Г. Салехов[1], Э.В. Чеботарева[2]

1 *leonardsalehov@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского
2 *elvchb@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

В мультипликативной алгебре В.С. Владимирова обобщенных функций на вещественной оси рассматривается один класс сверточно-мультипликативных уравнений. Для данного класса сверточно-мультипликативных уравнений исследуются вопросы существования и единственности решения.

Ключевые слова: сверточная алгебра, преобразование Коши в пространстве обобщенных функций умеренного роста, преобразование Фурье, преобразование Карлемана-Фурье, алгебра Владимирова В.С., сверточная подалгебра в алгебре Владимирова В.С.

Известно [1], что пространство $\mathscr{S}'_+(\mathbb{R})$ обобщенных функций на $\mathbb{R}$ с носителями в $\mathbb{R}_+ := [0;\infty]$, снабженное операцией свертки, является сверточной алгеброй с единицей δ-мерой Дирака. Пусть $\mathscr{F}$ – преобразование Фурье на $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$, основанное на формуле

$$\left(\mathscr{F}\varphi\right)(\xi) := \int\limits_{\mathbb{R}} e^{2\pi i x\xi}\varphi(x)dx, \forall\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}) : \left\langle\mathscr{F}(T),\varphi\right\rangle := \left\langle T,\mathscr{F}\varphi\right\rangle, \forall T\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}), \forall\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}).$$

В сверточной алгебре $\mathscr{S}'_+(\mathbb{R})$ имеется мультипликативная подалгебра

$$\mathscr{M}_+(\mathscr{R}) := \left\{Y(t)f(t), \forall f(t)\in\mathscr{M}(\mathbb{R})\right\},$$

где $\mathscr{M}(\mathbb{R})$ – пространство функций медленного роста на $\mathbb{R}$, $Y(t)$ – функция Хевисайда. При этом $\mathscr{M}_+(\mathscr{R})$ есть мультипликативная подалгебра с единицей – функцией Хевисайда.

Пусть также $\mathscr{V}'^{+}(\mathbb{R})$ – мультипликативная алгебра В.С. Владимирова обобщенных функций на $\mathbb{R}$, являющихся граничными значениями (в смысле обобщенных функций $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$) функций, аналитических в $\operatorname{Im} z > 0$ [2]. Семейство

$$\mathscr{A}_c^+(\mathbb{R}) := \mathscr{F}\left[\mathscr{M}_+(\mathbb{R})\right]$$

является сверточной подалгеброй в алгебре В.С. Владимирова $\mathscr{V}'^{+}(\mathbb{R})$ с единицей

$$\delta_+(x) = \frac{1}{2}\delta - \frac{1}{2\pi i}v.p.\frac{1}{x}, \forall x\in\mathbb{R}.$$

В алгебре $\mathscr{V}'^{+}(\mathbb{R})$ ищется обобщенная функция $U^+\in\mathscr{V}'^{+}(\mathbb{R})$, удовлетворяющая сверточно-мультипликативному уравнению:

$$T^+ * \left\{H^+\cdot U^+\right\} = W^+, \forall W^+\in\mathscr{A}_c'^{+}(\mathbb{R}), \tag{1}$$

где T^+ – заданная обобщенная функция из $\mathscr{A}_c'^+(\mathbb{R})$, а H^+ – заданная обобщенная функция из $\mathcal{V}'^+(\mathbb{R})$.

Если решение задачи (1) существует, то оно единственно в $\mathcal{V}'^+(\mathbb{R})$.

Задача (1) редуцируется к двум задачам – задаче

$$T^+ * V^+ = W^+, \tag{2}$$

где T^+ и W^+ – заданные обобщенные функции из $\mathscr{A}_c'^+(\mathbb{R})$, V^+ – искомая обобщенная функция из $\mathscr{A}_c'^+(\mathbb{R})$; и задаче

$$H^+ U^+ = V^+, \tag{3}$$

где H^+ – заданная обобщенная функция из $\mathcal{V}'^+(\mathbb{R})$, V^+ найдется из задачи (2), U^+ ищется в $\mathcal{V}'^+(\mathbb{R})$. Уравнение (2) есть уравнение сверток в сверточной алгебре $\mathscr{A}_c'^+(\mathbb{R})$. Уравнение (3) есть задача деления в алгебре В.С. Владимирова $\mathcal{V}'^+(\mathbb{R})$.

Если $\mathscr{E}^+$ – элементарное решение уравнения (2), т.е. $\mathscr{E}^+$ есть решение уравнения

$$T^+ * \mathscr{E}^+ = \delta_+,$$

то оно единственно в $\mathscr{A}_c'^+(\mathbb{R})$. Следовательно, уравнение (2) имеет единственное решение в $\mathscr{A}_c'^+(\mathbb{R})$:

$$V^+ = \mathscr{E}^+ * W^+.$$

Если H^+ принадлежит мультипликативной подгруппе $\mathscr{Y}^+$ из алгебры $\mathcal{V}'^+(\mathbb{R})$, то у уравнения (3) существует единственное решение в $\mathcal{V}'^+(\mathbb{R})$, которое имеет вид:

$$U^+ = \left(H^+\right)^{-1} \cdot V^+ \in \mathcal{V}'^+(\mathbb{R}).$$

Тогда решение исходной задачи (1) имеет вид:

$$U^+ = \left(H^+\right)^{-1} \left\{\mathscr{E}^+ * W^+\right\}.$$

Литература

1. Владимиров В. С., Жаринов В. В. *Уравнения математической физики.* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 400 с.

2. Vladimirov V. S. *Methods of the Theory of Generalized Functions.* – London: Taylor & Francis, 2002. – 328 с.

ON SOME CONVOLUTION-MULTIPLICATIVE EQUATIONS
IN V.S. VLADIMIROV ALGEBRA

L.G. Salekhov, E.V. Chebotareva

The paper is devoted to existence and uniqueness of solution for one class of convolution-multiplicative equations in the V.S. Vladimirov multiplicative algebra of generalized functions on the real axis.

Keywords: convolution algebra, Cauchy transform in the space of generalized functions of slow growth, Fourier transform, Carleman-Fourier transform, V.S. Vladimirov algebra, convolution subalgebra in V.S. Vladimirov algebra.

УДК 517.95

ОБ УНИФОРМИЗАЦИИ ОДНОЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Д.С. Сафаров[1]

1 *safarov-5252@mail.ru*; Бохтарский государственный университет, Таджикистан

В работе найдено параметрическое представление решений одной алгебраической поверхности с помощью обобщенных эллиптических функций Вейерштрасса.

Ключевые слова: квазидвоякопериодические, квазиконформное, эллиптические функции.

В комплексном пространстве $\mathbb{C}^3$ рассмотрим алгебраическое уравнение вида

$$w^2 = z_1(a_1 z_1^3 + a_2 z_2^2 + a_3 z + a_4), \tag{1}$$

где z_1, z_2 – независимые комплексные переменные, a_1, a_2, a_3, a_4 – комплексные постоянные, причем многочлен $G(z_2) = a_1 z_1^3 + a_2 z_2^2 + a_3 z + a_4$ не имеет кратных корней. Уравнение (1) при $z_1 = 1$ называется уравнением алгебраической кривой [1].

Задача об униформизации алгебраической поверхности (1) состоит в представлении решений уравнения (1) в виде

$$z_1 = \varphi(z), z_2 = \chi(z), w = \psi(z), \tag{2}$$

где $\varphi(z), \chi(z), \psi(z)$ – однозначные дифференцируемые функции комплексного переменного z.

При помощи линейной замены [1]

$$z_2 = \frac{4}{a_1}\left(\tau - \frac{a_2}{12}\right), w = \frac{4}{a_1} w_1 \tag{3}$$

уравнение (1) приводится к виду

$$w_1^2 = z_1(4\tau^3 - g_2\tau - g_3), \tag{4}$$

где

$$g_2 = \frac{1}{12}(a_2^2 - 3a_1 a_3),\ g_3 = \frac{1}{432}(9a_1 a_2 a_3 - 2a_2^3 - 27a_1^2 a_4).$$

Уравнение (4) при $z_1 = 1$ униформизируется с помощью эллиптических функций Вейерштрасса $\wp(u), \wp'(u)$. Поэтому при $z_1 = 1$ алгебраические кривые вида (1), (4) называются эллиптическими.

Если g_2, g_3 являются инвариантами функции Вейерштрасса

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{|m|+|n|\neq 0}\left[\frac{1}{(u - m\omega_1 - n\omega_2)^2} - \frac{1}{(m\omega_1 + n\omega_2)^2}\right]$$

т.е. $\wp'^2(u) = 4\wp^3(u) - g_2\wp(u) - g_3$, то уравнение (4) при $z_1 = 1$ допускает параметрическое представление решений в виде [1]

$$z_2 = \tfrac{4}{a_1}\left(\wp(u) - \tfrac{a_2}{12}\right), w_1 = \tfrac{4\wp'(u)}{a_1}. \tag{4'}$$

При этом для периодов ω_1, ω_2 выполняется равенство

$$60\sum{}'(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^{-4} = g_2,\ 140\sum{}'(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^{-6} = g_3, \tag{5}$$

причем $\mathrm{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$.

Равенство ($4'$) устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками алгебраической кривой (4) и точками параллелограмма периодов Ω функции $\wp(u)$.

При $z_1 \neq 1$ находим параметрическое решение уравнения (1) с помощью обобщенных двоякопериодических, с периодами ω_1, ω_2 решения уравнения Бельтрами [3]:

$$\varphi_{\overline{z}} - q(z)\varphi_z = 0, \tag{6}$$

где $q(z)$ – двоякопериодическая с периодами ω_1, ω_2 дифференцируемая функция класса $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, удовлетворяющая условию

$$|q(z)| \leq q_0 < 1. \tag{7}$$

Такие решения уравнения (6) названы обобщенными эллиптическими функциями [5], [6]. Для этого надо найти квазипериодическое квазиконформное отображение области Ω, удовлетворяющее условию

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(z + m_1\omega_1 + m_2\omega_2) = \varphi(z) + m_1\omega_1 - m_2\omega_2, \tag{8}$$

где $m_1, m_2 = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

Как известно [2, 3], под квазиконформным отображением области Ω понимаются обобщенное гомеоморфное решение $w(z) = f(z)$ уравнения (6). Дифференцируемое отображение $\varphi(z)$, удовлетворяющее условию (8), названо основным квазипериодическим гомеоморфизмом.

В [5, 6] показано, что при допущенных условиях на функции $q(z)$, уравнение (6) всегда допускает единственное решение класса C^2, удовлетворяющее условию (8), в виде

$$\varphi(z) = z + T_\zeta\rho(z) = z - \frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega} \rho(t)\zeta(t-z)d_t\Omega, \tag{9}$$

где двоякопериодическая функция $\rho(t)$ с периодами ω_1, ω_2 является решением сингулярного интегрального уравнения вида

$$\rho - qS_\zeta\rho = q, \tag{10}$$

в котором

$$(S_\zeta\rho) = (T_\zeta\rho)_z = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega} \rho(t)\wp(t-z)d_t\Omega,$$

$\wp(z)$ – "пэ„-функция Вейерштрасса и интеграл понимается в смысле главного значения.

Так как в [4-6] доказано, что

$$T_\zeta : \{\rho \in L_p^*, \iint\limits_{\Omega} \rho d\Omega = 0\} \longrightarrow \overset{*}{W}{}^1_p, \quad p > 2,$$

где $L_p^*, \overset{*}{W}{}_p^1$, $p>2$ – пространство двоякопериодических функций, принадлежащих соответственно в $L_p(\overline{\Omega}), W_p^1(\Omega), p>2$, и $||S_\zeta||_{L_2}=1$, то в силу условие (7) уравнение имеет единственное решение при $|p-2|<\varepsilon,\ \varepsilon>0$:

$$\rho(z)=(1-qS_\zeta)^{-1}q(z).$$

Если выполнено условие

$$\iint\limits_{\Omega}(1-qS_\zeta)^{-1}q(z)d\Omega=0, \tag{11}$$

то функция $\varphi(z)$ – единственное квазипериодическое дифференцируемое квазиконформое отображение параллелограмма Ω с вершинами $0,\omega_1,\omega_1+\omega_2,\omega_2$ на четырехсторонник Ω' с вершинами $0,\omega_1,\omega_1+\omega_2,\omega_2$.

На плоскости квазипериодического квазиконфорного отображения уравнения Бельтрами можно определить так называемые обобщенные эллиптические функции Вейерштрасса $\wp(\varphi(z)),\zeta(\varphi(z)),\sigma(\varphi(z))$, [5,6] и функция $\wp(\varphi(z))$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\wp'^2(\varphi(z))=4\wp^3(\varphi(z))-g_2\wp(\varphi(z))-g_3,$$

с инвариантами g_2,g_3.

Так как по построению $\varphi_{\overline{z}}=\rho(z)$, то справедливо следующая

Теорема. *Пусть постоянны g_2,g_3, определяемые через коэффициентов многочлена $G(z_2)$, являются инвариантами функции Вейерштрасса $\wp(u)$ и $q(z)$ – двоякопериодическая дифференцируемая функция с периодами ω_1,ω_2, удовлетворяющих условию (7). Пусть $\varphi(z)$ – основной квазипериодический гомеоморфизм уравнении Бельтрами, определяемый формулой (9), $\varphi_{\overline{z}}=\rho(z)$ и $\rho(z)$ – решение интегрального уравнения (10) и выполнено условие (11).*

Тогда уравнение (1) допускает параметрическое представление решений в виде

$$z_1=\rho^2(z),\ z_2=\frac{4}{a_1}\left(\wp(\varphi(z))-\frac{a_2}{12}\right), w=\frac{4\wp'(\varphi(z))}{a_1}\rho(z).$$

Литература

1. Гурвиц А., Курант Р. *Теория функций.* – М.: Наука. 1968. – 648 с.

2. Крушкаль С.Л., Апанасов Б.Н., Гусевский Н.А. *Кленовы группы и униформизация в примерах и задачах.* – Новосибирск: Наука, 1968. – 232 с.

3. Векуа И.Н. *Обобщенные аналитические функции.* – М.: Физматгиз, 1959. – 628 с.

4. Сафаров Д.С. *Периодические решения эллиптических систем первого порядка* // Дифференц. уравн. – 1981. – Т. 17, 8. – С. 1468–1477.

5. Сафаров Д.С. *Двоякопериодические решения равномерно эллиптической системы первого порядка* // Доклады РАН. – 2010. – Т. 430, 4. – С. 454–457.

6. Сафаров Д.С. *Двоякопериодические обобщенные аналитические функции и их приложения.* – Душанбе, 2012. – 190 с.

ON UNIFORMIZATION OF AN ALGEBRAIC SURFACE

D.S. Safarov

With the help of the generalized Weierstrass elliptic functions, a parametric representation of the solutions of an algebraic surface is found.

Keywords: quasi-doubly-periodic function, quasiconformal, mapping elliptic function.

УДК 532.5

РАЗДЕЛЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ УСТОЙЧИВОСТИ / НЕУСТОЙЧИВОСТИ / НЕЙТРАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ И ВЫЧИСЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ РЕШЕНИЯ В ЛИНЕЙНОЙ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ О ГИДРАВЛИЧЕСКОМ СКАЧКЕ

Е.В. Семенко[1], Т.И. Семенко[2]

1 *semenko54@gmail.com*; Новосибирский государственный технический университет
2 *semenko54@gmail.com*; Новосибирский государственный технический университет

В одномерной линейной задаче о гидравлическом скачке проведены численные расчеты по разделению областей устойчивости и неустойчивости и вычислению их общей границы (области нейтральной устойчивости) и численно определяются параметры решения в случае нейтральной устойчивости.

Ключевые слова: гидравлический скачок, сдвиговая модель мелкой воды, устойчивость, неустойчивость, нейтральная устойчивость.

В рамках так называемой сдвиговой модели мелкой воды (см., напр., [1]) рассматривается одномерная задача о гидравлическом скачке. Сдвиговая модель мелкой воды используется в варианте, предложенном и изученном в [2–4]. Она представляет собой систему дифференциальных уравнений

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial (hu)}{\partial x}=0,\\
\frac{\partial (hu)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(hu^2+\frac{gh^2}{2}+(\varphi+\Phi)h^3\right)=gh\beta-C_f u^2,\\
\frac{\partial}{\partial t}\left(h\frac{u^2+gh+(\varphi+\Phi)h^2}{2}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(hu\left(\frac{u^2}{2}+gh+\frac{3(\varphi+\Phi)h^2}{2}\right)\right)=\\
=g\beta hu-\left(C_f+C_r\frac{\Phi}{\varphi+\Phi}\right)u^3,
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где переменная $x\in[-L_1,L_2]$ есть точка в канале, значения $x=-L_1$ и $x=L_2$ – это вход и выход из канала соответственно, $t>0$ – время. Искомые функции: $h(x,t)$ – высота уровня воды, $u(x,t)$ – усредненная по вертикали горизонтальная скорость и $\Phi(x,t)$ – так называемая энстрофия. Параметры модели (константы): g – ускорение свободного падения, β – тангенс угла наклона дна канала (угол наклона считается постоянным); $C_f>0$ называется коэффициентом трения, а $C_r>0$ есть введенный в [3] так называемый коэффициент сопротивления (drag coefficient); $\varphi>0$ – это так называемая пристеночная энстрофия (wall enstrophy). Здесь общая энстрофия

$\varphi+\Phi(x,t)$ есть усредненный по вертикали квадрат отклонения горизонтальной скорости от среднего значения и рассматривается как характеристика завихренности потока. При этом пристеночная энстрофия φ характеризует небольшие завихрения, связанные с трением воды о дно канала, она трактуется как заданная константа, а энстрофия $\Phi(x,t)$ (или вращательная энстрофия, roller enstrophy) есть переменная искомая величина, связанная в вращением воды.

На входе в канал $x=-L_1$ задаются все три искомые величины, соответствующие постоянному решению системы (1):

$$h=h_1, \quad u=u_1=\sqrt{\nu g h_1}, \text{ где } \nu=\beta/C_f \text{ и } \Phi=0. \tag{2}$$

На выходе из канала $x=L_2$ поставим общепринятое (см. например [3,4]) граничное условие слива

$$uh=\begin{cases} 0, & h<d, \\ \dfrac{2}{3}C_d\sqrt{2g(h-d)^3}, & h>d, \end{cases} \qquad C_d=\frac{\pi}{\pi+2}+0.08\frac{h-d}{d}, \tag{3}$$

где d есть высота выходной запруды.

Гидравлический скачок рассматривается как разрывное решение системы (1). Если обозначить через $x=f(t)$ искомую линию разрыва, то на разрыве получаем стандартные условия сопряжения (аналог условий Ренкина-Гюгонио, см. [3–5])

$$\begin{gathered} [hu]=f'(t)[h], \\ \left[hu^2+\tfrac{gh^2}{2}+(\varphi+\Phi)h^3\right]=f'(t)[hu], \\ \left[hu\left(\frac{u^2}{2}+gh+\frac{3(\varphi+\Phi)h^2}{2}\right)\right]=f'(t)\left[h\frac{u^2+gh+(\varphi+\Phi)h^2}{2}\right], \end{gathered} \tag{4}$$

где, как обычно, квадратные скобки означают скачок функции на разрыве. Кривую $x=f(t)$ называют фронтом ударной волны.

Режим течения задают константы (далее – управляющие параметры) β (или $\nu=\beta/C_f$), C_f, C_r, h_1 (или входной поток $q_1=u_1h_1$), L_2 и d. Отметим, что в число управляющих параметров входит число Фруда $Fr=u_1/\sqrt{gh_1}=\sqrt{\nu}$.

В работах [3,4] задача (1), (2), (3), (4) (далее – задача о гидравлическом скачке) решалась численно при различных наборах управляющих параметров. Выяснилось, что рассматриваемая система моделирует как устойчивый гидравлический скачок, когда фронт стремится по времени к константе $f(t)\to x_0=\mathrm{const}$, $t\to\infty$, а решение стремится к решению стационарной задачи, так и наблюдаемые экспериментально колебания фронта, когда фронт асимптотически осциллирует

$$f(t)\to x_0+\sum_k \mathrm{Re}\left(A_k e^{i\omega_k t}\right),$$

и решение также асимптотически осциллирует по времени и пространству.

В работе [5] задача о гидравлическом скачке исследована аналитически обычным для теории ударных волн способом: задача линеаризуется на кусочно постоянном решении, а линеаризованная задача аналитически решается с помощью преобразования Фурье. В результате выяснилось, что в зависимости от набора управляющих параметров решение линеаризованной задачи может по времени стремится к стационарному и, соответственно, фронт стремится к константе (по терминологии теории ударных волн это случай устойчивости), может экспоненциально стремится к бесконечности (случай неустойчивости), и, наконец, может асимптотически осциллировать (нейтральная устойчивость). Таким образом, аналитическое исследование качественно подтверждает результаты численных расчетов. При этом полученные аналитические формулы решения, выражающие его через управляющие параметры, позволяют не слишком сложно и достаточно точно, хотя, конечно, тоже численно, разделить множества управляющих параметров, соответствующих случаю устойчивости (область устойчивости) и неустойчивости (область неустойчивости), областью нейтральной устойчивости является общая граница вышеупомянутых областей. Используемые формулы позволяют определять устойчивость/-неустойчивость для достаточно произвольных наборов управляющих параметров, в частности вычислять численно разделяющую их поверхность нейтральной устойчивости. Полученные результаты также качественно соответствуют численным расчетам общей нелинейной модели [3, 4], хотя количественно результаты совпадают не слишком точно, что, в принципе, ожидаемо.

Приведем некоторые результаты расчетов по разделению областей неустойчивости и устойчивости. На рис.1 изображена граница области устойчивости при фиксированных значениях $\varphi = 0,656\,c^{-2}$, $C_f = 0,00177$, $C_r = 0,15$, $L_2 = 10\,m$ в плоскости переменных (ν, q_1) при разных значениях d и, соответственно, в плоскости переменных (ν, d) при разных q_1. Во всех случаях область устойчивости расположена по убыванию ν (слева от графиков).

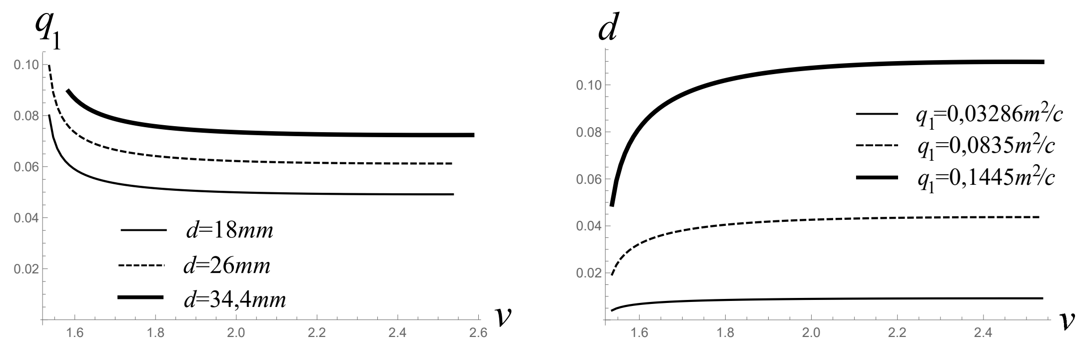


Рис. 1. Граница в плоскости (ν, q_1) при разных d (слева) и в (ν, d) при разных q_1 (справа)

Далее, полученные в [5] аналитические формулы позволяют вычислить основные характеристики решения. Мы обратимся к основным характеристикам фронта, в случае устойчивости это будет асимптотическое значение фронта x_0, а в случае нейтральной устойчивости – еще и частоты ω_k и амплитуды $|A_k|$. Разумеется, наиболее интересен случай нейтральной устойчивости.

Ниже мы приводим результаты расчетов, а именно: зависимости первой частоты $\omega = \omega_1$, соответствующей ей амплитуды $A = |A_1|$ и асимптотики фронта x_0 от параметра ν, т.е. фактически от числа Фруда, при некоторых значениях управляющих параметров, обеспечивающих нейтральную устойчивость.

Расчеты проводились при заданных значениях параметров $\varphi = 0,656\,c^{-2}$, $C_f = 0,00177$, $C_r = 0,15$, $L_2 = 10\,m$, а значения параметров q_1 и d для достижения нейтральной устойчивости должны друг от друга зависеть. На рис. 2 изображены графики зависимости первой частоты ω (размерность c^{-1}) от ν, графики слева соответствуют различным значениям высоты выходной запруды d, а справа – различным значениям входного потока q_1.

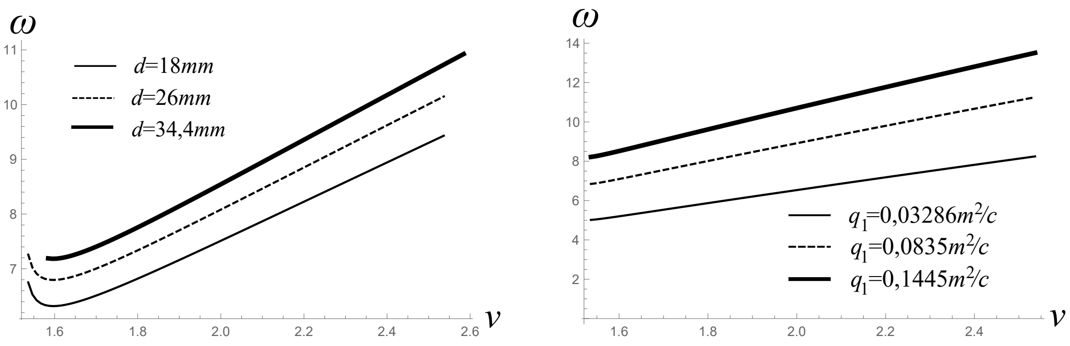


Рис. 2. Зависимость первой частоты ω от ν при разных d (слева) и в при разных q_1 (справа)

Отметим, что значения амплитуды A и асимптотики x_0 при различных значениях d_0 и q_1 практически не различаются, т.е. эти характеристики течения очень слабо зависят от параметров q_1 и d_0. На рис. 3 изображены графики зависимости от ν амплитуды A (слева) и асимптотики фронта x_0 (справа), размерность m.

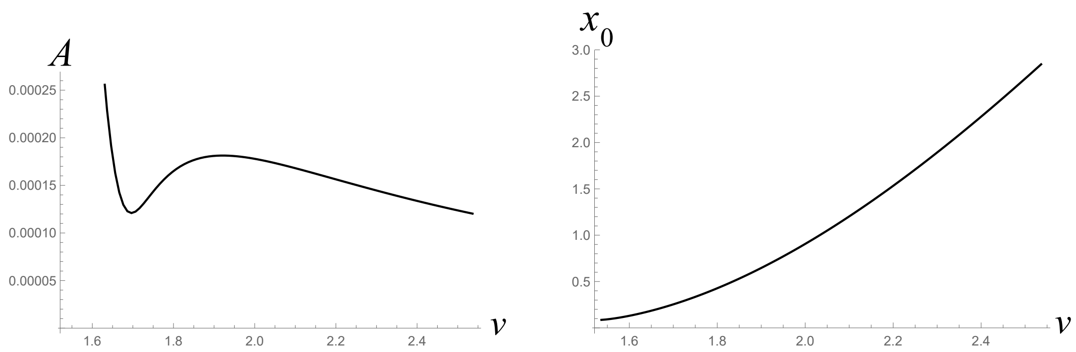


Рис. 3. Зависимость от ν амплитуды A (слева) и асимптотики x_0 (справа)

Литература

1. Ляпидевский В. Ю., Тешуков В. М. *Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости.* – Новосибирск: Изд. СО РАН, 2000. – 420 с.

2. Тешуков В. М. *Газодинамическая аналогия для вихревых течений со свободной границей* // Прикладная механика и техническая физика. – 2007. – Т. 48. – № 3. – С. 8–15.

3. Richard G. L., Gavrilyuk S. L. *The classical hydraulic jump in a model of shear shallow-water flows* // J. Fluid Mech. – 2013. – V. 725. – P. 492–521.

4. Delis A. L., Guillard H., Tai Yih-Chin *Numerical simulation of hydraulic jumps with shear shallow water model* // Journal of Computational Mathematics. – 2018. – V. 4. – P. 319.

5. Semenko E. V. *The analytic description of hydraulic jump in the linear theory of the shear shallow-water flows* // Physics of Fluids. – 2019. – V. 31. – P. 016101.

THE REGIONS OF STABILITY/INSTABILITY/NEUTRAL STABILITY SEPARATION AND THE CALCULATION OF THE SOLUTION PARAMETERS IN THE LINEAR ONE-DIMENSIONAL PROBLEM OF HYDRAULIC JUMP

E.V. Semenko, T.I. Semenko

The numerical calculations are presented, related to the separation of the stability and instability regions and determination of their common boundary (the neutral stability region) and the solution parameters are numerically determined for the linear problem of hydraulic jump in the case of neutral stability.

Keywords: hydraulic jump, the shear shallow-water flows model, stability, instability, neutral stability.

УДК 512.71, 512.581.2

К ВОПРОСУ О РОЛИ АЛГЕБР ДОПЛИХЕРА-РОБЕРТСА В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ

А.С. Ситдиков[1], З.Ю. Сунгатуллина[2]

1 *airat-vm@rambler.ru*; Казанский государственный энергетический университет
2 *zulfiya82@mail.ru*; Казанский государственный энергетический университет

Рассматривается математическая конструкция алгебры Доплихера-Робертса $\mathscr{O}_\rho$, которая играет важную роль в теории дуальности между абстрактными симметрическими тензорными C^*-категориями и компактными группами. Обсуждается ее роль в квантовой теории поля. Дается частный пример построения представления $\mathscr{O}_\rho$, который может использоваться при построении физических моделей на основе представлений алгебр наблюдаемых, удовлетворяющих специальному физическому условию, которое называется в алгебраической квантовой теории «критерием отбора Доплихера-Хаага-Робертса».

Ключевые слова: тензорная симметрическая C^*-категория, алгебра Доплихера-Робертса, представление.

Введение

В своей работе [1] С. Доплихер и Дж. Робертс обобщили теорию дуальности Танаки и Крейна для неабелевых компактных группп с помощью абстрактной симметрической моноидальной C^*-категории (дуальность ДР) в целях математического обоснования неабелевой суперотборной структуры квантовых систем [2]. Дуальным объектом к компактной неабелевой группе служит при этом абстрактная тензорная C^*-категория (вместо категории представлений самой группы в теории Танаки и Крейна), где определены алгебраические операции, являющиеся необходимыми элементами суперотборной структуры: операция сопряжения, перестановочная симметрия и композиция (бинарная операция тензорного произведения). Простая алгебраическая модель на основе тензорной C^*-категории, порожденной тензорными степенями неприводимых представлений группы $SU(2)$, была предложена нами в [3] для описания неабелевой суперотборной структуры малонуклонных систем, а дуальность для этой модели была доказана нами в [4].

Удобным техническим средством при установлении дуальности ДР является C^*-алгебра, порожденная эндоморфизмами $\rho, \sigma, \ldots$ квазилокальной C^*-алгебры наблюдаемых $\mathscr{A}$. Алгебра $\mathscr{A}$ представляет собой индуктивный предел алгебр локальных наблюдаемых $\mathscr{A}_o$:

$$\mathscr{A} = \overline{\cup_{o \subseteq M^4} \mathscr{A}_o}, \tag{1}$$

где $o \subset M^4$ – двойные конуса [5], M^4 – 4-мерное плоское псевдоевклидово многообразие. Локальную структуру алгебры наблюдаемых тогда можно представить как ковариантный функтор $\mathscr{A} : \mathscr{K} \to C^*Alg$. Здесь $\mathscr{K}$ – частично упорядоченное направленное множество, образованное двойными конусами (образующими базу топологии M^4), рассматриваемое как категория (где морфизмы задаются отношением порядка $o \le o'$ если $o \subseteq o'$ и $\oslash$ – в противном случае), C^*Alg – категория C^*-алгебр, где морфизмы представляют собой $*$-гомоморфизмы, сохраняющие единицу. Функтор $\mathscr{A}$ таким образом определяет сеть $(\mathscr{A}, \iota)_K$ C^*-алгебр локальных наблюдаемых:

$$\mathscr{A} : o \to \mathscr{A}_o, \;\; \iota_{oo'} : \mathscr{A}_{o'} \to \mathscr{A}_o; \quad o' \le o.$$

Сеть $(\mathscr{A}, \iota)_K$ удовлетворяет стандартным аксиомам алгебраической квантовой теории поля [5].

C^*-алгебры $\mathscr{O}_\rho, \mathscr{O}_\sigma, \ldots$, порожденные эндоморфизмами квазилокальной алгебры $\mathscr{A}$, являются ее подалгебрами и называются алгебрами Доплихера-Робертса (ДР-алгебры). Эти алгебры играют в квантовой теории поля важную роль и позволяют описывать наблюдаемые в пространстве внутренних степеней свободы (в пространствах изоспина, цвета и др.). Однако теория представлений таких алгебр к настоящему времени отсутствует, к тому же существует гипотеза, что эти представления невозможно классифицировать. Однако некоторые примеры можно построить, но они будут зависеть от выбора эндоморфизма ρ. Например, представления алгебр Кунца $\mathscr{O}_G$ [2] (получающиеся из категории тензорных степеней конечномерного гильбертова пространства и которые имеют ту же математическую структуру, что и $\mathscr{O}_\rho$) изучались в работе [6].

В этой работе после краткого описания структуры C^*-алгебры $\mathscr{O}_\rho$ мы предлагаем два вида ее представлений.

Алгебры $\mathscr{O}_\rho$

Пусть $\mathfrak{T}_\rho$ – симметрическая моноидальня C^*-категория, порожденная тензорными степенями объекта ρ с сопряжением и размерностью $d(\rho)$ [1], кратной к 1_ι (где $1_\iota \in end(\iota)$ и $\iota \equiv \rho^0$). Для любых $k \in \mathbb{Z}$, мы имеем индуктивную систему банаховых пространств

$$(\rho^r, \rho^{k+r}) \to (\rho^{r+1}, \rho^{k+r+1}) \to (\rho^{r+2}, \rho^{k+r+2}) \to \ldots,$$

определяемых для $r \in \mathbb{N}_0$ так, что $k + r \geqq 0$, где отображения задаются тензорным умножением справа на 1_ρ. Обозначим как O_ρ^κ индуктивный предел этой системы банаховых пространств. Заметим, что $O_\rho^{k*} = O_\rho^{-k}$ и O_ρ^0 представляют индуктивные пределы C^*-алгебр и поэтому являются C^*-алгебрами. Помимо операции сопряжения *, для определения индуктивного предела необходимо определить еще и композицию. А именно, если $T \in (\rho^r, \rho^{k+r})$, $S \in (\rho^{k+r}, \rho^{j+k+r})$, то композицию определим как $S \circ T \in (\rho^r, \rho^{j+k+r})$, причем $(S \circ T) \times 1_\rho = S \times 1_\rho \circ T \times 1_\rho$, $\|S \circ T\| \leqq \|S\| \, \|T\|$.

Кроме того, композиция порождает ограниченное билинейное отображение $O_\rho^j \times O_\rho^k \to O_\rho^{j+k}$. Очевидно, что $(ST)^* = T^*S^*$, $S^*S \in O_\rho^0$ и $\|S^*S\| = \|S\|^2$. Отметим, что необходимо делать различие между элементом банахова пространства $T \in (\rho^k, \rho^{k+r})$ и T как элемента O_ρ^k, поэтому мы будем обозначать последнее как $i(T)$.

Система $\{O_\rho^k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ $\mathbb{Z}$ представляет собой градуированную C^*-алгебру, где каждый элемент этой системы O_ρ^k является банаховым пространством. Произведение $S, T \to ST$ определяет отображение $O_\rho^j \times O_\rho^k \to O_\rho^{j+k}$, которое является билинейным с $\|ST\| \leqq \|S\|\,\|T\|$, а также это произведение определяет и антилинейную инволюцию $T \to T^*$ из O_ρ^k в O_ρ^{-k}. Более того, норма удовлетворяет C^*-условию $\|S^*S\| = \|S\|^2$. В частности, O_ρ^0 является Ñ*-алгеброй и C^*-норма на O_ρ^k, $k \in \mathbb{Z}$, единственна.

C^*-алгебру, полученную пополнением $\bigoplus\limits_{k\in\mathbb{Z}} O_\rho^k$ по единственной Ñ*-норме, обозначим как O_ρ. Эта алгебра оснащена действием группы $\mathbb{T}$, что позволяет восстановить градуировку:

$$O_\rho^k = \{X \in O_\rho : \alpha_\lambda(X) = \lambda^k X\}.$$

Полученная алгебра O_ρ также оснащена своим каноническим эндоморфизмом, который можно ввести как отображение $T \to 1_\rho \times T$, поскольку условие

$$1_\rho \times (T \times 1_\rho) = (1_\rho \times T) \times 1_\rho,$$

совместимо с индуктивной системой. Можно показать, что мы имеем эндоморфизм $\widehat{\rho}$ алгебры $\bigoplus\limits_{k\in\mathbb{Z}} O_\rho^k$, который расширяется до эндоморфизма $\widehat{\rho}$ алгебры O_ρ[1].

Представления алгебры $\mathscr{O}_\rho$[2]

Пусть π_0 – вакуумное представление алгебры (1). Рассмотрим гомоморфизм $\varphi_\rho : \mathscr{O}_\rho \to \mathscr{A}$, который отображает морфизмы $T \in (\rho^r, \rho^{k+r})$ из предыдущего пункта в себя. Пусть $\pi = \pi_0 \circ \varphi_\rho$ – представление, $\pi_0(\varphi_\rho(T)) \in \mathscr{B}(\mathscr{H}_0)$. Рассмотрим представление, содержащее некоторое количество кратных представлений (представления, квазисодержащиеся в некотором представлении) и представления, непрерывные в ультрасильной топологии (нормальные представления). В работе [2] показывается, что алгебра $\mathfrak{F} \supset \mathscr{A}$ (полевая алгебра) содержит подмножество изометрий, удовлетворяющих соотношениям $\psi_i^*\psi_j = \delta_{ij}I$, $\sum_{i=1}^d \psi_i\psi_i^* = I$, линейная оболочка которых образует d-мерное гильбертово пространство $\mathscr{H}$. Сплетающие операторы между тензорными степенями таких гильбертовых пространств образуют алгебру Кунца $\mathscr{O}_d$. Изометрии же порождают эндоморфизмы алгебры наблюдаемых $\rho(a) = \sum_{i=1}^d \psi_i a \psi_i^*$, $a \in \mathscr{A}$. Пусть ζ, ζ' – два неэквивалентных неприводимых

1 Таким образом, мы ассоциируем с категорией $\mathfrak{T}_\rho$ C^*-алгебру O_ρ в следующем смысле: для каждого морфизма $T \in (\rho^r, \rho^{k+r})$ из $\mathfrak{T}_\rho$ ставится в соответствие элемент $i(T)$ из O_ρ. Отображение $T \to i(T)$ является линейным и сохраняет композицию и сопряжение. Если смотреть на алгебру O_ρ с точки зрения C^*-категории с одним объектом, то $i : \mathfrak{T}_\rho \to O_\rho$ является *-функтором и образы морфизмов $\mathfrak{T}_\rho$ порождают O_ρ как C^*-алгебру

2 А.С. Ситдиков выражает глубокую благодарность профессору Сергею Нешвееву (университет Осло, Норвегия) за плодотворное обсуждение конкретных вопросов о роли алгебр типа Кунца и Доплихера-Робертса и их представлений в квантовой теории, а также за идею доказательства

представления $\mathscr{O}_d$ в $\mathscr{H}$. Рассмотрим эндоморфизмы ρ, ρ' алгебры $\mathscr{A}$: $\rho(a) = \sum_{i=1}^{d} \zeta(\psi_i) a \zeta(\psi_i)^*$, $\rho'(a) = \sum_{i=1}^{d} \zeta'(\psi_i) a \zeta'(\psi_i)^*$. Таким образом, $\zeta(\psi_i) \in (\iota, \rho)$, $\zeta'(\psi_i) \in (\iota, \rho')$, $\psi_i \in (\mathbb{C}, \mathscr{H})$ и, тем самым, получаем гомоморфизмы $\phi_i : \mathscr{O}_d \to \mathscr{O}_\rho$, отображающие ψ в $\zeta(\psi)$ (по сути эти гомоморфизмы осуществляют изоморфизмы, но здесь это для нас не важно).

Рассмотрим унитарный оператор $U = \sum_{i=1}^{d} \zeta'(\psi_i)\zeta(\psi_i)^*$ осуществляющий эквивалентность $\rho \sim \rho'$: $U\rho(a) = \rho'(a)U$. Отсюда имеем канонический эндоморфизм $\chi : \mathscr{O}_\rho \to \mathscr{O}_{\rho'}$ отображающий $\zeta(\psi_i) \in (\iota, \rho)$ $U\zeta(\psi_i) = \zeta'(\psi_i) \in (\iota, \rho')$. Другими словами, χ удовлетворяет соотношению $\chi \circ \phi_1 = \phi_2$.

Рассмотрим теперь представления $\pi_0 \circ \zeta_\rho$ и $\pi_0 \circ \zeta_{\rho'} \circ \chi$ алгебры $\mathscr{O}_\rho$. Нетрудно показать, что эти представления не являются ни квазисодержащимися в некотором представлении, ни нормальными. Следовательно, для построения категории представлений $\mathscr{O}_\rho$, удовлетворяющих критерию отбора Доплихера-Хаага-Робертса, можно выбрать класс представлений, необходимый для решения данной задачи.

Литература

1. Doplicher S., Roberts J.E. *A new duality theory for compact groups* // Invent.math. – 1989. – Vol. 98. – P. 157–218.

2. Doplicher S., Roberts J.E.*Why there is field algebra with a compact gauge group describing the superselection structure in particle physics* // Comm. Math. Phys. – 1990. – Vol. 131. – P. 51–107.

3. Кириллов М.И., Никитин А.С., Ситдиков А.С. *Алгебраическая модель нуклонных систем при наличии правил суперотбора по изоспину* // Известия РАН. Серия физическая. – 2018. – Т. 82. – N 10. – С. 1403–1407.

4. Ситдиков А. С., Никитин А. С., Сунгатуллина З. Ю. *Группа эндоморфизмов симметрического функтора простой алгебраической модели* // Вестник казанского государственного энергетического университета. – 2018. – N 1 (37). – С. 7–14.

5. Хоружий С. С. *Введение в алгебраическую квантовую теорию поля*. – М.: Наука, 1986. – 304 с.

6. Palle E., Jorgensen T. *Representations of Cuntz algebras, loop groups and wavelets.* arxiv:math/0008102 [math.FA]

THE ROLE OF DOPLICHER-ROBERTS ALGEBRAS IN QUANTUM THEORY

A.S. Sitdikov, Z.Yu. Sungatullina

The mathematical construction of the Dopplicher-Roberts algebra $\mathscr{O}_\rho$ is considered. The algebras plays an important role in the theory of duality between abstract symmetric tensor C^*-categories and compact groups. In this paper, we also suggest a particular examples of constructing the representations of $\mathscr{O}_\rho$. These representations can play a role in constructing physical models based on the representations of algebras of observables satisfying to the special physical condition, which is called in algebraic quantum field theory Doplicher–Haag–Roberts (DHR) selection criterion.

Keywords: tensor symmetric C^*-category, Doplicher-Roberts algebra, representation.

УДК 517.518.87

О СИНК-АППРОКСИМАЦИИ ОСОБЫХ ИНТЕГРАЛОВ ПО ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ОСИ

Ю.С. Солиев[1]

1 *su1951@mail.ru*; Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет

Для особых (сингулярных и гиперсингулярных) интегралов с ядром Коши по действительной оси с помощью синк-аппроксимаций построены и исследованы квадратурные формулы с узлами различной кратности.

Ключевые слова: особый интеграл, синк-аппроксимация, квадратурная формула.

Синк-аппроксимации аналитических функций и их приложения хорошо изучены [1]- [3]. Важные результаты в этом направлении в классе непрерывных функций на отрезке получены в работах А.Ю. Трынина (см., напр., [4]). Приложение синк-аппроксимаций к приближенному вычислению сингулярного интеграла Гильберта рассматривалась в работе [5].

Ниже рассматриваются вопросы приложения синк-аппроксимаций к вычислению интегралов

$$Kf = K(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)}{t-x}dt, \tag{1}$$

$$Af = A(f;x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(t)}{(t-x)^2}dt \tag{2}$$

понимаемых в смысле главного значения по Коши и конечного значения по Адамару соответственно, где $f(x)$ – плотность интегралов.

Пусть C – множество всех комплексных чисел, R – множество всех действительных чисел, $L_p(R)$ – пространство всех измеримых на R функций f с нормой $\|f\|_{L_p} < \infty$, где

$$\|f\|_{L_p} = \left\{\left(\int_R |f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}, 1 \le p < \infty;\ \sup_{x\in R}|f(t)|, p = \infty\right\}.$$

Следуя [1], обозначим: $W(h)(h>0)$ – класс функций f, аналитических в C, таких, что $f(t) \in L_2(R)$ и $\forall z \in C$ выполняется неравенство $|f(z)| \le C_1 \exp\left(\frac{\pi|z|}{h}\right)$, где C_k $(k=1,2,\dots)$ – положительные постоянные; $L_\alpha(D_d)$ – класс аналитических функций f в области $D_d = \{z \in C : |\mathrm{Im} z| < d\}$, таких, что $\forall z \in D_d$ выполняется неравенство $|f(z)| \le C_2 \left|\exp(\alpha z)\right| \left(1+|\exp z|\right)^{-2\alpha}$, $\alpha > 0$.

Для $f \in W(h)$ справедливо [1] представление

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kh)\,\mathrm{sinc}\,\frac{x-kh}{h}, \mathrm{sinc}\,x = \frac{\sin \pi x}{\pi x}. \tag{3}$$

Обозначим

$$f_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} f(kh)\,\mathrm{sinc}\,\frac{x-kh}{h}.$$

Аппроксимируя плотность интегралов выражением $f_N(x)$, получим квадратурные формулы

$$Kf = K(f_N;x) + R_N f = \frac{\pi}{2h}\sum_{k=-N}^{N} f(kh)(kh-x)\,\mathrm{sinc}^2\frac{x-kh}{2h} + R_N f, \tag{4}$$

$$Af = A(f_N;x) + R_N f = \frac{\pi}{2h}\sum_{k=-N}^{N} f(kh)(\mathrm{sinc}^2\frac{x-kh}{2h} - 2\,\mathrm{sinc}\frac{x-kh}{h}) + R_N f, \tag{5}$$

где $R_N f = R_N(f;x)$ – остаточные члены.

Теорема 1. *Пусть* $f \in L_\alpha(D_d), \alpha > 0, h = \sqrt{\frac{\pi d}{\alpha N}}$ *и* $p = 2$ *или* $p = \infty$. *Тогда для остаточного члена квадратурной формулы (4) справедлива оценка*

$$\|R_N f\|_{L_p} \le C_3 N^{\left(1-\frac{1}{p}\right)/2} (\ln N)^{1-\frac{2}{p}} \exp(-\sqrt{\pi d \alpha N}).$$

Квадратурная формула (4) приведена в [6] и исследована для плотностей из других классов функций.

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 для остаточного члена квадратурной формулы (5) справедлива оценка*

$$\|R_N f\|_{L_p} \le C_4 N^{\left(3-\frac{1}{p}\right)/2} (\ln N)^{1-\frac{2}{p}} \exp(-\sqrt{\pi d \alpha N}).$$

Рассмотрим теперь случай кратных узлов. Для $f \in W(h)$ справедливо [3] представление

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (f(kh) + (x-kh) f'(kh))\,\mathrm{sinc}^2\frac{x-kh}{h}. \tag{6}$$

Следовательно, если $f \in W(h)$, то

$$Kf = K(f;x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (a_k(x) f(kh) + b_k(x) f'(kh)),$$

$$Af = A(f;x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (c_k(x) f(kh) + d_k(x) f'(kh)),$$

$$a_k = \frac{h}{\pi(x-kh)}(\mathrm{sinc}\frac{2(x-kh)}{h} - 1), b_k(x) = \frac{h}{\pi}\,\mathrm{sinc}\frac{2(x-kh)}{h},$$

$$c_k = \frac{2h}{\pi(x-kh)^2}(1 - \mathrm{sinc}\frac{2(x-kh)}{h}) - \frac{2\pi}{h}\,\mathrm{sinc}^2\frac{x-kh}{h},$$

$$d_k(x) = \frac{h}{\pi(x-kh)}(1 - \mathrm{sinc}\frac{2(x-kh)}{h}) - \frac{2\pi}{h}(x-kh)\,\mathrm{sinc}^2\frac{x-kh}{h}, \tag{7}$$

Обозначим

$$H_N(x) = \sum_{k=-N}^{N} (f(kh) + (x-kh)f'(kh)) \operatorname{sinc}^2 \frac{x-kh}{h}.$$

Тогда

$$Kf = K(H_N; x) + R_N f = \sum_{k=-N}^{N} (a_k(x) f(kh) + b_k(x) f'(kh)) + R_N f, \tag{8}$$

$$Af = A(H_N; x) + R_N f = \sum_{k=-N}^{N} (a_k(x) f(kh) + b_k(x) f'(kh)) + R_N f, \tag{9}$$

где $a_k(x), b_k(x), c_k(x)$ и $d_k(x)$ определены в (7).

Теорема 3. *В условиях теоремы 1 для остаточных членов квадратурных формул (8) и (9) справедливы соответственно оценки*

$$\left\| R_N f \right\|_{L_p} \le C_5 N^{(3-\frac{1}{p})/2} (\ln N)^{1-\frac{2}{p}} \exp(-\sqrt{\pi d \alpha N})$$

$$\left\| R_N f \right\|_{L_p} \le C_6 N^{(5-\frac{1}{p})/2} (\ln N)^{1-\frac{2}{p}} \exp(-\sqrt{\pi d \alpha N}).$$

Заметим, что некоторые квадратурные формулы для гиперсингулярных интегралов Коши и Гильберта, понимаемых в смысле конечной части по Адамару, рассмотрены в работах [7], [8].

Литература

1. Stenger F. *Numerical Methods Based on Sinc and Analytic Functions.* – New York: Springer, 1993. – 565 p.

2. Stenger F. *Handbook of Sinc Numerical Methods.* – CRC Press, Boca Raton, 2011. – 460 p.

3. Хургин Я.И., Яковлев В.П. *Финитные функции в физике и технике.* – М.: Наука, 1971. – 408 с.

4. Трынин А.Ю. *Операторы интерполирования и аппроксимация непрерывных функций.* – Автореф. дисс. ... докт. физ.-мат. н. Саратов, 2013.

5. Солиев Ю.С. *О синк-аппроксимации сингулярных интегралов Гильберта.* Современные методы теории функций и смежные проблемы. – Материалы Международной конф. Воронежская зимняя матем. школа. Воронеж, Издательский дом ВГУ, 2019. С. 241-242.

6. Stenger F. *Approximation Via Whittakers Cardinal Function.* – J. of Approximation Theory. – 17. – 1976. – P. 222-240.

7. Солиев Ю.С. *Квадратурные формулы с кратными узлами для гиперсингулярного интеграла Гильберта.* – Труды математического центра им. Н.И.Лобачевского, том 54. Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Материалы XIII-й междунар. школы-конференции. Казань, Казан. ун-т, 2017. – С. 334-336.

8. Солиев Ю.С. *К приближенному вычислению гиперсингулярного интеграла по действительной оси.* Современные проблемы теории функций и их приложения. – Материалы 19-й межд. Саратовской зимней школы, посв. 90-летию акад. П.Л.Ульянова. Саратов. ООО Изд-во «Научная книга», 2018. – С. 297-299.

ABOUT SINC-APPROXIMATIONS OF SPECIAL INTEGRALS ON THE REAL AXIS

Yu.S. Soliev

With the help of sync-approximations, for special (singular and hypersingular) integrals with the Cauchy kernel along the real axis, quadrature formulas with nodes of different multiplicities are constructed and investigated.

Keywords: special integral, sinc-approximation, quadrature formula.

УДК 517.28, 517.54, 517.41

ГИПОТЕЗА О ЯКОБИАНЕ, СТРУКТУРА ОТОБРАЖЕНИЙ КЕЛЛЕРА

В.В. Старков[1]

1 *vstarv@list.ru*; Petrozavodsk state university

Гипотеза о якобиане впервые была сформулирована Келлером в 1939 г. В современной трактовке она предполагает инъективность полиномиального отображения $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$) при условии, что якобиан $J_f \equiv const \neq 0$. В этой заметке ставится вопрос о структуре полиномиальных отображений f, для которых $J_f \equiv const \neq 0$.

Ключевые слова: гипотеза о якобиане, отображение Келлера.

Обозначим через $\mathscr{P}_m$ множество всех полиномов в $\mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{C}^n$) степени, не превосходящей m. Пусть P_m — множество всех полиномиальных отображений $F = (F_1, \dots, F_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (или $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$), $F_k \in \mathscr{P}_m (k = 1, \dots, n)$ степени $\deg F_k \le m$. Обозначим через DF матрицу Якоби и через J_F — якобиан отображения F (в комплексном случае DF и JF комплексные). Сформулированная Келлером [1] в 1939 г. *гипотеза о якобиане (***JC***)* в современной ее трактовке заключается в следующем:

если $F \in P_m$ и $J_F \equiv const \neq 0$, то F инъективно в $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$).

Положительное решение гипотезы открывало бы возможность ее обширного приложения в ряде направлений математики.

В [2] гипотеза доказана для $F \in P_2$ для любого n, в [3] гипотеза проверена для $n = 2$ и $F \in P_{100}$. Однако, до сих пор **JC** не доказана и не опровергнута ни при каком значении n. Гипотеза включена в список "Mathematical Problems for the Next Century" [4].

В этой заметке ставится вопрос о структуре отображений $F \in P_m$ с $J_F \equiv const \neq 0$, именно он представляется ключевым в доказательстве или опровержении **JC**. Решение этого вопроса с последующим применением критериев или достаточных условий инъективности отображения приведет к существенным продвижениям в **JC**.

Отображение $F \in P_m$ будем называть отображением Келлера, если $J_F \equiv 1$ и его матрица Якоби $D_F(0) = I$. В [5] дано полное описание отображений Келлера для $n = 2, m = 3$.

Теорема A. [5] *Пусть $F \in P_2(3), F(0) = 0$. Отображение F – отображение Келлера тогда и только тогда, когда $F = A^{-1} \circ g \circ A$, где $g(x, y) = (U(x, y), V(x, y))$,*

$$U(x, y) = x + \alpha_2 (x + y)^2 + \alpha_3 (x + y)^3,$$

$$V(x,y) = y - \alpha_2(x+y)^2 - \alpha_3(x+y)^3,$$

α_2 и α_3 – произвольные фиксированные постоянные, A – линейное однородное невырожденное отображение.

Для $m > 3$ множество отображений Келлера устроено уже более сложно (см. [6]). В [7] аналог Теоремы А получен в виде достаточного условия.

Теорема B. [7] *Гипотеза о якобиане справедлива для полиномиальных отображений $F(X) = (A \circ f \circ A^{-1})(X)$, где $X = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, A – линейное однородное невырожденное отображение, $f = (u_1, \ldots, u_n)$, для $k = 1, \ldots, n$*

$$u_k(X) = x_k + \gamma_k[\alpha_2(x_1 + \ldots + x_n)^2 + \alpha_3(x_1 + \ldots + x_n)^3 + \ldots +$$
$$+\alpha_m(x_1 + \ldots + x_n)^m],$$

$\alpha_j, \gamma_k \in \mathbb{R}$ с $\sum_{k=1}^n \gamma_k = 0$.

Теорема B допускает следующее существенное обобщение:

Теорема C. [7] *Пусть для $n \geq 2$, отображение $F(X) = (u_1, \ldots, u_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ определено следующим образом:*

$$u_k(X) = x_k + p_{k2}(x_1 + \cdots + x_n)^2 + \cdots + p_{km}(x_1 + \cdots + x_n)^m, \quad (1)$$

$(k = 1, \ldots, n)$ и p_{kj} - любые постоянные, удовлетворяющие условию $\sum_{k=1}^n p_{kj} = 0$ для всех $j = 2, \ldots, m$. Тогда **JC** *справедлива для F; причем $F = f_1 \circ \cdots \circ f_N$ где f_l $(l = 1, \ldots, N)$ – полиномиальные отображения вида f из теоремы B.*

Вопрос 1: останется ли справедливым утверждение Теоремы C, если в определении (1) координатных функций $u_k(X)$ сумму $z = x_1 + \cdots + x_n$ заменить на $Z = b_1x_1 + \cdots + b_nx_n$ с произвольным вектором $B = (b_1 + \cdots + b_n), B \nparallel (1, \ldots, 1)$?

Задача решается подбором для каждого отображения f из теоремы C неособенной матрицы A такой, что $F(X) = A^{-1}f(AX)$ обладает нужными свойствами. Оказывается, что такая матрица A не всегда существует.

Теорема 1. *Пусть $k = 1, \ldots n$ и $P^{(k)} = (p_{k2}, \ldots, p_{km})$ – $(m-1)$–мерные векторы, не все из которых нулевые, $\sum_{k=1}^n P^{(k)} = 0$. Пусть $\mathbb{R}^n \ni B = (b_1, \ldots, b_n) \neq (1, \ldots, 1)$, $f(X)$ из теоремы C определяется условием (1) посредством векторов $P^{(k)}$.*

1) Если в наборе векторов $P^{(k)}, k = 1, \ldots, n$, линейно независимых векторов не более $(n-2)$, то существует неособенная матрица A такая, что

$$F(X) = A^{-1}f(AX) = X + \begin{pmatrix} q_{12}Z^2, \ldots, q_{1m}Z^m \\ \ldots \\ q_{n2}Z^2, \ldots, q_{nm}Z^m \end{pmatrix}, \quad \sum_{k=1}^n q_{kj} = 0 \text{ для } \forall\ j = 2, \ldots, m, \quad (2)$$

где $Z = (B, X)$.

2) Если среди векторов $P^{(k)}, k = 1, \ldots, n$, $(n-1)$ линейно независимых, то не существует матрицы A со свойством (2).

Вопрос 2: насколько в теореме 1 важно условие $\sum_{k=1}^n q_{kj} = 0$ для того, чтобы полиномиальные отображения

$$F(X) = X + \sum_{j=2}^m Q_j Z^j, \text{ где } Q_j = \begin{pmatrix} q_{1j} \\ \ldots \\ q_{nj} \end{pmatrix}, \quad Z = (B, X), \quad (3)$$

было отображением Келлера?

Теорема 2. *Для любого вектора* $B = (b_1, \dots, b_n)$ *и любых векторов* Q_j, $j = 1, \dots, m$, *из линейного пространства* M, *ортогонального вектору* B, *полиномиальное отображение* $F(X)$ *из (3) является отображением Келлера и для него справедлива* **JC.**

Теорема C является частным случаем теоремы 2 при $B = (1, \dots, 1)$. В теореме 2 условие принадлежности векторов Q_j пространству $M, M \perp B$, является существенным. Будут представлены и другие результаты в этом направлении, в частности,

Теорема 3. *Пусть для каждого натурального* $s = 1, \dots, r$ *полиномиальное отображение*

$$F_s(X) = X + \sum_{j=2}^{m} Q_j^{(s)} Z_s^j(X) =: \ X + V^{(s)}(X)$$

определяется формулой (3) и удовлетворяет теореме 2, $Z_s(X) = (B_s, X)$, *векторы* $B_s = (b_1^{(s)}, \dots, b_n^{(s)}) \neq \mathbb{O}$; *пусть* $M_{n-1}^{(s)}$ *– линейное* $(n-1)$*- мерное пространство,* $M_{n-1}^{(s)} \perp B_s$ *и для любого* $j = 2, \dots, m$ *справедливы включения* $Q_j^{(1)} \in \bigcap_{s=1}^{r} M_{n-1}^{(s)}$, $Q_j^{(2)} \in \bigcap_{s=2}^{r} M_{n-1}^{(s)}$, $\dots$, $Q_j^{(r)} \in M_{n-1}^{(r)}$. *Тогда полиномиальное отображение* $F = F_r \circ F_{r-1} \circ \dots \circ F_1$ *имеет вид* $F(X) = X + \sum_{s=1}^{r} V^{(s)}(X)$ *и для него справедлива* **JC**.

Все сформулированные здесь результаты справедливы как в вещественном, так и в комплексном случае.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01229).

Литература

1. Keller O. H. *Ganze Cremona-Transformationen* // Monatshefte Math. Phys. – 1939. – V. 47. – P. 299–306.

2. Wang S. S.-S. *A Jacobian criterion for separability* // J. of Algebra. – 1980. – V. 65. – № 2. – P. 453–494.

3. Moh T. T. *On the global Jacobian conjecture and the configuration of roots*// J. reine und angew. Math. – 1983. – V. 340. – P. 140–212.

4. Smale S. *Mathematical Problems for the Next Century* // Math. Intelligencer. – 1998. – V. 20. – № 2. – P. 7–15.

5. Starkov V. V. *Jacobian conjecture, two-dimensional case* // Probl. Anal. Issues Anal. – 2016. – V. 5 (23). – № 2. – P. 69–78.

6. Starkov V. V. *Structure of Keller mappings, two-dimensional case* // Probl. Anal. Issues Anal. – 2017. – V. 6 (24). – № 1. – P. 68–81.

7. Ponnusamy S., Starkov V. V. *The Jacobian Conjecture and Injectivity Conditions* // Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society. – 2018. – V. 41. – № 4. – P. 2099–2115.

JACOBIAN CONJECTURE, STRUCTURE OF KELLER MAPPINGS

V.V. Starkov

The Jacobian Conjecture was first formulated by O. Keller in 1939. In the modern form, it supposes injectivity of the polynomial mapping $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n (\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n)$ *provided that the Jacobian* $J_f \equiv const \neq 0$.

In this note, we consider structure of polynomial mappings f that provide $J_f \equiv const \neq 0$.
Keywords: Jakobian conjecture, Keller mappings.

УДК 517.538.52+517.538.53

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ МНОГОЧЛЕНОВ ЭРМИТА – ПАДЕ В ЯВНОМ ВИДЕ

А.П. Старовойтов[1], Н.В. Рябченко[2]

1 *svoitov@gsu.by*; Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
2 *nmankevich@tut.by*; Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

В работе введены новые понятия: вполне нормальный индекс, вполне совершенная система функций. С помощью этих понятий для произвольной системы степенных рядов сформулированы и доказаны критерии единственности решения двух задач Эрмита – Паде, получены явные детерминантные представления многочленов Эрмита – Паде 1-го и 2-го рода. Доказанные утверждения дополняют хорошо известные результаты в теории аппроксимаций Эрмита – Паде.

Ключевые слова: многочлены Эрмита – Паде, нормальный индекс, совершенная система, определители Ганкеля.

1. Многочлены Эрмита – Паде 2-го рода

1.1. Постановка задачи. Основные определения. Пусть $f = (f_1, ..., f_k)$ – набор, состоящий из k формальных степенных рядов

$$f_j(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f_i^j}{z^{i+1}}, \ j = 1, 2..., k \tag{1.1}$$

с комплексными коэффициентами. Множество k–мерных мультииндексов $n = (n_1, ..., n_k)$, т.е. упорядоченных k целых неотрицательных чисел, обозначим $\mathbb{Z}_+^k$. Порядок мультииндекса $n = (n_1, ..., n_k)$ – это сумма $|n| := n_1 + ... + n_k$. Зафиксируем ненулевой мультииндекс $n \in \mathbb{Z}_+^k$ и рассмотрим следующую задачу Эрмита – Паде [1; гл. 4, § 3]:

Задача A. *Найти тождественно не равный нулю многочлен $Q = Q_{|n|}$, $\deg Q \leqslant |n|$ такой, чтобы для некоторых многочленов $P_1 = P_n^1, \dots, P_k = P_n^k$ выполнялись равенства*

$$R_n^j(z) = Q(z) f_j(z) - P_j(z) = \frac{c_j}{z^{n_j+1}} + \dots, \ j = 1, 2..., k. \tag{1.2}$$

Решение поставленной задачи существует [1], а многочлены $Q_{|n|}$ и P_n^j находятся с точностью до мультипликативного множителя. Неединственность может быть и более существенной.

Принято говорить [1], что задача A имеет единственное решение, если все решения задачи A можно записать в виде $(\lambda Q, \lambda P)$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq 0$, а (Q, P) – некоторое одно фиксированное решение.

Определение 1.1. *Если пара (Q, P), где $P = (P_1, \dots, P_k)$, является решением задачи A с индексом $n \in \mathbb{Z}_+^k$, то многочлены $Q, P_1, \dots, P_k$ называют многочленами Эрмита – Паде 2-го рода для набора (системы) f формальных степенных рядов (1.1).*

Центральными в теории таких многочленов являются понятия нормального индекса n и совершенной системы f (см. [1; гл. 4, § 3], [2]).

Определение 1.2. *Индекс $n \in \mathbb{Z}_+^k$ называется нормальным для f относительно задачи А, если для любого решения (Q, P) задачи А с этим индексом* $\deg Q = |n|$.

Определение 1.3. *Систему f будем называть совершенной, если все индексы $n \in \mathbb{Z}_+^k$ являются нормальными для f относительно задачи А.*

Хорошо известно [1], что нормальность индекса n является достаточным условием единственности решения задачи А. Нетрудно привести пример, который показывает, что это условие не является необходимым условием единственности решения задачи А. До сих пор нет ответа на следующий вопрос. Каковы необходимые и достаточные условия на индекс $n \in \mathbb{Z}_+^k$ и систему f, определяемую равенствами (1.1), при которых задача А имеет единственное решение?

1.2. Критерий единственности решения задачи А. Поскольку компоненты вектора $f = \{f_1, \ldots, f_k\}$ являются формальными степенными рядами, поставленная задача является алгебраической и, следовательно, имеет алгебраическое решение.

Введём необходимые обозначения. Для ненулевого мультииндекса $n = (n_1, \ldots, n_k)$ и фиксированного $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, в предположении, что $n_j \neq 0$, рассмотрим матрицы-строки порядка $1 \times (|n|+1)$

$$F_i^j = \begin{pmatrix} f_{i-1}^j & f_i^j & f_{i+1}^j & \ldots & f_{|n|+i-2}^j & f_{|n|+i-1}^j \end{pmatrix}, \ i = 1, \ldots, n_j;$$

функциональные матрицы-строки порядка $1 \times (|n|+1)$

$$E(z) = \begin{pmatrix} 1 & z & z^2 & \ldots & z^{|n|-1} & z^{|n|} \end{pmatrix},$$

$$E_j(z) = \begin{pmatrix} 0 & f_0^j & f_0^j z + f_1^j & \ldots & \sum\limits_{p=0}^{|n|-2} f_p^j z^{|n|-p-2} & \sum\limits_{p=0}^{|n|-1} f_p^j z^{|n|-p-1} \end{pmatrix};$$

матрицу порядка $n_j \times (|n|+1)$

$$F^j = \begin{bmatrix} F_1^j & F_2^j & \ldots & F_{nj}^j \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} F_1^j \\ \vdots \\ F_{n_j}^j \end{bmatrix}$$

и матрицу $F_n = \begin{bmatrix} F^1 & F^2 & \ldots & F^k \end{bmatrix}^T$ порядка $|n| \times (|n|+1)$. Рассмотрим также определители $(|n|+1)$-го порядка

$$d_{n,i}^j = det \begin{bmatrix} F^1 & F^2 & \ldots & F^k & F_{i+n_j}^j \end{bmatrix}^T, \ i = 1, 2, \ldots .$$

Определение 1.4. *Индекс $n \in \mathbb{Z}_+^k$ назовём вполне нормальным для f относительно задачи А, если ранг матрицы F_n равен $|n|$.*

Теорема 1.1. *Для того чтобы для фиксированного индекса $n \in \mathbb{Z}_+^k$ задача А имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы индекс n был вполне нормальным относительно задачи А, т.е.* $\operatorname{rang} F_n = |n|$.

В случае, если индекс n является вполне нормальным, при определённом выборе мультипликативного множителя для решений задачи (Q,P) справедливы следующие детерминантные представления:

$$Q_{|n|}(z) = det\left[\, F^1 \;\; F^2 \;\; \dots \;\; F^k \;\; E(z)\,\right]^T, \; P^j_n(z) = det\left[\, F^1 \;\; F^2 \;\; \dots \;\; F^k \;\; E_j(z)\,\right]^T,$$

$$R^j_n(z) = Q_{|n|}(z) f_j(z) - P^j_n(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d^j_{n,i}}{z^{n_j+i}}.$$

2. Многочлены Эрмита – Паде 1-го рода

2.1. Постановка задачи. Основные определения. Через $\mathbb{N}^k$ обозначим множество k–мерных мультииндексов (индексов) $n = (n_1, \dots, n_k)$, представляющих собой упорядоченный набор k натуральных чисел. Рассмотрим другую задачу Эрмита – Паде (см. [1; гл. 4, § 3], [2]):

Задача B. *Для заданного индекса $n = (n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$ и набора f формальных степенных рядов (1.1) найти такие не равные тождественно нулю одновременно многочлены $A_1 = A^1_n, \dots, A_k = A^k_n$, $\deg A_1 \leqslant n_1 - 1, \dots, \deg A_k \leqslant n_k - 1$, что для некоторого многочлена $B = B_n$*

$$L_n(z) := \sum_{j=1}^{k} A_j(z) f_j(z) - B(z) = \frac{c_n}{z^{|n|}} + \dots.$$

Известно [1], что решение поставленной задачи существует, а многочлены A_j и B находятся с точностью до мультипликативного множителя. Как и в задаче A, неединственность может быть и более существенной.

Принято говорить [1], что для заданного индекса $n \in \mathbb{N}^k$ и набора f задача B имеет единственное решение, если все решения этой задачи с этим индексом можно записать в виде $(\lambda A, \lambda B)$, где $A = (A_1, \dots, A_k)$, (A, B) — некоторое одно фиксированное решение, а $\lambda \in \mathbb{C}, \lambda \neq 0$.

Определение 2.1. *Если пара (A, B), где $A = (A_1, \dots, A_k)$, является решением задачи B с индексом $n \in \mathbb{N}^k$, то многочлены $A_1, \dots, A_k$ называют многочленами Эрмита – Паде 1-го рода для системы f формальных степенных рядов (1.1).*

Как и в случае задачи A центральным в теории таких многочленов является понятие нормального индекса n.

Определение 2.2. *Индекс $n \in \mathbb{N}^k$ называется нормальным для f относительно задачи B, если для любого решения задачи B с этим индексом* $\deg A_j = n_j - 1$, $j = 1, \dots, k$.

Известно [1], что нормальность индекса n для f относительно задачи B является достаточным условием того, чтобы задача B имела единственное решение. Нетрудно привести пример, который показывает, что это условие не является необходимым.

2.2. Критерий единственности решения задачи B.

Зафиксируем индекс $n \in \mathbb{N}^k$ и для каждого $j = 1, 2, \dots, k$ рассмотрим матрицы–столбцы порядка $(|n| - 1) \times 1$

$$G^j_i = \left(f^j_{i-1} \;\; f^j_i \;\; \dots \;\; f^j_{|n|+i-3} \right)^T, \; i = 1, 2, \dots, n_j,$$

и матрицы $G^j = \begin{bmatrix} G_1^j & G_2^j & \ldots & G_{n_j}^j \end{bmatrix}$ порядка $(|n|-1) \times |n_j|$. Рассмотрим также матрицу $G_n = \begin{bmatrix} G^1 & G^2 & \ldots & G^k \end{bmatrix}$ порядка $(|n|-1) \times |n|$ и функциональные матрицы– строки порядка $1 \times |n|$

$$U_j(z) = \begin{pmatrix} 0 \; 0 \; \ldots \; 0 \; 1 \; z \; \ldots \; z^{n_j-1} \; \ldots \; 0 \; 0 \; \ldots \; 0 \end{pmatrix},$$

$$U(z) = \begin{pmatrix} 1 & z & \ldots & z^{n_1-1} & 1 & z & \ldots & z^{n_2-1} & \ldots & 1 & z & \ldots & z^{n_k-1} \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $V_j(z)$ матрицу– строку, которая при $n_j > 1$ получается в результате замены в матрице $U_j(z)$ ненулевых элементов: 1 заменяем на 0, z заменяем на f_0^j, z^2 заменяем на $f_0^j z + f_1^j$ и т.д., наконец, z^{n_j-1} заменяем на $\sum\limits_{i=0}^{n_j-2} f_i^j z^{n_j-i-2}$ (при $n_j = 1$ в $U_j(z)$ единственный ненулевой элемент 1 заменяем 0). Матрицу-строку $V(z)$ определим равенством

$$V(z) = V_1(z) + \ldots + V_k(z).$$

Если в матрице G_n порядка $(|n|-1) \times |n|$ добавить в качестве последней строки строку $U_j(z)$, то получим квадратную матрицу. Определитель этой матрицы обозначим через $A_j(z)$. Если в определителе $A_j(z)$ последнюю строку $U_j(z)$ заменить строкой $V(z)$, получим новый определитель. Его обозначим через $B(z)$. И, наконец, если последнюю строку определителя (2.2) заменить матрицей–строкой

$$\left(f^1_{|n|+i-2} \; f^1_{|n|+i-1} \cdots f^1_{|n|+n_1+i-3} \; \cdots \; f^k_{|n|+i-2} \; f^k_{|n|+i-1} \cdots f^k_{|n|+n_k+i-3} \right),$$

то полученный определитель обозначим через $\widetilde{d}_{n,i}$.

Определение 2.3. *Индекс $n \in \mathbb{N}^k$ назовём вполне нормальным для f относительно задачи B, если ранг матрицы G_n равен $|n|-1$.*

Теорема 2.1. *Для того чтобы для индекса $n \in \mathbb{N}^k$ задача B имела единственное решение, необходимо и достаточно, чтобы индекс n был вполне нормальным для f относительно задачи B, т.е.* $\operatorname{rang} G_n = |n| - 1$.

В случае, если индекс n является вполне нормальным, при определенном выборе мультипликативного множителя для решений задачи (A, B) справедливы следующие детерминантные представления:

$$A_j(z) := \det \begin{bmatrix} G_n \\ U_j(z) \end{bmatrix}, \; B(z) := \det \begin{bmatrix} G_n \\ V(z) \end{bmatrix}, \; j = 1 \ldots k;$$

$$L_n(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\widetilde{d}_{n,i}}{z^{|n|+i-1}}.$$

Литература

1. Никишин Е. М., Сорокин В. Н. *Рациональные аппроксимации и ортогональность.* – М.: Наука, 1988. – 256 с.

2. Аптекарев А. И., Буслаев В. И., Мартинес-Финкельштейн А., Суетин С. П. *Аппроксимации Паде, непрерывные дроби и ортогональные многочлены* // Успехи матем. наук. – 2011. – Т. 66. – № 6(402). – С. 37–122.

ABOUT THE EXPLICIT FORM OF HERMITE-PAD'E POLYNOMIALS

A.P. Starovoitov, N.V. Ryabchenko

In this article, new concepts are introduced: quite normal index and quite perfect system of functions. Using these concepts for an arbitrary system of power series, a criterion for the uniqueness of the solution of the two Hermite-Pad'e problems is formulated and proved, explicit determinant presentations for type I and type II Hermite-Pad'e polynomials are obtained. The proven assertions complement the well-known results of the theory of Hermite-Pad'e approximations.

Keywords: Hermite-Pad'e polynomials, normal index, perfect system, Hankel determinant.

УДК 517.54

КОНЕЧНАЯ ЛИСТНОСТЬ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Л.А. Суан[1]

1 *laxuan@ctuet.edu.vn*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Исследованы гармонические отображения круга на области, которые могут быть разрезаны на конечное число выпуклых подобластей. Получена оценка листности голоморфных отображений круга, составленных из аналитических компонент гармонического отображения.

Ключевые слова: гармонические, однолистные, n-листные, выпуклые функции, конструкция сдвига.

Пусть $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ – единичный круг на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $\mathscr{A}$ – линейное пространство аналитических функций, определенных в $\mathbb{D}$, наделенное топологией локально равномерной сходимости. Через $\mathscr{B}$ обозначим класс функций $\omega \in \mathscr{A}$ таких, что $|\omega(z)| < 1$ при $z \in \mathbb{D}$.

Рассмотрим линейное пространство комплекснозначных гармонических функций $f = h + \overline{g}$, где $h, g \in \mathscr{A}$ и $g(0) = 0$, наделенное той же топологией. Отметим, что представление $f = h + \overline{g}$ является единственным и называется каноническим представлением гармонической функции f. Функция h называется аналитической частью f, g называется ко-аналитической частью f. Будем говорить, что f сохраняет ориентацию, если якобиан $J_f(z) = |f_z(z)|^2 - |f_{\overline{z}}(z)|^2 > 0$ в $\mathbb{D}$. Так как $f_z(z) = h'(z)$ и $\overline{f_{\overline{z}}(z)} = g'(z)$, то условие $J_f(z) > 0$ эквивалентно неравенству $|g'(z)| < |h'(z)|$, а значит, $h'(z) \neq 0$ и таким образом, можно определить функцию $\omega \in \mathscr{B}$, которая называется дилатацией функции f по формуле $\omega(z) = g'(z)/h'(z)$, где $h'(z) \neq 0$ в $\mathbb{D}$. Пусть $\mathscr{S}$ – класс функций $f(z) = z + a_2 z^2 + \cdots$, аналитических и однолистных в $\mathbb{D}$.

Клуни и Шейл-Смолл предложили метод «конструкции сдвига» для получения гармонического отображения с заданной дилатацией на область, выпуклую в одном направлении, состоящий в сдвиге заданного конформного отображения вдоль параллельных прямых. Конструкция сдвига обосновывается следующей теоремой.

Теорема A [1]. *Сохраняющая ориентацию гармоническая функция* $f = h + \overline{g}$ *в* $\mathbb{D}$ *является однолистным отображением круга* $\mathbb{D}$*, выпуклым в направлении веществен-*

ной (соответственно, мнимой) оси тогда и только тогда, когда $h - g$ (соответственно, $h + g$) является конформным отображением круга $\mathbb{D}$, выпуклым в направлении вещественной (соответственно, мнимой) оси.

Эта теорема может быть переформулирована следующим образом

Теорема Б [2]. *Пусть функция $f = h + \overline{g}$ гармонична и локальна однолистна в $\mathbb{D}$. Тогда f однолистна и область $f(\mathbb{D})$ выпукла тогда и только тогда, когда аналитическая функция $h + e^{i\alpha} g$ является однолистной и выпуклой в направлении $(\alpha + \pi)/2$ для каждого α $(0 \le \alpha < 2\pi)$.*

Пусть функция $f = h + \overline{g}$ гармонична и выпукла в круге $\mathbb{D}$. В статье [5] была выдвинута гипотеза о существовании $\alpha \in \mathbb{R}$ такого, что аналитическая функция $h + e^{i\alpha} g$ выпукла. Однако в нашей работе [4] мы показали, что эта гипотеза неверна.

В данной работе мы исследуем вопрос о максимальной листности функции $H + e^{i\alpha} G$, где $H,\ G$ являются, соответственно, аналитической и ко-аналитической частями F для области, которую можно разрезать на n выпуклых подобластей. Для этого нам понадобится

Определение 1. [3] Функция $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ называется p-листной в области D, если она не принимает значения больше p раз в D и существует некоторое w_0 такое, что $F(z) = w_0$ имеет ровно p решений в D, когда корни подсчитываются в соответствии с их кратностями.

Определение 2. Область Ω называется n-выпуклой областью, если ее можно разрезать на n выпуклых подобластей.

Пусть Ω – n-выпуклая область, которая разрезана на n выпуклых подобластей Ω_k $(k = \overline{1, n})$. Пусть $F = H + \overline{G}$ – гармоническое и локально однолистное отображение круга $\mathbb{D}$ на n-выпуклую область Ω и $D_k = F^{-1}(\Omega_k) \in \mathbb{D}$. Нами доказана

Теорема. *Пусть $F = H + \overline{G}$ – гармоническое и локально однолистное отображение круга $\mathbb{D}$ на область Ω. Если Ω – n-выпуклая область, то функция $\Phi(z) = H(z) + e^{i\alpha} G(z)$ не более чем n-листна в круге $\mathbb{D}$.*

Литература

1. Clunie J.G., Sheil-Small T. *Harmonic univalent functions* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A. I. – 1984. – Vol. 9. – P. 3–25.

2. Duren P. *Harmonic Mappings in the Plane*. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004. – 226 p.

3. Goodman A.W. *An invitation to the study of univalent and multivalent functions* // Internat. J. Math. - Math. Sci. – 1979. – Vol. 2, № 2. – P. 163–186.

4. Kayumov I.R., Ponnusamy S., Xuan L.A. *Rotations of convex harmonic univalent mappings* // Bulletin des Sciences Mathématiques. – 2019. – Vol. 155, № 6. – P. 1–9.

5. Ponnusamy S., Sairam Kaliraj A. *On the coefficient conjecture of Clunie and Sheil-Small on univalent harmonic mappings* // Proc. Indian Acad. Sci. – 2015. – Vol. 125, № 3. – P. 277–290.

HARMONIC MAPPINGS AND FINITE VALENCY OF ANALYTIC FUNCTIONS

L.A. Xuan

We stydy harmonic mappings of a circle onto domains that can be cut into a finite number of convex subdomains. We obtain an estimate of the valency of holomorphic mappings of a circle composed of

analytical components of a harmonic mapping.
Keywords: harmonic, univalent, n-valent, convex functions, shear construction.

УДК 517.958, 530.145.6

АНДРЕЕВСКОЕ ОТРАЖЕНИЕ В СТРУКТУРЕ *p*-ВОЛНОВОЙ СВЕРХПРОВОДНИК–НОРМАЛЬНЫЙ МЕТАЛЛ

Т.С. Тинюкова[1], Ю.П. Чубурин[2]

1 *ttinyukova@mail.ru*; Удмуртский государственный университет
2 *chuburin@udman.ru*; Удмуртский федеральный исследовательский центр Уральского отделения Российской академии наук

В работе математически строго изучено отражение Андреева для гамильтониана Боголюбова – де Жена в случае одномерной p–волновой сверхпроводящей структуры при наличии потенциала. Доказано, что на стыке нормального металла и сверхпроводника в топологической фазе имеет место полное андреевское отражение (т.е. налетающий со стороны нормального металла электрон отражается как дырка) независимо от наличия примеси.

Ключевые слова: гамильтониан Боголюбова – де Жена, спектр, задача рассеяния, вероятность прохождения, отражение Андреева.

В последние приблизительно полтора десятилетия в теории сверхпроводимости активно разрабатывается новое направление, связанное с теоретическим открытием в сверхпроводящих структурах майорановских локализованных состояний (устойчивые квазичастицы с нулевой энергией вида «частица плюс дырка», подчиняющиеся неабелевой статистике), весьма перспективных для применения в будущих квантовых компьютерах [1].

Андреевское отражение возникает на стыке нормального (обычного) металла N и сверхпроводника S. Налетающий со стороны N электрон может отразиться от S обычным образом, как электрон (нормальное отражение) с вероятностью P_N, но может отразиться и как дырка (отражение Андреева) с вероятностью $P_A = 1 - P_N$. При полном (идеальном) андреевском отражении $P_A = 1$. Поскольку майорановские состояния возникают на границе $N - S$, возникает вопрос о связи между ними и андреевским отражением (см., например, [2]). В работе математически строго изучено отражение Андреева для гамильтониана Боголюбова–де Жена в случае одномерной p–волновой сверхпроводящей структуры при наличии потенциала. Доказано, что на стыке нормального металла и сверхпроводника имеет место полное андреевское отражение независимо от наличия примеси. Используемая методика позволяет описать собственные функции данного гамильтониана для нулевой энергии с целью определения их сходства с майорановскими состояниями.

Рассмотрим гамильтониан для структуры нормальный металл – p-волновой сверхпроводник вида

$$(H\psi)(n) = \begin{pmatrix} -\partial_x^2 - \theta(x)\mu_+ - \theta(-x)\mu_- & -\Delta\theta(x)\partial_x - \frac{\Delta}{2}\delta(x) \\ \Delta\theta(x)\partial_x + \frac{\Delta}{2}\delta(x) & \partial_x^2 + \theta(x)\mu_+ + \theta(-x)\mu_- \end{pmatrix},$$

где $\theta(x)$ — функция Хевисайда. Таким образом, для $x > 0$ имеем гамильтониан сверхпроводника, а для $x < 0$ — гамильтониан нормального металла. В импульсном представлении (после преобразования Фурье $\widehat{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ipx}\psi(x)\,dx$) получаем гамильтонианы сверхпроводника и нормального металла

$$\widehat{H}_+(p) = \begin{pmatrix} p^2 - \mu_+ & -ip\Delta \\ ip\Delta & -p^2 + \mu_+ \end{pmatrix},$$

$$\widehat{H}_-(p) = \begin{pmatrix} p^2 - \mu_- & 0 \\ 0 & -p^2 + \mu_- \end{pmatrix} \tag{1}$$

соответственно. Спектр H_- равен $(-\infty, \infty)$, а спектр H_+ имеет лакуну (сверхпроводящую щель), симметричную относительно нуля (см. [3]). Оператор H действует на фунции вида $\psi(x) = (\psi_1(x), \psi_2(x))^T$, где T – транспонирование, $\psi_1(x)$ описывает частицы, а $\psi_2(x)$ – дырки.

Рассмотрим теперь гамильтониан $H + V$, где

$$V = \begin{pmatrix} V_0(\delta(x) + \delta(x-a)) & 0 \\ 0 & -V_0(\delta(x) + \delta(x-a)) \end{pmatrix}$$

(слагаемые с $\delta(x)$ в потенциале характеризуют контакт, а слагаемые с $\delta(x-a)$ – примесь в сверхпроводнике). Ищем решение уравнения $(H+V)\psi = E\psi$ для задачи рассеяния при малых E, т.е. для энергий в щели. Интерес представляют вероятности отражения электрона, налетающего со стороны нормального металла, по первой и второй компонентам, т.е. для частиц и дырок. Решения уравнений $(H_\pm - E)\psi_\pm(x) = 0$ ищем в виде $\psi_\pm(x) = (\psi_\pm^1, \psi_\pm^2)^T = (A_\pm, B_\pm)^T e^{i\alpha_\pm x}$, где $\alpha_\pm$ — решение уравнения $\det(\widehat{H}_\pm(p) - E) = 0$, а $(A_\pm, B_\pm)^T$ удовлетворяет равенству $\big(\widehat{H}_\pm(\alpha_\pm) - E\big)(A_\pm, B_\pm)^T = 0$. Найденные решения $\psi_\pm(x)$, зависящие от произвольных констант, «склеиваем», пользуясь равенствами

$$\psi_+^1(0+) = \psi_-^1(0-), \quad \psi_+^2(0+) = \psi_-^2(0-), \tag{2}$$

$$4(\partial_x\psi_+^1(0+) - \partial_x\psi_-^1(0-)) - 2V_0(\psi_+^1(0+) + \psi_-^1(0+)) + \Delta(\psi_+^2(0+) + \psi_-^2(0+)) = 0, \tag{3}$$

$$4(\partial_x\psi_+^2(0+) - \partial_x\psi_-^2(0-)) - 2V_0(\psi_+^2(0+) + \psi_-^2(0+)) + \Delta(\psi_+^1(0+) + \psi_-^1(0+)) = 0. \tag{4}$$

Здесь полагаем $\delta(x) \cdot \psi^j(x) = \frac{1}{2}(\psi_+^j(0+) + \psi_-^j(0-))$, что отвечает симметричному расположению примеси относительно нуля. Таким образом, функция $\psi(x)$ непрерывна в нуле согласно (2), а согласно (3), (4) δ–функции, возникающие при дифференцировании скачка первой производной, взаимно уничтожаются с δ–функциями, входящими в потенциал.

Андреевское отражение со «склейкой» в нуле

Рассмотрим случай $x < 0$. Предположим, что $E = i\varepsilon$ (что означает открытость системы) и $\mu_- >> |\varepsilon|$. Из равенства $\det(\widehat{H}_-(p) - E) = 0$ получаем, согласно (1),

$$p^2 = \mu_- \pm i\varepsilon. \tag{5}$$

Отсюда $p = \alpha_-^{1,2} = \pm\sqrt{\mu_-} - \dfrac{i\varepsilon}{2\sqrt{\mu_-}} + o(\varepsilon)$ (знак перед вторым слагаемым выбираем для убывания функции при $x \to -\infty$) и

$$\widehat{H}_-(p) - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + O(\varepsilon).$$

Далее для краткости отбрасываем слагаемые порядка $O(\varepsilon)$. Учитывая вид волновой функции налетающего электрона и тот факт, что для дырки и частицы с равными импульсами скорости противоположны, получаем

$$\psi_-(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{i\sqrt{\mu_-}x} + A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\sqrt{\mu_-}x} + B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\sqrt{\mu_-}x} = \begin{pmatrix} e^{i\sqrt{\mu_-}x} + Be^{-i\sqrt{\mu_-}x} \\ Ae^{i\sqrt{\mu_-}x} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Рассмотрим случай $x > 0$. Предположим, что $|E| << \mu_+ << \Delta^2$ (следовательно, имеет место топологическая фаза [1]). Имеем

$$\det(\widehat{H}_+ - E) = -(p^4 - 2p^2(\mu_+ - \Delta^2/2) + \mu_+^2 - E^2) = 0,$$

тогда

$$p = \alpha_+^1 = \pm i\Delta + F_1(\mu_+, \varepsilon), \quad p = \alpha_+^2 = \pm i\frac{\mu_+}{\Delta} + F_2(\mu_+, \varepsilon),$$

где $F_j(\mu_+, \varepsilon)$, $j = 1, 2$, малы в силу предположения $\mu_+ << \Delta$ и далее опускаются. В равенствах для α_+^1 и α_+^2 выбираем знак «+» для убывания волновой функции при $x > 0$. Пусть для определенности $\Delta > 0$, тогда в случае $p = i\Delta$ имеем

$$\det\left(\widehat{H}_+(p) - E\right) = \begin{pmatrix} -\Delta^2 & \Delta^2 \\ -\Delta^2 & \Delta^2 \end{pmatrix},$$

откуда $\psi_+(x) = (1,1)^T e^{-\Delta x}$; если $p = i\mu_+/\Delta$, то имеем

$$\det\left(\widehat{H}_+(p) - E\right) = \begin{pmatrix} -\mu_+ & \mu_+ \\ -\mu_+ & \mu_+ \end{pmatrix},$$

$\psi_+(x) = (1,1)^T e^{-(\mu_+/\Delta)x}$. Таким образом, для $x > 0$:

$$\psi_+(x) = C\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-\Delta x} + D\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-(\mu_+/\Delta)x} = \begin{pmatrix} Ce^{-\Delta x} + De^{-(\mu_+/\Delta)x} \\ Ce^{-\Delta x} + De^{-(\mu_+/\Delta)x} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Пусть $r_\pm = \pm 4i\sqrt{\mu_-} - 2V_0$. Пользуясь (6), (7), запишем (2)–(4) в виде

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ \Delta & r_+ & -3\Delta - 2V_0 & -4\frac{\mu_+}{\Delta} - 2V_0 + \Delta \\ r_- & \Delta & -3\Delta - 2V_0 & -4\frac{\mu_+}{\Delta} - 2V_0 + \Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ r_- \\ \Delta \end{pmatrix}.$$

Отсюда получим $B = 0$, $A = 1$. Вероятность полного андреевского отражения (когда отражаются только «дырки») равна $|A|^2 = 1$.

Андреевское отражение со «склейкой» в двух точках

Как и ранее $\psi_-(x)$ определяется (6). Функция $\psi_+(x)$ для $x \in (0, a)$ определена равенством (убывания не требуется):

$$\psi_+(x) = \begin{pmatrix} Ce^{-\Delta x} + De^{-(\mu_+/\Delta)x} + Le^{\Delta x} + Fe^{(\mu_+/\Delta)x} \\ Ce^{-\Delta x} + De^{-(\mu_+/\Delta)x} - Le^{\Delta x} - Fe^{(\mu_+/\Delta)x} \end{pmatrix}; \tag{8}$$

для $x > a$ (волновая функция должна убывать на этом промежутке):

$$\psi_+(x) = \begin{pmatrix} Ge^{-\Delta x} + Ke^{-(\mu_+/\Delta)x} \\ Ge^{-\Delta x} + Ke^{-(\mu_+/\Delta)x} \end{pmatrix}.$$

Пользуясь (6), (8), запишем (2)–(4) и аналогичные условия в точке $x = a$ в виде системы

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \Delta & -t_+ & q_- & s_- & -q_+ & r_+ & 0 & 0 \\ t_- & \Delta & q_- & s_- & q_+ & -r_+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_- & v_- & w_+ & v_+ & -w_- & -v_- \\ 0 & 0 & w_- & v_- & -w_+ & -v_+ & -w_- & -v_- \\ 0 & 0 & h_- w_- & s_+ v_- & -h_+ w_+ & r_- v_+ & q_+ w_- & s_- v_- \\ 0 & 0 & h_- w_- & s_+ v_- & h_+ w_+ & -r_- v_+ & q_+ w_- & s_- v_- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ K \\ L \\ G \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -t_- \\ -\Delta \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \tag{9}$$

здесь

$$w_\pm = e^{\pm \Delta a},\ v_\pm = e^{\pm \frac{\mu_+}{\Delta} a},\ q_\pm = -3\Delta \pm 2V_0,$$
$$h_\pm = 5\Delta \pm 2V_0,\ s_\pm = \pm 4\frac{\mu_+}{\Delta} - 2V_0 + \Delta,$$
$$r_\pm = \pm 4\frac{\mu_+}{\Delta} - 2V_0 - \Delta,\ t_\pm = -4i\sqrt{\mu_-} \pm 2V_0.$$

Из (9) находим $B = 0,\ A = 1$. Таким образом, несмотря на наличие примеси, здесь также имеет место полное андреевское отражение.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФГБОУ ВО «Удмуртский государственный университет» в рамках конкурса на предоставление грантов УдГУ на поддержку молодых ученых «Научный потенциал»-2018 (проект № 2018-03-02)

Литература

1. Alicea J. *New directions in the pursuit of Majorana fermions in solid state systems* // Rep. Prog. Phys. – 2012. –75(076501). – 36 p. DOI:10.1088/0034-4885/75/7/076501

2. Zhongbo Yan, Shaolong Wan. *A study on the tunneling spectroscopy of an N–pS junction and an N–hS junction* // New Journal of Physics. – 2014. – 16(093004). – DOI:10.1088/1367-2630/16/9/093004.

3. Тинюкова Т. С. *Майорановские состояния вблизи примеси в p-волновой сверхпроводящей нанопроволоке* // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. – 2018. – Вып. 2 – С. 222–230. DOI: 10.20537/vm180208.

ANDREEV REFLECTION AT THE CONTACT
OF A p-WAVE SUPERCONDUCTOR IS A NORMAL METAL

T.S. Tinyukova, Yu.P. Chuburin

In the paper, the Andreev reflection for the Bogolyubov – de Gennes Hamiltonian with the potential in the case of the one-dimensional p-wave superconducting structure is mathematically rigorously studied. It is proved, that in the junction normal-metal – superconductor in the topological phase, the perfect Andreev reflection takes place (i.e., the incident from the normal metal electron is reflected as a hole) without reference to an impurity.

Keywords: Bogolyubov – de Gennes Hamiltonian, spectrum, scattering problem, transmission probability, Andreev reflection.

УДК 517.518.85

О НЕОБХОДИМЫХ И ДОСТАТОЧНЫХ УСЛОВИЯХ СХОДИМОСТИ ОБОБЩЕНИЙ СИНК-ПРИБЛИЖЕНИЙ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

А.Ю. Трынин[1]

1 *tayu@rambler.ru*; Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

Изучаются аппроксимативные свойства обобщений классических синк приближений, построенных с помощью значений линейных дифференциальных операторов второго порядка с потенциалами ограниченной вариации. Получены необходимые и достаточные условия равномерной сходимости обобщений синк приближений для функций ограниченной вариации. Отдельно рассматриваются условия равномерной сходимости внутри интервала $(0,\pi)$ и на отрезке $[0,\pi]$.

Ключевые слова: равномерная сходимость, синк приближения, ограниченная вариация, синк-аппроксимации.

В результате численных экспериментов в работах [1] и [2] были открыты операторы синк-аппроксимаций или усечённые кардинальные функции Уиттекера. Для важного случая равноотстоящих узлов интерполирования эти операторы давали существенно лучшие результаты приближения, чем алгебраические интерполяционные многочлены. В дальнейшем была доказана теорема отсчётов, в которой установлена возможность приближения функций из некоторых классов аналитических функций кардинальными функциями Уиттекера (см., например, [3]. В данной работе продолжаются исследования аппроксимативных свойств некоторых обобщений синк приближений, предложенных в [4], [5], [6].

Пусть $\rho_\lambda \geq 0 \quad \rho_\lambda = o(\lambda)$ при $\lambda \to +\infty$, $h(\lambda) \in \mathbb{R}$, и при каждом неотрицательном λ функция $q_\lambda(x)$ есть произвольный элемент из шара $V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ радиуса ρ_λ в пространстве функций с ограниченным изменением, исчезающих в нуле:

$$V_0^\pi[q_\lambda] \leq \rho_\lambda, \quad q_\lambda(0) = 0, \quad \rho_\lambda = o(\lambda). \tag{1}$$

Тогда для любого потенциала $q_\lambda \in V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$, при $\lambda \to +\infty$, нули решения задачи Коши

$$\begin{cases} y'' + \big(\lambda - q_\lambda(x)\big)y = 0, \\ y(0,\lambda) = 1, \\ y'(0,\lambda) = h(\lambda), \end{cases} \tag{2}$$

или, при дополнительном условии $h(\lambda) \neq 0$, — задачи Коши

$$\begin{cases} y'' + \big(\lambda - q_\lambda(x)\big)y = 0, \\ y(0,\lambda) = 0, \\ y'(0,\lambda) = h(\lambda), \end{cases} \tag{3}$$

попадающие в $[0,\pi]$ и перенумерованные в порядке возрастания, обозначим

$$0 \le x_{0,\lambda} < x_{1,\lambda} < \ldots < x_{n(\lambda),\lambda} \le \pi, (x_{-1,\lambda} < 0, x_{n(\lambda)+1,\lambda} > \pi). \tag{4}$$

(Здесь $x_{-1,\lambda} < 0, \quad x_{n(\lambda)+1,\lambda} > \pi$ обозначают нули продолжения решения задачи Коши (2) или (3), после доопределения каким-либо образом функции q_λ вне отрезка $[0,\pi]$ с сохранением ограниченности вариации). Для краткости будем обозначать $n = n(\lambda)$. Задачи Коши (2) и (3) в случае, когда $q_\lambda \in L[0,\pi]$, имеют единственное обобщённое решение. Теорема осцилляции, или метод контурного интегрирования при условии (1) обеспечивают неограниченное возрастание количества нулей (4) $n(\lambda) \to +\infty$ при $\lambda \to +\infty$.

В работе исследуются аппроксимативные свойства операторов типа Лагранжа, построенных по решениям задачи Коши вида (2) или (3) и ставящих в соответствие любой определённой на отрезке $[0,\pi]$ функции f интерполирующую её в узлах $\{x_{k,\lambda}\}_{k=0}^n$ непрерывную функцию таким образом:

$$S_\lambda(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{y(x,\lambda)}{y'(x_{k,\lambda},\lambda)(x - x_{k,\lambda})} f(x_{k,\lambda}) = \sum_{k=0}^{n} s_{k,\lambda}(x) f(x_{k,\lambda}). \tag{5}$$

Подбирая соответствующим образом функции q_λ (следует иметь ввиду, что условие (1) является достаточным, но не необходимым для наличия нулей (4)), получаем единое представление в виде оператора (5) различных конструкций лагранжева типа таких, как классические интерполяционные многочлены (с точностью до весового множителя), кардинальные функции Уиттекера, интерполяционные процессы Лагранжа, построенные по специальным функциям математической физики. Так, например, см. [7], с точностью до преобразования Лиувилля многочлены Чебышева и многочлены Якоби, в случае $\alpha = \pm\frac{1}{2}, \quad \beta = \pm\frac{1}{2}$, являются решениями дифференциальных уравнений задач (2), (3), с потенциалом, удовлетворяющим условию (1). Если взять $q_\lambda \equiv 0$, $\lambda_n = n^2$, то операторы (5) превращаются в усечённые кардинальные функции Уиттекера. К сожалению, при приближении непрерывных, не исчезающих на концах отрезка $[0,\pi]$, функций с помощью операторов (5) возникает явление Гиббса.

Определим оператор, ставящий в соответствие любой принимающей конечные значения на отрезке $[0,\pi]$ функции f непрерывную функцию по правилу

$$T_\lambda(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{y(x,\lambda)}{y'(x_{k,\lambda})(x - x_{k,\lambda})} \left\{ f(x_{k,\lambda}) - \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi} x_{k,\lambda} - f(0) \right\} + \frac{f(\pi) - f(0)}{\pi} x + f(0).$$

С помощью этого оператора, в отличие от (5), можно равномерно на всём отрезке $[0,\pi]$ аппроксимировать непрерывные (не обязательно исчезающие на концах отрезка) функции, обладающие достаточным запасом гладкости, с сохранением интерполяции, то есть для всех $0 \le k \le n$, $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство $T_\lambda(f, x_{k,\lambda}) = f(x_{k,\lambda})$.

Теорема 1. *Пусть $f \in C[0,\pi]$, $0 \le a < b \le \pi$ и $0 < \varepsilon < (b-a)/2$ и $V_f[a,b]$— полная вариация непрерывной на $[a,b]$ функции f. Если $V_f[a,b] < \infty$, то имеет место равномерная сходимость*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|f - S_\lambda(f,x)(f,\cdot)\|_{C[a+\varepsilon,b-\varepsilon]} = 0.$$

При этом вне отрезка $[a,b]$ интерполяционный процесс (5) может вообще расходиться.

Теорема 2. *Пусть $f \in C[0,\pi]$, $V_f[0,\pi]$— полная вариация непрерывной на $[0,\pi]$ функции f. Если $V_f[0,\pi] < \infty$, то имеет место равномерная сходимость на всём отрезке $[0,\pi]$ $(a = 0, b = \pi)$*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|f - S_\lambda(f,x)(f,\cdot)\|_{C[0,\pi]} = 0$$

тогда и только тогда, когда $f \in C_0[0,\pi] = \{f : f \in C[0,\pi], f(0) = f(\pi) = 0\}$.

Теорема 3. *Пусть $V_f[0,\pi]$— полная вариация непрерывной на $[0,\pi]$ функции f. Если $V_f[0,\pi] < \infty$, то имеет место равномерная сходимость на всём отрезке $[0,\pi]$ $(a = 0, b = \pi)$*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|f - T_\lambda(f,x)(f,\cdot)\|_{C[0,\pi]} = 0$$

тогда и только тогда, когда $f \in C[0,\pi]$.

Литература

1. Borel E. *Sur l'interpolation* // C.R. Math. Acad. Sci. Paris. – 1897. – Vol. 124. – P. 673-676.

2. Whittaker E.T. *On the functions which are represented by expansions of the interpolation-theory* // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. – 1914-1915. – Vol. 35. – № 2. – P. 181-194.

3. Новиков И.Я. *Основы теории всплесков* // Успехи математических наук. – 1998. – Т. 53. – № 6(324). – С. 53-128.

4. Трынин А.Ю. *Обобщение теоремы отсчётов Уиттекера-Котельникова-Шеннона для непрерывных функций на отрезке* // Математический сборник. – 2009. – Т. 200. – № 11. – С. 61–108.

5. Трынин А.Ю. *Критерий равномерной сходимости sinc-приближений на отрезке* // Известия высш. уч-ых заведений. Математика. – 2008. – № 6. – С. 66–78.

6. Трынин А.Ю. *Теорема отсчётов на отрезке и её обобщения*. – LAP LAMBERT Academic Publishing RU, 2016. — 479 с.

7. Трынин А.Ю. *Об операторах интерполирования по решениям задачи Коши и многочленах Лагранжа–Якоби* // Известия Российской Академии Наук. Серия математическая. – 2011. – Т. 75. – № 6. – С. 129–162.

ON THE NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITIONS FOR CONVERGENCE OF THE GENERALIZATIONS OF THE SINC APPROXIMATIONS OF FUNCTIONS OF BOUNDED VARIATION

A.Yu. Trynin

We study the approximative properties of the generalizations of classical sinc approximations constructed using the values of second-order linear differential operators with potentials of bounded variation. Necessary and sufficient conditions for uniform convergence for generalizations of the sync approximation for functions of bounded variation are obtained. Conditions for uniform convergence inside the interval $(0,\pi)$ *and on the interval* $[0,\pi]$ *are separately considered.*

Keywords: uniform convergence, sinc approximations, bounded variation, sinc approximation.

УДК 533:6, 533:9;519.688

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ И ТЕЧЕНИЙ В АЭРОЗОЛЯХ И ЗАПЫЛЁННЫХ СРЕДАХ

Д.А. Тукмаков[1]

1 *tukmakovda@imm.knc.ru*; Институт механики и машиностроения - обособленное структурное подразделение ФГБУН «Федеральный исследовательский центр “Казанский научный центр Российской академии наук”»

Данная работа посвящена численному моделированию волновых процессов и ударных волны в неоднородных средах. Динамика несущей среды описывается системой уравнений Навье-Стокса для сжимаемого теплопроводного газа. Математическая модель динамики газовзвеси предполагает учёт межфазного теплового и силового взаимодействия, а также учёт электрического заряда дисперсной фазы.

Ключевые слова: численное моделирование, уравнение Навье-Стокса, многофазные среды, ударные волны.

Многие природные явления и процессы связаны с движением сплошных сред являющихся неоднородными по своим механическим и физико-химическим свойствам [1-3]. Примером таких сред могут быть взвеси твёрдых или жидких дисперсных включений в газе-аэрозоли и газовзвеси [4]. Эффекты и явления, наблюдаемые в многофазных средах, имеют отличие от аналогичных процессов однородной аэро- и гидродинамики [1, 5]. Дисперсная фаза многофазной смеси в данной работе состоит из совокупности некоторого количества фракций твердых частиц, при этом каждая фракция отличается объемным содержанием в общем объеме многофазной среды, физической плотностью вещества, размером частиц и их теплопроводностью. В ряде практических приложений необходимо также учитывать воздействие электрического поля [6]. Для описания движения полидисперсной смеси применяется система уравнений динамики полидисперсной многоскоростной и многотемпературной газовзвеси со скоростным и температурным скольжением фаз [2]. Система включает в себя уравнения движения несущей среды и дисперсной фазы. Движение несущей среды описывается системой уравнений Навье-Стокса с учетом межфазного силового взаимодействия и теплообмена:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2+p-\tau_{xx})+\frac{\partial}{\partial y}(\rho uv-\tau_{xy})=\sum F_{xi}+\sum \alpha_i\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho uv+p-\tau_{xy})+\frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2+p-\tau_{yy})=\sum F_{yi}+\sum \alpha_i\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial e}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}([e+p-\tau_{xx}]u-\tau_{xy}v+\lambda\frac{\partial T}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}([e+p-\tau_{yy}]v-\tau_{xy}u+\lambda\frac{\partial T}{\partial y})=$$

$$=-\sum Q_i-\sum(|F_{xi}|(u-u_i)+|F_{yi}|(v-v_i))+\sum\alpha_i\left(\frac{\partial(pu)}{\partial x}+\frac{\partial(pv)}{\partial y}\right)$$

$$p=(\gamma-1)(e-\rho(u^2+v^2)/2),$$

$$e=\rho(I+(u^2+v^2)/2),$$

$$\tau_{xx}=\mu\left(2\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{2}{3}D\right),\tau_{yy}=\mu\left(2\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{2}{3}D\right),$$

$$\tau_{xx}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right),D=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right), \quad (1)$$

Здесь ρ ,u, e, T, λ, μ, γ – плотность несущей фазы, скорости несущей фазы, полная энергия и температура высокотемпературного газа, коэффициенты теплопроводности, вязкости и постоянная адиабаты для несущей газообразной среды, $I=RT/(\gamma-1)$ – внутренняя энергия несущей среды (здесь R – газовая постоянная для разогретого воздуха) [2,4]; компоненты силы межфазного трения F_{xi}, F_{yi} и тепловой поток с поверхности частицы i-ой фракции дисперсной фазы Q_i определяются законами межфазного взаимодействия. Для описания движения дисперсной фазы используется следующая система уравнений:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t}+\frac{\partial \rho_i u_i}{\partial x}+\frac{\partial \rho_i v_i}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial(\rho_i u_i)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho_i u_i^2)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho_i u_i v_i)=-F_{xi}-F_{Exi}-\alpha_i\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial(\rho_i v_i)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho_i u_i v_i)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho_i v_i^2)=-F_{yi}-F_{Eyi}-\alpha_i\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial e_i}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(e_i u_i)+\frac{\partial}{\partial x}(e_i v_i)=Nu\frac{6\alpha}{(2r)^2}\lambda(T-T_i)$$

$$\rho_i=\alpha\rho_{i0}, e_1=\rho_i C_{pi} T_i$$

(2)

Здесь $\alpha_i, \rho_i, e_i, T_i$ – объемное содержание, средняя плотность, внутренняя энергия и температура i-ой фракции дисперсной фазы; C_{pi}, ρ_{i0} – удельная теплоемкость и плотность вещества i-ой фракции твердых частиц. Компоненты силы межфазного взаимодействия F_{xi} и F_{yi} определяются следующим образом [7-9]:

$$F_{xi} = \frac{3\alpha_i}{8r_i} Cd_i \rho \sqrt{(u-u_i)^2 + ((v-v_i)^2} (u-u_i) + \alpha_i \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} \right) +$$

$$+0.5\alpha_i \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u_i}{\partial t} - u_i\frac{\partial u_i}{\partial x} - v_i\frac{\partial u_i}{\partial y} \right) + F_{Exi}$$

$$F_{yi} = \frac{3\alpha_i}{8r_i} Cd_i \rho \sqrt{(u-u_i)^2 + ((v-v_i)^2} (v-v_i) + \alpha_i \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} \right) +$$

$$+0.5\alpha_i \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v_i}{\partial t} - v_i\frac{\partial v_i}{\partial x} - v_i\frac{\partial v_i}{\partial y} \right) + F_{Eyi}$$

Составляющие силы Кулона на единицу объема газовзвеси определяются через ее удельный заряд, объемную плотность твердой фазы и напряженность электрического поля:

$$F_{Exi} = -q_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x}, F_{Eyi} = -q_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

где q_0 – удельный заряд единицы массы твердой фракции, φ – потенциал электрического поля. Потенциал электрического поля в расчетной области определяется из решения уравнения Пуассона с граничными условиями 2-го рода:

$$divE = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0}, E = -\nabla\varphi\, q = \rho_2 q_0, \rho_2 = \sum \rho_i. \tag{3}$$

В правой части уравнения Пуассона содержится плотность заряда газовзвеси, отнесенная к абсолютной диэлектрической проницаемости несущей среды. Система уравнений решалась при помощи явного конечно-разностного метода Мак-Кормака с последующим применением схемы нелинейной коррекции численного решения [10,11].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ грант № 19-01-00442.

Литература

1. Нигматулин Р.И. *Динамика многофазных сред.* – М.: Наука, 1987.– 464 с.

2. Кисилев С.Г., Руев Г.А., Трунев А.П., Фомин В.Ф., Шавалиев М.Ш. *Ударно-волновые процессы в двухкомпонентных и двухфазных средах.* – Новосибирск: Наука, 1992. – 261 с.

3. Кутушев А.Г. *Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах.* – Санкт-Петербург: Недра, 2003. – 284 с.

4. Тукмаков А.Л., Баянов Р.И., Тукмаков Д.А. *Течение полидисперсной газовзвеси в канале, сопровождающееся коагуляцией в нелинейном волновом поле* // Теплофизика и аэромеханика. – 2015. – Т. 22. – № 3. – С. 319-325.

5. Седов Л.И. *Механика сплошной среды.* Т.1, 2. – М.: Наука, 1984.

6. Зинченко С.П., Толмачёв Г.Н. *О накоплении продуктов распыления сегнетоэлектрической мишени в плазме тлеющего высокочастотного разряда* // Прикладная физика. – 2012. – № 5. – С. 53–56.

7. Сальянов Ф.А. *Основы физики низкотемпературной плазмы, плазменных аппаратов и технологий.* – М.: Наука, 1997.

8. Тукмаков Д.А. *Математическая модель массопереноса и волновых процессов в плазме* // Сборник тезисов, материалы Двадцать третьей Всероссийской научной конференции студентов-физиков и молодых ученых (ВНКСФ-23, Екатеринбург), Екатеринбург, издательство АСФ России, 2017. – С. 195–196.

9. Tukmakov A.L., Kashapov N.F., Tukmakov D.A., Fazlyyakhmatov M.G. *Numerical modeling of the powder materials spraying* // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, Volume 412, conference 1.

10. Флетчер К. *Вычислительные методы в динамике жидкостей.* – М.: Мир, 1991. – 551 с.

11. Музафаров И.Ф., Утюжеников С.В. *Применение компактных разностных схем к исследованию нестационарных течений сжимаемого газа* // Математическое моделирование. – 1993. – Т. 5. – № 3. – С. 74–83.

NUMERICAL MODELING OF WAVE PROCESSES AND FLOWS
IN AEROSOLS AND DUSTY ENVIRONMENTS

D.A. Tukmakov

This paper is devoted to numerical modeling of wave processes and shock waves in inhomogeneous media. The dynamics of the carrier medium is described by the Navier-Stokes system of equations for compressible heat-conducting gas. A mathematical model of the dynamics of a gas suspension involves taking into account interphase thermal and force interaction, as well as the electric charge of the dispersed phase.

Keywords: numerical simulation, Navier–Stokes equation, multiphase media, shock waves.

УДК 517.956.223

МОДИФИЦИРОВАННАЯ ЗАДАЧА РИМАНА–ГИЛЬБЕРТА ДЛЯ ОБОБЩЁННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

Е.В. Тюриков[1]

1 *etyurikov@hotmail.com*; Донской государственный технический университет

Найден критерий безусловной разрешимости для одного класса задач мембранной теории выпуклых оболочек.

Ключевые слова: выпуклая оболочка, задача Римана-Гильберта, индекс граничного условия.

1. Постановка задачи *R*. Пусть S — односвязная поверхность с кусочно-гладким краем $L = \bigcup\limits_{j=1}^{n} L_j$ и угловыми точками p_i $(i = 1,\dots, n)$. Предполагается, что S есть внутренняя часть поверхности S_0 строго положительной гауссовой кривизны класса регулярности $W^{3,r}$, $r > 2$, а каждая из гладких дуг L_j принадлежит классу $C^{1,\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < 1$. Зададим на S вдоль L кусочно-непрерывное векторное поле $\boldsymbol{r} = \{\alpha(s), \beta(s)\}$, допускающее разрывы первого рода в точках p_j, с касательной и нормальной составляющими $\alpha(s)$, $\beta(s)$ $(\alpha^2 + \beta^2 = 1,\ \beta \geq 0)$, где s — натуральный параметр, функции $\alpha(s)$, $\beta(s)$ — гёльдеровы на каждой из дуг L_j.

Введём обозначения: J — отображение поверхности S_0 на комплексную плоскость $z = x + iy$, заданное выбором сопряжённо изометрической параметризации (x, y) на S_0, $D = J(S)$ — ограниченная в комплексной плоскости z односвязная область с границей $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{n} J(L_j)$ и угловыми точками $q_i = J(p_i)$. Рассмотрим следующую задачу (задача R): найти в области D комплекснозначное решение $w(z)$ уравнения (*функцию изгибаний* [1] поверхности S)

$$w_{\bar{w}}(z) - B(z)\bar{w}(z) = F(z), \quad z \in D, \tag{1}$$

по заданному граничному условию Римана–Гильберта

$$\operatorname{Re}\{\lambda(\zeta)w(\zeta)\} = \gamma(\zeta), \tag{2}$$

где

$$\lambda(\zeta) = s(\zeta)\left[\beta(\zeta)t(\zeta) - \alpha(\zeta)s(\zeta)\right], \tag{3}$$

$s(\zeta) = s_1(\zeta) + is_2(\zeta)$, $t(\zeta) = t_1(\zeta) + it_2(\zeta)$, $i^2 = -1$, s_i $(i = 1, 2)$ — координаты касательного к Γ орта в точке ζ, t_i $(i = 1, 2)$ — координаты орта направления на плоскости, являющегося J-образом тангенциального направления на поверхности в точке $J^{-1}(\zeta)$, значения функций $\alpha(\zeta)$, $\beta(\zeta)$ совпадают со значением функций α, β в соответствующей точке $c = J^{-1}(\zeta)$, функция $\gamma(\zeta)$ гёльдерова на каждой из дуг $\Gamma_j = J(L_j)$, $w_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(w_x + iw_y)$, $B(z)$, $F(z)$ — заданные в области D функции класса $L_r(D)$, $r > 2$. При этом отыскиваются $W^{1,r}$-регулярные в области D решения $w(z)$, непрерывно продолжимые на L, за исключением точек разрыва q_i, в окрестности которых имеет место оценка $\left|w(z)\right| < \text{const} \cdot \left|z - q_i\right|^{-\alpha_j}$, $0 < \alpha_j < 1$.

Задача R при условиях гладкости границы L и непрерывности вектор-функции $r(M)$ точки $M \in L$ была поставлена и исследована И. Н. Векуа в [2]. Случай кусочно-гладкой границы L и кусочно-непрерывных векторных полей $\boldsymbol{r}$ специального вида был изучен автором в [3]. Для произвольных кусочно-непрерывных векторных полей и сферической поверхности S_0 задача R изучена в [4]. Наибольший интерес с точки зрения приложений к мембранной теории оболочек представляет случай кусочно-непрерывных векторных полей, задающих *непрерывное поле* направлений вдоль L. Для таких полей построен (см. [4]) алгоритм нахождения индекса граничного условия (2), реализация которого в случае произвольно заданной границы не позволяет получить эффективную формулу для его вычисления. При некоторых дополнительных условиях на «геометрию» границы и поле направлений в окрестностях угловых точек эффективные формулы для индекса найдены в [5]. В настоящей работе такая формула получена для достаточно широкого класса границ и произвольного непрерывного поля направлений.

2. Задача *R* для симметрических куполов. Пусть p — какая-либо из угловых точек p_i границы L, $\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k}_2$ — главные направления на поверхности S в этой точке, $\boldsymbol{k}_1$, $\boldsymbol{k}_2$ — соответствующие им главные кривизны ($\boldsymbol{k}_1 > \boldsymbol{k}_2$), $\delta = \sqrt{\frac{k_2}{k_1}}$, ν — величина внутреннего угла в точке p. Точку p назовём s-симметрической (или s-точкой), если направление биссектрисы внутреннего угла поверхности S в точке p совпадает с направлением $\boldsymbol{k}_s$ $(s=1,2)$. Будем полагать, что поверхность S*–симметрический* купол (S–купол), т. е. каждая угловая точка p есть s-симметрическая ($s=1$ или $s=2$), причём $0<\nu<\pi$ в этой точке.

Рассмотрим множество $\mathscr{L}$ всех непрерывных вдоль L направлений $\boldsymbol{\ell}(M)$ на L, каждое из которых заданно каким-либо кусочно-непрерывным векторным полем $\boldsymbol{r}(M)$. Очевидно, в этом случае односторонние пределы $\boldsymbol{r}_k(p)$ $(k=1,2)$ вектор-функции $\boldsymbol{r}$ в точке p коллинеарны. В соответствии с [4] направление поля $\boldsymbol{\ell}\in\mathscr{L}$ назовём *направлением обобщённой касательной* в точке p $\big(\boldsymbol{\ell}\in K(p)\big)$, если $\boldsymbol{r}_1=\boldsymbol{r}_2$, и *направлением обобщённой нормали* $\big(\boldsymbol{\ell}\in N(p)\big)$, если $\boldsymbol{r}_1=-\boldsymbol{r}_2$. Ниже используются следующие обозначения: $P_s^{(2\nu)}$ — s-симметрическая угловая точка p с внутренним углом 2ν $\left(s=1,2;\ 0<\nu<\dfrac{\pi}{2}\right)$; $\gamma(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Задачу R для симметрических куполов и поля направлений $\boldsymbol{\ell}\in\mathscr{L}$ назовём задачей R^*.

3. Вычисление индекса разрывного граничного условия задачи $\boldsymbol{R}^*$. Дадим описание особенных (по Н. И. Мусхелишвили [6]) узлов $q_i=J(p_i)$ $(i=1,\ldots,n)$ граничного условия (2), обозначив при этом p_i через p и $q=J(p)$.

Определение. *Направление поля $\boldsymbol{\ell}\in\mathscr{L}$ в точке p назовём особенным для $P_s^{(\nu)}$–точки, если точка $q=J(p)$ есть особенный узел задачи R^*.*

Утверждение 1. *Для любой угловой точки p и для каждого s, m ($s=1,2$; $m=1,2$) существуют точно два значения $\xi_{sm}^{(k)}\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ ($k=1,2$), таких, что главное направление k_m в точке p есть особенное направление для s-точки $P_s^{(2\xi_k)}$ ($k=1,2$). При этом*

$$0<\xi_{sm}^{(1)}<\operatorname{arctg}\delta^{(-1)^i}<\xi_{sm}^{(2)}<\frac{\pi}{2}.$$

Частные случаи $s=m=1$, $s=m=2$ рассмотрены автором в [5]. В общем случае установлено, что $\xi_{sm}^{(k)}=\operatorname{arctg}t_{sm}^{(k)}$ для каждого k, s, m, где $t_{sm}^{(k)}$ — корень вполне определённого кубического уравнения с коэффициентами, зависящими от δ.

Следствие. *На поверхности S определены функции $t_{sm}^{(k)}(P)$ ($s=1,2$; $m=1,2$; $k=1,2$) точки $P\in S$, задающие значение величин внутренних углов в s-точке, для которых главное направление k_m — особенное.*

Имеет место также

Утверждение 2. *Направление $\boldsymbol{\ell}$ в точке p, отличное от главного направления $\boldsymbol{k}_s$ ($s=1,2$) для любой из точек $P_m^{(2\nu)}$ $\left(m=1,2; 0<\nu<\dfrac{\pi}{2}\right)$ не является особенным.*

Справедливость этого утверждения в частном случае ($s=m=2$) установлена в [5]. Для рассмотрения любого из оставшихся случаев ($s,m=1,2$, $s\neq m$) достаточно использовать схему [5] и свойства граничного условия (2), следующие из определения [1] отображения J.

Введём классификацию *узлов* задачи R^*. Для этого s-симметрическую точку $P_s^{(\nu)}$ ($s=1,2$, $0<\nu<\pi$) назовём p_{ss}-узлом, если $\boldsymbol{\ell}\in K(p)$, и p_{sm}-узлом ($s\neq m$), если $\boldsymbol{\ell}\in N(p)$. Каждый из узлов задачи R^* отнесём к r-типу ($r=1,2,3$) по правилу:

$r=1$, если $0<\nu\le 2t_{sk}^{(1)}$; $r=2$, если $2t_{sk}^{(1)}<\nu\le 2t_{sk}^{(2)}$; $r=3$, если $2t_{sk}^{(2)}<\nu<\pi$. Здесь $t_{sm}^{(k)}$ — значения функций $t_{sm}^{(k)}(P)$ в точке p.

Теорема 1. *Пусть K_r (N_r) — число p_{ss}-узлов (p_{sm}-узлов, $s\ne m$) r-типа ($r=1,2,3$) задачи R^*. Тогда индекс κ задачи R^* в классе ограниченных решений вычисляется по формуле*

$$\kappa=\sum_{r=1}^{3}((3-r)K_r+(2-r)N_r)-4.$$

Теорема 1 следует из формулы для индекса [4] и утверждений 1, 2. Следствием теоремы 1 и результатов [7] является

Теорема 2. *Задача R^* безусловно разрешима тогда и только тогда, когда*

$$\sum_{r=1}^{3}((3-r)K_r+(2-r)N_r)\ge 3.$$

4. Приложения к мембранной теории выпуклых оболочек. Рассмотрим задачу T о реализации безмоментного напряжённого состояния тонкой упругой оболочки, серединная поверхность которой есть поверхность S^*. Предполагается, что на границе L задана проекция вектора усилий на направление поля $\boldsymbol{\ell}\in\mathscr{L}$, а в каждой её угловой точке выполняется условие *концентрации напряжений* (терминология А. Л. Гольденвейзера [8]).

Согласно [1], задача T сводится к отысканию решений задачи Римана–Гильберта (2), (3) для обобщённых аналитических функций, допускающих «интегрируемую бесконечность» в угловых точках. Так как в этом случае согласно [6] «вклад» каждого неособенного узла в формулу для индекса следует увеличить на единицу, то

$$\kappa=-4+\sum_{r=1}^{3}((4-r)K_r+(3-r)N_r)\,. \tag{4}$$

Следствием формулы (4) является

Теорема 3. *Если число n угловых точек p_i границы с внутренними углами ν_i не меньше трёх, $\nu\ne 2t_{ss}^{(k)}$ ($k=1,2$; $s=1,2$) и $\boldsymbol{\ell}\in K(p_i)$, то задача T безусловно разрешима.*

Литература

1. Векуа И. Н. *Обобщённые аналитические функции.* — М.: Физматлит, 1959. — 512 с.

2. Векуа И. Н. *Системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением к теории оболочек* // Мат. сб. — 1952. — Т. 31, № 2. — С. 217–314.

3. Тюриков Е. В. *Геометрический аналог задачи Векуа–Гольденвейзера* // Докл. РАН. — 2009. — Т. 424, № 4. — С. 445–458.

4. Тюриков Е. В. *Об одном классе граничных задач мембранной теории выпуклых оболочек* // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естественные науки. — 2012. — № 3. — С. 18–24.

5. Тюриков Е. В. *Граничная задача мембранной теории выпуклых оболочек для одного класса симметрических куполов* // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естественные науки. — 2018. — № 1. — С. 7–12.

6. Мусхелишвили Н. И. *Сингулярные интегральные уравнения*. — М.: Физматлит, 1968. — 511 с.

7. Тюриков Е. В. *Краевые задачи теории бесконечно малых изгибаний поверхностей* // Матем. сб. — 1977. — Т. 7, № 3. — С. 445–462.

8. Гольденвейзер А. Л. *Теория упругих тонких оболочек*. — М., 1976. — 512 с.

THE MODIFIED RIEMANN–HILBERT PROBLEM
FOR GENERALIZED ANALYTIC FUNCTIONS AND ITS APPLICATIONS

E.V. Tyurikov

For a class of problems of the membrane theory of convex shells, a criterion of unconditional solvability is found.

Keywords: convex shell, Riemann–Hilbert boundary problem, index of the boundary value condition.

УДК 517.54

ОДНОРОДНАЯ ЗАДАЧА ГИЛЬБЕРТА С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ТОЧЕК ЗАВИХРЕНИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ПОРЯДКА

А.Х. Фатыхов[1], П.Л. Шабалин[2]

1 *vitofat@gmail.com*; Казанский государственный архитектурно-строительный университет
2 *pavel.shabalin@mail.ru*; Казанский государственный архитектурно-строительный университет

В статье рассматриваются вопросы построения формулы общего решения однородной задачи Гильберта с краевым условием на окружности и конечным числом точек двустороннего завихрения степенно-логарифмического порядка в классе ограниченных аналитических функций, исследования существования решения и описания множества решений, в случае неединственности.

Ключевые слова: задача Гильберта с бесконечным индексом, целые функции уточненного нулевого порядка, принцип максимума.

В работе исследуется задача определения аналитической и ограниченной в единичном круге $D = \{z = re^{i\theta} : 0 < r < 1, 0 \le \theta < 2\pi\}$, $L = \partial D$, плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, функции $\Phi(z)$, по краевому условию

$$\Re[e^{-i\nu(\theta)}\Phi(t)] = 0,\ t = e^{i\theta} \in L,\ t \ne t_j,\ t_j = e^{i\theta_j},\ j = \overline{1,n}, \tag{1}$$

в случае, когда аргумент коэффициента краевого условия $\nu(\theta)$, имеет конечное число точек разрыва второго рода (точек завихрения) степенно-логарифмического порядка. Именно,

$$\nu(\theta) = \sum_{j=1}^{n} \nu_j(\theta) + \widetilde{\nu}(\theta), \quad \nu_j(\theta) = \begin{cases} \nu_j^+ \ln^{\alpha_j} \dfrac{1}{|\sin((\theta-\theta_j)/2)|}, & 0 \le \theta < \theta_j, \\ \nu_j^- \ln^{\alpha_j} \dfrac{1}{|\sin((\theta-\theta_j)/2)|}, & \theta_j < \theta \le 2\pi, \end{cases} \tag{2}$$

для некоторых чисел ν_j^+, ν_j^-, α_j, $0 < \alpha_j$; функция $\widetilde{\nu}(\theta)$ непрерывна по Гельдеру на интервале $(0, 2\pi)$ и удовлетворяет условию

$$\widetilde{\nu}(0) - \widetilde{\nu}(2\pi) = \sum_{j=1}^{n} (\nu_j^- - \nu_j^+) ln^{\alpha_j} \frac{1}{\sin(\theta_j/2)}.$$

Подобная задача, но с конечным числом точек двустороннего завихрения степенного меньше единицы порядка изучена в работе [1], в которой получена формула общего решения и приведена полная картина разрешимости в классе ограниченных аналитических функций.

Методом регуляризующего множителя с использованием обобщенного принципа максимума для аналитических функций из [2] доказана следующая

Теорема. *Общее решение задачи (1), (2) в классе ограниченных в единичном круге аналитических функций задается формулой*

$$\Phi(z) = -ie^{i\Gamma_j(z)} e^{ig_j(z)} F_j(z),$$

в которой $F_j(z)$– произвольная аналитическая в D функция, удовлетворяющая условию ограничения роста

$$|F_j(z)| \le C_1 e^{C_2 \ln^{\alpha_j+1}(1/|z-t_j|)}, \quad z \to t_j,\ z \in D, \quad C_1 > 0, C_2 > 0,$$

и на границе условиям:

$$\Im F_j(t) = 0,\ t \in L,\ t \ne t_j, \quad |F_j(t)| \le Ce^{q_j(\theta)},\ t = e^{i\theta}.$$

Здесь $\Gamma_j(z)$– интеграл типа Коши по вещественной оси с непрерывной по Гельдеру, включая бесконечно удаленную точку, плотностью,

$$g_j(z) := G_j \circ \zeta_j(z), \quad G_j(\zeta) = \frac{\zeta}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_j(\tau)}{\tau(\tau-\zeta)} d\tau, \quad \zeta_j(z) = i\frac{t_j + z}{t_j - z},\ t_j = e^{i\theta_j},\ j = \overline{1,n}.$$

Последний интеграл типа Коши берется по вещественной оси от плотности

$$P_j(\tau) = \begin{cases} \nu_j^- \ln^{\alpha_j} |\tau| + \omega(\tau),\ \tau \in (-\infty, -1), \\ \omega(\tau), \quad \tau \in (-1, 1), \\ \nu_j^+ \ln^{\alpha_j} \tau + \omega(\tau),\ \tau \in (1, +\infty), \end{cases} \tag{3}$$

где $\omega(\tau)$ непрерывна по Гельдеру на вещественной оси, включая бесконечно удаленную точку. Функция $q_j(\theta) = \Im g_j(e^{i\theta})$.

Регуляризация краевого условия здесь проводится с применением асимптотической формулы П.Г .Юрова [3] для вычисления интеграла типа Коши

$$G_j(\zeta) = \frac{\zeta}{\pi i} \int_{1}^{+\infty} \frac{\ln^{\alpha_j} \tau}{\tau(\tau-\zeta)} d\tau.$$

Кроме задачи (1), (2) с n точками завихрения степенно-логарифмического порядка, рассмотрим еще и n однородных задач Гильберта на окружности, каждая с единственной точкой завихрения степенно-логарифмического порядка t_j, $j = \overline{1,n}$:

$$\Re[e^{-i\mu_j(\theta)} \Phi(t)] = 0,\ t \in L,\ t \ne t_j, \tag{4}$$

$$\mu_j(\theta) = \nu_j(\theta) + \widetilde{\nu}_j(\theta), \quad \nu_j(\theta) = \begin{cases} \nu_j^+ \ln^{\alpha_j} \dfrac{1}{|\sin((\theta-\theta_j)/2)|}, & 0 \le \theta < \theta_j, \\ \nu_j^- \ln^{\alpha_j} \dfrac{1}{|\sin((\theta-\theta_j)/2)|}, & \theta_j < \theta \le 2\pi, \end{cases} \quad (5)$$

где $\widetilde{\nu}_j(0)$– любая непрерывная по Гельдеру на промежутке $[0, 2\pi]$ функция, удовлетворяющая условию

$$\widetilde{\nu}_j(0) - \widetilde{\nu}_j(2\pi) = (\nu_j^- - \nu_j^+) ln^{\alpha_j} \frac{1}{\sin(\theta_j/2)}.$$

Справедлива следующая

Теорема. *Однородная задача Гильберта (1), (2) разрешима в классе ограниченных аналитических в D функций, если и только если разрешима каждая из n задач (4), (5).*

Полная картина разрешимости однородной задачи Гильберта с единственной точкой завихрения степенно-логарифмического порядка содержится в работе ([4])

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-01-00282-а).

Литература

1. Fatykhov A.Kh., Shabalin P.L. *Solvability homogeneous Riemann-Hilbert boundary value problem with several points of turbulence* // Probl. Anal. Issues Anal. – 2018. – Vol. 7 (25). – P. 30–38.

2. Salimov R.B., Fatykhov A.Kh., Shabalin P.L. *Homogeneous Hilbert boundary value problem with several points of turbulence* // Lobachevskii Journal of Mathematics. – 2017. – Vol. 38, No. 3. – P. 414–419.

3. Юров П.Г. *Асимптотические оценки целых функций, заданных каноническими произведениями* // Матем. заметки. – 1971. – Т. 10, № 6. – С. 641–648.

4. Салимов Р.Б., Шабалин П.Л. *О разрешимости однородной задачи Гильберта с разрывами коэффициентов и двусторонним завихрением на бесконечности логарифмического порядка* // Изв. вузов. Матем. – 2016. – № 1. – С. 36–48.

HOMOGENEOUS HILBERT BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH SEVERAL POINTS OF LOGARITHMIC TURBULENCE

A.Kh. Fatykhov, P.L. Shabalin

We consider the so-called Hilbert boundary value problem with boundary condition on the unit circle. Its coefficient is assumed to be Hölder-continuous everywhere on the unit circle excluding a finite set of points. At these points its argument has nonremovable discontinuity of logarithmic order. We obtain formulas for the general solution and describe completely the solvability picture in a class of analytic and bounded functions in unit disc.

Keywords: Hilbert boundary value problem with an infinite index, maximum principle, entire function of zero order.

УДК 517.548

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БИЦАДЗЕ С СИЛЬНЫМИ ОСОБЕННОСТЯМИ В МЛАДЩИХ КОЭФФИЦИЕНТАХ

Ю.С. Федоров[1], А.Б. Расулов[2]

1 —; НИУ МЭИ
2 *rasulov_abdu@rambler.ru*; НИУ МЭИ

Для уравнение Бицадзе с множеством сверхсингулярных точек в младших коэффициентах В настоящей работе для уравнения Бицадзе, младшие коэффициенты которой допускают сильные особенности в множестве внутренних точек исследована задачи типа Гильберта.

Ключевые слова: уравнения Бицадзе, сингулярные точки, оператор Векуа, задача типа Римана-Гильберта.

Пусть область D содержит множество сверхсингулярных точек $z_0 = 0,\ z = z_j \neq 0,\ j = \overline{1,m}$ и ограничена простым ляпуновским контуром Γ, ориентированным против часовой стрелки. Удобно положить $D_0 = D \setminus \{z_0, z_1, z_2, ..., z_m\}$ и $D_\varepsilon = D \cap \{\Sigma_0^m |z - z_j| > \varepsilon\}$ с малым $\varepsilon > 0$.

В области D_0 рассмотрим уравнение Бицадзе с сингулярными коэффициентами следующего специального вида:

$$u_{\bar z\bar z} + \sum_{j=1}^{m} \frac{a_j}{\rho_j} u_{\bar z} + \frac{a_0}{\Pi_1^m \rho_j} u = f, \tag{1}$$

где $a_j \in C(\overline{G}),\ j = \overline{0,m}$ и $a_0 = -(AB + B^2)\prod_1^m \rho_j$ с некоторой функцией $B(z) \in C(\overline{G})$, аналитической в области D, где для краткости обозначено

$$\rho_j(z) = (\bar z - \bar z_j)|z - z_j|^{n_j - 1},\ n_j > 1.$$

Относительно коэффициентов $a_j,\ j = \overline{0,m},\ a_0$ и правой части предполагается, что

$$\begin{gathered} a_j(z) = a_j(z_j) + \rho_j A_{0j}, \quad a_j(z_j) \in \mathbb{C},\ \mathrm{re}\, a_j(z_j) \le 0, \\ A_{0j} \in L^p(D), \quad a_0, e^{-\sum_{j=1}^m \omega_j} f \in L^p(D),\ p > 2, \end{gathered} \tag{2}$$

где для краткости обозначено

$$\omega_j = \frac{2a_j(z_j)}{(n_j - 1)|z - z_j|^{n_j - 1}}.$$

Выбор коэффициентов указанного вида объясняется тем, что три слагаемых в левой части (2) можно представить в форме

$$u_{\bar z\bar z} + \sum_{j=1}^{m} \frac{a_j}{\rho_j} u_{\bar z} + \frac{a_0}{\Pi_1^m \rho_j} u = \left(\frac{\partial}{\partial \bar z} + A + B\right)(u_{\bar z} - Bu) \tag{3}$$

с коэффициентом $A = \sum_1^m \frac{a_j}{\rho_j}$.

Под решением уравнения (1) понимается функция u, принадлежащая соболевскому пространству $W^{1,p}(D\cap\{\Sigma_0^m|z-z_j|>\varepsilon\})$ при любом $\varepsilon>0$ и удовлетворяющая уравнению

$$u_{\bar z\bar z}=f-\left(\sum_1^m\frac{a_j}{\rho_j}+B\right)u_{\bar z}+\left(\sum_1^m\frac{a_j}{\rho_j}B+B^2\right)u$$

в обобщенном смысле.

Для этого уравнения в классе

$$\begin{gathered}u,\ e^{-\sum_{j=1}^m\omega_j}(u_{\bar z}-Bu)\in C^{\mu}(\overline{D}\cap\{\Sigma_0^m|z-z_j|>\varepsilon\}),\quad 0<\mu<1-2/p,\\ u,\ e^{-\sum_{j=1}^m\omega_j}(u_{\bar z}-Bu)=O(1),\quad\text{при}\quad\varepsilon\to 0.\end{gathered}\tag{4}$$

ставится краевая задача типа Римана– Гильберта

$$\mathrm{re}G_1u\big|_{\Gamma}=g_1,\quad \mathrm{re}G_2e^{-\sum_{j=1}^m\omega_j}(u_{\bar z}-Bu)\big|_{\Gamma}=g_2,\tag{R}$$

где функции $G_k,g_k\in C^{\nu}(\Gamma)$, причем G_1 и G_2 всюду отличны от нуля.

Пусть контур Γ принадлежит классу $C^{1,\nu}$ и функция $\zeta=\alpha(z)$ осуществляет конформное отображение области D на единичный круг $|\zeta|<1$. Тогда по теореме Келлога эта функция принадлежит классу $C^{1,\nu}(\overline{D})$. Считая контур Γ ориентированным против часовой стрелки, введем индекс Коши

$$\jmath_k=\frac{1}{2\pi}\arg G_k\big|_{\Gamma}\tag{5}$$

функции G_k.

Теорема 1. *Пусть* $A=\sum_1^m\frac{a_j}{\rho_j}$ *и*

$$A_0(z)=\sum_{j=1}^m A_{0j}(z),\quad A_{0j}(z)=\sum_{j=1}^m\frac{a_j(z)-a_j(z_j)}{\rho_j},\ A_0(z)\in L^p(D).\tag{6}$$

Тогда функция TA *существует, удовлетворяет уравнению* $(TA)_{\bar z}=A$ *в области* D_0 *и представима в виде*

$$(TA)(z)=-\sum_{j=1}^m\omega_j+h(z),\tag{7}$$

где положено

$$h(z)=(TA_0)(z)+\frac{1}{\pi i}\sum_{j=1}^m\frac{a_j(z_j)}{(n_j-1)}\int_{\partial D}\frac{1}{|\zeta-\zeta_j|^{n_j-1}}\frac{d\zeta}{\zeta-z}.$$

Теорема 2. *Пусть выполнено условие (6) и* $\mathrm{Re}\,a_j(z_j)\le 0$, $j=\overline{1,m}$. *Тогда при* $e^{-\sum_{j=1}^m a_j(z_j)\omega}f\in L^p(D)$ *любое решение* u *уравнения (1) в области* D_0, *для которого*

$$U=u_{\bar z}-Bu\in L^p(D),\tag{8}$$

дается формулой

$$u=e^{TB}\psi+(e^{TB}Te^{-TA-2TB})\phi+(e^{TB}Te^{-TA-2TB}Te^{TA+TB})f,\tag{9}$$

где функции ϕ, ψ аналитичны в области D_0, причем $e^{\sum_{j=1}^{m} a_j(z_j)\omega}\phi \in L^p(D)$, и определяются однозначно по u.

Теорема 3. *Пусть выполнены условии теоремы 1,2 и в дополнение к (2) контур $\Gamma \in C^{1,\nu}$, причем функции $G_k \in C^{\nu}(\Gamma)$, $\mu < \nu < 1$. Тогда задача R фредгольмова и ее индекс $\jmath$ дается формулой*

$$\jmath = 2 - \frac{1}{\pi}\arg(G_1 G_2)\Big|_{\Gamma}.$$

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE BITZADZE EQUATION WITH STRONG SINGULARITIES OF COEFFICIENTS

Yu.S. Fedorov, A.B. Rasulov

For the Bitzadze equation with a set of hypersingular points of coefficients, a boundary value problem of Hilbert type is investigated.

Keywords: Bitzadze equation. singular points, Vekua operator, Riemann-Hilbert problem.

УДК 517.51

НОВЫЕ МЕТОДЫ СЖАТИЯ ОБРАЗОВ И ЦЕЛОЧИСЛЕННОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ИЗ МНОГОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВ L_p

В.И. Филиппов[1]

1 *888vadim@mail.ru*; Саратовский социально-экономический институт (филиал) РЭУ им. Г.В. Плеханова

Получены результаты разложения элементов многомерных пространств $L_p\{(0,1]^m\}$, $1 \le p < \infty$, по системам функций, состоящих из сжатий и сдвигов одной функции, с целыми коэффициентами. Эти исследования могут вызвать интерес, также, у специалистов по передаче и обработке цифровой информации, так как предлагается простой алгоритм приближения элементов пространств $L_p\{(0,1]^m\}$, $1 \le p < \infty$, с указанными свойствами.

Ключевые слова: функциональные системы из сжатий и сдвигов одной функции в многомерных пространствах $L_p\{(0,1]^m\}$, $1 \le p < \infty$, многомерные ряды типа Фурье, многомерные ряды типа Фурье с целыми коэффициентами, цифровая обработка информации, цифровая передача информации, целочисленные разложения функций.

Полученные результаты продолжают исследования, опубликованные в [1] и в других работах автора. Системы функций, полученные из сжатий и сдвигов одной функции, привлекли внимание математиков в связи с исследованиями по всплескам (wavlets) и фреймам. В предложенных исследованиях не строятся ортонормированные системы из систем сжатий и сдвигов одной функции. Мы получаем разложение элементов пространств L_p непосредственно по данной системе, состоящей из сжатий и сдвигов одной функции. Допускается значительная погрешность вычисления первоначальных коэффициентов. При этом в предложенном алгоритме корректируются погрешности вычисления коэффициентов.

В последнее время среди математиков имеется определенный интерес к разложениям в ряды с целыми коэффициентами. Так, в работе [3] приводится результат о существовании последовательности тригонометрических многочленов с целыми положительными коэффициентами, которая сходится к нулю почти всюду.

В статье [4] рассмотрены также системы из сжатий и сдвигов одной функции, но коэффициенты разложения находятся почти как коэффициенты Фурье и несколько по другому, чем в предложенной работе. Пусть

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in (0,1]; \\ 0, \text{ если } x \notin (0,1], \end{cases} \tag{1}$$

$\Psi(t) = \Psi(t_1, t_2, ..., t_m) = \psi(t_1) \cdot \psi(t_2) \cdots \psi(t_m)$, $t_i \in (0,1]$, $i = \overline{1,m}$.

Рассмотрим функциональные системы вида

$$\{\Psi_{n,\mathbf{j}}\} = \{\Psi_{n,j_1,j_2,...,j_m}\} = \Big\{\frac{1}{2^{n-1}}\psi(2^{n-1}t_1 - j_1 - 1)\cdot$$
$$\psi(2^{n-1}t_2 - j_2 - 1)\cdots\psi(2^{n-1}t_m - j_m - 1)\Big\} = \{\Psi_l\},$$
$$n = 1,2,..., \; j_i = \overline{1, 2^{n-1}}, \; t_i \in (0,1], \; i = \overline{1,m}, \; l = 1,2,.... \tag{2}$$

Предлагается сплошная конкретная нумерация элементов данной системы. Можно предложить и другие нумерации элементов внутри пачки. Это не повлияет на доказательство теоремы.

Пусть произвольная функция $f \in L_p\{(0,1]^m\}$, $1 \le p < \infty$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} d_l^* \Psi_l = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j_1=1}^{2^{i-1}} \sum_{j_2=1}^{2^{i-1}} \dots \sum_{j_m=1}^{2^{i-1}} d^*_{i,j_1,j_2,...,j_m} \Psi_{i,j_1,j_2,...,j_m} \right), \tag{3}$$

где

$$f_{k+1} = f_k - \sum_{j_1=1}^{2^{k-1}} \sum_{j_2=1}^{2^{k-1}} .. \sum_{j_m=1}^{2^{k-1}} d^*_{k,j_1,j_2,...,j_m} \Psi_{k,j_1,j_2,...,j_m}, \; f_1 = f, \; k \ge 1,$$

коэффициенты $d_l^* = d^*_{k,j_1,j_2,...,j_m} = d^*_{k,\mathbf{j}}$ целые и вычисляются специальным образом.

Теорема. *Пусть задана произвольная функция $f \in L_p\{(0,1]^m\}$, $1 \le p < \infty$. Тогда ряд (3) по системе (2) с образующей функцией ψ как в (1) сходится по норме пространства $L_p\{(0,1]^m\}$, $1 \le p < \infty$ к $f(t)$, т.е.* $\left\| f - \sum_{l=0}^{n} d_l^* \Psi_l \right\|_p \to 0, \quad n \to \infty.$

Замечание. Назовем разложения фукций в теореме 1 *целочисленным разложением* функций из соответствующих пространств.

Пример. Нашей задачей, например, является трансляция или сохранение телевизионного аудио и видео сигнала с помощью его разложения на целые числа. Заметим, что при этом получается и сжатие образов. Используя обозначения работы [2], в случае $\varphi(t) = |t|^2$ получим $\varphi_2(L) = \varphi_2^*(L) = E^2_\varphi$ (заметим, что индекс 2 вверху и внизу означает, что рассматривается двумодулярное пространство), где $E_{\rho_1} = E_\varphi$ это $L_2\{(0,1]^2\}$, а $E_{\rho_2} = E_\varphi$ это $L_2(0,1]$. Пространство $L_2\{(0,1]^2\}$ используется для приближения в нем изображений по системе (3) в фиксированный момент времени t_l. Пространство $L_2(0,1]$ нами используется для приближения в нем звукового сигнала по системе (3) в течение момента времени (t_l, t_{l+1}). Таких моментов при обычной трансляции, например, может быть 24 в одну секунду. Если при этом в изображении много стационарных зон, то можно от момента к моменту передавать только информацию об измененных зонах. Рассмотрим систему функций $\{\Psi_{n,j_1,j_2}; \Psi_{n,j_1}\} = \{\Psi_l\}$, где l нумерует сначала элементы в n-ой пачке системы $\{\Psi_{n,j_1,j_2}\} = \{\Psi_l^1\}$, а затем в n-ой пачке системы $\{\Psi_{n,j_1}\} = \{\Psi_l^2\}$.

Назовем систему $\{\Psi_l\}$ *системой разложения (системой целочисленного разложения)* в пространстве E_φ^2, если существует ряд $\sum_{l=1}^{\infty} c_l \psi_l$ ($\sum_{l=1}^{\infty} c_l^* \psi_l$, $c_l^* \in Z$) такой, что для любого элемента $f = (f_1(x_1,x_2), f_2(t)) \in E_\varphi^2$, где $f_1(x_1,x_2)$ – это изображение в момент времени t_l, а $f_2(t)$ – это звуковой сигнал в период времени (t_l, t_{l+1}), который сходится по φ-норме пространства E_φ^2.

Заметим что сходимость по φ-норме эквивалента, в данном пространстве, ρ-сходимости, то есть сходимости в среднем в каждом из пространств, а значит и сходимости по норме. Учтем, так же, что норма является модуляром [2]. Таким образом при задании погрешности приближения $\varepsilon > 0$ мы можем построить сумму $\sum_{l=1}^{l_0} c_l^* \psi_l = \sum_{l=1}^{l_0^1} c_{1,l}^* \psi_l^1 + \sum_{l=1}^{l_0^2} c_{2,l}^* \psi_l^2$, $c_l^* \in Z$ такую, что

$$\left\| f - \sum_{l=1}^{l_0} c_l^* \psi_l \right\|_\varphi^2 = \frac{1}{2} \left\| f_1 - \sum_{l=1}^{l_0^1} c_{1,l}^* \psi_l^1 \right\|_2 + \frac{1}{2} \left\| f_2 - \sum_{l=1}^{l_0^2} c_{2,l}^* \psi_l^2 \right\|_2 < \varepsilon$$

при этом в этой сумме будет много нулевых коэффициентов c_l^*. Уменьшая ε, получаем более четкое изображение и более четкий звук. Затем транслируем или запоминаем номера коэффициентов и их значения (целочисленные).

Норму (квазинорму) в (4) можно ввести и следующим образом:

$$\left\| f - \sum_{l=1}^{l_0} c_l^* \psi_l \right\|_\varphi^2 = \max\left\{ \left\| f_1 - \sum_{l=1}^{l_0^1} c_{1,l}^* \psi_l^1 \right\|_2 ; \left\| f_2 - \sum_{l=1}^{l_0^2} c_{2,l}^* \psi_l^2 \right\|_2 \right\} < \varepsilon.$$

Заметим, что вместо двумодулярного пространства можно рассматривать модели с n-модулярными пространствами.

Литература

1. Filippov V., Oswald P. *Representation in L^p by series of translates and dilates of one function* // Journal of Approximation Theory. – 1995. – V. 82. – № 1. – P. 15–29.

2. Филиппов В. И. *Многомодулярные пространства и их свойства* // Известия Вузов. Математика. – 2017 – Т. 61. – № 12. – С. 57–65.

3. Borodin P. A., Konyagin S. V. *Convergence to zero of exponential sums with positive integer coefficients and approximation by sums of shifts of single function on the line* // Analysis Math. – 2018. – Т. 44. – № 2. – P. 163–183.

4. Лукашенко Т. П., Садовничий В. А. *Орторекурсивные разложения по подпространствам* // Доклады Академии наук. – 2012. – Т. 445. – № 2. – С. 135–138.

NEW METHODS OF IMAGES COMPRESSION AND INTEGER DECOMPOSITION OF FUNCTIONS FROM MULTIDIMENSIONAL SPACES L_p, $p \geq 1$

V.I. Filippov

The results of decomposition of elements of multidimensional spaces $L_p\{(0,1]^m\}, 1 \leq p < \infty$) are obtained in systems of functions consisting of contractions and shifts of a single function with integer coefficients. These studies may also be of interest to specialists in the transmission and processing of digital information, since a simple algorithm is proposed for approximating the elements of the spaces $L_p\{(0,1]^m\}, 1 \leq p < \infty$, with the specified properties.

Keywords: functional systems consisting of compressions and shifts of one function in multidimensional spaces $L_p\{(0,1]^m\}, 1 \leq p < \infty$, multidimensional Fourier type series, multidimensional Fourier type series with integer coefficients, digital information processing, digital information transfer, integer decomposition of functions.

УДК 517.542

ПОСТРОЕНИЕ МИНИМАЛЬНОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ С ПОМОЩЬЮ ГОЛОМОРФНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ИЗ ПОЛУПЛОСКОСТИ НА СЧЕТНОУГОЛЬНИК

Е.Л. Хабарова[1], И.А. Колесников[2]

1 *flo-00@mail.ru*; Томский государственный университет
2 *ia.kolesnikov@mail.ru*; Томский государственный университет

В работах Fujimori S., Weber M. предложен один способ построения трехпериодических минимальных поверхностей в евклидовом пространстве, основанный на формуле Кристоффеля-Шварца для периодических многоугольников типа полосы. В данной работе рассмотрен способ построения периодической минимальной поверхности с помощью голоморфного отображения полуплоскости на периодические многоугольники типа полуплоскости.

Ключевые слова: минимальная поверхность, голоморфное отображение, счетноугольник, симметрия переноса.

В работах Fujimori S., Weber M. [1] предложен способ построения минимальных трехпериодических поверхностей в евклидовом пространстве, то есть поверхностей, инвариантных относительно сдвига в трех независимых направлениях. Рассмотрим один способ построения двухпериодической минимальной поверхности, инвариантной относительно вертикального сдвига и симметрией относительно вертикальной плоскости (или вертикальных плоскостей).

Теорема 1. [2] *Всякая односвязная минимальная поверхность в $\mathbb{R}^3$ может быть представлена в виде*

$$X_k(z) = \int_{z_0}^{z} \varphi(\zeta)_k d\zeta + C_k, k = 1, 2, 3,$$

где $z_0 \in \mathbb{C}, \varphi_k$ *определяются равенствами:*

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}h(1-g^2), \quad \varphi_2 = \frac{i}{2}h(1+g^2), \quad \varphi_3 = hg,$$

функции $h, g : D \to \mathbb{C}$, $D \subset \mathbb{C}$, g *мероморфна в* D, h *голоморфна в* D. *В каждой точке, в которой функция* g *имеет полюс порядка* m, *функция* h *имеет нуль порядка не ниже, чем* $2m$.

Обратно: всякие две функции h, g, *удовлетворяющие вышеперечисленным условиям, задают минимальную поверхность*

$$X(z) = \big(X_1(z), X_2(z), X_3(z)\big).$$

Такое представление минимальной поверхности называют представлением Эннепера–Вейерштрасса.

Рассмотрим минимальную поверхность Σ, определенную на верхней комплексной полуплоскости $\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im} z > 0\}$ функциями

$$h(\zeta) = \frac{1}{g(\zeta)}, \quad g(\zeta) = \prod_{k=1}^{n} \left(\sin \frac{a_k^{(0)} - \zeta}{2}\right)^{\alpha_k - 1},$$

где $\alpha_k \in [0,1) \cup (1,2]$, $\sum\limits_{k=1}^{n} (\alpha_k - 1) = 0$.

Выбор g обусловлен предыдущими работами [3]. Отображение

$$f(z) = c_1 \int\limits_{z_0}^{z} g(\zeta) d\zeta = c_1 \int\limits_{z_0}^{z} \prod_{k=1}^{n} \left(\sin \frac{a_k^{(0)} - \zeta}{2}\right)^{\alpha_k - 1} d\zeta + c_2$$

переводит верхнюю комплексную полуплоскость на счетноугольник, здесь c_1, c_2 – комплексные постоянные, $a_k^{(0)} \in [0, 2\pi)$ – прообразы вершин счетноугольника на основном периоде, $\alpha_k \pi$ – внутренние углы при этих вершинах.

Определение. [4] *Счетноугольником называют односвязную область типа полуплоскости с симметрией переноса вдоль вещественной оси, граница которой состоит из отрезков прямых и лучей, причем при движении по границе от точки* w_0 *до точки* $w_0 + 2\pi$ *их должно быть конечное число.*

Теорема 2. *Поверхность* Σ, *построенная выше, является односвязной минимальной поверхностью с одной граничной компонентой, лежащей на конечном количестве вертикальных плоскостей. Эти плоскости пересекаются под углами* $(\alpha_k - 1)\pi$ *в образах точек* a_k. *Кроме того, поверхность инвариантна относительно сдвига*

$$\Sigma = L(\Sigma), \quad L(X_1, X_2, X_3) = (X_1, X_2, X_3 + 2\pi).$$

Пример 1. Пусть $g(\zeta) = \sqrt{\tan\left(\frac{\zeta}{2}\right)}$. Отображение

$$f(z) = c_1 \int\limits_{0}^{z} \sqrt{\tan\left(\frac{\zeta}{2}\right)} d\zeta + c_2 = c_3 \left[\ln\left(\sin\frac{z}{2} + \cos\frac{z}{2} - \sqrt{\sin z}\right) + \arcsin\left(\sin\frac{z}{2} - \cos\frac{z}{2}\right)\right] + c_4$$

переводит верхнюю полуплоскость в полуплоскость с исключенными равнобедренными треугольниками с углом при основании $\frac{1}{4}\pi$.

Соответствующая минимальная поверхность Σ будет параметрически задана уравнениями

$$X_1(z) = \sqrt{2}\ln\left|\sin\frac{z}{2} + \cos\frac{z}{2} + \sqrt{\sin z}\right|,$$

$$X_2(z) = -\sqrt{2}\ln\left|i\left(\cos\frac{z}{2} - \sin\frac{z}{2}\right) + \sqrt{\sin z}\right|,$$

$$X_3(z) = \mathrm{Re}z.$$

Полученная минимальная поверхность (фрагмент) изображена на рис. 1.

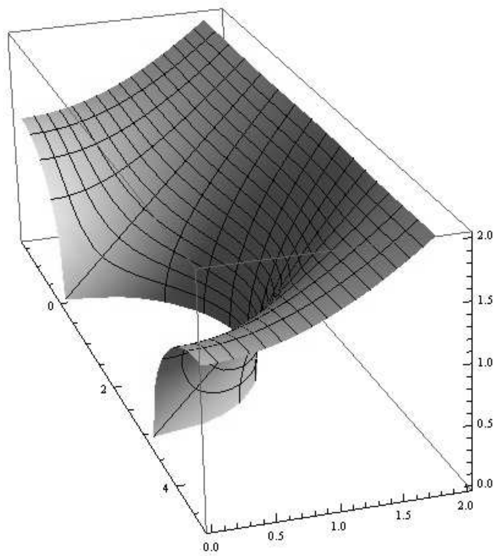


Рис. 1. Минимальная поверхность

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы повышения международной конкурентоспособности Томского государственного университета на 2013-2020 гг.

Литература

1. Fujimori S., Weber M. *A construction method for the triply periodic minimal surfaces* // OCAMI Studies. – 2009. – V. 3. – P. 79–90.

2. Кархер Г. *Минимальные поверхности* / Кархер Г., Саймон Л. и др.; под ред. Оссермана Р. – М.: ФИЗМАЛИТ, 2003. – 352 с.

3. Хабарова Е. Л., Копанева Л. С. *Интеграл Кристоффеля-Шварца на классах отображений с симметрией переноса* // Всероссийская конференция по математике и механике: тезисы докл. – Томск, 2018. – С. 95–96.

4. Александров И. А. *Конформные отображения полуплоскости на области с симметрией переноса* // Известия вузов. Математика. – 1999. – № 6. – С. 15–18.

CONSTRUCTION OF A MINIMAL PERIODIC SURFACE BASED ON HOLOMORPHIC MAP OF THE HALF-PLANE ONTO PERIODIC POLYGON

E.L. Khabarova, I.A. Kolesnikov

Fujimori S. and Weber M. gave a method for constructing embedded triply periodic minimal surfaces in the Euclidean space, based on the Schwarz-Christoffel formula for periodic polygons of strip type. This paper considers a construction method for periodic minimal surface based on holomorphic map of the half-plane onto periodic polygon of half-plane type.

Keywords: minimal surface, holomorphic mapping, periodic polygon, symmetry of transfer.

UDC 517.574, 517.547

AFFINE BALAYAGE OF MEASURES WITH APPLICATIONS TO HOLOMORPHIC FUNCTIONS

B.N. Khabibullin[1], E.B. Menshikova[2]

1 *khabib-bulat@mail.ru*; Bashkir State University
2 *algeom@bsu.bashedu.ru*; Bashkir State University

Let $u \not\equiv -\infty$ and $M \not\equiv -\infty$ be two subharmonic functions in a domain D on the complex plane $\mathbb{C}$. We investigate two related but different problems. The first is to find the conditions on the Riesz measures υ_u and μ_M of functions u and M respectively under which there exists a subharmonic function $h \not\equiv -\infty$ on D such that $u + h < M$. The second is the same question, but for a harmonic function h on D. The answers to these questions are given in terms of the special affine balayage of measures introduced in our recent previous works. Applications of this technique concern the description of distribution of zeros for holomorphic functions f on the domain D satisfying the restriction $|f| \le \exp M$.

Keywords: subharmonic function, Riesz measure, balayage, holomorphic function, sequence of zeros, uniqueness set, weighted class.

In the survey [5], considered general concepts of *affine balayage*. In this article, we deal with a particular case of such balayage with respect to special classes of test subharmonic functions. Here we give some results from [4], [6], [3] as well as their generalizations.

As usual, $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$, $\mathbb{R}$, and $\mathbb{C}$ are the sets of all *natural, real*, and *complex* numbers, respectively. For the *real line* $\mathbb{R}$ with the *Euclidean norm-module* $|\cdot|$,

$$\mathbb{R}_{-\infty} := \{-\infty\} \cup \mathbb{R}, \quad \mathbb{R}_{+\infty} := \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \ |\pm\infty| := +\infty; \quad \mathbb{R}_{\pm\infty} := \mathbb{R}_{-\infty} \cup \mathbb{R}_{+\infty}$$

is the *extended real line* in the end topology with two ends $\pm\infty$, with the order relation $\le$ on $\mathbb{R}$ complemented by the inequalities $-\infty \le x \le +\infty$ for $x \in \mathbb{R}_{\pm\infty}$, with the *positive real axis*

$$\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \colon x \ge 0\}, \quad x^+ := \max\{0, x\}, \quad x^- := (-x)^+, \quad \text{for } x \in \mathbb{R}_{\pm\infty},$$
$$S^+ := \{x \ge 0 \colon x \in S\}, \quad S_* := S \setminus \{0\} \quad \text{for } S \subset \mathbb{R}_{\pm\infty}, \quad \mathbb{R}^+_* := (\mathbb{R}^+)_*,$$
$$x \cdot (\pm\infty) := \pm\infty =: (-x) \cdot (\mp\infty) \quad \text{for } x \in \mathbb{R}^+_* \cup (+\infty),$$

$$\frac{x}{\pm\infty} := 0 \quad \text{for } x \in \mathbb{R}, \quad \text{but } 0 \cdot (\pm\infty) := 0$$

unless otherwise specified. An open connected (sub-)set of $\mathbb{R}_{\pm\infty}$ is a *(sub-)interval* of $\mathbb{R}_{\pm\infty}$.

The *Alexandroff* one-point *compactification* of $\mathbb{C}$ is denoted by $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ [7].

The same symbol 0 is used, depending on the context, to denote the number zero, the origin, zero vector, zero function, zero measure, etc. Given $z \in \mathbb{C}$ and $r \in \mathbb{R}_{+\infty}$, we set

$$D(z,r) := \{z' \in \mathbb{C} \colon |z' - z| < r\}, \quad \overline{D}(z,r) := \{z' \in \mathbb{C} \colon |z' - z| \le r\},$$
$$D(\infty,r) := \{z \in \mathbb{C}_\infty \colon |z| > 1/r\}, \quad \overline{D}(\infty,r) := \{z \in \mathbb{C}_\infty \colon |z| \ge 1/r\},$$
$$D(r) := D(0,r), \quad \mathbb{D} := D(0,1), \quad \overline{D}(r) := \overline{D}(0,r), \quad \overline{\mathbb{D}} := \overline{D}(0,1).$$

Thus, the basis of an open (respectively closed) neighborhood of a point $z \in \mathbb{C}_\infty$ form *open* (respectively *closed*) *disks* $D(z,r)$ (respectively $\overline{D}(z,r)$) centered at z with radius $r > 0$.

Given a subset S of $\mathbb{C}_\infty$, the *closure* $\operatorname{clos} S$, the *interior* $\operatorname{int} S$ and the *boundary* ∂S will always be taken relative to $\mathbb{C}_\infty$. For $S' \subset S \subset \mathbb{C}_\infty$, we write $S' \Subset S$ if $\operatorname{clos} S' \subset \operatorname{int} S$. An open connected (sub-)set of $\mathbb{C}_\infty$ is a *(sub-)domain* of $\mathbb{C}_\infty$. By $\operatorname{dist}(\cdot,\cdot)$ we denote the Euclidean distance function in $\mathbb{C}_\infty$. So, $\operatorname{dist}(S,\infty) := +\infty$ for $S \Subset \mathbb{C}$.

For a subset $S \subset \mathbb{C}$, $\operatorname{har}(S)$, $\operatorname{sbh}(S)$, $\operatorname{Hol}(S)$ and $C^k(S)$ with $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ are the restrictions to S of *harmonic, subharmonic,* and *k times continuously differentiable functions* in some (in general, its own for each function) open set $O \subset \mathbb{C}$ containing S, respectively. But $C(S)$ is the class of all continuous functions on S. The class $\operatorname{sbh}(S)$ contains the minus-infinity function $-\infty \colon z \mapsto -\infty$ identically equal to $-\infty$; $\operatorname{sbh}_*(S) := \operatorname{sbh}(S) \setminus \{-\infty\}$, $\operatorname{Hol}_*(S) := \operatorname{Hol}(S) \setminus \{0\}$, $\operatorname{sbh}^+(S) := \{u \in \operatorname{sbh}(S) \colon u \ge 0 \text{ on } S\}$.

Let $\operatorname{Borel}(S)$ be the class of all Borel subsets in $S \subset \operatorname{Borel}(\mathbb{C}_\infty)$. We denote by $\operatorname{Meas}(S)$ the class of all Borel signed measures, or, *charges* on $S \in \operatorname{Borel}(\mathbb{C}_\infty)$; $\operatorname{Meas}_{\mathrm{c}}(S)$ is the class of charges $\mu \in \operatorname{Meas}(S)$ with a compact support $\operatorname{supp}\mu \Subset S$; $\operatorname{Meas}^+(S) := \{\mu \in \operatorname{Meas}(S) \colon \mu \ge 0\}$, $\operatorname{Meas}^+_{\mathrm{c}}(S) := \operatorname{Meas}_{\mathrm{c}}(S) \cap \operatorname{Meas}^+(S)$; $\operatorname{Meas}^{1+}(S) := \{\mu \in \operatorname{Meas}^+(S) \colon \mu(S) = 1\}$, *probability measures*. We denote by $\delta_z \in \operatorname{Meas}^{1+}_{\mathrm{c}}(S)$ the *Dirac measure* at a point $z \in S$, i.e., with the support $\operatorname{supp}\delta_z = \{z\}$, $\delta_z(\{z\}) = 1$. We denote by $\mu\big|_{S'}$ the restriction of μ to $S' \in \operatorname{Borel}(\mathbb{C}_\infty)$.

Definition (of affine balayage). *Let $O \subset \mathbb{C}$ be an open subset, and $S_0 \Subset O$. Let $\mathcal{V}$ be a class of Borel-measurable functions on $O \setminus S_0$. We say that a measure $\mu \in \operatorname{Meas}^+(O)$ is an affine balayage of a measure $\nu \in \operatorname{Meas}^+(O)$ outside S_0 for the class $\mathcal{V}$ and write $\upsilon \preccurlyeq_{S_0,\mathcal{V}} \mu$ if there exists a constant $C \in \mathbb{R}$ such that*

$$\int_{O\setminus S_0} v\, d\nu \le \int_{O\setminus S_0} v\, d\mu + C \quad \text{for all } v \in \mathcal{V},$$

provided that all integrals are well defined by values from the extended real line $\mathbb{R}_{\pm\infty}$.

We recall, that a domain $D \subset \mathbb{C}$ have a non-polar boundary ∂D if either $\partial D \subset \mathbb{C}_\infty$ contains a non-isolated point, or $\partial D \subset \mathbb{C}_\infty$ has a non-zero Hausdorff dimension [1, 5.4.1]. A domain with non-polar boundary necessarily possesses the Green function g_D [1], [2].

Theorem 1 ([3, Theorem 1]) *Let $D \ne \varnothing$ be a domain in $\mathbb{C}$ with non-polar boundary ∂D, $M \in \operatorname{sbh}(D) \cap C(D)$ be a function with the Riesz measure $\mu_M \in \operatorname{Meas}^+(D)$, and $u \in \operatorname{sbh}_*(D)$ with the Riesz measure $\upsilon_u \in \operatorname{Meas}^+(D)$. Then the following three statements are equivalent:*
[**s**1] *There is a subharmonic function $h \in \operatorname{sbh}_*(D)$ such that*

$$u + h \le M \quad \text{on } D. \tag{1}$$

[**s**2] *For any non-empty subset* $S_0 \Subset D$ *and a constant* $b \in \mathbb{R}^+_*$, *the measure* μ_M *is an affine balayage of the measure* υ_u *outside* $S_0 \Subset D$ *for the class*

$$\mathrm{sbh}_0^+(D \setminus S_0; \le b) := \Big\{ v \in \mathrm{sbh}_0(D \setminus S_0) \colon \ v \ge 0 \textit{ on } D \setminus S_0, \ \sup_{D \setminus S_0} v \le b \Big\}$$

of subharmonic positive test functions, where

$$\mathrm{sbh}_0(D \setminus S_0) := \Big\{ v \in \mathrm{sbh}(D \setminus S_0) \colon \ \lim_{D \ni z' \to z} v(z') = 0 \textit{ for all } z \in \partial D \Big\}.$$

[**s**3] *There are a non-empty subset* $S_0 \Subset D$ *and a number* $b \in \mathbb{R}^+_*$ *such that the measure* μ_M *is an affine balayage of the measure* υ_u *outside* S_0 *for the class*

$$\mathrm{sbh}_{00}(D \setminus S_0) \bigcap \mathrm{sbh}_0^+(D \setminus S_0; \le b) \bigcap C^\infty(D \setminus S_0)$$

of subharmonic positive finite infinitely differentiable test functions, where

$$\mathrm{sbh}_{00}(D \setminus S_0) := \{ v \in \mathrm{sbh}(D \setminus S_0) \colon \textit{there is } S_v \Subset D \textit{ such that } v \equiv 0 \textit{ on } D \setminus S_v \}.$$

An application of Theorem 1 to study the distribution of *subsequences of roots for holomorphic functions from weight classes* can be found in [3].

“Subharmonic” Theorem 1 has a similar “harmonic” counterpart. Consider some more complicated classes of test functions. Given $S \subset \mathbb{C}$ and $r \in \mathbb{R}^+$, a set

$$S^{\cup r} := S \bigcup \bigcup_{z \in S} D(z, r).$$

is called an *outer* r*-parallel set* [8, Ch. I,§ 4] *for* S.

For $v \in L^1\big(\partial D(z,r)\big)$, we define the averaging value of v at the point z as

$$v^{\circ r}(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z + re^{is})\, \mathrm{d}s.$$

Let $\varnothing \neq \operatorname{int} S_0 \subset S_0 \Subset D$ be a connected subset of domain D, and

$$0 < r < \frac{1}{3} \mathrm{dist}\,(S_0, \partial D), \qquad -\infty < b_- < b_+ < +\infty \tag{2}$$

be constants. A function $v \in \mathrm{sbh}_0(D \setminus S_0)$ is called a *subharmonic signed test function from a class* $\mathrm{sbh}_0^\pm(D \setminus S_0, r; b_\pm)$, if this function satisfies the following three conditions:
[**t**1] $\sup\{v(z) \colon z \in \partial S_0\} \le b_+$; [**t**2] $\inf\{v^{\circ r}(z) \colon z \in S_0^{\cup(3r)} \setminus S_0^{\cup r}\} \ge b_-$;
[**t**3] *there is a subset* $S_v \Subset D$ *such that* $v \ge 0$ *on* $D \setminus S_v$.

We will use a substantially narrower class $\mathrm{sbh}_{00}^\pm(D \setminus S_0, r; b_\pm)$ of *subharmonic signed finite test function* v satisfying condition [**t**1], but the condition $\inf\{v(z) \colon z \in S_0^{\cup(3r)} \setminus S_0\} \ge b_-$, instead of *weaker* condition [**t**2], and also a *finiteness condition*
[**t**0] *there is a subset* $S_v \Subset S$ *such that* $v \equiv 0$ *on* $D \setminus S_v$,
instead of *weaker* condition [**t**3].

Theorem 2 (a special case announced in [6, Theorem 2]) *Let the conditions of Theorem 1 be fulfilled. Then the following three statements are equivalent:*

[**h**1] *There exists a function* $h \in \operatorname{har}(D)$ *such that* $u + h \le M$ *as in* (1).
[**h**2] *For any non-empty connected subset* $S_0 \Subset D$ *and constants from* (2)*, the measure* μ_M *is an affine balayage of the measure* υ_u *outside* $S_0 \Subset D$ *for the class* $\operatorname{sbh}_0^{\pm}(D \setminus S_0, r; b_{\pm})$.
[**h**3] *There are a non-empty connected subset* $S_0 \Subset D$ *and constants as in* (2) *such that the measure* μ_M *is an affine balayage of the measure* υ_u *outside* S_0 *for the class*

$$\operatorname{sbh}_{00}^{\pm}(D \setminus S_0, r; b_{\pm}) \bigcap C^{\infty}(D \setminus S_0).$$

Let $\varnothing \neq D \subset \mathbb{C}$ be a domain, and $M \in \operatorname{sbh}(D) \cap C(D)$,

$$\operatorname{Hol}(D, M) := \{f \in \operatorname{Hol}(D) : |f| \le \exp M \text{ on } D\}.$$

Theorem 2 gives a criterion for a zero set for holomorphic functions $\operatorname{Hol}(M)$, which was partially announced but not proved in [6, Theorem 2].

Corollary. *Let* $\mathsf{Z} := \{\mathsf{z}\}_{k=1,2,\ldots} \subset \mathsf{D}$ *be a sequence without limit points in a simple connected domain D with two different points in ∂D or in a finitely connected domain D with* $\operatorname{clos} D \neq \mathbb{C}_{\infty}$*, and with counting measure*

$$n_{\mathsf{Z}} := \sum_k \delta_{\mathsf{z}_k},$$

where δ_z *is the Dirac measure at z. The following three statement are equivalent:*
[**z**1] *This sequence* Z *is exact zero set* Zero_f *taking into account multiplicity for a function* $f \in \operatorname{Hol}(D, M)$*, i.e., in terms of counting measures* $n_{\mathsf{Z}} = n_{\operatorname{Zero}_f}$.
[**z**2] *For any connected subset* $\varnothing \neq S_0 \Subset D$ *and constants* (2)*, there is a constant C such that*

$$\sum_k v(\mathsf{z}_k) \le \int_{D \setminus S_0} v \, d\mu_M + C \quad \textit{for all } v \in \operatorname{sbh}_0^{\pm}(D \setminus S_0, r; b_{\pm}).$$

[**z**3] *There are a connected subset* $\varnothing \neq S_0 \Subset D$*, constants as in* (2)*, and a constant C such that*

$$\sum_k v(\mathsf{z}_k) \le \int_{D \setminus S_0} v \, d\mu_M + C \quad \textit{for all } v \in \operatorname{sbh}_{00}^{\pm}(D \setminus S_0, r; b_{\pm}) \bigcap C^{\infty}(D \setminus S_0).$$

This study was financially and otherwise supported by the Russian Science Foundation (projects No. 18-01-00002.)

References

1. Hayman W. K., Kennedy P. B. *Subharmonic functions*, vol. **1**. – London etc.: Acad. Press, 1976.

2. Helms L. L., *Introduction to Potential Theory.* – New York: Wiley–Interscience, 1969.

3. Khabibullin B. N., Khabibullin F. B. *On the distribution of zero sets of holomorphic functions.* III. *Inversion Theorems* // Funktsional. Anal. i Prilozhen. – 2019. – V. 53. – No. 2. – P. 42–58.

4. Khabibullin B. N., Rozit A. P. *On the distribution of zero sets of holomorphic functions* // Funktsional. Anal. i Prilozhen. – 2018. – V. 52. – No. 1. – P. 26–42.

5. Khabibullin B. N., Rozit A. P., Khabibullina E. B. *Order version of the Hahn-Banach theorem and envelopes.* II. *Applications to the function theory* // Complex Analysis. Mathematical Physics, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz., VINITI, Moscow. – 2019. – V. 162. – P. 93–13.

6. Menshikova E. B., Khabibullin B. N. *On the distribution of zero sets of holomorphic functions.* II // Funktsional. Anal. i Prilozhen. – 2019. – V. 53. – No. 1. – P. 84-87.

7. Ransford Th. *Potential Theory in the Complex Plane.* – Cambridge: Cambridge University Press, 1995.

8. Santaló Luis A. *Integral Geometry and Geometric Probability.* – Addison-Wesley Publishing Company, Advanced Book Program, 1976.

АФФИННОЕ ВЫМЕТАНИЕ МЕР С ПРИЛОЖЕНИЕМ К ГОЛОМОРФНЫМ ФУНКЦИЯМ

Б.Н. Хабибуллин, Е.Б. Меньшикова

Пусть $u \not\equiv -\infty$ и $M \not\equiv -\infty$ две субгармонические функции в области D комплексной плоскости C. Мы исследуем две связанные. но различные задачи. Первая состоит в нахождении условий на меры Рисса, ν_u and μM функций u и M соответственно, при выполнении которых существует субгармоническая функция $h \not\equiv -\infty$ в D такая, что $u+h<M$. Вторая состоит в том, что искомая функция h должна быть гармонической в D. Ответы на эти вопросы даются в терминах специального аффинного выметания мер, введенного в наших предыдущих работах. Приложения этой техники касаются описания распределения нулей голоморфных функций f в D, удовлетворяющих ограничению $|f| \le \exp M$.

Ключевые слова: субгармоническая функция, мера Рисса, выметание, голоморфная функция, последовательность нулей, множество единственности, весовой класс.

УДК 517.956.6

О ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА ВТОРОГО РОДА

Р.С. Хайруллин[1]

1 *xravil@kgasu.ru*; Казанский государственный архитектурно-строительный университет

Для уравнения смешанного типа второго рода исследована задача в прямоугольной области. На боковых сторонах прямоугольника задано условие периодичности, на основаниях – значения искомой функции. На особой линии определены условия склеивания. Решение задачи построено в виде суммы ряда. Найдены достаточные условия на заданные функции и геометрию области, обеспечивающие существование решения. Установлен критерий единственности.

Ключевые слова: сильное вырождение, уравнение второго рода, периодическая задача.

В работе [1] К.Б. Сабитовым для уравнения смешанного типа была рассмотрена задача Дирихле в прямоугольной области. Для ее исследования был предложен некоторый аналог метода Фурье. Позднее этот метод был использован при решении других задач, в том числе и задач с условием периодичности [2,3]. Целью наших исследований является адаптация указанного метода на уравнения с сильным вырождением, в частности статьи [4-6] посвящены изучению задачи Дирихле для уравнения

$$u_{xx} + yu_{yy} + \alpha u_y = 0, \quad \alpha \le -1/2, \tag{1}$$

в смешанной области $\Omega = \{(x,y) : 0 < x < 1, -\beta < y < \gamma\}$, где $\beta > 0$ и $\gamma > 0$. В данной же работе для уравнения (1) рассмотрена задача с условием периодичности на боковых сторонах Ω.

Через n и m обозначим натуральные числа, удовлетворяющие неравенствам $-1/2 < \alpha + n = \alpha_0 \le 1/2$, $1 < 2\alpha + m \le 2$. Очевидно, что $m = 2n+2$ при $-1/2 < \alpha_0 \le 0$ и $m = 2n+1$ при $0 < \alpha_0 \le 1/2$. Пусть $\Omega_1 = \Omega \cap \{y > 0\}, \Omega_2 = \Omega \cap \{y < 0\}$.

Задача $\boldsymbol{P_\alpha}$. *В области Ω найти функцию $u(x,y)$ со свойствами:*

1^0 $u(x,y) \in C^2(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ *и удовлетворяет уравнению (1) в* $\Omega_1 \cup \Omega_2$;

2^0 *существуют пределы из областей* $((x,y) \in \Omega_i,\ i = 1,2)$

$$\tau_i(x) = \lim_{y\to 0} u(x,y), \quad \nu_i(x) = \lim_{y\to 0} |y|^\alpha [u(x,y) - A_\alpha(x,y,\tau_i)]_y, \tag{2}$$

где

$$A_\alpha(x,y,\tau_i) = \sum_{s=1}^{[m/2]} \frac{\tau_i^{(2s)}(x)(-1)^s}{(\alpha)_s s!} y^s, \quad \alpha \ne -n,$$

$$A_\alpha(x,y,\tau_i) = \sum_{s=1}^{n} \frac{\tau_i^{(2s)}(x)(-1)^s}{(\alpha)_s s!} y^s - \frac{\tau_i^{(2n+2)}(x)}{n!(n+1)!} y^{n+1} \ln|y|, \quad \alpha = -n,$$

$[\cdot]$ – *целая часть числа,* $(\alpha)_0 = 1$, $(\alpha)_s = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+s-1)$, *и на особой линии выполняются условия склеивания*

$$\tau_1(x) = \tau_2(x), \quad 0 \le x \le 1, \qquad \nu_1(x) = (-1)^n \nu_2(x), \quad 0 < x < 1; \tag{3}$$

3^0 *выполняются равенства*

$$\tau_i^{(s)}(0) = \tau_i^{(s)}(1), \quad s = \overline{0, 2[m/2]-1}; \tag{4}$$

4^0 $u(x,y)$ *удовлетворяет условию периодичности*

$$u(0,y) = u(1,y), \quad u_x(0,y) = u_x(1,y), \quad -\beta \le y \le \gamma; \tag{5}$$

5^0 $u(x,y)$ *удовлетворяет краевым условиям*

$$u(x,\gamma) = \varphi_1(x), \quad u(x,-\beta) = \varphi_2(x), \quad 0 \le x \le 1,$$

где $\varphi_i(x)$ — заданные функции.

На заданные функции наложим следующие условия.

Условие 1. *Функция $\varphi_1(x)$ принадлежит $C^2[0,1] \cap C^3(0,1)$ и выполняются равенства*

$$\varphi_1(0) = \varphi_1(1), \quad \varphi_1'(0) = \varphi_1'(1), \quad \varphi_1''(0) = \varphi_1''(1).$$

Условие 2. *Функция $\varphi_2(x)$ принадлежит $C^{[m/2]+1}[0,1] \cap C^{[m/2]+2}(0,1)$ и выполняются равенства*

$$\varphi_2^{(s)}(0) = \varphi_2^{(s)}(1), \quad s = \overline{0, [m/2]+1}.$$

Методом разделения переменных построим частные решения уравнения (1) вида

$$u(x,y)=\mathbf{X}(x)\mathbf{Y}(y),$$

удовлетворяющие условиям (2) – (5). Получим

$$\lambda_k=(2\pi k)^2,\quad k\in\mathbf{N}\cup\{0\};\tag{6}$$

$$\mathbf{X}_0(x)=1;\qquad \mathbf{X}_k(x)=\mathbf{X}_{k,1}(x)\ \text{или}\ \mathbf{X}_k(x)=\mathbf{X}_{k,2}(x)\quad\text{при}\quad k\in\mathbf{N},\tag{7}$$

$$\mathbf{Y}_{k,1}(y)=|y|^{-\alpha_0}\sum_{s=0}^{+\infty}\frac{\lambda_k^s y^{s+n+1}}{(2-\alpha)_s s!},\tag{8}$$

$$\mathbf{Y}_{k,2}(y)=\sum_{s=0}^{+\infty}\frac{\lambda_k^s y^s}{(\alpha)_s s!}\quad\text{при}\quad \alpha\neq -n,\tag{9}$$

$$\mathbf{Y}_{k,2}(y)=\sum_{s=0}^{n}\frac{\lambda_k^s y^s}{(-n)_s s!}+\frac{(-1)^n}{n!}\sum_{s=n+1}^{+\infty}\frac{\lambda_k^s y^s}{s!(s-n-1)!}\times$$
$$\times\left[\ln|y|-\psi(1+s)-\psi(s-n)\right]\quad\text{при}\quad\alpha=-n,\tag{10}$$

где $\psi(z)$ — пси-функция,

$$\mathbf{X}_{k,1}(x)=\sqrt{2}\sin 2\pi kx,\quad \mathbf{X}_{k,2}(x)=\sqrt{2}\cos 2\pi kx.\tag{11}$$

Теорема 1. *Пусть λ_k, $\mathbf{X}_k(x)$ и $\mathbf{Y}_k(x)$ определяются равенствами (6)–(11). Тогда функции*

$$u_k(x,y)=\mathbf{X}_k(x)\cdot\left[c_k\cdot\mathbf{Y}_{k,1}(y)+d_k\cdot\mathbf{Y}_{k,2}(y)\right],$$

где c_k, d_k — произвольные постоянные, представляют собой решения уравнения (1), удовлетворяющие условиям (2)–(5).

Обозначим ($k\in\mathbf{N}\cup\{0\}$)

$$\Delta_k^j(y_1,y_2)=\mathbf{Y}_{k,1}^{(j)}(y_1)\mathbf{Y}_{k,2}(y_2)-\mathbf{Y}_{k,2}^{(j)}(y_1)\mathbf{Y}_{k,1}(y_2).$$

Теорема 2. *Для того чтобы задача P_α имела не более одного решения, необходимо и достаточно, чтобы все определители $\Delta_k^0(\gamma,-\beta)$ были отличны от нуля.*

Через E обозначим множество таких k, для которых выполняется равенство

$$\Delta_k^0(\gamma,-\beta)=0.$$

Распишем формальное решение исходной задачи в виде ряда

$$u(x,y)=\sum_{k=0}^{+\infty}u_k(x,y),\tag{12}$$

где

$$u_k(x,y)=u_k^1(x,y)+u_k^2(x,y)=X_k^1(x)\left[\varphi_{1,k}^1\frac{\Delta_k^0(y,-\beta)}{\Delta_k^0(\gamma,-\beta)}+\varphi_{2,k}^1\frac{\Delta_k^0(\gamma,y)}{\Delta_k^0(\gamma,-\beta)}\right]+$$

$$+X_k^2(x)\left[\varphi_{1,k}^2\frac{\Delta_k^0(y,-\beta)}{\Delta_k^0(\gamma,-\beta)}+\varphi_{2,k}^2\frac{\Delta_k^0(\gamma,y)}{\Delta_k^0(\gamma,-\beta)}\right],\qquad 0\neq k\notin E, \tag{13}$$

$$u_0(x,y)=X_0(x)\left[\varphi_{1,0}\frac{\Delta_0^0(y,-\beta)}{\Delta_0^0(\gamma,-\beta)}+\varphi_{2,0}\frac{\Delta_0^0(\gamma,y)}{\Delta_0^0(\gamma,-\beta)}\right],\qquad 0\notin E, \tag{14}$$

$$u_k(x,y)=u_k^1(x,y)+u_k^2(x,y)=X_k^1(x)\left[\varphi_{1,k}^1\frac{Y_{k,1}(y)}{Y_{k,1}(\gamma)}+d_k^1\frac{\Delta_k^0(\gamma,y)}{Y_{k,1}(\gamma)}\right]+$$

$$+X_k^2(x)\left[\varphi_{1,k}^2\frac{Y_{k,1}(y)}{Y_{k,1}(\gamma)}+d_k^2\frac{\Delta_k^0(\gamma,y)}{Y_{k,1}(\gamma)}\right],\qquad 0\neq k\in E, \tag{15}$$

$$u_0(x,y)=X_0(x)\left[\varphi_{1,0}\frac{Y_{0,1}(y)}{Y_{0,1}(\gamma)}+d_0\frac{\Delta_0^0(\gamma,y)}{Y_{0,1}(\gamma)}\right],\qquad 0\in E, \tag{16}$$

d_k^1, d_k^2, d_0 – произвольные постоянные,

$$\varphi_{i,0}=\int\limits_0^1\varphi_i(x)dx,\qquad \varphi_{i,k}^p=\int\limits_0^1\varphi_i(x)\mathbf{X}_{k,p}(x)dx.$$

Доказано, что при определенных ограничениях на геометрию области сумма ряда (12) является решением исходной задачи при выполнении условий 1 и 2. Для этого использованы утверждения

Лемма 1. *Для любого $\epsilon>0$ существуют такие l_1 и k_1, зависящие от ϵ, что для всех $y_1, y_2\in[-\beta,-\epsilon]\cup[\epsilon,\gamma]$ и $k\geq k_1$ справедлива оценка ($j=0,1,2$) $|\Delta_k^j(y_1,y_2)|\leq l_1k^{j-1}e^{4\pi k\sqrt{\gamma}}$.*

Лемма 2. *Если $8\sqrt{\beta}$ – целое или $8\sqrt{\beta}=p/q$ – рациональное, где q – нечетное число, то существуют такие значения l_2 и k_2, что для всех $k\geq k_2$ справедлива оценка $|\Delta_k^0(\gamma,-\beta)|\geq l_2e^{4\pi k\sqrt{\gamma}}/k$.*

Лемма 3. *Существуют такие значения l_3 и l_4, что для всех $y\in[-\beta,\gamma]$ справедливы оценки ($j=0,1$) $|\Delta_k^j(y,-\beta)|\leq l_3\cdot k^{j-1/2}e^{4\pi k\sqrt{\gamma}}$, $\quad|\Delta_k^j(y,\gamma)|\leq l_4\cdot k^{j-1/2}e^{4\pi k\sqrt{\gamma}}$.*

Теорема 3. *Если $8\sqrt{\beta}$ – целое или $8\sqrt{\beta}=p/q$ – рациональное, где q нечетное число, а функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, соответственно, удовлетворяют условию 1 и 2, то задача P_α имеет решение и его можно записать в виде (12), где функции $u_k(x,y)$ определяются формулами (13)–(16), d_0, d_k^1, d_k^2 – произвольные постоянные, причем, если $E\neq\emptyset$, то для всех $k\in E$ дополнительно должны выполнятся условия разрешимости $\mathbf{Y}_{0,1}(\gamma)\varphi_{2,0}-\mathbf{Y}_{0,1}(-\beta)\varphi_{1,0}=0$, или $\mathbf{Y}_{k,1}(\gamma)\varphi_{2,k}^p-\mathbf{Y}_{k,1}(-\beta)\varphi_{1,k}^p=0$, соответственно.*

Литература

1. Сабитов К. Б. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа в прямоугольной области // Доклады РАН. — 2007. — Т 413. — № 1. — С. 23–26.

2. Егорова И. П. Задача с условием периодичности для уравнения смешанного типа с характеристическим вырождением // Вестник Самарского государственного университета. Естественнонаучная серия. — 2009. — № 8(74). — С. 15–27.

3. Сабитов К. Б., Сидоренко О. Г. Задача с условиями периодичности для вырождающегося уравнения смешанного типа // Дифференциальные уравнения. — 2010. — Т. 46. — № 1. — С. 105–113.

4. Хайруллин Р. С. К задаче Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода с сильным вырождением // Дифференциальные уравнения. — 2013. — Т. 49. — № 4. — С. 528–534.

5. Хайруллин Р. С. О существовании решения задачи Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода // Дифференциальные уравнения. — 2017. — Т. 53. — № 5. — С. 684—692.

6. Хайруллин Р. С. К задаче Дирихле для уравнения смешанного типа второго рода в исключительных случаях // Дифференциальные уравнения. — 2018. — Т. 54. — № 4. — С. 565–568.

ON A PERIODIC PROBLEM FOR A MIXED TYPE EQUATION
OF THE SECOND KIND

R.S. Khairullin

For a mixed type equation of the second kind, we investigate a boundary value problem in a rectangular domain. On the sides of the rectangle the condition of periodicity is set, on the base of the rectangle, the value of the desired function is given. On the particular line, gluing conditions are specified. The solution is constructed as the sum of a series. Sufficient conditions for the given functions and geometry of the domain that ensure the existence of the solution are found. The criterion of uniqueness is established.

Keywords: strong degeneracy, second kind equation, periodic problem.

УДК 517.9

ИНВАРИАНТНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ И ПАРЫ ЛАКСА ДЛЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ УРАВНЕНИЙ

А.Р. Хакимова[1]

1 *aigul.khakimova@mail.ru*; Институт математики с вычислительным центром УФИЦ РАН

В работе обсуждается прямой метод поиска пар Лакса для нелинейных интегрируемых уравнений в частных производных и их дискретных аналогов, основанный на понятии обобщенного инвариантного многообразия. Обобщенным инвариантным многообразием называется обыкновенное дифференциальное уравнение совместное с линеаризацией заданного уравнения. Подобранное подходящим образом ОИМ позволяет строить пару Лакса для исходного нелинейного уравнения.

Ключевые слова: нелинейные интегрируемые уравнения, линеаризованное уравнение, инвариантное многообразие, пара Лакса.

Пара Лакса является важным инструментом исследования нелинейных интегрируемых уравнений. Она позволяет находить гамильтонову структуру, интегралы движения, высшие симметрии, точные и асимптотические решения и т.д. Известно несколько методов построения пар Лакса для интегрируемых уравнений (см., например, [1] - [4]), однако разработка новых подходов решения этой задачи остается актуальной. В настоящее время существует большое количество интегрируемых уравнений, особенно дискретных, которые являются малоисследованными, а имеющиеся методы построения пары Лакса не всегда приводят к результату.

В наших работах [5] - [10] предлагается новый метод поиска пар Лакса для интегрируемых уравнений. Подчеркнем, что наш метод использует идею, близкую к известному методу псевдопотенциалов Уолквиста–Эстабрука [2], где одновременно ищутся оба уравнения Лакса. Отличие нашего подхода состоит в том, что в качестве первого уравнения представления Лакса мы берем линеаризацию заданного интегрируемого уравнения. Вторым уравнением пары будет обыкновенное дифференциальное уравнение, совместное с этим линеаризованным уравнением. Найденное таким образом ОДУ мы называем обобщенным инвариантным многообразием (ОИМ). Следует отметить, что ОИМ, подходящее для построения пары Лакса, как правило является нелинейным. Фактически, на первом этапе мы находим нелинейную пару Лакса и затем линеаризуем ее с помощью соответствующего преобразования. Поскольку мы ищем только одно из двух уравнений, наш метод достаточно эффективен. Кратко изложим суть метода.

Рассмотрим нелинейное уравнение в частных производных вида

$$u_t = f(x, t, u, u_x, u_{xx}, \ldots, u_k), \quad u_j = \frac{\partial^j u}{\partial x^j}. \tag{1}$$

Линеаризуем уравнение (1)

$$U_t = \left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial u_x} D_x + \frac{\partial f}{\partial u_{xx}} D_x^2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial u_k} D_x^k\right) U. \tag{2}$$

Припишем к линеаризации (2) обыкновенное дифференциальное уравнение

$$U_m = F(x, t, U, U_x, U_{xx}, \ldots, U_{m-1}; u, u_x, u_{xx}, \ldots, u_n), \tag{3}$$

где $U = U(x,t)$ искомая функция, а функция $u = u(x,t)$, являющаяся некоторым решением уравнения (1), входит в (3) в качестве функционального параметра.

Определение *Уравнение (3) определяет обобщенное инвариантное многообразие (ОИМ) для уравнения (1), если условие*

$$D_x^m U_t - D_t U_m \big|_{(1),(2),(3)} = 0$$

выполняется тождественно для всех значений переменных $\{u_j\}$ *и* U, U_x, $\ldots$, U_{m-1}.

Здесь переменные u_t, U_t и их производные по x заменяются в силу уравнений (1) и (2), а переменные $U_m, U_{m+1}, \ldots$ – в силу равенства (3). Поскольку переменные x, t, U, U_x, U_{xx}, $\ldots$, U_{m-1}, u, u_x, u_{xx}, $\ldots$, u_n, u_{n+1}, $\ldots$ в уравнении (3) являются независимыми, задача отыскания функции $F(x, t, U, U_x, \ldots, U_{m-1}; u, u_x, \ldots, u_n)$ является переопределенной и эффективно решается.

В наших работах рассматриваются следующие два класса обобщенных инвариантных многообразий:

$$1. \sum_{i,j=0}^{s} \alpha_{ij}(\lambda, u, u_1, \ldots) U_i U_j + k = 0;$$

$$2. \sum_{j=0}^{m} \alpha_j(\lambda, u, u_1, \ldots) U_j = 0,$$

где k, λ – произвольные постоянные.

В первом случае, когда ОИМ задается нелинейным уравнением, система уравнений (2)-(3) образует нелинейную пару Лакса для уравнения (1), которая подходящими преобразованиями сводится к линейной. Во втором случае, когда ОИМ задается линейным уравнением, из равенства (2) легко выводится такой важный в теории интегрируемости объект, как оператор рекурсии. Эффективность метода построения пары Лакса и оператора рекурсии апробирована на многочисленных примерах (см. [5] - [10]).

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 15-11-20007).

Литература

1. Захаров В.Е., Шабат А.Б. *Точная теория двумерной самофокусировки и одномерной автомодуляции волн в нелинейных средах* // ЖЭТФ. – 1971. – Т. 61. – № 1. – С. 118–134.

2. Wahlquist H.D., Estabrook F.B. *Prolongation structures of nonlinear evolution equations* // Journal of Mathematical Physics. – 1975. – Т. 16. – № 1. – С. 1–7.

3. Weiss J., Tabor M., Carnevale G. *The Painlevé property for partial differential equations* // Journal of Mathematical Physics. – 1983. – Т. 24. – № 3. – С. 522–526.

4. Nijhoff F.W., Walker A.J. *The discrete and continuous Painlevé VI hierarchy and the Garnier system* // Glasgow Mathematical Journal. – 2001. – Т. 43. – № A. – С. 109–123.

5. Habibullin I.T., Khakimova A.R., Poptsova M. N. *On a method for constructing the Lax pairs for nonlinear integrable equations* // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. – 2016. – Т. 49. – № 3. – 35 p.

6. Хабибуллин И.Т., Хакимова А.Р. *Инвариантные многообразия и пары Лакса для интегрируемых нелинейных цепочек* // Теоретическая и математическая физика. – 2017. – Т. 191. – № 3. – С. 369–388.

7. Habibullin I.T., Khakimova A.R. *On a method for constructing the Lax pairs for integrable models via a quadratic ansatz* // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. – 2017. – Т. 50. – № 30. – 19 p.

8. Хабибуллин И.Т., Хакимова А.Р. *Прямой алгоритм построения операторов рекурсии и пар Лакса для интегрируемых моделей* // Теоретическая и математическая физика. – 2018. – Т. 196. – № 2. – С. 294–312.

9. Habibullin I.T., Khakimova A.R. *On the recursion operators for integrable equations* // Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical. – 2018. – Т. 51. – № 42. – 22 p.

10. Хакимова А.Р. *К задаче описания обобщенных инвариантных многообразий нелинейных уравнений* // Уфимский математический журнал. – 2018. – Т. 10. – № 3. – С. 110–122.

INVARIANT MANIFOLDS AND LAX PAIR FOR THE INTEGRABLE EQUATIONS

A.R. Khakimova

In the article, a direct method for constructing the Lax pairs for nonlinear integrable equations in partial derivatives and for their discrete analogs is discussed; it is based on the notion of generalized invariant manifold. A generalized invariant manifold is an ordinary differential equation that is compatible with the linearization of the given equation. Properly chosen generalized invariant manifold allows us to construct a Lax pair for the original nonlinear equation.

Keywords: nonlinear integrable equations, linearized equation, invariant manifold, Lax pair.

УДК 533:519.63

ИССЛЕДОВАНИЕ СИЛЬНОГО СЖАТИЯ СЛАБОНЕСФЕРИЧЕСКОГО ПУЗЫРЬКА В ЖИДКОСТИ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ЕЕ ДАВЛЕНИЯ И ТЕМПЕРАТУРЫ

Т.Ф. Халитова[1]

1 *taliny@mail.ru*; ИММ-обособленное структурное подразделение ФИЦ КазНЦ РАН

Численно исследуется сильное сжатие среды в слабонесферическом кавитационном пузырьке при его коллапсе в зависимости от давления (15 и 50 бар) и температуры (273–460 К) жидкости (ацетона). Установлено, что переход от безударного сжатия содержимого пузырька к сжатию с ударной волной при большем давлении жидкости осуществляется при ее большей температуре. Показано, что при фиксированной температуре жидкости рост малых деформаций пузырька при коллапсе при большем давлении жидкости больше, а радиус пузырька в момент экстремального сжатия его содержимого меньше.

Ключевые слова: сильное сжатие, кавитационный пузырек, ударная волна, слабонесферический пузырек.

При сильном сжатии пузырьков в жидкости в их полости могут создаваться условия для осуществления химических реакций и физических превращений. Степень сжатия среды в пузырьках значительно зависит от многих факторов: давления жидкости, ее температуры, формы пузырька, наличия соседних пузырьков, физических параметров среды и т.д. Так, в работе [1] показано, что при давлении жидкого ацетона в 50 бар коллапс парового пузырька с образованием в его полости сходящейся сферической ударной волны осуществляется при температуре жидкости до 375 К. При больших температурах сжатие содержимого пузырька является безударным. В работе [2] в тех же условиях выполнен анализ роста возмущений сферичности кавитационного пузырька, где температура жидкого ацетона варьировалась в диапазоне от 273 до 373 К. Другие подобные исследования автору неизвестны. В настоящей работе проводится исследование сильного сжатия кавитационного пузырька в жидком ацетоне в зависимости от температуры жидкости в диапазоне от 273 до 460 К при давлении жидкости 15 и 50 бар.

Постановка задачи. Рассматривается процесс сильного сжатия слабонесферического кавитационного пузырька с начальным радиусом 500 мкм в ацетоне. Давление жидкости p_L принимается равным 15 и 50 бар, а температура жидкости T_L изменяется от 273 до 460 К. Изначально система пузырек-жидкость покоится, пар в пузырьке находится в состоянии насыщения при температуре окружающей жидкости с соответствующим давлением от 0.09 до 21.55 бар. Динамика пара в пузырьке и окружающей жидкости описывается моделью слабонесферического кавитационного пузырька с расщеплением движения жидкости на сферическую составляющую и ее малое несферическое возмущение [3]. При расчете сферической составляющей учитываются сжимаемость жидкости и пара, нестационарная теплопроводность, испарение-конденсация на межфазной поверхности, применяются широкодиапазонные уравнения состояния.

В сферической системе координат поверхность несферического пузырька может быть представлена в виде:

$$r = R(t)\left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon_n(t) P_n(\cos\theta)\right],$$

где θ – полярный угол, R – радиус пузырька, ε_n – амплитуда несферичности, отнесенная к радиусу пузырька, в виде полинома Лежандра степени n (номера сферической гармоники). Рассматривается промежуток $2 \leq n \leq 10$, так как на практике подобные формы легче возникают. Полагается, что пузырек является слабонесферическим: анализируются отклонения формы пузырька от сферической в виде отдельной гармоники P_n. При расчете несферической составляющей учитывается поверхностное натяжение, вязкость жидкости, слабая сжимаемость жидкости и влияние содержимого пузырька в виде [4].

Результаты. На рис. 1 показано влияние температуры и давления жидкости на процесс сжатия пузырька. При низких температурах, например при 273 К (рис. 1 *(а)*, *(в)*), в полости пузырька формируется сферическая ударная волна, сходящаяся к центру пузырька. При этом при большем давлении ударная волна возникает раньше, а ее интенсивность оказывается больше. Радиус пузырька в момент экстремального сжатия при температуре жидкости 273 К в случаях $p_L = 15$ и 50 бар мало отличается. По мере увеличения температуры жидкости T_L радиус пузырька в момент экстремального сжатия R_m возрастает (рис. 1 *(б)*, *(г)*). При этом при увеличении давления p_L от 15 бар до 50 бар различие между значениями R_m возрастает, так что при температуре 420 К они отличаются примерно в 2 раза. Для одной и той же температуры жидкости T_L в диапазоне от 300 К до 420 К величина R_m больше при меньшем давлении жидкости. Из рис. 1 *(б)*, *(г)* следует, что в рассматриваемом диапазоне температур переход от безударного сжатия среды в пузырьке к сжатию с ударной волной при большем давлении p_L осуществляется при большей температуре жидкости.

На рис. 2 показано влияние температуры и давления жидкости на деформации пузырька при сжатии. При низких температурах, например при 273 К (рис. 2 *(а)*, *(в)*), деформации пузырька в начале сжатия до радиуса пузырька $\approx$ 50 мкм ведут себя при разных давлениях одинаково, в финале же сжатия отличия возрастают. Различия в величине деформаций к моменту экстремального сжатия могут быть связаны не только с давлением жидкости, но и с фазой колебания деформаций. Так, для гармоники $n = 6$ видно, что при давлении жидкости 15 бар значение ε_n в момент экстремального сжатия близко к 0 (форма пузырька близка к сферической), в то время как при 50 бар соответствующие деформации близки к максимальным. Для исключения влияния фазы колебаний на рис. 2 *(б)*, *(г)* приведены огибающие. Согласно огибающим, с увеличением температуры рост деформаций пузырька при сжатии уменьшается. Для одной и той же температуры жидкости в диапазоне от 273 К до 420 К рост деформаций пузырька при большем давлении жидкости больше.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 18-31-00214 мол_а).

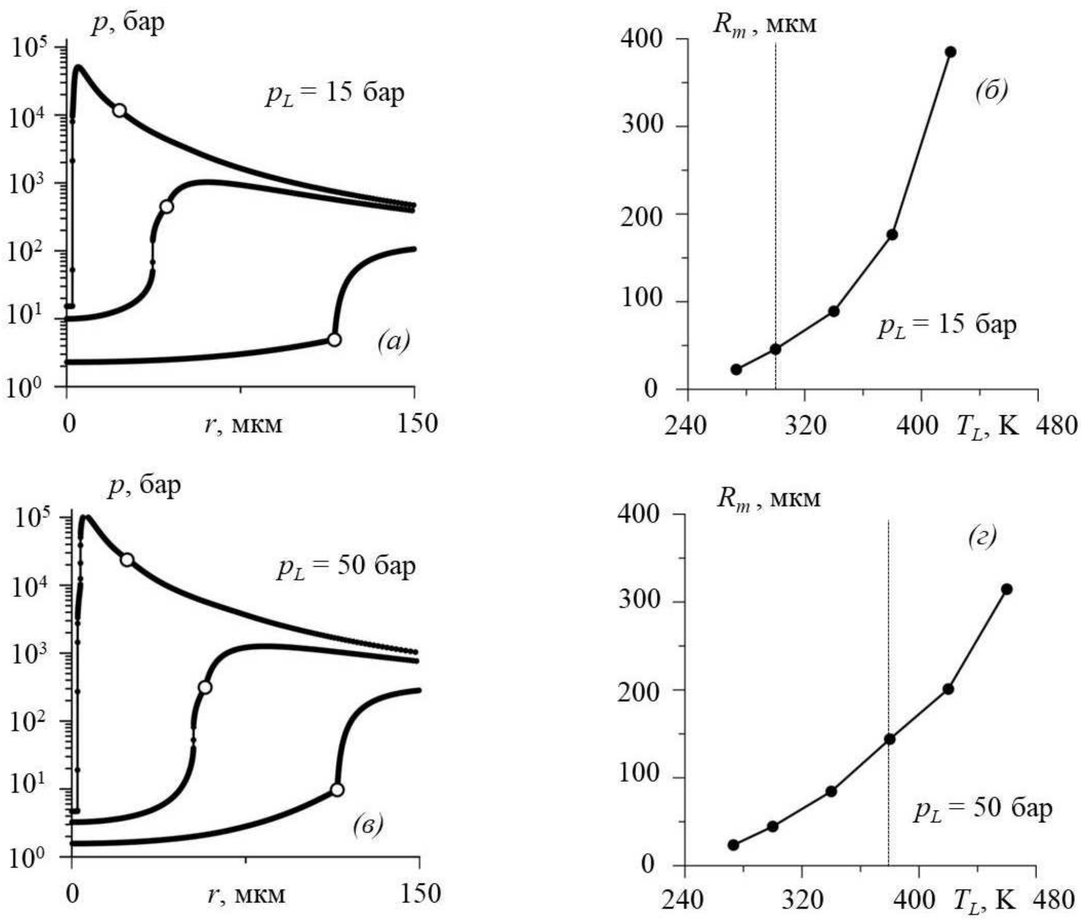


Рис. 1. Радиальные распределения давления пара в пузырьке и окружающей жидкости в три последовательных момента времени финала сжатия при температуре жидкости T_L = 273 K и давлениях p_L = 15 бар *(а)* и 50 бар *(в)*. Кружочками отмечено положение межфазной границы. Зависимость радиуса пузырька R_m, при котором достигается экстремальное сжатие его содержимого, от температуры жидкости T_L при ее давлениях p_L = 15 бар *(б)* и 50 бар *(г)*. Тонкой вертикальной линией отмечена граница между ударно-волновым (слева) и безударным (справа) сжатием содержимого пузырька.

Литература

1. Аганин А. А., Халитова Т. Ф. *Зависимость образования ударной волны в кавитационном пузырьке от температуры жидкости* // Тр. Института механики им. Р. Р. Мавлютова Уфимского научного центра РАН. – 2017. – Т. 12. – С. 89–95.

2. Топорков Д. Ю. *Рост возмущений сферичности кавитационного пузырька при его сильном сжатии* // Материалы конференции-школы «Волны и вихри в сложных средах». – 2018. – С. 154–157.

3. Халитова Т. Ф. *Расчет коллапса парового пузырька в жидкости* // Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2018. – Т. 56. – С. 302–305.

4. Lin H., Storey B. D., Szeri A. J. *Inertially driven inhomogeneities in violently collapsing bubbles: the validity of the Rayleigh-Plesset equation* // J. Fluid Mech. – 2002. – V. 452. – P. 145–162.

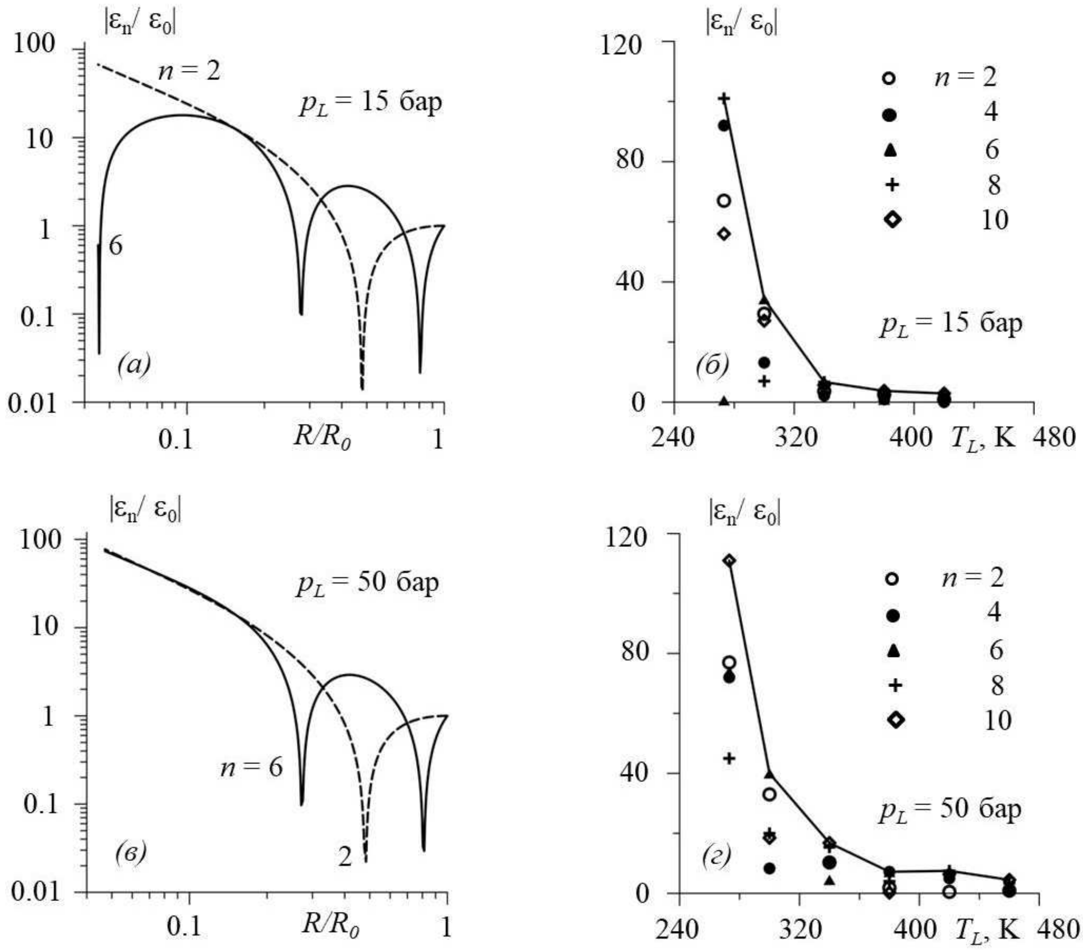


Рис. 2. Эволюция модуля безразмерной амплитуды $|\varepsilon_n/\varepsilon_0|$ деформаций пузырька в виде сферических гармоник с номерами $n = 2$ (пунктирная линия) и $n = 6$ (сплошная линия) в процессе коллапса при температуре жидкости $T_L = 273$ К и давлениях $p_L = 15$ *(а)* и 50 бар *(в)*. Зависимости роста модуля безразмерной амплитуды деформаций пузырька от температуры жидкости T_L для ряда n при ее давлениях $p_L = 15$ бар *(б)* и 50 бар *(г)*. ε_0 – начальное значение ε_n. Сплошные линии на *(б)* и *(г)* – огибающие, характеризующие изменение максимального по n значения модуля безразмерной амплитуды $|\varepsilon_n/\varepsilon_0|$.

INVESTIGATION OF STRONG COLLAPSE OF A SLIGHTLY NON-SPHERICAL BUBBLE IN LIQUID DEPENDING ON ITS PRESSURE AND TEMPERATURE

T.F. Khalitova

Strong compression of the medium in a slightly non-spherical cavitation bubble at its collapse is investigated, depending on the liquid (acetone) pressure (15 and 50 bar) and temperature (273–460 K). It is found that the transition from the shockless compression of the bubble content to the shock one under the higher pressure of the liquid is performed at its higher temperature. It is shown, that for a fixed liquid temperature, the growth of the small bubble deformations during the bubble collapse under a higher pressure is larger whereas the radius of the bubble at the moment of the extreme compresssion of its content is smaller.

Keywords: strong collapse, cavitation bubble, shock wave, slightly non-spherical bubble.

УДК 517.9

УЛЬТРАПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ МЕР НА ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ C^*-АЛГЕБР

С.Г. Халиуллин[1]

1 *samig.haliullin@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В статье обсуждается вероятностные меры Радона, заданные на пространстве состояний некоторой C^*-алгебры. Также рассматриваются ультрапроизведения последовательностей таких мер. Изучение структуры пространства состояний C^*-алгебр и его крайних точек само по себе является интересной задачей, но если рассматривать ультрапроизведения таких алгебр и состояний на них, то мы получаем довольно нетривиальные результаты.

Ключевые слова: мера Радона, ультрапроизведения.

Пусть K — выпуклое компактное подмножество вещественного локально-выпуклого топологического векторного пространства X, $C(K)$ — пространство всех вещественных непрерывных функций на K. Хорошо известно, что $C(K)$ есть векторное пространство над полем $\mathbb{R}$ и что функция $\|f\| = \sup|f(x)|$ есть норма в этом пространстве, которая превращает $C(K)$ в банахово пространство. Кроме того, $C(K)$ есть коммутативная алгебра над полем $\mathbb{R}$ и определенная нормой топология согласуется со структурой этой алгебры.

Определение 1.(см., например, [1]) *Мерой Радона на компактном пространстве K называется всякая непрерывная линейная форма μ на банаховом пространстве $C(K)$; при этом значение формы μ для непрерывной функции f называется интегралом от f относительно μ и записывается в виде*

$$\mu(f) = \int_K f(x)\; d\mu(x),\; f \in C(K),\; x \in K.$$

Мера Радона называется положительной, если $\mu(f) \geq 0$ для всех $f \geq 0$. Положительная мера Радона называется вероятностной, если $\mu(K) = \| \mu \| = 1$. Множество всех вероятностных мер Радона на множестве K обозначим $\mathscr{M}_1(K)$.

Каждой положительной мере Радона μ однозначно соответствует σ-алгебра $\mathscr{F}_\mu(K)$ так называемых μ-измеримых подмножеств рассматриваемого компактного хаусдорфова пространства K. Всякому множеству $A \in \mathscr{F}_\mu(K)$ сопоставляется тогда неотрицательное число $\mu(A)$, называемое мерой множества A. В этом случае мера μ является борелевской мерой на K, и теорема Рисса устанавливает взаимно-однозначное соответствие между множествами борелевских мер и мер Радона на K.

Далее везде будем предполагать, что K является выпуклым подмножеством множества состояний $E_{\mathscr{A}} = \{\omega : \omega \in \mathscr{A}^*\}$ некоторой C^*-алгебры $\mathscr{A}$, которое компактно в $*$-слабой топологии. Каждая вероятностная мера $\mu \in \mathscr{M}_1(K)$ имеет барицентр («центр тяжести») (см., например, [2]):

$$b(\mu) = \int_K \omega\; d\mu(\omega).$$

Если $b(\mu) = \omega$, то говорят, что μ представляет состояние ω. Ясно, что мера Дирака δ_ω всегда представляет ω.

На множестве положительных мер Радона вводится отношение частичного порядка: $\mu \succ \nu \Leftrightarrow \mu(f) \geq \nu(f)$ для всех непрерывных выпуклых функций на K.

Известно, [2], что если $\mu, \nu \in \mathscr{M}_1(K)$ и $\mu \succ \nu$, то $b(\mu) = b(\nu)$; каждое состояние ω есть барицентр некоторой меры $\mu \in \mathscr{M}_1(K)$, которая является максимальной в смысле введённого порядка $\succ$. В физических приложениях наиболее важным является единственность представляющей состояние ω меры.

Известно также ([3]), что если K – непустое компактное выпуклое подмножество локально выпуклого пространства X и точка $\omega \in K$, то ω есть крайняя точка K в том и только в том случае, если мера Дирака («точечная масса») δ_ω является единственной вероятностной мерой на K, представляющей ω.

Определение 2.([2]) *Компактное выпуклое множество K, служащее основанием для конуса C, называется симплексом, если C является решёткой.*

Известно, ([2]), что если K — выпуклое компактное подмножество отделимого локально-выпуклого пространства, то всякая точка $\omega \in K$ является барицентром единственной максимальной $\mu_\omega \in \mathscr{M}_1(K)$ меры тогда и только тогда, если K является симплексом.

Определение 3. (см., например, S. Heinrich, [4]) *Пусть $A_n\,(n \in \mathbb{N})$ — произвольные непустые множества, $\mathscr{U}$ — нетривиальный ультрафильтр в множестве $\mathbb{N}$. Фактор-множество декартова произведения множеств A_n $(n \in \mathbb{N})$ по отношению эквивалентности $(a_n) \sim_{\mathscr{U}} (b_n) \Leftrightarrow \{n \in \mathbb{N} : a_n = b_n\} \in \mathscr{U}$ называется теоретико-множественным ультрапроизведением семейства множеств (A_n) и обозначается $(A_n)_{\mathscr{U}}$.*

Определение 4.([4]) *Рассмотрим последовательность $(H_n,\ \|\cdot\|)_{n\in\mathbb{N}}$ банаховых пространств. Ультрапроизведение $(H_n)_{\mathscr{U}}$ есть фактор-пространство $l^\infty(\mathbb{N}, H_n)/\mathscr{N}_{\mathscr{U}}$, где $l^\infty(\mathbb{N}, H_n) = \{(h_n), h_n \in H_n : \sup_n \|h_n\| < \infty\}$, $\mathscr{N}_{\mathscr{U}} = \{(h_n) \in l^\infty(\mathbb{N}, H_n) : \lim_{\mathscr{U}} \|h_n\| = 0\}$.*

Хорошо известно, (см., S. Heinrich, [4]), что если K_n — компактные хаусдорфовы пространства, то существует такое компактное хаусдорфово пространство K, что ультрапроизведение $(C(K_n))_{\mathscr{U}}$ линейно изометрично пространству $C(K)$. Эта изометрия также сохраняет мультипликативную и решётчатую структуры. Поэтому пространство $(C(K_n))_{\mathscr{U}}$ может быть идентифицировано как некоторое $C(K)$ и это пространство мы называем ультрапроизведением пространств $C(K_n)$. При этом ультрапроизведение (теоретико-множественное) $(K_n)_{\mathscr{U}}$ гомеоморфно плотному подмножеству K.

Пусть $K_n = E_{\mathscr{A}_n}$ — пространство состояний некоторой C^*−алгебры $\mathscr{A}_n, (n \in \mathbb{N})$. Состоянием на ультрапроизведении последовательности C^*−алгебр $\mathscr{A}_n$ назовём $\omega_{\mathscr{U}} \in K$, определяемое как $\omega_{\mathscr{U}} = \lim_{\mathscr{U}} \omega_n$, $\omega_n \in K_n$.

Теорема 1. *Пусть $C(K)$ — ультрапроизведение последовательности пространств $C(K_n)$, μ_n — мера Радона на K_n, $n \in \mathbb{N}$. Положим*

$$\mu_{\mathscr{U}}(f) = \lim_{\mathscr{U}} \mu_n(f_n),\ f = (f_n)_{\mathscr{U}},\ f_n \in C(K_n).$$

Тогда $\mu_{\mathscr{U}}$ является мерой Радона на K. В этом случае эта линейная форма имеет представление

$$\mu_{\mathscr{U}}(f) = \lim_{\mathscr{U}} \int_{K_n} f_n(x_n)\, d\mu_n(x_n),\ f \in C(K).$$

Теорема 2. *Мера Радона $\mu_{\mathscr{U}}$ имеет барицентр и*

$$b(\mu_{\mathscr{U}}) = \lim_{\mathscr{U}} b(\mu_n).$$

Ультрапроизведение сохраняет порядок: $\mu_n \succ \nu_n (n \in \mathbb{N}) \Rightarrow \mu_{\mathscr{U}} \succ \nu_{\mathscr{U}}$. Значит, ультрапроизведение максимальных мер на K_n является максимальной мерой на K. Понятно, что максимальные меры образуют подконус в конусе положительных мер, который к тому же является и решёткой, отображение $\mu \to \omega = b(\mu)$ задаёт линейный изоморфизм $\mathscr{M}_1(K)$ и K . Ультрапроизведение также сохраняет структуру решётки.

Теорема 3. *Пусть K_n — пространство состояний C^*−алгебры $\mathscr{A}_n$, являющееся симплексом ($n \in \mathbb{N}$), $\mathscr{U}$ — нетривиальный ультрафильтр в множестве натуральных чисел. Тогда существует такой симплекс K, что для каждого состояния $\omega_{\mathscr{U}}$ на K существует единственная максимальная мера Радона $\mu_{\mathscr{U}}$, представляющая это состояние.*

Естественно встаёт вопрос о существовании таких C^*−алгебр, ответ на который достаточно прост: пространство состояний $E_{\mathscr{A}}$ унитальной C^*−алгебры $\mathscr{A}$ является симплексом тогда и только тогда, если она абелева.

Литература

1. Бурбаки Н. *Интегрирование. Меры, интегрирование мер.* – М.: Наука, 1967. – 401 с.

2. Брателли У., Робинсон Д. *Операторные алгебры и квантовая статистическая механика.* – М.: Мир, Т. 1, 1997. – 511 с.

3. Bauer H. *Silovscher Rand und Dirichletsches Problem* // Ann. Inst. Fourier (Grenoble). – 1961. – V. 11. – P. 89–136.

4. Heinrich S. *Ultraproducts in Banach space theory* // J. für die reineund angewandte Math. – 1980. – V. 313. – P. 72–104.

ULTRAPRODUCTS OF PROBABILITY MEASURES
ON THE STATE SPACE AN C^*-ALGEBRAS

S.G. Haliullin

The subject of the paper is due to the fact that the maximal Radon measures defined on some compact convex subset of locally convex space «sit» on the extreme points of this set. The study of the structure of the extreme points of the set of states of some C^*−algebras is an interesting problem in itself, but if we consider the ultraproducts of such algebras and states on them, then we get quite nontrivial results.

Keywords: Radon measure, ultraproducts.

УДК 517.518.68

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ РАВНОМЕРНЫХ ПОЧТИ–ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Ю.Х. Хасанов[1]

1 *yukhas60@mail.ru*; Российско–Таджикский (Славянский) университет

В работе исследуется вопрос о приближении почти–периодических функций целыми функциями конечной степени с произвольным спектром в равномерной метрике. Также устанавливаются необходимые и достаточные условия принадлежности равномерных почти–периодических функций к классу целых функций.

Ключевые слова: почти–периодические функции, ряды Фурье, спектр функции, целые функции конечной степени, тригонометрические полиномы, наилучшее равномерное приближение.

Определение *Непрерывная на всей вещественной оси функция $f(x)$ называется равномерной почти–периодической, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое положительное число $l = l(\varepsilon)$, что в каждом интервале длины l найдется хотя бы одно число τ, для которого выполняется неравенство*

$$|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon \ (-\infty < x < \infty).$$

Пространство равномерных почти–периодических функций, обозначим его через $\mathbf{B}$, есть замыкание множества тригонометрических полиномов

$$T(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k \exp(\mathrm{i}\lambda_\mathrm{k}\mathrm{x}),$$

где A_k — коэффициенты Фурье, λ_k — показатели Фурье (спектр функции $f(x) \in \mathbf{B}$), с нормой

$$||f(x)||_{\mathbf{B}} = \sup_{-\infty<x<\infty} |f(x)|.$$

Рассмотрим класс функций $f(x) \in \mathbf{B}$ с произвольным спектром $\{\lambda_k\}$, т.е. функций, имеющих ряд Фурье вида

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \exp(\mathrm{i}\lambda_\mathrm{k}\mathrm{x}),$$

где

$$A_k = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x) \exp(-\mathrm{i}\lambda_\mathrm{k}\mathrm{x})\mathrm{dx}.$$

Известно [1], что для класса функций $f(x) \in \mathbf{B}$ величина A_k может отличаться от нуля не более чем на счетном множестве значений спектра λ. Именно это обстоятельство делает возможным распространение понятия ряда Фурье на область почти–периодических функций.

Через $\mathbf{G}_\sigma$ $(\sigma > 0)$ обозначим класс ограниченных на всей действительной оси целых функций степени не выше σ. Рассмотрим следующий важный вопрос. Пусть дана функция $f(x) \in \mathbf{B}$. Каковы необходимые и достаточные условия для принадлежности этой функции к классу $\mathbf{G}_\sigma$. Для решения этого вопроса докажем утверждение, которое ранее без доказательства приведено автором в работе [2] и используется для получения основных результатов данной работы.

Теорема 1. *Для того чтобы равномерная почти–периодическая функция $f(x)$ принадлежала классу $\mathbf{G}_\sigma$, необходимо и достаточно, чтобы ее показатели Фурье $\Lambda\{\lambda_k\}$ удовлетворяли неравенству $|\lambda_k| \le \sigma$.*

С.Н.Бернштейн [3] установил, что среди функций из класса $\mathbf{G}_\sigma$, осуществляющих на всей действительной оси наилучшее равномерное приближение 2π–периодической функции $f(x)$ найдется тригонометрический полином степени не выше σ. Доказательство основывается на том, что, если $g_\sigma(f;x) \in G_\sigma$ и

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |f(x) - g_\sigma(f;x)| = A_\sigma(f), \tag{1}$$

где $A_\sigma(f)$ — наилучшее равномерное приближение порядка σ периодической, периода 2π, функции посредством функций из класса $\mathbf{G}_\sigma$, то равномерно по всем x $(-\infty < x < \infty)$ имеют место следующие оценки:

$$|f(x) - \frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n} g_\sigma(x+2k\pi)| \le A_\sigma(f), \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n} \left\{g_\sigma(x+2k\pi+2\pi) - g_\sigma(x+2k\pi)\right\} = 0. \tag{3}$$

Отметим, что вышеприведенный результат С.Н Бернштейна можно получить также, если вместо (2) и (3) использовать соотношения

$$|\Phi_n(x) - Q_{\sigma,N,n}(x)| \le A_\sigma(f),$$

где $\sigma > 0; N, n$ — любые натуральные числа,

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)F_n(t)\,dt = \frac{1}{2\pi N}\int_{-2\pi N}^{2\pi N} f(x+t)F_n(t)\,dt,$$

$$Q_{\sigma,N,n}(x) = \frac{1}{2\pi N}\int_{-2\pi N}^{2\pi N} f(x+t)F_n(t)\,dt,\ F_n(t) = \frac{\sin^2(n+1)\frac{t}{2}}{2(n+1)\sin^2\frac{t}{2}},$$

и при всяком фиксированном n равномерно по $x \in (-\infty, \infty)$

$$\lim_{N\to\infty} \{Q_{\sigma,N,n}(x+2\pi) - Q_{\sigma,N,n}(x)\} = 0.$$

Впервые аналог теоремы С.Н. Бернштейна для функций $f(x) \in B$ встречается в работах Е.А. Бредихиной [4]-[5]. Используя метод доказательства С.Н Бернштейна, она установила, что если функция $f(x) \in B$ и имеет ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_k A_k \exp(i\lambda_k \beta x),$$

имеющий показатели Фурье с предельной точкой в бесконечности (см., например, [6]), то среди функций $g_\sigma(x) \in G_\sigma$ $(\sigma > 0)$, для которых имеет место равенство (1), найдется тригонометрический полином степени не выше σ.

Сформулируем основной результат данной заметки, который является также аналогом теоремы С.Н. Бернштейна для равномерных почти–периодических функций с произвольными показателями Фурье $\{\lambda_k\}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Теорема 2. *Пусть* $f(x) \in \boldsymbol{B}$ *и*

$$A_\sigma(f) = \sup_{-\infty<x<\infty} |f(x) - g_\sigma(f;x)| \ (\sigma > 0).$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ *найдется конечная тригонометрическая сумма*

$$P_\sigma(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \exp(i\lambda_k x) \ (|\lambda_k| \le \sigma),$$

для которой равномерно по x *справедлива оценка*

$$|f(x) - P_\sigma(x)| \le A_\sigma(f) + \varepsilon.$$

С.Н.Бернштейн (см. [3], с. 371-373) доказал, что для равномерно непрерывности ограниченной функции $f(x)$ на всей вещественной оси необходимо и достаточно, чтобы было выполнено неравенство

$$A_\sigma(f) \le C\omega(f; \frac{1}{\sigma}), \tag{4}$$

где C — некоторая абсолютная константа и

$$\omega(f;\sigma) = \sup_{|x_1 - x_2| \le \delta} |f(x_1) - f(x_2)|.$$

Соотношение (4) получено путем предельного перехода при $n \to \infty$ из неравенства

$$A_\sigma(f;\delta) \le E_n(f;\delta) \ (\sigma = \frac{n}{\delta}),$$

где $E_n(f;\delta)$ — наилучшее приближение функции $f(x)$ на отрезке $[-\sigma, \sigma]$ полиномами степени n.

Далее для равномерных почти–периодических функций мы попытаемся найти функцию $g(x) \in \mathbf{G}_\sigma$, которая удовлетворяет условию (4).

Теорема 3. *Пусть* $f(x) \in \boldsymbol{B}$ *со спектром* $\Lambda\{\lambda_k\}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ *и*

$$f_\sigma(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\psi_\sigma(u - z)\,du,$$

где

$$\psi_\sigma(z) = \frac{1}{\pi\sigma^3} \cdot \frac{\sin^4 \frac{\sigma z}{4}}{z^4}.$$

Тогда $f(x) \in \boldsymbol{G}_\sigma$ *и*

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |f(x) - f_\sigma(x)| < C\omega(f;\sigma^{-1}),$$

где C — абсолютная константа.

В заключение приводим утверждение о том, что если функция $f(x) \in \mathbf{B}$, то и $f_\sigma(x) \in \mathbf{B}$. А именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 4. *Если $f(x) \in \boldsymbol{B}$ имеет ряд Фурье*

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \exp(i\lambda_k x),$$

то $f_\sigma(x) \in \boldsymbol{B}$ и

$$f_\sigma(x) \sim \sum_{|\lambda_k|<\sigma} A_k \varphi_\sigma(\lambda_k) \exp(i\lambda_k x).$$

Литература

1. Левитан Б. М. *Почти–периодические функции.* – М.–Л: Гостехиздат, 1953. – 396 с.

2. Тиман М. Ф., Хасанов Ю. Х. *О приближениях почти–периодических функций целыми функциями* // Изв. вузов. Математика. – 2011. – № 12. – С. 64–70.

3. Бернштейн С. Н. *Собрание сочинений. Т.II.* – М.: Изд. АН СССР, 1954. – 627 с.

4. Бредихина Е. А. *К вопросу об аппроксимации почти–периодических функций* // Сиб. матем. журн. – 1964. – Т. 5. – № 4. – С. 768–773.

5. Бредихина Е. А. *К теореме С.Н. Бернштейна о наилучшем приближении непрерывных функций целыми функциями данной степени* // Изв. вузов. Математика. – 1961. – № 6. – С. 3–7.

6. Хасанов Ю. Х. *Абсолютная сходимость рядов Фурье почти–периодических функций* // Матем. заметки. – 2013. – Т. 94. – № 5. – С. 745–756.

ABOUT THE BEST APPROXIMATION OF UNIFORM ALMOST PERIODIC FUNCTIONS

Yu.Kh. Khasanov

The paper is devoted to investigation of a problem of approximation of almost periodic functions by entire functions with given spectrum in the uniform metric. Also necessary and sufficient conditions for belonging of uniformly almost periodic functions to the class of entire functions are established.
Keywords: almost periodic functions, Fourier series, spectrum of function, entire functions of finite order, trigonometric polynomial, best uniform approximation.

УДК 517.982.256

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СОЛНЦ

И.Г. Царьков[1]

1 *tsar@mech.math.msu.su*; Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, механико-математический факультет

В статье решаются две давно стоящие задачи. Устанавливается характеризация ограниченно компактного множества быть солнцем через свойство ацикличности *множеств наилучшего приближения, а также доказано, что всякое ограниченно компактное множество обладает непрерывной ε-выборкой для всех $\varepsilon > 0$. Решение второй задачи о B-связности ограниченно компактных солнц получается в качестве следствия из решения первой задачи.*

Ключевые слова: геометрическая теория приближений, солнца, критерий Колмогорова.

Для произвольного множества M в некотором линейно нормированном пространстве $\mathscr{X}$ через $\varrho(y, M)$ $(y \in X,\ M \subset X)$ обозначим расстояние до множества M, т.е. величину $\inf\limits_{z \in M} \|z - y\|$. Через $P_M x$ обозначим множество всех ближайших точек из M для $x \in X$, т.е. множество $\{y \in M \mid \|y - x\| = \varrho(x, M)\}$. Обозначим через $B(x, r)$ и $\mathring{B}(x, r)$ соответственно замкнутый и открытый шар в линейном несимметричном нормированном пространстве $\mathscr{X} = (X, \|\cdot\|)$ с центром x радиуса r, т.е. соответственно множества $\{y \in X \mid \|y - x\| \leqslant r\}$ и $\{y \in X \mid \|y - x\| < r\}$.

Если Q обозначает некоторое свойство (например, "связность"), мы будем говорить, что замкнутое множество M обладает свойством

P-Q, если при всех $x \in X$ множество $P_M x$ непусто и обладает свойством Q;

P_0-Q, если $P_M x$ обладает свойством Q при всех $x \in X$;

B-Q, если $M \cap B(x, r)$ обладает свойством Q при всех $x \in X$, $r > 0$;

$\mathring{B}$-Q, если $M \cap \mathring{B}(x, r)$ обладает свойством Q при всех $x \in X$, $r > 0$.

Впервые Н.В. Ефимовым и С.Б. Стечкиным [1] свойство Колмогорова было сформулировано в виде его геометрического аналога – свойства солнечности. С этого момента понятие солнца получило признание во всем мире и многие математики здесь и за рубежом стали изучать различные его конструктивные характеристики.

Определение. *Пусть $\varnothing \neq M \subset X$. Точка $x \in X \setminus M$ называется точкой солнечности, если существует точка $y \in P_M x \neq \varnothing$ (называемая точкой светимости) такая, что $y \in P_M((1-\lambda)y + \lambda x)$ для всех $\lambda \geqslant 0$ (это геометрически означает, что из точки y исходит луч, проходящий через x, для каждой точки которого y является ближайшей из M).*

Точка $x \in X \setminus M$ называется точкой строгой солнечности, если $P_M x \neq \varnothing$ и каждая точка $y \in P_M x$ является точкой светимости. Если все точки из $X \setminus M$ являются точками солнечности (строгой солнечности), то множество M

Одной из таких изучаемых характеристик была связность солнца и его обобщений. Здесь мы отметим результаты В.А. Кощеева [2], [3], который доказал связность солнца и так называемую B-связность строго солнца в конечномерных пространствах, а также связность компактного солнца. Им же был построен пример несвязного солнца в некотором бесконечномерном пространстве (см. [4]). А.Л. Браун [5], [6] уточнил этот результат, доказав, что в конечномерных пространствах каждое солнце линейно связно и локально линейно связно.

На пути изучения вопроса: какие характеристики множества делают его солнцем, Л.П. Власовым (см. [7]) было доказано в частности, что ограниченно компактное множество, метрическая проекция на которое имеет ацикличные образы, является солнцем. После этой теоремы естественно возник вопрос: верно ли обратное, т.е. всякое ли ограничено компактное солнце имеет метрическую проекцию с ацикличными образами. Иначе говоря, верно ли, что в банаховых пространствах свойство солнечности равносильно свойству P-ацикличности для случая ограниченно компактных множеств. Положительно на этот вопрос ответил А. Р. Алимов [8] для случая строго солнца в трехмерном пространстве. Им было доказано, что строгое солнце в конечномерном банаховом пространстве размерности не более 3 является P-солнцем, имеет стягиваемое множество ближайших точек и обладает непрерывной ε-выборкой из оператора почти наилучшего приближения для любого $\varepsilon > 0$.

Определение. *Пусть $\varepsilon \geqslant 0$, $M \subset X$. Отображение $\varphi : X \to M$ называется аддитивной (мультипликативной) ε-выборкой, если для всех $x \in X$ выполняется неравенство*

$$\|\varphi(x) - x\| \leqslant \varrho(x, M) + \varepsilon$$

(соответственно $\|\varphi(x) - x\| \leqslant (1+\varepsilon)\varrho(x, M)$). В случае, когда эти неравенства выполняются на некотором множестве $E \subset X$ будем говорить о ε-выборке на E.

В случае, когда $\varepsilon = 0$, говорят о 0-выборке или о селекции (выборке) из метрической проекции.

В этой работе мы даем положительный ответ на соответствующий вопрос для случая ограниченно компактных множеств в произвольных линейно нормированных пространствах. Оказалось, что свойство солнечности в этом случае равносильно свойству существования непрерывной ε-выборки для всех $\varepsilon > 0$. Таким образом, обнаружилась глубокая взаимосвязь вопросов характеризации элементов наилучшего приближения с вопросом устойчивости почти наилучших приближений. Отсюда, в частности, получается положительный ответ на вопрос о B-связности компактных солнц, который возник сразу же после работ Кощеева и не был решен до сих пор даже в конечномерном случае.

Теорема. *Пусть $(X, \|\cdot\|)$ – банахово пространство, $M \subset X$ – ограниченно компактное множество. Тогда следующие условия равносильны:*

a). M обладает непрерывной ε-выборкой для всех $\varepsilon > 0$;

b). $P_M x$ является клеточноподобным множеством для всех $x \in X$;

c). M является B-бесконечно связным множеством;

d). M является B-стягиваемым множеством.

f). $P_M x$ является ацикличным множеством для всех $x \in X$;

g). M является солнцем.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 19-01-00332-а)

Литература

1. Ефимов Н. В., Стечкин С. Б. *Некоторые свойства чебышевских множеств* // ДАН – 1958. – Т. 118. – № 1. – С. 17–19.

2. Кощеев В. А. *Связность и аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространства* // Матем. заметки. – 1975. – Т. 17. – № 2. – С. 193–204.

3. Кощеев В. А. *Связность и аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространства* // Матем. заметки. – 1976. – Т. 19. – № 2. – С. 267–278.

4. Кощеев В. А. *Пример несвязного солнца в банаховом пространстве* // Матем. заметки. – 1979. – Т. 26. – № 1. – С. 89–92.

5. Brown A. L. *Suns in normed linear spaces which are finite-dimensional* // Math. Ann. – 1987. – V. 279. – P. 87–101.

6. Brown A. L. *On the connectedness properties of suns in finite dimensional spaces* // Workshop/Miniconference of functional analysis and optimization. Proc. Centre Math. Austral. Nat. Univ., Canberra. – 1988. – P. 1–15.

7. Власов Л. П. *Аппроксимативные свойства множеств в линейных нормированных пространствах* // УМН. – 1973. – Т. 28. – № 6. – С. 3–66.

8. Алимов А. Р. *Выборки из операторов наилучшего и почти наилучшего приближения и солнечность* // Тр. МИАН. – 2018. – Т. 303. – С. 17–25.

GEOMETRICAL PROPERTIES OF SUN

I.G. Tsarkov

In the article, there are solved two long-running question. It is obtained the characterization of a bounded compact set to be a sun via the property of acyclicity of the sets of the best approximation, and also it is proved that any bounded compact set possessess a continuous ε*-selection for all* $\varepsilon > 0$*. The solution of the second problem on* B*-connectedness of a bounded compact sun is obtained as a corollary from the solution of the first problem.*

Keywords: geometrical theory approximation, sun, Kolmogorov criterion.

УДК 517.952

ГЛАДКОСТЬ РЕШЕНИЙ НЕОДНОРОДНОЙ СИСТЕМЫ ДУГЛИСА

О.В. Чернова[1]

1 *chernova_olga@bsu.edu.ru*; Белгородский государственный национальный исследовательский университет, институт инженерных и цифровых технологий

В статье для эллиптической системы первого порядка с комплексными коэффициентами рассматривается задача Римана-Гильберта. При определенных условиях на правую часть краевого условия доказана гладкость решения неоднородной системы Дуглиса.

Ключевые слова: задача Римана-Гильберта, эллиптическая система, индекс.

Пусть область D комплексной плоскости $\mathbb{C}$ ограничена гладким контуром $\Gamma \in C^{1,\nu}$. Последнее условие означает, что производная параметризации гладкой кривой принадлежит классу Гельдера C^{ν} с показателем ν, $0 < \nu < 1$.

Напомним, что функция φ удовлетворяет условию Гельдера с показателем μ, $0 < \mu < 1$, на некотором множестве E комплексной плоскости, если существует такая постоянная $C > 0$, что $|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| \le C|z_1 - z_2|^{\mu}$ для любых $z_1, z_2 \in E$. Наименьшая постоянная C в этой оценке совпадает с полунормой

$$[\varphi]_{\mu} = \sup_{z_1 \ne z_2} \frac{|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)|}{|z_1 - z_2|^{\mu}},$$

где верхняя грань берется по точкам $z_j \in E$. Класс ограниченных функций, удовлетворяющих этому условию, обозначается $C^{\mu}(E)$, относительно нормы

$$|\varphi| = \sup_{E} |\varphi(z)| + [\varphi]_{\mu}$$

он является банаховым пространством [1]. Если E является замкнутой областью $\overline{D}$, то можно ввести пространство $C^{1,\mu}(\overline{D})$ непрерывно дифференцируемых в D функций, которые вместе со своими частными производными принадлежат $C^{\mu}(\overline{D})$.

Рассмотрим в области D неоднородную систему Дуглиса

$$L_J\phi(z) + a(z)\phi(z) + b(z)\overline{\phi(z)} = F(z), \quad z \in D, \tag{1}$$

где дифференциальный оператор $L_J = \dfrac{\partial}{\partial y} - J\dfrac{\partial}{\partial x}-$ действует в классе $l-$вектор–функций и определяется постоянной матрицей $J \in \mathbb{C}^{l\times l}$, собственные значения λ которой лежат в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\lambda > 0$, а $l \times l$ матричные коэффициенты $a(z), b(z)$ и $F(z)$ принадлежат классу $C^{\mu}(\overline{D})$.

Соответствующая однородная система $L_J\phi = 0$, в предположении, что матрица $J-$теплицева, была впервые изучена А. Дуглисом [1] в рамках так называемых гиперкомплексных чисел. Позднее эллиптические системы первого порядка с постоянными коэффициентами исследовали Б. Боярский [2], R. P. Gilbert, J. L. Buchanan [3], и многие другие авторы.

Для системы (1) поставим задачу Римана-Гильберта следующим краевым условием

$$\operatorname{Re} G(t)\phi^{+}(t)|_{\Gamma} = f(t), \quad t \in \Gamma, \tag{2}$$

где $l \times l-$матрица–функция $G(t) \in C^{\nu}$ и ее определитель всюду отличен от нуля. В работе [4] было показано, что в классе

$$C^{\mu}_{J}(\overline{D}) = \{\phi \in C^{\mu}(\overline{D}) \cap C^{1}(D) | L_J\phi \in C^{\mu}(\overline{D})\}$$

задача (1)–(2) фредгольмова и ее индекс дается формулой

$$\text{ȷ} = -\frac{1}{\pi}[\arg\det G]_{\Gamma} + l, \tag{3}$$

где приращение $[\quad]_{\Gamma}$ берется в направлении, оставляющем область D слева.

Теорема. *Если $f \in C^{1,\mu}(\overline{D})$, то любое решение $\phi \in C^{\mu}_{J}(\overline{D})$ задачи Римана-Гильберта (1)–(2) принадлежит классу $C^{1,\mu}(\overline{D})$ и, следовательно, формула индекса (3) сохраняет свою силу и в классе $C^{1,\mu}(\overline{D})$.*

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (проект №1.7311.2017/8.9.).

Литература

1. Солдатов А. П. *Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи. I* // СМФН. – 2017. – Т. 63, № 1. – С. 1–189.

2. Douglis A. *A function theoretic approach to elliptic systems of equations in two variables* // Comm. on Pure and Appl. Math. – 1953. – V. 6. – P. 259–289.

3. Боярский Б. В. *Теория обобщенного аналитического вектора* // Annales Polon. Math. – 1966. – V. 17. – № 3. – P. 281–320.

4. Gilbert R. P., Buchanan J. L. *First order elliptic systems. A function theoretic approach.* Mathematics in Science and Engineering, 163. Academic Press Inc., Orlando, FL. – 1983. – 281 p.

SMOOTHNESS OF SOLUTIONS FOR NON-HOMOGENEOUS DOUGLIS SYSTEM

O.V. Chernova

We consider the Riemann-Hilbert problem for an elliptic system of first order. Under certain conditions on the right-hand side of the boundary condition, the smoothness of solution for the non-homogeneous Douglis system is studied.

Keywords: Riemann-Hilbert problem, elliptic system, index.

УДК 517.518.83

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ КОНСТАНТЫ ЛЕБЕГА ОПЕРАТОРА ФУРЬЕ

И.А. Шакиров[1]

1 *iskander@tatngpi.ru*; Набережночелнинский государственный педагогический университет

Соответствующая классическому оператору Фурье константа Лебега приближается логарифмическими функциями, зависящими от двух параметров. Указаны элемент наилучшего равномерного приближения, значение наилучшего приближения и алгоритм последовательного уменьшения его первоначального значения.

Ключевые слова: норма оператора Фурье, наилучшее приближение, оценка константы Лебега, экстремальная задача.

Оператору Фурье $S_n : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$ соответствует константа Лебега

$$L_n = \|S_n\| = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}dt,\ \ n \in N\ \ (L_0 = 1),$$

которая согласно известному неравенству Лебега непосредственно влияет на скорость равномерной сходимости частных сумм $S_n(x,t)$ к исходной функции $x(t)$. Результаты оценки константы L_n снизу, сверху, с двух сторон и ее асимптотического поведения можно найти в работах Г.Ватсона (1930), Г.Харди (1942), С.М.Никольского (1948), С.Б.Стечкина (1955), П.В.Галкина (1971), Г.И.Натансона (1986) и других авторов. Из них видно, что эти оценки последовательно улучшались. Однако вопросы о наилучшей приближенной замене константы Лебега логарифмическими функциями более общего вида, об оценке допущенной при этом погрешности и решении соответствующих экстремальных задач, тем более алгоритмы улучшения уже установленных наилучших приближений в литературе не рассматривались. Большая часть этих вопросов решена в недавних работах автора [1]–[3].

Используя свойство строгого убывания функции погрешности (аргумента n и параметров a, b)

$$O_n(a,b) = L_n - (4/\pi^2)\ln(n+a) - b,\ \ n \in N,\ \ (a,b) \in \Omega^- = [0,1/2]\times[0,3/2],$$

в [1] мы указываем пару чисел $(a^*, b^*) \in \Omega^-$ $(a^* = 0.5,\ \ b^* = 1.27100777...)$, которая в приближенном равенстве

$$L_n \approx (4/\pi^2)\ln(n+a) + b,\ \ n \in N,\ \ (a,b) \in \Omega^- \tag{1}$$

обеспечивает наилучшее равномерное приближение, то есть является решением следующей экстремальной задачи:

$$\inf_{(a,b)\in\Omega^-}\sup_{n\in N}|L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+a) - b| \stackrel{def}{=} \varepsilon_1 = \varepsilon_1(\Omega^-, N),\ \ \varepsilon_1 = 0.00065453\ldots. \tag{2}$$

Здесь приведен и обоснован алгоритм, позволяющий последовательно уменьшать значение наилучшего приближения ε_1 на основе модификации задачи (2). Рассмотрим ее на вложенных друг в друга подмножествах $N_1 \supset N_2 \supset \ldots \supset N_k \supset \ldots$ множества натуральных чисел $N = N_1$. Например, выберем $N_3 = \{3,4,5,6,\ldots\}$ и $N_{26} = \{26,27,28,29,\ldots\}$. Тогда на элементах $a_2^* = 0.5,\ \ b_2^* = 1.270347519\ldots$ из области Ω^- имеем

$$\inf_{(a,b)\in\Omega^-}\sup_{n\in N_3}|L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+a) - b| \stackrel{def}{=} \varepsilon_3,\ \ \varepsilon_3 = 0.00012195\ldots, \tag{3}$$

а на элементах $a_{26}^* = 0.5,\ \ b_{26}^* = 1.270347519\ldots$ –

$$\inf_{(a,b)\in\Omega^-}\sup_{n\in N_{26}}|L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+a) - b| \stackrel{def}{=} \varepsilon_{26},\ \ \varepsilon_{26} = 0.00000231\ldots. \tag{4}$$

Замечание 1. *Первоначальная величина наилучшего приближения ε_1 в (3) уменьшена более 5 раз* $(\varepsilon_1/\varepsilon_3 \approx 5.36)$*, а в (4) – более 284 раз* $(\varepsilon_1/\varepsilon_{26} \approx 284.54)$.

Замечание 2. *Последовательность наилучших приближений* (ε_k) *стремится к нулю с достаточно большой скоростью. Поэтому в (1) константу Лебега можно приближенно заменить логарифмической функцией с наперед заданной точностью (например, порядок допущенной погрешности в (4) уже равен одной миллионной).*

Литература

1. Шакиров И.А. *О влиянии сдвига аргумента приближающей функции на качество аппроксимации константы Лебега оператора Фурье* // Тр. Матем. центра им. Н.И.Лобачевского / Казан. матем. общество. Теория функций, ее приложения и смежные вопросы // Матер. 13-ой межд. Казан. летней научн. школы-конф. – Казань: Изд-во Казан. мат. общ., Изд-во Академии наук РТ, 2017. – Т. 54. – С. 404–406.

2. Шакиров И.А. *Об оптимальном приближении нормы оператора Фурье семейством логарифмических функций* // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. 2017. – Т. 139. – С. 92–104.

3. Shakirov I.A. *About the optimal replacement of the lebesque constant fourier operator by a logarithmic function* // Lobachevski Journal of Mathematics. – 2018. – Vol. 39, № 6. – P. 841–846.

ABOUT THE BEST APPROXIMATION
FOR THE LEBESGUE CONSTANT OF THE FOURIER OPERATOR

I.A. Shakirov

The Lebesgue constant corresponding to the classical Fourier operator is approximated by logarithmic

functions depending on two parameters. The element of the best uniform approximation, the value of the best approximation, and the algorithm of successive reduction of its initial value are specified.
Keywords: norm of the Fourier operator, best approximation, evaluation of Lebesgue constants, extremal problem.

УДК 517.9

ОБ ОДНОЙ ПЕРЕДОПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Ф.М. Шамсудинов[1], С. Хомиддин[2]

1 *faizullo100@yahoo.com*; Бохтарский государственный университет им. Н. Хусрава, Таджикистан
2 *sayfullohomiddin@gmail.com*; Бохтарский государственный университет им. Н. Хусрава, Таджикистан

В работе для одной переопределённой системы дифференциальных уравнений второго порядка получено представление многообразия решений в явном виде, когда коэффициенты первого уравнения связанны между собой определённым образом. Изучены свойства полученных решений, а также рассмотрена задача с начальными данными A_1.

Ключевые слова: переопределённая система, многообразия решений, прямоугольник, сингулярный коэффициент, свойства решений.

Пусть D – прямоугольник: $D = \left\{(x,y) : 0 < x < \delta_1, \quad 0 < y < \delta_2\right\}$.
Далее обозначим $\Gamma_1 = \{y = 0,\ 0 < x < \delta_1\}$, $\quad \Gamma_2 = \{x = 0,\ 0 < y < \delta_2\}$.
В области D рассмотрим систему следующего вида

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \dfrac{a_1(x,y)}{r^{\alpha}}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{b_1(x,y)}{r^{\beta}}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{c_1(x,y)}{r^{\alpha+\beta}}u = \dfrac{f_1(x,y)}{r^{\alpha+\beta}}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{b_2(x,y)}{y^{\gamma}}u = \dfrac{f_2(x,y)}{y^{\gamma}}, \end{cases} \tag{1}$$

где $\alpha = \beta = \gamma = 1$, $a_j(x,y)$, $b_1(x,y)$, $c_1(x,y)$, $f_j(x,y)$, $j = 1,2$ – заданные функции в области D, $u(x,y)$ – искомая функция.

Дифференциальные уравнения и переопределённые системы с регулярными, сингулярными и сверхсингулярными коэффициентами исследовались в работах [1]-[8].

В настоящей заметке на основе способа, разработанного в [2], получено представление многообразия решений системы уравнений (1) при помощи одной произвольной постоянной.

Через $C_2(D)$ в дальнейшем обозначим класс функций, которые имеют непрерывные производные первого порядка в D и такие, что $u_{xy} \in C(D)$.

Теорема 1. *Пусть в системе уравнений (1)* $\alpha = \beta = \gamma = 1$, *а коэффициенты и правые части удовлетворяют следующим условиям:*

1) $b_1(x,y), f_2(x,y) \in C^1_y(\overline{D}), b_2(x,y) \in C^1_x(\overline{D}), a_1(x,y)$,
$c_1(x,y), f_1(x,y) \in C(\overline{D})$;

2) $c_1(x,y) = r^2 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{b_1(x,y)}{r}\right) + a_1(x,y)b_1(x,y)$;
3) $|a_1(x,y) - a_1(0,0)| \le H_1 r^{\alpha_1}, \quad H_1 = const, \quad 0 < \alpha_1 < 1,$
$|b_1(x,y) - b_1(0,0)| \le H_2 r^{\beta_1}, \quad H_2 = const, \quad 0 < \beta_1 < 1,$
$|b_2(0,y) - b_2(0,0)| \le H_3 y^{\gamma_1}, \quad H_3 = const, \quad 0 < \gamma_1 < 1,$
4) $a_1(0,0) > 0, \quad b_1(0,0) < 0, \; b_2(0,0) > 0$;

5) a) $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{b_1(x,y)}{r}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{b_2(x,y)}{y}\right)$ в D,

$$b)\ \frac{b_1(x,y)f_2(x,y)}{ry} + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{f_2(x,y)}{y}) = \left(\frac{b_2(x,y)}{y} - \frac{a_1(x,y)}{r}\right)\cdot$$

$$\exp[-w^1_{a_1}(x,y) + a_1(0,0)\ln\frac{x}{y+r}]\times$$

$$\times(\varphi_1(x) + \int\limits_0^y \frac{f_1(x,s)}{x^2+s^2}\exp[w^1_{a_1}(x,s)\left(\frac{s+\sqrt{x^2+s^2}}{x}\right)^{a_1(0,0)} ds + \frac{f_1(x,y)}{r} \quad \text{в} \quad D;$$

6) *существуют пределы*

$$\lim_{y\to 0}\frac{f_2(x,y)}{y} = f^1_2(y), \lim_{y\to 0}\frac{b_2(x,y)}{y} = b^1_2(y),$$

$$f_1(x,y) = o((\frac{y+r}{x})^{-a_1(0,0)})r^{\gamma_1}),\ \gamma_1 > 1 \quad \text{при} \quad r \to 0.$$

Тогда любое решение системы уравнений (1) из класса $C_2(D)$ представимо в виде

$$u(x,y) \equiv \chi_1(\psi_1(y), \varphi_1(x), f_1(x,y)), \tag{2}$$

$$\psi_1(y) \equiv N_1(c_1, f_2(0,y)), \tag{3}$$

$$\varphi_1(x) \equiv F_1(x), \tag{4}$$

где $\chi_1(\psi_1(y), \varphi_1(x), f_1(x,y))$, $N_1(c_1, f_2(0,y))$ *- известные интегральные операторы, $F_1(x)$ – известная функция , c_1 – произвольная постоянная.*

Следствие 1. Если $x \to 0$ и $y \to 0$, то

$$\lim_{y\to 0}\left\{\lim_{x\to 0} u(x,y)\right\} = O(y^{-b_2(0,0)}), \quad \lim_{x\to 0}\{y^{b_2(0,0)}\lim_{y\to 0} u(x,y)\} = c_1,$$

$$u(x,y) = O\left((\frac{y}{x+r}\right)^{b_1(0,0)} \quad \text{при} \quad y \to 0 \quad \text{и} \quad x \ne 0.$$

На основе полученного интегрального представления решений поставлена и решена следующая задача с начальными данными.

Задача A_1. *Требуется найти решение системы уравнений (1) из класса $C_2(D)$ по условию*

$$\lim_{x\to 0}\{y^{b_2(0,0)}\lim_{y\to 0} u(x,y)\} = m_1,$$

где m_1 - заданная постоянная.

Решение задача A_1. Для решения этой задачи используем интегральное представление (2), (3) и (4), свойства решений и условие задачи A_1. Тогда получим $c_1 = m_1$.

Итак, доказана следующая теорема

Теорема 2. *Пусть коэффициенты и правые части системы уравнений (1) удовлетворяют всем условиям теоремы 1. Тогда единственное решение, задачи A_1 даётся формулами (2),(3),(4), где $c_1 = m_1$.*

Литература

1. Гайшун И.В. *Линейные уравнения в полных производных.* – Минск: Наука и техника, 1983. – 273 с.

2. Раджабов Н. *Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами.* – Душанбе: Изд. ТГУ, 1992. – 236 с.

3. Раджабов Н. *Интегральные уравнения типов Вольтерра с фиксированными граничными и внутренними сингулярными и сверхсингулярными ядрами и их приложения.* – Душанбе: Изд. Деваштич, 2007. – 221 с.

4. Хартман Ф. *Обыкновенные дифференциальные уравнения.* – М.: Мир, 1970. – 720 с.

5. Тасмамбетов Ж.Н. *О развитии исследований специальных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка* // Матер. межд. научно-практической конф. "Информационные технологии: инновации в науке и образовании"; г. Актобе, 20-21 февраля 2015 г. – С. 6-17.

6. Шамсуддинов Ф.М. *Об одной переопределенной системе дифференциальных уравнений второго порядка с сильной особенностью* // Доклады Адыгской (Черкеской) Межд. академии наук. – 2014. – Т. 16, 1. – С. 40-46.

7. Шамсуддинов Ф.М. *Об одной переопределенной системе дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярной точкой* // Вестн. Волгогр. гос. ун-та. Сер. Мат. Физ. – 2016. – 6(37). – С. 99-107.

8. Шамсудинов Ф.М. *Об исследовании одной переопределённой системы дифференциальных уравнений второго порядка с сингулярными коэффициентами* // Тр. матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Казань: Из-во Казан. матем. общ-ва, 2015. Т. 51. – С. 479 - 481.

ON OVERDETERMINED SYSTEM OF SECOND-ORDER DIFFERENTIAL EQUATIONS
WITH SINGULAR COEFFICIENTS

F.M. Shamsudinov, S. Homiddin

In the paper, for a second-order overdetermined system of differential equations, we obtain an explicit representation of the variety of solutions when the coefficients of the first equation are interconnected in a certain way. The properties of the obtained solutions are studied, and a problem with initial data is also considered.

Keywords: overdetermined system, manifold of solutions, rectangle, singular coefficient, properties of solutions.

УДК 517.544.8

ОЦЕНКА ОШИБКИ ЛИНЕЙНОГО СПЛАЙН-ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА В ТРЕХМЕРНОМ ТЕЛЕ

А. Эльшенави[1], Е.А. Широкова[2]

1 *atallahtm@yahoo.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского
2 *elena.shirokova@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

В данной статье приводится оценка ошибки метода линейной сплайн-интерполяции для решения трехмерной задачи Дирихле для уравнения Лапласа в трехмерном теле с гладкой поверхностью. Мы сводим решение трехмерной задачи к набору решений двумерных задач в отдельных слоях; и точность метода имеет порядок $O(\Delta h)$.

Ключевые слова: трехмерная задача Дирихле, сплайн-интерполяция, оценка ошибки.

Пусть Ω – ограниченная трехмерная односвязная область, $\partial\Omega$ – граничная гладкая поверхность Ω. Тогда соответствующая задача Дирихле для уравнения Лапласа состоит в том, чтобы найти дважды дифференцируемую в Ω функцию $u(x,y,h)$, непрерывную в $\Omega \cup \partial\Omega$ и удовлетворяющую трехмерному уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u(x,y,h)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,h)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,h)}{\partial h^2} = 0, \qquad (x,y,h) \in \Omega, \tag{1}$$

и граничным условиям:

$$u(x,y,h) = f(x,y,h), \qquad (x,y,h) \in \partial\Omega,\ a \le h \le b. \tag{2}$$

Предлагаемый нами метод её приближенного решения основан на сплайн-интерполяционном решении трехмерной задачи Дирихле для уравнения Лапласа. Мы делим тело на N слоев плоскостями $h = h_i, i = 1, 2, \cdots, N$, и $h_1 = a, h_N = b$. Сплайн в каждом слое является многочленом от h с коэффициентами, которые являются полигармоническими функциями в сечениях Ω плоскостями $h = h_i$. Сплайн-интерполяционное решение в любом слое задается в следующей форме [1]:

$$u(x,y,h) = \sum_{k=0}^{p} u_k(x,y) h^k.$$

Взяв $p = 1$, получим линейный сплайн $u(x,y,h) = u_0(x,y) + h u_1(x,y)$. Если мы подставим эту форму решения в (1) – (2), получим следующее соотношение:

$$\Delta_2 u_k(x,y) = 0, \qquad k = 0, 1,$$

где $\Delta_2 = \partial_x^2 + \partial_y^2$, с граничными условиями, совпадающими с (2) на уровнях $h = h_j$.

Коэффициенты $u_k(x,y), k = 0, 1$, являются гармоническими функциями от x и y, которые могут быть восстановлены через их граничные значения с использованием метода интеграла Коши [2]. Функции $u_k^i(x,y)$, $k = 0, 1$, определяются с применением аналитического продолжения в объединении проекций пересечений Ω с $h = h_i$

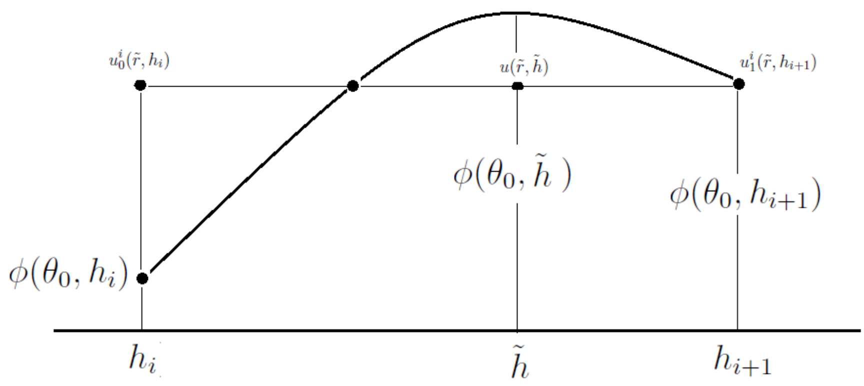


Рис. 1. Сечение поверхности тела с фиксированным θ

и $h = h_{i+1}$. Сравним сплайн-интерполяционное решение с точным решением соответствующей задачи. Так как для гармонических функций максимум модуля разности достигается на границе, близость сплайн-интерполяционного решения к точному обеспечивается близостью граничных значений сплайн-интерполяционных значений к заданным граничным значениям. Рассмотрим без потери общности простейший случай, когда любое сечение тела плоскостью $h = \text{const}$ является звездообразной областью относительно нуля.

Лемма 1: *Пусть $r = \phi(\theta, h)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, $h \in [a, b]$ – гладкая граничная поверхность, заданная в терминах цилиндрических координат r, θ, h. Пусть $f(\theta, h)$ – граничное значение функции, гармонической в теле, ограниченном заданной поверхностью. Предположим, что $f(\theta, h)$ – полином Фурье при любом $h \in [a, b]$ и что существуют постоянные A, $B > 0$, такие, что $\left|\phi'_h(\theta, h)\right| \le A$ и $|f'_h(\theta, h)| \le B$. Тогда максимальная ошибка линейного сплайн-интерполяционного решения трехмерной задачи Дирихле для уравнения Лапласа равна $O(\Delta h)$, где Δh – размер шага интерполяции.*

Доказательство: Обозначим приближенное аналитическое сплайн-интерполяционное решение через $u(r, \theta, h)$. Для фиксированного $\theta = \theta_0$, сплайн-решения в слое $h \in [h_i, h_{i+1}]$ определяются как

$$u(\tilde r, \tilde h) = u_0^i(\tilde r, h_i) + (\tilde h - h_i) u_1^i(\tilde r, h_{i+1}),$$

где $\tilde r = \max(\phi(\theta_0, h_i), \phi(\theta_0, h_{i+1}))$. Предположим, что $\tilde r = \phi(\theta_0, h_{i+1})$ и значение $u_0(\tilde r, h_i)$ получено аналитическим продолжением благодаря условию на $\phi(\theta, h)$ при достаточно малых значениях Δh. Заметим, что

$$u_0^i(\tilde r, h_i) + (h_{i+1} - h_i) u_1^i(\tilde r, h_{i+1}) = u_0^{i+1}(\tilde r, h_{i+1}) = f(\theta_0, h_{i+1}),$$

теперь абсолютное значение ошибки при $h = \tilde h$, $\theta = \theta_0$ имеет следующую оценку:

$$\left|u(\tilde r, \tilde h) - f(\theta_0, \tilde h)\right| = \left|u_0^i(\tilde r, h_i) + (\tilde h - h_i) u_1^i(\tilde r, h_{i+1}) - f(\theta_0, \tilde h)\right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \left|u_0^i(\tilde r, h_i) + (h_{i+1} - h_i) u_1^i(\tilde r, h_{i+1}) + (\tilde h - h_{i+1}) u_1^i(\tilde r, h_{i+1}) - f(\theta_0, \tilde h)\right|, \\
&\le |u_0^{i+1}(\tilde r, h_{i+1}) - f(\theta_0, h_{i+1})| + |(\tilde h - h_i) u_1^i(\tilde r, h_{i+1})| + |f(\theta_0, h_{i+1}) - f(\theta_0, \tilde h)|.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$|u(\phi(\theta,h),h) - f(\theta,h)| \le \Delta h \max_{\substack{1\le i\le N-1 \\ 0\le\theta\le 2\pi}} |u_1^i(r,h_{i+1})| + B\Delta h = O(\Delta h).$$

Литература

1. El-Shenawy A., Ivanshin P.N. *Linear spline interpolation solution for 3D Dirichlet problem for arbitrary solid with smooth surface* // Geometry of manifolds and its applications: the fifth scientific conference, Ulan-Ude-Lake Baikal, July 3-6. – 2018. – P. 190-203.

2. Shirokova E.A., El-Shenawy A. *A Cauchy integral method of the solution of the 2D Dirichlet problem for simply or doubly connected domains* // Numerical Methods for Partial Differential Equations. – 2018. – T. 34. – C. 2267–2278.

ERROR ESTIMATE OF THE LINEAR SPLINE INTERPOLATION SOLUTION OF THE 3D DIRICHLET PROBLEM FOR LAPLACE EQUATION IN THREE-DIMENSIONAL SOLID

A. Elshenawy, E.A. Shirokova

This paper describes the error estimate for the linear spline interpolation method of solving the three-dimensional Dirichlet problem for the Laplace equation in a 3D domain with smooth boundary surface. We reduce three-dimensional problem to a set of a two-dimensional problems in separate layers and show that the accuracy of the method is $O(\Delta h)$.

Keywords: 3D Dirichlet problem, spline interpolation, error analysis.

УДК 517.98

О ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧКАХ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ТИПА ГАММЕРШТЕЙНА С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ

Ю.Х. Эшкабилов[1], Ш.Д. Нодиров[2]

1 *yusup62@mail.ru*; Каршинский государственный университет
2 *shoh0809@mail.ru*; Каршинский государственный университет

Настоящая работа посвящена изучению количества положительных неподвижных точек интегрального оператора типа Гаммерштейна специального вида на $C[0,1]$. *Приведены теоремы о количестве положительных неподвижных точек интегрального оператора типа Гаммерштейна с вырожденным ядром.*

Ключевые слова: мера Гиббса, дерево Кэли, трансляционно-инвариантная мера Гиббса, конус, интегральный оператор Гаммерштейна, неподвижная точка.

Интерес к этой работе возник из теории меры Гиббса, которая рассматривается на дереве Кэли [1]- [3]. В работе [1] исследован вопрос о существовании мер Гиббса, соответствующих гамильтонианов на дереве Кэли с взаимодействиями ближайших соседей. Задача сведена к исследованию нелинейного интегрального уравнения и доказана единственность трансляционно-инвариантный меры Гиббса на дереве Кэли порядка $k = 1$ [1].

Рассмотрим интегральный оператор Гаммерштейна H_k на $C^+[0,1]$ следующего вида

$$(H_k f)(t) = \int_0^1 K(t,u) f^k(u)du, \;\; k \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

где $f(t) \in C^+[0,1]$, $K(t,u) \in C^+([0,1]\times[0,1])$. Здесь $C^+[0,1]$ – конус неотрицательных непрерывных функций на $[0,1]$, т.е.

$$C^+[0,1] = \{f = f(t) \in C[0,1]: \; f(t) \geq 0, t \in [0,1]\}.$$

Доказано, что количество трансляционно-инвариантных мер Гиббса для моделей с континуальным множеством значений спина на дереве Кэли порядка k совпадает с количеством положительных решений уравнения [2]

$$(H_k f)(t) = f(t).$$

Пусть $\phi_i(t), \varphi_i(t) \in C^+[0,1]$, где $i \in \{1,2\}$ – заданные функции и $K(t,u) = \phi_1(t)\varphi_1(u) + \phi_2(t)\varphi_2(u) > 0, \;\; t,u \in [0,1]$. Тогда оператор H_k (1) имеет следующий вид:

$$\left(H_k f\right)(t) = \int_0^1 \left(\phi_1(t)\varphi_1(u) + \phi_2(t)\varphi_2(u)\right) f^k(u)du. \tag{2}$$

В случае $k=2$ получены теоремы для количества положительных неподвижных точек оператора (2) и построены примеры, удовлетворяющие условиям теоремы [4]. В настоящей работе мы изучим задачу о количестве положительных неподвижных точек оператора H_k, в случае $k=3$.

Обозначим через $N_{fix}^{>}(H_k)$ количество строго положительных неподвижных точек интегрального оператора (2).

Определим следующие положительные числа:

$$\alpha_{11} = \int_0^1 \varphi_1(u)\phi_1^3(u)du, \;\; \alpha_{12} = \int_0^1 \varphi_1(u)\phi_1^2(u)\phi_2(u)du, \;\; \alpha_{21} = \int_0^1 \varphi_1(u)\phi_1(u)\phi_2^2(u)du,$$

$$\alpha_{22} = \int_0^1 \varphi_1(u)\phi_2^3(u)du, \;\; \beta_{11} = \int_0^1 \varphi_2(u)\phi_1^3(u)du, \quad \beta_{12} = \int_0^1 \varphi_2(u)\phi_1^2(u)\phi_2(u)du,$$

$$\beta_{21} = \int_0^1 \varphi_2(u)\phi_1(u)\phi_2^2(u)du, \quad \beta_{22} = \int_0^1 \varphi_2(u)\phi_2^3(u)du.$$

Положим:

$$\mu_0 = \alpha_{22}, \;\; \mu_1 = 3\alpha_{21} - \beta_{22}, \;\; \mu_2 = \alpha_{12} - \beta_{21}, \;\; \mu_3 = \alpha_{11} - 3\beta_{12}, \;\; \mu_4 = \beta_{11}.$$

Определим число

$$\theta_k = 2\sqrt{-\frac{p}{3}}\cos\left(\frac{\alpha + 2\pi(k-2)}{3}\right), \;\; k = 1,2,3,$$

$$\cos\alpha = \frac{q}{3}\left(-\frac{3}{p}\right)^{\frac{3}{2}}, \;\; \alpha \in [0,\pi],$$

где

$$p = -\frac{3\mu_1^2}{16\mu_0^2} + \frac{3\mu_2}{2\mu_0}, \;\; q = \frac{\mu_1^3}{32\mu_0^3} - \frac{3\mu_1\mu_2}{8\mu_0^2} + \frac{\mu_3}{4\mu_0}.$$

Обозначим

$$\gamma_1 = \theta_3 - \frac{\mu_1}{4\mu_0}, \ \gamma_2 = \theta_1 - \frac{\mu_1}{4\mu_0}, \ \gamma_3 = \theta_2 - \frac{\mu_1}{4\mu_0}.$$

Очиведно, что $\gamma_1 < \gamma_2 < \gamma_3$.

Определим полином четвертой степени

$$P_4(\xi) = \mu_0\xi^4 + \mu_1\xi^3 + 3\mu_2\xi^2 + \mu_3\xi - \mu_4, \mu_4 \in \mathbb{R}^+/\{0\}.$$

Пусть

$$Q = \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2.$$

Получены следующие теоремы о количестве строго положительных неподвижных точек оператора H_3.

Теорема 1. *Пусть $Q < 0$. Если выполняется одно из следующих условий:*

(a) $\gamma_2 \leq 0$,

(b) $\gamma_2 > 0, \ P_4(\gamma_2) < 0$,

(c) $\gamma_2 > 0, \ P_4(\gamma_3) > 0$,

тогда оператор H_3 имеет единственную положительную неподвижную точку, т.е. $N^{>}_{fix}(H_3) = 1$.

Теорема 2. *Пусть $Q < 0$, и $\gamma_2 > 0$. Если выполнено одно из условий:*

(d) $\gamma_2 > 0, \ P_4(\gamma_2) = 0$,

(e) $\gamma_2 > 0, \ P_4(\gamma_3) = 0$,

тогда оператор H_3 имеет две положительных неподвижных точки, т.е. $N^{>}_{fix}(H_3) = 2$.

Теорема 3. *Пусть $Q < 0$, и $\gamma_2 > 0$. Если выполнено условие:*

(f) $\gamma_2 > 0, \ P_4(\gamma_2) > 0, \ P_4(\gamma_3) < 0$,

тогда оператор H_3 имеет три положительные неподвижные точки, т.е. $N^{>}_{fix}(H_3) = 3$.

Нужно отметить, что каждой положительной неподвижной точке интегрального оператора H_3 соответствует трансляционно-инвариантная мера Гиббса для моделей в работе [4] с континуальным множеством значений спина на дереве Кэли порядка $k = 3$ (см. лемму 2.3 [4]).

Литература

1. Rozikov U.A., Eshkabilov Yu.Kh. *On models with uncountable set of spin values on a Cayley tree: Integral equations* // Math. Phys. Anal. Geom. – 2010. – V. 13. – P. 275–286.

2. Eshkabilov Yu.Kh., Haydarov F.H., Rozikov U.A. *Non-uniqueness of Gibbs Measure for Models with Uncountable Set of Spin Values on a Cayley Tree* // J. Stat. Phys. – 2012. – V. 147. – P. 779–794.

3. Eshkabilov Yu.Kh, Haydarov F.H., Rozikov U.A. *Uniqueness of Gibbs Measure for Models With Uncountable Set of Spin Values on a Cayley Tree* // Math. Phys. Anal. Geom. – 2013. – V. 16. – P. 1–17.

4. Eshkabilov Yu.Kh., Nodirov Sh.D., Haydarov F.H. *Positive fixed points of quadratic operators and Gibbs measures* // Positivity. – 2016. – V. 15. – P. 929–943.

ABOUT POSITIVE FIXED POINTS OF NONLINEAR INTEGRAL OPERATOR OF HAMMERSTEIN'S TYPE WITH DEGENERATE KERNEL

Yu.Kh. Eshkabilov, S.D. Nodirov

This paper is devoted to study of the number of positive fixed points of special view of integral of operator Hammerstein's type in $C[0,1]$. *Sufficient theorems for the number of positive fixed points of the integral of operator Hammerstein's type with a degenerate kernel are given.*

Keywords: Gibbs measure, Cayley tree, translation-invariant Gibbs measure, cone, Hammerstein's integral operator, fixed point.

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

ТРУДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЦЕНТРА
ИМЕНИ Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО

ТОМ 57

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ
И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ

Материалы четырнадцатой международной
Казанской научной школы-конференции
(Казань, 7 – 12 сентября 2019 г.)

Подписано в печать   04.09.2019
Бумага офсетная. Формат 60x84 1/16. Гарнитура «Таймс».
Тираж 180 экз. П. л.24,4. Печать ризографическая.
Заказ 04.09/19-1