

Министерство образования и науки Российской Федерации  
КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ.Н.И.ЛОБАЧЕВСКОГО.  
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ  
Специальность: 050201.65 - Математика с дополнительной специальностью  
Специализация: математика и информатика  
ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА  
(Дипломная работа)

«КОМПЬЮТЕРНАЯ МОДЕЛЬ  
АНГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ  
с помощью пакета программ Maple XVII»

Работа завершена:

«10» июня 2014 г.  (Г.И. Бахитова)

Работа допущена к защите:

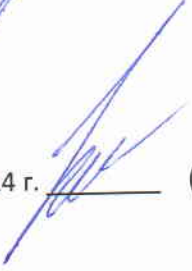
Научный руководитель

д.ф.-м.н., профессор

«10» июня 2014 г.  (Ю.Г. Игнатьев)

Заведующий кафедрой

д.ф.-м.н., профессор

«10» июня 2014 г.  (Ю.Г. Игнатьев)

Казань - 2014

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>I Теория ангармонических колебаний</b>	<b>4</b>
I.1 Свободные одномерные колебания . . . . .	4
I.2 Вынужденные колебания . . . . .	6
I.3 Колебания систем со многими степенями свободы . . . . .	9
I.4 Колебания молекул . . . . .	14
I.5 Затухающие колебания . . . . .	15
I.6 Вынужденные колебания при наличии трения . . . . .	19
I.7 Параметрический резонанс . . . . .	21
I.8 Ангармонические колебания . . . . .	24
<b>II Дифференциальные уравнения первого порядка</b>	<b>28</b>
II.1 Уравнения первого порядка, разрешенной относительно производной . . . . .	28
II.2 Уравнения с разделяющимися переменными . . . . .	29
II.3 Уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными . . . . .	32
II.4 Линейные уравнения первого порядка . . . . .	35
II.5 Уравнения в полных дифференциалах . . . . .	38
II.6 Теоремы существования и единственности решения уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ . . . . .	40
II.7 Приближенные методы интегрирования уравнений первого порядка . . . . .	42
II.8 Обыкновенные дифференциальные уравнения в Maple . . . . .	47
<b>III Приложение</b>	<b>49</b>
III.1 Модель ангармонических колебаний . . . . .	49
III.2 Тестирование программы . . . . .	50
<b>Заключение</b>	<b>54</b>
<b>Литература</b>	<b>56</b>

# Введение

Целью моей выпускной квалификационной работы является составление обзора по теории обыкновенных дифференциальных уравнений и ангармонических колебаний и решению их в пакете Maple. Квалификационная работа состоит из Введения, 3-х глав, Заключения и Списка литературы. Первая глава посвящена обзору теории ангармонических колебаний. Вторая глава включает в себя обзор теории обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и решения их средствами пакета Maple. Третья глава содержит процедуру моделирования ангармонических колебаний. В Заключении кратко сформулированы основные результаты.

Текст квалификационной работы набран при помощи издательской системы  $\text{LaTeX}2\epsilon$ . Она позволяет автору набрать свою рукопись с применением уже готовых форматов и распечатать ее с высоким полиграфическим качеством. При этом использовался специальный стиль профессора Ю.Г.Игнатьева, содержащий макросы, удобные для оформления работы, особенно для импорта графики в  $\text{LaTeX}2\epsilon$ . Основным литературным источником по теории ангармонических колебаний является книга Ландау и Лифшица, по теории ДУ книга Эльсгольца, а также недавно вышедшие учебные пособия по Maple. По издательской системе  $\text{LaTeX}$  использовалась, в основном, книга Львовского. Электронный вариант квалификационной работы выполнен в двух форматах, 'dvi' и 'pdf' и снабжены системой гиперссылок.

# Глава I

## Теория ангармонических колебаний

### I.1 Свободные одномерные колебания

Очень распространенный тип движения механических систем представляют собой так называемые *малые колебания*, которые система совершает вблизи своего положения устойчивого равновесия. Рассмотрение этих движений мы начнем с наиболее простого случая, когда система имеет всего одну степень свободы.

Устойчивому равновесию соответствует такое положение системы, в котором ее потенциальная энергия  $U(q)$  имеет минимум; отклонение от такого положения приводит к возникновению силы  $-dU/dq$ , стремящейся вернуть систему обратно. Обозначим соответствующее значение обобщенной координаты посредством  $q_0$ . При малых отклонениях от положения равновесия в разложении разности  $U(q) - U(q_0)$  по степеням  $q - q_0$  достаточно сохранить первый не исчезающий член. В общем случае таковым является член второго порядка

$$U(q) - U(q_0) \approx \frac{k}{2}(q - q_0)^2,$$

где  $k$  – положительный коэффициент (значение второй производной  $U''(q)$  при  $q = q_0$ ). Будем в дальнейшем отсчитывать потенциальную энергию от ее минимального значения (т.е. положим  $U(q_0) = 0$ ) и введем обозначение

$$x = q - q_0 \tag{I.1}$$

для отклонения координаты от ее равновесного значения. Таким образом,

$$U(x) = \frac{kx^2}{2} \tag{I.2}$$

Кинетическая энергия системы с одной степенью свободы имеет в общем случае вид

$$\frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 = \frac{1}{2}a(q)\dot{x}^2.$$

В том же приближении достаточно заметить функцию  $a(q)$  просто ее значением при  $q = q_0$ . Вводя для краткости обозначение<sup>1</sup>

$$a(q_0) = m,$$

---

<sup>1</sup>Подчеркнем, однако, что величина  $m$  совпадает с массой только, если  $x$  есть декартова координата частицы!

### I.1. Свободные одномерные колебания

получим окончательно следующее выражение для лагранжевой функции системы, совершающей одномерные малые колебания<sup>2</sup>:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}. \quad (\text{I.3})$$

Соответствующее этой функции уравнение движения гласит:

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (\text{I.4})$$

или

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (\text{I.5})$$

где введено обозначение

$$\omega = \sqrt{k/m}. \quad (\text{I.6})$$

Два независимых решения линейного дифференциального уравнения (I.5):  $\cos \omega t$  и  $\sin \omega t$ , так что его общее решение

$$x = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t. \quad (\text{I.7})$$

Это выражение может быть написано также в виде

$$x = a \cos(\omega t + \alpha). \quad (\text{I.8})$$

Поскольку  $\cos(\omega t + \alpha) = \cos \omega t \cos \alpha - \sin \omega t \sin \alpha$ , то сравнение с (I.7) показывает, что произвольные постоянные  $a$  и  $\alpha$  связаны с постоянными  $c_1$  и  $c_2$  соотношениями

$$a = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \text{tg } \alpha = -c_2/c_1. \quad (\text{I.9})$$

Таким образом, вблизи положения устойчивого равновесия система совершает гармоническое колебательное движение. Коэффициент  $a$  при периодическом множителе в (I.8) называется *амплитудой* колебаний, а аргумент косинуса – их *фазой*;  $\alpha$  есть начальное значение фазы, зависящее, очевидно, от выбора начало отсчета времени. Величина  $\omega$  называется *циклической частотой* колебаний; в теоретической физике, впрочем, ее называют обычно просто *частотой*, что мы и будем делать в дальнейшем.

Частота является основной характеристикой колебаний, не зависящей от начальных условий движения. Согласно формуле (I.6) она всецело определяется свойствами механической системы как таковой. Подчеркнем, однако, что это свойство частоты связано с предполагаемой малостью колебаний и исчезает при переходе к более высоким приближениям. С математической точки зрения оно связано с квадратичной зависимостью потенциальной энергии от координаты<sup>3</sup>.

Энергия системы, совершающей алые колебания есть

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2)$$

или, подставив сюда (I.8):

$$E = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2. \quad (\text{I.10})$$

---

<sup>2</sup>Такую систему часто называют одномерным *осциллятором*.

<sup>3</sup>Оно не имеет поэтому места, если у функции  $U(x)$  при  $x = 0$  минимум более высокого порядка, т.е.  $U \sim x^n$ ,  $n > 2$

Она пропорциональна квадрату амплитуды колебаний.

Зависимость координаты колеблющейся системы от времени часто оказывается удобным представлять в виде вещественной части комплексного выражения

$$x = \operatorname{Re}\{Ae^{i\omega t}\}, \quad (\text{I.11})$$

где  $A$  – комплексная постоянная; написав ее в виде

$$A = ae^{i\alpha}, \quad (\text{I.12})$$

мы вернемся к выражению (I.8). Постоянную  $A$  называют *комплексной амплитудой*; ее модуль совпадает с обычной амплитудой, а аргумент – с начальной фазой.

## I.2 Вынужденные колебания

Перейдем к рассмотрению колебаний в системе, на которую действует некоторое переменное внешнее поле; такие колебания называют *вынужденными* в отличие от рассмотренных в предыдущем параграфе так называемых *свободных* колебаний. Поскольку колебания предполагаются по-прежнему малыми, то тем самым подразумевается, что внешнее поле достаточно слабое, в противном случае оно могло бы вызвать слишком большое смещение  $x$ .

В этом случае наряду с собственной потенциальной энергией  $1/2kx^2$  система обладает еще потенциальной энергией  $U_e(x, t)$ , связанной с действием внешнего поля. Разлагая этот дополнительный член в ряд по степеням малой величины  $x$ , получим:

$$U_e(x, t) \approx U_e(0, t) + x \left. \frac{\partial U_e}{\partial x} \right|_{x=0}.$$

Первый член является функцией только от времени и потому может быть опущен в лагранжевой функции (как полная производная по  $t$  от некоторой другой функции времени). Во втором члене  $-\frac{\partial U_e}{\partial x}$  есть внешняя «сила», действующая на систему в положении равновесия и являющаяся заданной функцией времени; обозначим ее как  $F(t)$ , так что функция Лагранжа системы будет:

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2} + xF(t). \quad (\text{I.13})$$

Соответствующее уравнение движение есть

$$m\ddot{x} + kx = F(t),$$

или

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{1}{m}F(t), \quad (\text{I.14})$$

где мы снова ввели частоту  $\omega$  свободных колебаний.

Как известно, общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами получается в виде суммы двух выражений:  $x = x_0 + x_1$ , где  $x_0$  – общее решение однородного уравнения, а  $x_1$  – частный интеграл неоднородного уравнения. В данном случае  $x_0$  представляет собой рассмотренный в прошлом параграфе свободные колебания.

## I.2. Вынужденные колебания

Рассмотри представляющий особый интерес случай, когда вынуждающая сила тоже является простой периодической функцией времени с некоторой частотой  $\gamma$ :

$$F(t) = f \cos(\gamma t + \beta). \quad (\text{I.15})$$

Частный интеграл уравнения (I.14) ищем в виде  $x_1 = b \cos(\gamma t + \beta)$  с тем же периодическим множителем. Подстановка в уравнение дает:  $b = f/m(\omega^2 - \gamma^2)$ ; прибавляя решение однородного уравнения, получим общий интеграл в виде

$$x = a \cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)} \cos(\gamma t + \beta). \quad (\text{I.16})$$

Произвольные постоянные  $a$  и  $\alpha$  определяются из начальных условий.

Таким образом, под действием периодической вынуждающей силы система совершает движение, представляющее собой совокупность двух колебаний – с собственной частотой системы  $\omega$  и с частотой вынуждающей силы  $\gamma$ .

Решение (I.16) неприменимо в случае так называемых *резонанса*, когда частота вынуждающей силы совпадает с собственной частотой системы. Для нахождения общего решения уравнения движения в этом случае перепишем выражение (I.16) с соответствующим переобозначением постоянных в виде

$$x = a \cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{m(\omega^2 - \gamma^2)} [\cos(\gamma t + \beta) - \cos(\omega t + \beta)].$$

При  $\gamma \rightarrow \omega$  второй член дает неопределенность вида  $0/0$ . Раскрывая ее по правилу Лопиталя, получим:

$$x = a \cos(\omega t + \alpha) + \frac{f}{2m\omega} t \sin(\omega t + \beta). \quad (\text{I.17})$$

Таким образом, в случае резонанса амплитуда колебаний растет линейно со временем (до тех пор, пока колебания не перестанут быть малыми и вся излагаемая теория перестанет быть применимой).

Выясним еще как выглядят малые колебания вблизи резонанса, когда  $\gamma = \omega + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  – малая величина. Представив общее решение в комплексном виде, как

$$x = Ae^{i\omega t} + Be^{i(\omega+\varepsilon)t} = (A + Be^{i\varepsilon t})e^{i\omega t}. \quad (\text{I.18})$$

Так как величина  $A + Be^{i\varepsilon t}$  мало меняется в течение периода  $2\pi/\omega$  множителя  $e^{i\omega t}$ , то движение вблизи резонанса можно рассматривать как малые колебания, но с переменной амплитудой<sup>4</sup>.

Обозначив последнюю через  $C$ , имеем:

$$C = |A + Be^{i\varepsilon t}|.$$

Представив  $A$  и  $B$  соответственно в виде  $ae^{i\alpha}$  и  $be^{i\beta}$ , получим:

$$C^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos(\varepsilon t + \beta - \alpha). \quad (\text{I.19})$$

Таким образом, амплитуда колеблется периодически с частотой  $\varepsilon$ , меняясь между двумя пределами

$$|a - b| \leq C \leq a + b$$

<sup>4</sup>Меняется также «постоянный» член в фазе колебаний.

Это явление носит название *биений*.

Уравнение движения (I.14) может быть проинтегрировано и в общем виде при произвольной вынуждающей силе  $F(t)$ . Это легко сделать, переписав его предварительно в виде

$$\frac{d}{dt}(\dot{x} + i\omega x) - i\omega(\dot{x} + i\omega x) = \frac{1}{m}F(t)$$

или

$$\frac{d\xi}{dt} - i\omega\xi = \frac{1}{m}F(t), \quad (\text{I.20})$$

где введена комплексная величина

$$\xi = \dot{x} + i\omega x. \quad (\text{I.21})$$

Уравнение (I.20) уже не второго, а первого порядка. Без правой части его решением было бы  $\xi = Ae^{i\omega t}$  с постоянной  $A$ . Следуя общему правилу, ищем решение неоднородного уравнения в виде  $\xi = A(t)e^{i\omega t}$  и для функции  $A(t)$  получаем уравнение

$$\dot{A}(t) = \frac{1}{m}F(t)e^{-i\omega t}$$

Интегрируя его, получим решение уравнения (I.20) в виде

$$\xi = e^{i\omega t} \left\{ \int_0^t \frac{1}{m}F(t)e^{-i\omega t} dt + \xi_0 \right\}, \quad (\text{I.22})$$

где постоянная интегрирования  $\xi_0$  представляет собой значение  $\xi$  в момент времени  $t = 0$ . Это и есть искомое общее решение; функция  $x(t)$  дает мнимой частью выражения (I.22).

Энергия системы, совершающей вынужденные колебания, разумеется, не сохраняется; система приобретает энергию за счет источника внешней силы. Определим полную энергию, передаваемую системе за все время действия силы (от  $-\infty$  до  $+\infty$ ), предполагая начальную энергию равной нулю. Согласно формуле (I.22) (с нижним пределом интегрирования  $-\infty$  вместо нуля и с  $\xi(-\infty)=0$ ) имеем при  $t \rightarrow \infty$ :

$$|\xi(\infty)|^2 = \frac{1}{m^2} \left| \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-i\omega t} dt \right|^2.$$

С другой стороны, энергия системы как таковой дается выражением

$$E = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2) = \frac{m}{2}|\xi|^2. \quad (\text{I.23})$$

Подставив сюда  $|\xi(\infty)|^2$ , получим искомую передачу энергии в виде

$$E = \frac{1}{2m} \left| \int_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-i\omega t} dt \right|^2; \quad (\text{I.24})$$

где определяется квадратом модуля компоненты Фурье силы  $F(t)$  с частотой, равной собственной частоте системы.



### 1.3. Колебания систем со многими степенями свободы

В частности, если внешняя сила действует лишь в течение короткого промежутка времени (малого по сравнению с  $1/\omega$ ), то можно получить  $e^{-i\omega t} \approx 1$ . Тогда

$$E = \frac{1}{2m} \left( \int_{-\infty}^{\infty} F(t) dt \right)^2.$$

Этот результат заранее очевиден: он выражает собой тот факт, что кратковременная сила сообщает системе импульс  $\int F dt$ , не успев за это время произвести заметного смещения.

Задача

1. Определить конечную амплитуду колебаний системы после действия внешней силы, меняющейся в течение времени от 0 до  $T = 2\pi/\omega$  по закону  $F = F_0 \sin \omega t$ .

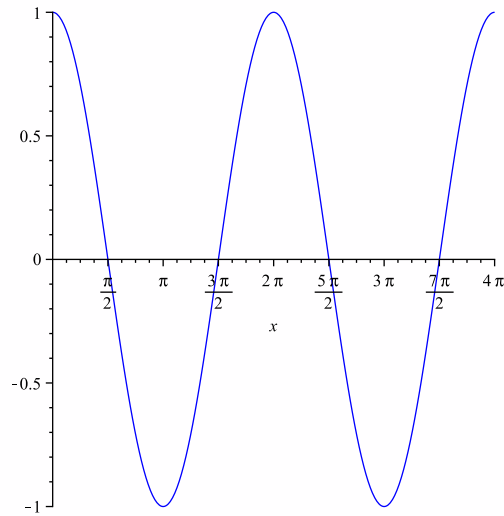


Рис. 1.

Решение: Подставив в (I.22)

$$F(t) = F_0 \sin \omega t = \frac{F_0}{2i} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$$

и проинтегрировав от нуля до  $T$ , получим

$$a = F_0 \pi / m \omega^2$$

## 1.3 Колебания систем со многими степенями свободы

Теория свободных колебаний систем с несколькими ( $s$ ) степенями свободы строиться аналогично тому, как были рассмотрены в I.1 одномерные колебания.

Пусть потенциальная энергия системы  $U$  как функция обобщенных координат  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) имеет минимум при  $q_i = q_{i0}$ . Вводя малые смещения

$$x_i = q_i - q_{i0} \tag{I.25}$$

и разлагая по ним  $U$  с точностью до членов второго порядка, получим потенциальную энергию в виде положительно определенной квадратичной формы

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,k} k_{ik} x_i x_k, \tag{I.26}$$

где мы снова отсчитываем потенциальную энергию от ее минимального значения. Поскольку коэффициенты  $k_{ik}$  и  $k_{ki}$  входят в (I.26) умноженными в одну и ту же величину  $x_i x_k$ , то ясно, что их можно всегда считать симметричными по своим индексам

$$k_{ik} = k_{ki}.$$

В кинетической же энергии, которая имеет в общем случае вид

$$\frac{1}{2} \sum_{i,k} a_{i,k}(q) \dot{q}_i \dot{q}_k$$

полагаем в коэффициентах  $q_i = q_{i0}$  и, обозначая постоянные  $a_{ik}(q_0)$  посредством  $m_{ik}$ , получаем ее в виде положительно квадратичной формы

$$\frac{1}{2} \sum_{i,k} m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k. \quad (\text{I.27})$$

Коэффициенты  $m_{ik}$  тоже можно всегда считать симметричными по индексам

$$m_{ik} = m_{ki}$$

Таким образом, лагранжева функция системы, совершающей свободные малые колебания:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,k} (m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k - k_{ik} x_i x_k). \quad (\text{I.28})$$

Составим теперь уравнения движения. Для определения входящих в них произвольных напишем полный дифференциал функции Лагранжа

$$dL = \frac{1}{2} \sum_{i,k} (m_{ik} \dot{x}_i d\dot{x}_k + m_{ik} \dot{x}_k d\dot{x}_i - k_{ik} x_i dx_k - k_{ik} x_k dx_i).$$

Поскольку величина суммы не зависит, разумеется, от обозначения индексов суммирования, меняем в первом и третьем членах в скобках  $i$  на  $k$ , а  $k$  на  $i$ ; учитывая при этом симметричность коэффициентов  $m_{ik}$  и  $k_{ik}$ , получим

$$dL = \sum_{i,k} (m_{ik} \dot{x}_k d\dot{x}_i - k_{ik} x_k dx_i).$$

Отсюда видно, что

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \sum_k m_{ik} \dot{x}_k, \quad \frac{\partial L}{\partial x_i} = - \sum_k k_{ik} x_k.$$

Поэтому уравнение Лагранжа

$$\sum_k m_{ik} \ddot{x}_k + \sum_k k_{ik} x_k = 0. \quad (\text{I.29})$$

Они представляют собой систему  $s'$  ( $i = 1, 2, \dots, s$ ) линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

По общим правилам решение таких уравнений ищем  $s$  неизвестных функций  $x_k(t)$  в виде:

$$x_k = A_k e^{i\omega t}, \quad (\text{I.30})$$

### 1.3. Колебания систем со многими степенями свободы

где  $A_k$  - некоторые, пока неопределенные коэффициенты. Подставляя (I.30) в систему (I.29), получаем по сокращении  $e^{i\omega t}$  систему линейных однородных алгебраических уравнений, которым должны удовлетворять постоянные  $A_k$ :

$$\sum_k (-\omega^2 m_{ik} + k_{ik}) A_k = 0. \quad (I.31)$$

Для того чтобы эта система имела отличные от нуля решения, должен обращаться в нуль ее определитель

$$|k_{ik} - \omega^2 m_{ik}| = 0. \quad (I.32)$$

Уравнение (I.32) – так называемое *характеристическое* уравнение - представляет собой уравнение степени  $s$  относительно  $\omega^2$ . Оно имеет в общем случае  $s$  различных вещественных положительных корней  $\omega_\alpha^2$ ,  $\alpha = 1, 2, \dots, s$  (в частных случаях некоторые из этих корней могут совпадать). Определенные таким образом величины  $\omega_\alpha$  называются *собственными частотами* системы.

Вещественность и положительность корней уравнения (I.32) заранее очевидны уже из физических соображений. Действительно, наличие у  $\omega$  мнимой части означало бы наличие во временной зависимости координат  $x_k$  (I.30) экспоненциально убывающего или экспоненциально возрастающего множителя. Но наличие такого множителя в данном случае недоступно, так как оно привело бы к изменению со временем полной энергии  $E = U + T$  системы в противоречии с законом ее сохранения.

В том же самом можно убедиться математическим путем. Умножив уравнение (I.31) на  $A_i^*$  и просуммировав затем по  $i$ , получим:

$$\sum_{i,k} (-\omega^2 m_{ik} + k_{ik}) A_i^* A_k = 0,$$

откуда

$$\omega^2 = \frac{\sum k_{ik} A_i^* A_k}{\sum m_{ik} A_i^* A_k}.$$

Квадратичные формы в числителе и знаменателе выражения вещественны в силу вещественности и симметричности коэффициентов  $k_{ik}$  и  $m_{ik}$ ; действительно,

$$\left( \sum_{i,k} k_{ik} A_i^* A_k \right)^* = \sum_{i,k} k_{ik} A_i A_k^* = \sum_{i,k} k_{ki} A_i A_k^* = \sum_{i,k} k_{ik} A_k A_i^*.$$

Они также существенно положительны, а потому положительно и  $\omega^2$ .

После того как частоты  $\omega_\alpha$  найдены, подставляя каждое из них в уравнения (I.31), можно найти соответствующие значения коэффициентов  $A_k$ . Если все корни  $\omega_\alpha$  характеристического уравнения различны, то, как известно, коэффициенты  $A_k$  пропорциональны минорам определителя (I.32), в котором  $\omega$  заменена соответствующим значением  $\omega_\alpha$ ; обозначим эти миноры через  $\Delta_{k\alpha}$ . Частное решение системы дифференциальных уравнений (I.29) имеет, следовательно, вид

$$x_k = \Delta_{k\alpha} C_\alpha e^{i\omega_\alpha t},$$

где  $C_\alpha$  - произвольная (комплексная) постоянная.

Общее же решение дается суммой всех  $s$  частных решений. Переходя к вещественной части, напишем его в виде

$$x_k = \text{Re} \left\{ \sum_{\alpha=1}^s \Delta_{k\alpha} C_\alpha e^{i\omega_\alpha t} \right\} \equiv \sum_{\alpha} \Delta_{k\alpha} \Theta_\alpha, \quad (I.33)$$

где мы ввели обозначение

$$\Theta_\alpha = \text{Re}\{C_\alpha e^{i\omega_\alpha t}\}. \quad (\text{I.34})$$

Таким образом, изменение каждой из координат системы со временем представляет собой наложение  $s$  простых периодических колебаний  $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_s$  с произвольными амплитудами и фазами, но имеющих вполне определенные частоты.

Естественно возникает вопрос, нельзя ли выбрать обобщенные координаты таким образом, чтобы каждая из них совершало только одно простое колебание? Самая форма общего интеграла (I.33) указывает путь к решению этой задачи.

В самом деле, рассматривая  $s$  соотношений (I.33) как систему уравнений с  $s$  неизвестными величинами  $\Theta_\alpha$ , мы можем, разрешив эту систему, выразить величины  $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_s$  через координаты  $x_1, x_2, \dots, x_s$ . Следовательно, величины  $\Theta_\alpha$  можно рассматривать как новые обобщенные координаты. Эти координаты называются *нормальными* (или *главными*), а совершаемые ими простые периодические колебания - нормальными колебаниями системы.

Нормальные координаты  $\Theta_\alpha$  удовлетворяют, как это явствует из их определения, уравнениям

$$\ddot{\Theta}_\alpha + \omega_\alpha^2 \Theta_\alpha = 0. \quad (\text{I.35})$$

Это значит, что в нормальных координатах уравнения движения распадаются на  $s$  независимых друг от друга уравнений. Ускорение каждой нормальной координаты зависит только от значения этой же координаты, и для полного определения ее временной зависимости надо знать начальные значения только ее же самой и соответствующей ей скорости. Другими словами, нормальные колебания системы полностью независимы.

Из сказанного очевидно, что функция Лагранжа, выраженная через нормальные координаты, распадается на сумму выражений, каждое из которых соответствует одному нормальному колебанию с одной из частот  $\omega_\alpha$ , т.е. имеет вид

$$L = \sum_\alpha \frac{m_\alpha}{2} (\dot{\Theta}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 \Theta_\alpha^2), \quad (\text{I.36})$$

где  $m_\alpha$  – положительные постоянные. С математической точки зрения это означает, что преобразование (I.33) обе квадратичные формы – кинетическая энергия (I.27) и потенциальная (I.26) – одновременно приводятся к диагональному виду.

Обычно нормальные координаты выбирают таким образом, чтобы коэффициенты при квадратах скоростей в функции Лагранжа были равны 1/2. Для этого достаточно определить нормальные координаты (обозначим их теперь  $Q_\alpha$ ) равенствами

$$Q_\alpha = \sqrt{m_\alpha} \Theta_\alpha. \quad (\text{I.37})$$

Тогда

$$L = \frac{1}{2} \sum_\alpha (\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2).$$

Все изложенное мало меняется в случае, когда среди корней характеристического уравнения имеются кратные корни. Общий вид (I.33), (I.34) интеграла уравнений движений остается таким же (с тем же числом  $s$  членов) с той лишь разницей, что

### 1.3. Колебания систем со многими степенями свободы

соответствующие кратным частотам коэффициенты  $\Delta_{k\alpha}$  уже не являются минорами определителя, которые, как известно, обращаются в этом случае в нуль<sup>5</sup>.

Каждой кратной (или, как говорят, *вырожденной*) частоте отвечает столько различных нормальных координат, какова степень кратности, но выбор этих нормальных координат не однозначен. Поскольку в кинетическую и потенциальную энергии нормальные координаты (с одинаковыми  $\omega_\alpha$ ) входят в виде одинаково преобразующихся сумм  $\sum \dot{Q}_\alpha^2$  и  $\sum Q_\alpha^2$ , то их можно подвергнуть любому линейному преобразованию, оставляющему инвариантной сумму квадратов.

Весьма просто нахождение нормальных координат для трехмерных колебаний одной материальной точки, находящейся в постоянном внешнем поле. Помещая начало декартовой системы координат в точку минимума потенциальной энергии  $U(x, y, z)$ , мы получим последнюю в виде квадратичной формы переменных  $x, y, z$ , а кинетическая энергия

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$$

( $m$ -масса частиц) не зависит от выбора направления координатных осей. Поэтому соответствующим поворотом осей надо только привести к диагональному виду потенциальную энергию. Тогда

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{1}{2}(k_1x^2 + k_2y^2 + k_3z^2), \quad (\text{I.38})$$

и колебания вдоль осей  $x, y, z$  являются главными с частотами

$$\omega_1 = \sqrt{k_1/m}, \omega_2 = \sqrt{k_2/m}, \omega_3 = \sqrt{k_3/m}.$$

В частном случае центрально-симметричного поля ( $k_1 = k_2 = k_3 \equiv k, U = kr^2/2$ ) эти три частоты совпадают.

Использование нормальных координат дает возможность привести задачу о вынужденных колебаниях системы с несколькими степенями свободы к задачам об одномерных вынужденных колебаниях. Функция Лагранжа системы с учетом действующих на нее переменных внешних сил имеет вид

$$L = L_0 + \sum_k F_k(t)x_k, \quad (\text{I.39})$$

где  $L_0$  — лагранжева функция свободных колебаний. Вводя вместо координат  $x_k$  нормальные координаты, получим:

$$L = \frac{1}{2} \sum_\alpha (\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2) + \sum_\alpha f_\alpha(t) Q_\alpha, \quad (\text{I.40})$$

где введено обозначение

$$f_\alpha(t) = \sum_k F_k(t) \frac{\Delta_{k\alpha}}{\sqrt{m_\alpha}}.$$

Соответственно уравнения движения

$$\ddot{Q}_\alpha + \omega_\alpha^2 Q_\alpha = f_\alpha(t) \quad (\text{I.41})$$

<sup>5</sup>Невозможность возникновения в общем интеграле членов, содержащих наряду с экспоненциальными также и степенные и временные множители, очевидна из тех же физических соображений, которые исключают существование комплексных «частот»; наличие таких членов противоречило бы закону сохранения энергии.

будут содержать лишь по одной неизвестной функции  $Q_\alpha(t)$ .

Задача.

Определить колебания системы с двумя степенями свободы, если ее функция Лагранжа

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{\omega_0^2}{2}(x^2 + y^2) + \alpha xy.$$

Решение. Уравнения движения

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \alpha y, \ddot{y} + \omega_0^2 y = \alpha x.$$

Подстановка (I.30) дает:

$$A_x(\omega_0^2 - \omega^2) = \alpha A_y, A_y(\omega_0^2 - \omega^2) = \alpha A_x. \quad (\text{I.42})$$

Характеристическое уравнение  $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = \alpha^2$ , откуда

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 - \alpha, \omega_2^2 = \omega_0^2 + \alpha.$$

При  $\omega = \omega_1$  уравнения (I.42) дают  $A_x = A_y$ , а при  $\omega = \omega_2$   $A_x = -A_y$ . Поэтому

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 + Q_2), y = \frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1 - Q_2)$$

(коэффициенты  $1/\sqrt{2}$  соответствуют указанной в тексте нормировке нормальных координат).

При  $\alpha \ll \omega_0^2$  (слабая связь) имеем:

$$\omega_1 \approx \omega_0 - \frac{\alpha}{2\omega_0}, \omega_2 \approx \omega_0 + \frac{\alpha}{2\omega_0}.$$

Изменение  $x$  и  $y$  представляет собой в этом случае наложение двух колебаний с близкими частотами, т.е. имеет характер биений с частотой  $\omega_2 - \omega_1 = \alpha/\omega_0$ . При этом в момент, когда амплитуда координаты  $x$  проходит через максимум, амплитуда  $y$  проходит через минимум и наоборот.

## I.4 Колебания молекул

Если мы имеем дело с системой частиц, взаимодействующих друг с другом, но не находящихся во внешнем поле, то не все ее степени свободы имеют колебательный характер. Типичным примером таких систем являются молекулы. Помимо движений, представляющих собой колебания атомов около их положения равновесия внутри молекулы, молекула как целое может совершать поступательное и вращательное движения.

Поступательному перемещению соответствуют три степени свободы. Столько же имеется в общем случае вращательных степеней свободы, так что из  $3n$  степеней свободы  $n$ -атомной молекулы всего  $3n - 6$  отвечают колебательному движению. Исключение представляют молекулы, в которых все атомы расположены вдоль одной прямой. Поскольку говорить о вращении вокруг этой прямой не имеет смысла, то вращательных степеней свободы в этом случае всего две, так что колебательных имеется  $3n - 5$ .

При решении механической задачи о колебаниях молекулы целесообразно с самого начала исключить из рассмотрения поступательные и вращательные степени свободы.

Чтобы исключить поступательное движение, надо считать равным нулю полный импульс молекулы. Поскольку это условие означает неподвижность центра инерции

## 1.5. Затухающие колебания

молекулы, его можно выразить в виде постоянства трех координат последнего. Положив  $r_a = r_{a0} + u_a$  (где  $r_{a0}$  — радиус-вектор неподвижного положения равновесия  $a$ -го атома, а  $u_a$  — его отклонение от этого положения), представим условие

$$\sum m_a r_a = \text{const} \equiv \sum m_a r_{a0}$$

в виде

$$\sum m_a u_a = 0. \quad (1.43)$$

Чтобы исключить вращение молекулы, следует положить равным нулю ее полный момент импульса. Так как момент не является полной производной по времени от какой-либо функции координат, то условие его исчезновения не может быть, вообще говоря, выражено в виде равенства нулю такой функции. Однако случай малых колебаний как раз представляет исключение. В самом деле, снова положив  $r_a = r_{a0} + u_a$  и пренебрегая малыми величинами второго порядка по смещениям  $u_a$ , представим момент импульса молекулы в виде

$$M = \sum m_a [r_a v_a] \approx \sum m_a [r_{a0} \dot{u}_a] = \frac{d}{dt} \sum m_a [r_{a0} u_a].$$

Условие его исчезновения в этом приближении можно, следовательно, представить в виде

$$\sum m_a [r_{a0} u_a] = 0 \quad (1.44)$$

(начало координат может быть при этом выбрано произвольным образом).

Нормальные колебания молекулы могут быть классифицированы по характеру движения атомов в них на основании соображений, связанных с симметрией расположения атомов (в положениях равновесия) в молекуле.

Если все  $n$  атомов молекулы лежат в одной плоскости, то можно различать нормальные колебания, составляющие атомы в этой плоскости, и нормальные колебания, при которых атомы выводятся из плоскости. Легко определить число тех и других. Так как всего для плоского движения имеется  $2n$  степеней свободы, из которых две поступательные и одна вращательная, то число нормальных колебаний, не выводящих атомы из плоскости, равно  $2n - 3$ . Остальные же  $(3n - 6) - (2n - 3) = n - 3$  колебательных степеней свободы отвечают колебаниям, выводящим атомы из плоскости.

В случае линейной молекулы можно различать продольные колебания, сохраняющие ее прямолинейную форму, и колебания, выводящие атомы с прямой. Так как всего движению  $n$  частиц по линии отвечает  $n$  степеней свободы, из которых одна поступательная, то число колебаний, не выводящих атомы с прямой, равно  $n - 1$ . Поскольку же полное число колебаний степеней свободы линейной молекулы есть  $3n - 5$ , то имеется  $2n - 4$  колебаний, выводящих атомы с прямой. Этим колебаниям, однако, отвечают всего  $n - 2$  различные частоты, так как каждое из таких колебаний может осуществляться двумя независимыми способами — в двух взаимно перпендикулярных плоскостях (проходящих через ось молекулы); из соображений симметрии очевидно, что каждая такая пара нормальных колебаний имеет одинаковые частоты.

## 1.5 Затухающие колебания

До сих пор мы всегда подразумевали, что движение тел происходит в пустоте или что влиянием среды на движение можно пренебречь. В действительности при движении

тела в среде последняя оказывает сопротивление, стремящееся замедлить движение. Энергия движущегося тела при этом в конце концов переходит в тепло или, как говорят, диссипируется.

Процесс движения в этих условиях уже не является чисто механическим процессом, а его рассмотрение требует учета движения самой среды и внутреннего теплового состояния как среды, так и тела. В частности, уже нельзя утверждать в общем случае, что ускорение движущегося тела является функцией лишь от его координат и скорости в данный момент времени, т.е. не существует уравнений движения в том смысле, какой они имеют в механике. Таким образом, задача о движении тела в среде уже не является задачей механики.

Существует, однако, определенная категория случаев, когда движение в среде может быть приближенно описано с помощью механических уравнений движения путем внедрения в них определенных дополнительных членов. Сюда относятся колебания с частотами, малыми по сравнению с частотами, характерными для внутренних диссипативных процессов в среде. При выполнении этого условия можно считать, что на тело действует *сила трения*, зависящая (для заданной однородной среды) только от его скорости.

Если к тому же эта скорость достаточно мала, то можно разложить силу трения по ее степеням. Нулевой член разложения равен нулю, поскольку на неподвижное тело не действует никакой силы трения, и первый не исчезающий член пропорционален скорости. Таким образом, обобщенную силу трения  $f_{tr}$ , действующую на систему, совершающую одномерные малые колебания с обобщенной координатой  $x$ , можно написать в виде

$$f_{tr} = -\alpha\dot{x},$$

где  $\alpha$  — положительный коэффициент, а знак минус показывает, что сила действует в сторону, противоположную скорости. Добавляя эту силу в правую часть уравнения движения, получим:

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x}. \quad (\text{I.45})$$

Разделим его на  $m$  и введем обозначения.

$$k/m = \omega_0^2, \alpha/m = 2\lambda. \quad (\text{I.46})$$

$\omega_0$  — есть частота свободных колебаний системы в отсутствие трения. Величина  $\lambda$  называется *коэффициентом затухания*<sup>6</sup>.

Таким образом, имеем уравнение

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2x = 0 \quad (\text{I.47})$$

Следуя общим правилам решения линейных уравнений с постоянными коэффициентами, полагаем  $x = e^{rt}$  и находим для  $r$  характеристическое уравнение

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0.$$

Общее решение уравнения (I.46) есть

$$x = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, r_{1,2} = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}.$$

Здесь следует различать два случая.

<sup>6</sup>Безразмерное поведение  $\lambda T$  (где  $T = 2\pi/\omega$ -период) называют логарифмическим декрементом затухания



### I.5. Затухающие колебания

Если  $\lambda < \omega_0$ , то мы имеем два комплексно сопряженных значения  $r$ . Общее решение уравнения движения может быть представлено в этом случае, как

$$x = \operatorname{Re}\{A \exp(-\lambda t + it\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2})\},$$

где  $A$  — произвольная комплексная постоянная. Иначе можно написать:

$$x = ae^{-\lambda t} \cos(\omega t + \alpha), \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}, \quad (\text{I.48})$$

где  $a$  и  $\alpha$  — вещественные постоянные. Выражаемое этими формулами движение представляет собой так называемые *затухающие колебания*. Его можно рассматривать как гармонические колебания с экспоненциально убывающей амплитудой. Скорость убывания амплитуды определяется показателем  $\lambda$ , а «частота»  $\omega$  колебаний меньше частоты свободных колебаний в отсутствие трения; при  $\lambda \ll \omega_0$  разница между  $\omega$  и  $\omega_0$  — второго порядка малости. Уменьшение частоты при трении следовало ожидать заранее, поскольку трение вообще задерживает движение.

Если  $\lambda \ll \omega_0$ , то за время одного периода  $2\pi/\omega$  амплитуда затухающего колебания почти не меняется. В этом случае имеет смысл рассматривать средние (за период) значения квадратов координаты и скорости, пренебрегая при усреднении изменением множителя  $e^{-\lambda t}$ . Эти средние квадраты, очевидно, пропорциональны  $e^{-2\lambda t}$ . Поэтому и энергия системы в среднем убывает по закону

$$\vec{E} = E_0 e^{-2\lambda t}, \quad (\text{I.49})$$

где  $E_0$  — начальное значение энергии.

Пусть теперь  $\lambda > \omega_0$ . Тогда оба значения  $r$  вещественны, причем оба отрицательны. Общий вид решения

$$x = c_1 \exp[-(\lambda - \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t] + c_2 \exp[-(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2})t]. \quad (\text{I.50})$$

Мы видим, что в этом случае, возникающем при достаточно большом трении, движение состоит в убывании  $|x|$ , т.е. в асимптотическом (при  $t \rightarrow \infty$ ) приближении к положению равновесия. Этот тип движения называют *апериодическим затуханием*.

Наконец, в особом случае, когда  $\lambda = \omega_0$ , характеристическое уравнение имеет всего один (двойной) корень  $r = -\lambda$ . Как известно, общее решение дифференциального уравнения имеет в этом случае вид

$$x = (c_1 + c_2 t) e^{-\lambda t}. \quad (\text{I.51})$$

Это — особый случай апериодического затухания. Оно тоже не имеет колебательного характера.

Для системы со многими степенями свободы обобщенные силы трения, соответствующие координатам  $x_i$ , являются линейными функциями скоростей вида

$$f_{itr} = - \sum_k \alpha_{ik} \dot{x}_k. \quad (\text{I.52})$$

Из чисто механических соображений нельзя сделать никаких заключений о свойствах симметрии коэффициентов  $\alpha_{ik}$  по индексам  $i$  и  $k$ . Методами же статистической физики можно показать, что всегда

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki}. \quad (\text{I.53})$$

Поэтому выражения (I.51) могут быть написаны в виде производных

$$f_{itr} = -\frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i} \quad (\text{I.54})$$

от квадратичной формы

$$F = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \alpha_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k, \quad (\text{I.55})$$

называемой *диссипативной функцией*.

Силы (I.53) должны быть добавлены к правой части уравнений Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}. \quad (\text{I.56})$$

Диссипативная функция имеет сама по себе важный физический смысл — ею определяется интенсивность диссипации энергии в системе. В этом легко убедиться, вычислив производную по времени от механической энергии системы. Имеем:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - L \right) = \sum_i \dot{x}_i \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} \right) = - \sum_i \dot{x}_i \frac{\partial F}{\partial \dot{x}_i}.$$

Поскольку  $F$  — квадратичная функция скоростей, то в силу теоремы Эйлера об однородных функциях сумма в правой части равенства равна  $2F$ . Таким образом,

$$\frac{dE}{dt} = -2F, \quad (\text{I.57})$$

т.е. скорость изменения энергии системы дается удвоенной диссипативной функцией. Так как диссипативные процессы приводят к уменьшению энергии, то должно быть всегда  $F > 0$ , т.е. квадратичная форма (I.54) существенно положительна.

Уравнения малых колебаний при наличии трения получаются добавлением сил (I.51) в правую часть уравнений (I.58):

$$\sum_k m_{ik} \ddot{x}_k + \sum_k k_{ik} x_k = - \sum_k \alpha_{ik} \dot{x}_k. \quad (\text{I.58})$$

Положив в этих уравнениях

$$x_k = A_k e^{rt},$$

получим по сокращении на  $e^{rt}$  систему линейных алгебраических уравнений для постоянных  $A_k$

$$\sum_k (m_{ik} r^2 + \alpha_{ik} r + k_{ik}) A_k = 0. \quad (\text{I.59})$$

Приравняв нулю определитель этой системы, найдем характеристическое уравнение, определяющее значения  $r$ :

$$|m_{ik} r^2 + \alpha_{ik} r + k_{ik}| = 0. \quad (\text{I.60})$$

Это — уравнение степени  $2s$  относительно  $r$ . Поскольку все его коэффициенты вещественны, то его корни либо вещественны, либо попарно комплексно сопряжены. При этом вещественные корни непременно отрицательны, а комплексные имеют отрицательную вещественную часть. В противном случае координаты и скорости, а с ними и энергия системы экспоненциально возрастали бы со временем, между тем как наличие диссипативных сил должно приводить к уменьшению энергии.

## I.6 Вынужденные колебания при наличии трения

Исследование вынужденных колебаний при наличии трения вполне аналогично произведенному в I.2 рассмотрению колебаний без трения. Мы остановимся здесь подробно на представляющем самостоятельный интерес случае периодической вынуждающей силы.

Прибавив в правой части уравнения (I.44) внешнюю силу  $f \cos \gamma t$  и разделив на  $m$ , получим уравнение движения в виде

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} \cos \gamma t \quad (\text{I.61})$$

Решение этого уравнения удобно находить в комплексной форме, для чего пишем в правой части  $e^{i\gamma t}$  вместо  $\cos \gamma t$ :

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f}{m} e^{i\gamma t}$$

Частный интеграл ищем в виде  $x = B e^{i\gamma t}$  и находим для :

$$B = \frac{f}{m(\omega_0^2 - \gamma^2 + 2i\lambda\gamma)}. \quad (\text{I.62})$$

Представив  $B$  в виде  $b e^{i\delta}$ , имеем для  $b$  и  $\delta$ :

$$b = \frac{f}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \gamma^2)^2 + 4\lambda^2\gamma^2}}, \quad \text{tg}\delta = \frac{2\lambda\gamma}{\gamma^2 - \omega_0^2}. \quad (\text{I.63})$$

Наконец, отделив вещественную часть от выражения  $B e^{i\gamma t} = b e^{i(\gamma t + \delta)}$  получим частный интеграл уравнения (I.60), а прибавив к нему общее решение уравнения без правой части (которое мы напомним для определенности для случая  $\omega_0 > \lambda$ ), получим окончательно:

$$x = a e^{-\lambda t} \cos(\omega t + \alpha) + b \cos(\gamma t + \delta). \quad (\text{I.64})$$

Первое слагаемое экспоненциально убывает со временем, так что через достаточно большой промежуток времени остается только второй член:

$$x = b \cos(\gamma t + \delta). \quad (\text{I.65})$$

Выражение (I.62) для амплитуды  $b$  вынужденного колебания хотя и возрастает при приближении частоты  $\gamma$  к  $\omega_0$ , но не обращается в бесконечность, как это было при резонансе в отсутствие трения. При заданной амплитуде силы  $f$  амплитуда колебания максимальна при частоте  $\gamma = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2}$ ; при  $\lambda \ll \omega_0$  это значение отличается от  $\omega_0$  лишь на величину второго порядка малости.

Рассмотрим область вблизи резонанса. Положим  $\gamma = \omega_0 + \varepsilon$ , где  $\varepsilon$  — малая величина; будем также считать, что  $\lambda \ll \omega_0$ . Тогда в (I.61) можно приближенно заменить:

$$\gamma^2 - \omega_0^2 = (\gamma + \omega_0)(\gamma - \omega_0) \approx 2\omega_0\varepsilon, \quad 2i\lambda\gamma \approx 2i\lambda\omega_0,$$

так что

$$B = -\frac{f}{2m(\varepsilon - i\lambda)\omega_0} \quad (\text{I.66})$$

или

$$b = \frac{f}{2m\omega_0\sqrt{\varepsilon^2 + \lambda^2}}, \quad \text{tg}\delta = \frac{\lambda}{\varepsilon} \quad (\text{I.67})$$

Отметим характерную особенность хода изменения разности фаз  $\delta$  между колебанием и вынуждающей силой при изменении частоты последней. Эта разность всегда отрицательна, т.е. колебание «запаздывает» относительно внешней силы. Вдали от резонанса, со стороны  $\gamma < \omega_0$ ,  $\delta$  стремится к нулю, а со стороны  $\gamma > \omega_0$  — к значению  $-\pi$ . Изменение  $\delta$  от нуля до  $-\pi$  происходит в узкой (ширины  $\sim \lambda$ ) области частот, близких к  $\omega_0$ ; через значение  $-\pi/2$  разность фаз проходит при  $\gamma = \omega_0$ . Отметим в этой связи, что в отсутствие трения изменение фазы вынужденного колебания на величину  $\pi$  происходит скачком при  $\gamma = \omega_0$  (второй член в (I.63) меняет знак); учет трения «размазывает» этот скачок.

При установившемся движении, когда система совершает вынужденные колебания (I.64), ее энергия остается неизменной. В то же время система непрерывно поглощает (от источника внешней силы) энергию, которая диссипируется благодаря наличию трения. Обозначим посредством  $I(\gamma)$  количество энергии, поглощаемой в среднем в единицу времени, как функцию частоты внешней силы. Согласно (I.56) имеем:

$$I(\gamma) = 2\bar{F}$$

где  $F$  — среднее (по периоду колебания) значение диссипативной функции. Для одномерного движения выражение (I.54) диссипативной функции сводится к  $F = ax^2/2 = \lambda m \dot{x}^2$ . Подставив сюда (I.64), получим:

$$F = \lambda m b^2 \gamma^2 \sin^2(\gamma t + \delta)$$

Среднее по времени значение квадрата синуса равно  $1/2$ , поэтому

$$I(\gamma) = \lambda m b^2 \gamma^2 \tag{I.68}$$

Вблизи резонанса, подставляя амплитуду колебания из (I.66), имеем

$$I(\varepsilon) = \frac{f^2}{4m} \frac{\lambda}{\varepsilon^2 + \lambda^2}. \tag{I.69}$$

Такой вид зависимости поглощения от частоты называется *дисперсионным*. Полушириной резонансной кривой называют значение  $|\varepsilon|$ , при котором величина  $I(\varepsilon)$  уменьшается вдвое по сравнению с ее максимальным значением при  $\varepsilon = 0$ . Из формулы (I.68) видно, что в данном случае эта ширина совпадает с показателем затухания  $\lambda$ . Высота же максимума

$$I(0) = f^2/4m\lambda$$

обратно пропорциональна  $\lambda$ . Таким образом, при уменьшении показателя затухания резонансная кривая становится уже и выше, т.е. ее максимум становится более острым. Площадь же под резонансной кривой остается при этом неизменной.

Последняя дается интегралом

$$\int_0^{\infty} I(\gamma) d\gamma = \int_{-\omega_0}^{\infty} I(\varepsilon) d\varepsilon.$$

Поскольку  $I(\varepsilon)$  быстро убывает при увеличении  $|\varepsilon|$ , так что область больших  $|\varepsilon|$  все равно не существенна, можно при интегрировании писать  $I(\varepsilon)$  в виде (I.68), а нижний предел заменить на  $-\infty$ . Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{f^2 \lambda}{4m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2 + \lambda^2} = \frac{\pi f^2}{4M} \tag{I.70}$$

## I.7 Параметрический резонанс

Существуют такие незамкнутые колебательные системы, в которых внешнее воздействие сводится к изменению со временем ее параметров<sup>7</sup>.

Параметрами одномерной системы являются коэффициенты  $m$  и  $k$  в функции Лагранжа (I.3); если они зависят от времени, то уравнение движения гласит:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) + kx = 0. \quad (\text{I.71})$$

Путем введения вместо  $t$  новой независимой переменной  $\tau$  согласно  $d\tau = dt/m(t)$  это уравнение приводится к виду

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} + mkx = 0.$$

Поэтому фактически, без всякого ограничения общности, достаточно рассмотреть уравнение движения вида

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2(t)x = 0, \quad (\text{I.72})$$

которое получилось бы из (I.70) при  $m = \text{const}$ .

Вид функции  $\omega(t)$  задается условиями задачи; предположим, что эта функция периодическая с некоторой частотой  $\gamma$  (и периодом  $T = 2\pi/\gamma$ ). Это значит, что

$$\omega(t + T) = \omega(t)$$

а потому и все уравнение (I.71) инвариантно по отношению к преобразованию  $t \rightarrow t + T$ . Отсюда следует, что если  $x(t)$  есть решение уравнения, то и функция  $x(t + T)$  тоже есть решение. Другими словами, если  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  — два независимых интеграла уравнения (I.71), то при замене  $t \rightarrow t + T$  они преобразуются линейным образом друг через друга. При этом можно<sup>8</sup> выбрать  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  таким образом, чтобы их изменение при замене  $t$  на  $t + T$  сводилось просто к умножению на постоянный множитель

$$x_1(t + T) = \mu_1 x_1(t), x_2(t + T) = \mu_2 x_2(t).$$

Наиболее общий вид функций, обладающих таким свойством, есть

$$x_1(t) = \mu_1^{t/T} \Pi_1(t), x_2(t) = \mu_2^{t/T} \Pi_2(t), \quad (\text{I.73})$$

где  $\Pi_1(t)$  и  $\Pi_2(t)$  — чисто периодические функции времени (с периодом  $T$ ).

Постоянные  $\mu_1$  и  $\mu_2$  в этих функциях должны быть связаны друг с другом определенным соотношением. Действительно, умножив уравнения

$$\ddot{x}_1 + \omega^2(t)x_1 = 0, \ddot{x}_2 + \omega^2(t)x_2 = 0$$

соответственно на  $x_1$  и  $x_2$  и вычтя их почленно одно из другого, получим

$$\ddot{x}_1 x_2 - \ddot{x}_2 x_1 = \frac{d}{dt}(\dot{x}_1 x_2 - x_1 \dot{x}_2) = 0$$

<sup>7</sup>Простым примером такого рода является маятник, точка подвеса которого совершает заданное периодическое движение в вертикальном положении

<sup>8</sup>Этот выбор эквивалентен приведению к диагональному виду матрицы линейных преобразований  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ , что требует решения соответствующего секулярного квадратного уравнения. Мы предполагаем, что корни этого уравнения не совпадают.

или

$$\dot{x}_1 x_2 - x_1 \dot{x}_2 = \text{const.} \quad (\text{I.74})$$

Но при любых функциях  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  вида (I.72) выражение в левой части этого равенства умножается на  $\mu_1 \mu_2$  при изменении аргумента  $t$  на  $t + T$ . Поэтому ясно, что соблюдение равенства (I.73) во всяком случае требует, чтобы было

$$\mu_1 \mu_2 = 1. \quad (\text{I.75})$$

Дальнейшие заключения о постоянных  $\mu_1, \mu_2$  можно сделать, исходя из факта вещественности коэффициентов уравнения (I.71). Если  $x(t)$  есть какой-либо интеграл такого уравнения, то и комплексно сопряженная функция  $x^*(t)$  должна удовлетворять тому же уравнению. Отсюда следует, что пара постоянных  $\mu_1, \mu_2$  должна совпадать с парой  $\mu_1^*, \mu_2^*$ , т.е. должно быть либо  $\mu_1 = \mu_2^*$ , либо  $\mu_1$  и  $\mu_2$  вещественны. В первом случае, учитывая (I.74), имеем  $\mu_1 = 1/\mu_1^*$ , т.е.  $|\mu_1|^2 = |\mu_2|^2 = 1$ ; постоянные  $\mu_1$  и  $\mu_2$  по модулю равны единице.

Во втором же случае два независимых интеграла уравнения (I.71) имеют вид

$$x_1(t) = \mu^{t/T} \Pi_1(t), \quad x_2(t) = \mu^{-t/T} \Pi_2(t)$$

с отличным от единицы положительным или отрицательным вещественным числом  $\mu$ . Одна из этих функций (первая или вторая при  $|\mu| > 1$  и  $|\mu| < 1$ ) экспоненциально возрастает со временем. Это значит, что состояние покоя системы (в положении равновесия  $x = 0$ ) будет неустойчивым: достаточно сколь угодно слабого отклонения от этого состояния, чтобы появившееся смещение  $x$  стало быстро возрастать со временем. Это явление называется *параметрическим резонансом*.

Обратим внимание на то, что при строго равных нулю начальных значениях  $x$  и  $\dot{x}$  они оставались бы равными нулю и в дальнейшем в отличие от обычного резонанса (I.2), в котором возрастание смещения со временем (пропорциональное  $t$ ) происходит и от равного нулю начального значения.

Выясним условия возникновения параметрического резонанса в важном случае, когда функция  $\omega(t)$  мало отличается от некоторой постоянной величины  $\omega_0$  и является простой периодической функцией

$$\omega^2(t) = \omega_0^2(1 + h \cos \gamma t), \quad (\text{I.76})$$

где постоянная  $h \ll 1$  (мы будем считать  $h$  положительной, чего всегда можно добиться надлежащим выбором начала отсчета времени). Как мы увидим ниже, наиболее интенсивным образом параметрический резонанс возникает, если частота функции  $\omega(t)$  близка к удвоенной частоте  $\omega_0$ . Поэтому положим

$$\gamma = 2\omega_0 + \varepsilon,$$

где  $\varepsilon \ll \omega_0$ .

Решение уравнения движения <sup>9</sup>

$$\ddot{x} + \omega_0^2[1 + h \cos(2\omega_0 + \varepsilon)t]x = 0 \quad (\text{I.77})$$

будем искать в виде

$$x = a(t) \cos(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2})t + b(t) \sin(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2})t, \quad (\text{I.78})$$

<sup>9</sup>Уравнение такого вида (с произвольными  $\gamma$  и  $h$ ) называется в математической физике уравнением Матьё.

## I.7. Параметрический резонанс

где  $a(t)$  и  $b(t)$  — медленно (по сравнению со множителями  $\cos$  и  $\sin$ ) меняющиеся функции времени. Такой вид решения, разумеется, не является точным. В действительности функция  $x(t)$  содержит также члены с частотами, отличающимися от  $\omega_0 + \varepsilon/2$  на целое кратное от  $2\omega_0 + \varepsilon$ ; эти члены, однако, высшего порядка малости по  $h$ , и в первом приближении ими можно пренебречь.

Подставим (I.77) в (I.76) и произведем вычисления, сохраняя лишь члены первого порядка по  $\varepsilon$ ; при этом предположим, что  $\dot{a} \sim \varepsilon a$ ,  $\dot{b} \sim \varepsilon b$  (правильность этого предположения в условиях резонанса подтвердится результатом). Произведения тригонометрических множителей следует разложить в суммы

$$\cos(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2})t \cos(2\omega_0 + \varepsilon)t = \frac{1}{2} \cos(3\omega_0 + \frac{3\varepsilon}{2})t + \frac{1}{2} \cos(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2})t$$

и т.п. и в соответствии со сказанным выше опустим члены с частотами  $3(\omega_0 + \varepsilon/2)$ . В результате получим

$$-(2\dot{a} + b\varepsilon + \frac{h\omega_0}{2}b)\omega_0 \sin(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2})t + (2\dot{b} - a\varepsilon + \frac{h\omega_0}{2}a)\omega_0 \cos(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2})t = 0.$$

Выполнение этого равенства требует одновременного обращения в нуль коэффициентов при каждом из множителей  $\sin$  и  $\cos$ . Отсюда получаем систему двух линейных дифференциальных уравнений для функций  $a(t)$  и  $b(t)$ . Следуя общим правилам, ищем решение, пропорциональное  $e^{st}$ . Тогда

$$sa + \frac{1}{2}(\varepsilon + \frac{h\omega_0}{2})b = 0$$

$$\frac{1}{2}(\varepsilon - \frac{h\omega_0}{2})a - sb = 0$$

и условие совместности эти двух алгебраических уравнений дает:

$$s^2 = \frac{1}{4}[(\frac{h\omega_0}{2})^2 - \varepsilon^2]. \quad (I.79)$$

Условие возникновения параметрического резонанса заключается в вещественности  $s$  (т.е.  $s^2 > 0$ )<sup>10</sup>. Таким образом, резонанс имеет место в интервале

$$-h\omega_0/2 < \varepsilon < h\omega_0/2 \quad (I.80)$$

вокруг частоты  $2\omega_0$ <sup>11</sup>. Ширина этого интервала пропорциональна  $h$ , и такого же порядка осуществляющиеся в нем значения показателя усиления колебаний  $s$ .

Параметрический резонанс имеет место также при частотах  $\gamma$  изменения параметра системы, близких к значениям вида  $2\omega_0/n$ , где  $n$  — любое целое число. Однако ширина резонансных областей (областей неустойчивости) с увеличением  $n$  быстро уменьшается — как  $h^n$ . Так же уменьшаются и значения показателя усиления колебаний в них.

Явление параметрического резонанса существует и при наличии слабого трения в системе, но область неустойчивости при этом несколько сужается. Как мы видели в I.5,

<sup>10</sup>Постоянная  $\mu$  в (I.74) связана с  $s$  соотношением  $\mu = -e^{s\pi/\omega_0}$  (при замене  $t$  на  $t + 2\pi/2\omega_0 \cos$  и  $\sin$  в (I.77) меняют знак).

<sup>11</sup>Если интересоваться лишь границами области резонанса (не интересуясь выражением для  $s$  внутри нее), то можно упростить вычисления, заметив, что на этих границах  $s = 0$ , т.е. коэффициенты  $a$  и  $b$  в (I.77) постоянны; при этом мы сразу получим значение  $\varepsilon = \pm h\omega_0/2$ , отвечающие границам области (I.79).

трение приводит к затуханию амплитуды колебаний по закону  $e^{-\lambda t}$ . Поэтому усиление колебаний при параметрическом резонансе происходит, как  $e^{(s-\lambda)t}$  (с положительным  $s$ , даваемым решением задачи без трения), а граница области неустойчивости определяется равенством  $s - \lambda = 0$ . Так, используя  $s$  из (I.78), получим для резонансной области вместо (I.79) неравенства

$$-\sqrt{\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2 - 4\lambda^2} < \varepsilon < \sqrt{\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2 - 4\lambda^2}. \quad (\text{I.81})$$

Обратим внимание на то, что при этом резонанс оказывается возможным не при сколь угодно малой амплитуде  $h$ , а лишь начиная с определенного «порога»  $h_k$ , равного в случае (I.80)

$$h_k = 4\lambda/\omega_0.$$

Можно показать, что для резонансов вблизи частот  $2\omega_0/n$  величина порога  $h_k$  пропорциональна  $\lambda^{1/n}$ , т.е. возрастает с увеличением  $n$ .

## I.8 Ангармонические колебания

Вся теория малых колебаний основана на разложении потенциальной и кинетической энергий системы по координатам и скоростям с оставлением лишь членов второго порядка; при этом уравнения движения линейны, в связи с чем в этом приближении говорят о *линейных* колебаниях. Хотя такое разложение вполне законно при условии достаточной малости амплитуд колебаний, однако учет следующих приближений (так называемых *ангармонических* или *нелинейности* колебаний) приводит к некоторым хотя и слабым, но качественно новым особенностям движения.

Произведем разложение функции Лагранжа до членов третьего порядка. В потенциальной энергии при этом появятся члены третьей степени по координатам  $x_i$ , в кинетической же энергии — члены, содержащие произведения скоростей и координат вида  $\dot{x}_i \dot{x}_k x_l$ ; это отличие от выражения (I.28) связано с оставлением членов первого порядка по  $x$  в разложении функций  $a_{ik}(q)$ . Таким образом, функция Лагранжа будет иметь вид

$$L = \frac{1}{2} \sum_i (m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k - k_{ik} x_i x_k) + \frac{1}{2} \sum n_{ikl} \dot{x}_i \dot{x}_k x_l - \frac{1}{3} \sum l_{ikl} x_i x_k x_l, \quad (\text{I.82})$$

где  $n_{ikl}, l_{ikl}$  — новые постоянные коэффициенты.

Если от произвольных координат  $x_i$  перейти к нормальным координатам (линейного приближения)  $Q_\alpha$ , то в силу линейности этого преобразования третья и четвертая суммы в (I.82) перейдут в аналогичные суммы, в которых вместо координат  $x_i$  и скоростей  $\dot{x}_i$  будут стоять  $Q_\alpha$  и  $\dot{Q}_\alpha$ . Обозначив коэффициенты в этих суммах через  $\lambda_{\alpha\beta\gamma}$  и  $\mu_{\alpha\beta\gamma}$ , получим функцию Лагранжа в виде

$$L = \frac{1}{2} \sum (\dot{Q}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 Q_\alpha^2) + \frac{1}{2} \sum \lambda_{\alpha\beta\gamma} \dot{Q}_\alpha \dot{Q}_\beta Q_\gamma - \frac{1}{3} \sum \mu_{\alpha\beta\gamma} Q_\alpha Q_\beta Q_\gamma \quad (\text{I.83})$$

Мы не станем выписывать полностью следующих из этой лагранжевой функции уравнений движения. Существенно, что они имеют вид

$$\ddot{Q}_\alpha + \omega_\alpha^2 Q_\alpha = f_\alpha(Q, \dot{Q}, \ddot{Q}), \quad (\text{I.84})$$

где  $f_\alpha$  — однородные функции второго порядка от координат  $Q$  и их производных по времени.



## I.8. Ангармонические колебания

Применяя метод последовательных приближений, ищем решение этих уравнений в виде

$$Q_\alpha = Q_\alpha^{(1)} + Q_\alpha^{(2)}, \quad (\text{I.85})$$

где  $Q_\alpha^{(2)} \ll Q_\alpha^{(1)}$ , а функция  $Q_\alpha^{(1)}$  удовлетворяет «невозмущенным» уравнениям

$$\ddot{Q}_\alpha^{(1)} + \omega_\alpha^2 Q_\alpha^{(1)} = 0,$$

т.е. представляют собой обычные гармонические колебания

$$Q_\alpha^{(1)} = a_\alpha \cos(\omega_\alpha t + \alpha_\alpha) \quad (\text{I.86})$$

Сохраняя в следующем приближении в правой части уравнений (I.83) лишь члены второго порядка малости, получим для величин  $Q_\alpha^{(2)}$  уравнения

$$\ddot{Q}_\alpha^{(2)} + \omega_\alpha^2 Q_\alpha^{(2)} = f_\alpha(Q^{(1)}, \dot{Q}^{(1)}, \ddot{Q}^{(1)}), \quad (\text{I.87})$$

где в правую часть должны быть подставлены выражения (I.85). В результате мы получим линейные неоднородные дифференциальные уравнения, правые части которых можно преобразовать к суммам простых периодических функций. Так, например,

$$Q_\alpha^{(1)} Q_\beta^{(1)} = a_\alpha a_\beta \cos(\omega_\alpha t + \alpha_\alpha) \cos(\omega_\beta t + \alpha_\beta) =$$

$$\frac{1}{2} a_\alpha a_\beta \{ \cos[(\omega_\alpha + \omega_\beta)t + \alpha_\alpha + \alpha_\beta] + \cos[(\omega_\alpha - \omega_\beta)t + \alpha_\alpha - \alpha_\beta] \}.$$

Таким образом, в правых частях уравнений (I.86) находятся члены, соответствующие колебаниям с частотами, равными суммам и разностям собственных частот системы. Решение уравнений следует искать в виде, содержащем такие же периодические множители, и мы приходим к выводу, что во втором приближении на нормальные колебания системы с частотами  $\omega_\alpha$  накладываются дополнительные колебания с частотами

$$\omega_\alpha \pm \omega_\beta \quad (\text{I.88})$$

(в том числе удвоенные частоты  $2\omega_\alpha$  и частота 0, соответствующая постоянному смещению). Эти частоты называются *комбинационными*. Амплитуды комбинационных колебаний пропорциональны произведениям  $a_\alpha a_\beta$  (или квадратам  $a_\alpha^2$ ) соответствующих нормальных колебаний.

В следующих приближениях при учете членов более высокого порядка в разложении функции Лагранжа возникают комбинационные колебания с частотами, являющимися суммами и разностями большего числа частот  $\omega_\alpha$ . Кроме того, однако, возникает еще и новое явление.

Дело в том, что уже в третьем приближении среди комбинационных частот появляются частоты, совпадающие с исходными  $\omega_\alpha$  ( $\omega_\alpha + \omega_\beta - \omega_\beta$ ). При применении описанного выше метода в правой части уравнений движения будут находиться, следовательно, резонансные члены, которые приведут к возникновению в решении членов с возрастающей со временем амплитудой. Между тем, физически очевидно, что в замкнутой системе в отсутствие внешнего источника энергии не может происходить самопроизвольное нарастание интенсивности колебаний.

В действительности в высших приближениях происходит изменение основных частот  $\omega_\alpha$  по сравнению с их «невозмущенными» значениями  $\omega_\alpha^{(0)}$ , фигурирующими в

квадратичном выражении потенциальной энергии. Появление же возрастающих членов в решении связано с разложением типа

$$\cos(\omega_\alpha^{(0)} + \Delta\omega_\alpha)t \approx \cos \omega_\alpha^{(0)}t - t\Delta\omega_\alpha \sin \omega_\alpha^{(0)}t,$$

явно незаконным при достаточно больших  $t$ .

Поэтому при переходе к следующим приближениям метод последовательных приближений должен быть видоизменен так, чтобы фигурирующие в решении периодические множители с самого начала содержали точные, а не приближенные значения частот. Изменения же частот сами определяются в результате решения уравнений как раз из условия отсутствия резонансных членов.

Продемонстрируем этот метод на ангармонических колебаниях с одной степенью свободы, написав функцию Лагранжа в виде

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{m\omega_0^2}{2}x^2 - \frac{m\alpha}{3}x^3 - \frac{m\beta}{4}x^4. \quad (\text{I.89})$$

Соответствующее уравнение движения

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\alpha x^2 - \beta x^3. \quad (\text{I.90})$$

Мы будем искать его решение в виде ряда последовательных приближений

$$x = x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)},$$

причем

$$x^{(1)} = a \cos \omega t \quad (\text{I.91})$$

с точным значением  $\omega$ , которое само будем затем искать в виде ряда  $\omega = \omega_0 + \omega^{(1)} + \omega^{(2)} + \dots$  (начальную фазу в  $x^{(1)}$  можно всегда обратить в нуль надлежащим выбором начала отсчета времени). При этом, однако, уравнение движения в виде (I.89) не вполне удобно, так как при подстановке в него (I.90) левая часть равенства не обратится строго в нуль. Поэтому перепишем его предварительно в эквивалентном виде

$$\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \ddot{x} + \omega_0^2 x = -\alpha x^2 - \beta x^3 - \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) \ddot{x}. \quad (\text{I.92})$$

Положив здесь  $x = x^{(1)} + x^{(2)}$ ,  $\omega = \omega_0 + \omega^{(1)}$  и опустив члены выше второго порядка малости, получим для  $x^{(2)}$  уравнение

$$\ddot{x}^{(2)} + \omega_0^2 x^{(2)} = -\alpha a^2 \cos^2 \omega t + 2\omega_0 \omega^{(1)} a \cos \omega t = -\frac{\alpha a^2}{2} - \frac{\alpha a^2}{2} \cos 2\omega t + 2\omega_0 \omega^{(1)} a \cos \omega t.$$

Условие отсутствия резонансного члена в правой части равенства дает просто  $\omega^{(1)} = 0$  в соответствии с изложенным в начале параграфа методом нахождения второго приближения. После этого, решая обычным способом неоднородное линейное уравнение, получим:

$$x^{(2)} = -\frac{\alpha a^2}{2\omega_0^2} + \frac{\alpha a^2}{6\omega_0^2} \cos 2\omega t. \quad (\text{I.93})$$

Далее, положив в (I.91)  $x = x^{(1)} + x^{(2)} + x^{(3)}$ ,  $\omega = \omega_0 + \omega^{(2)}$ , получим уравнение для  $x^{(3)}$

$$\ddot{x}^{(3)} + \omega_0^2 x^{(3)} = -2\alpha x^{(1)} x^{(2)} - \beta x^{(1)} x^{(3)} + 2\omega_0 \omega^{(2)} x^{(1)}$$

### I.8. Ангармонические колебания

или, подставив в правую часть выражения (I.90) и (I.92) после простого преобразования:

$$\ddot{x}^{(3)} + \omega_0^2 x^{(3)} = -a^3 \left[ \frac{\beta}{4} + \frac{\alpha^2}{6\omega_0^2} \right] \cos 3\omega t + a \left[ 2\omega_0 \omega^{(2)} + \frac{5a^2 \alpha^2}{6\omega_0^2} - \frac{3}{4} a^2 \beta \right] \cos \omega t.$$

Приравнявая нулю коэффициент при резонансном множителе  $\cos \omega t$ , найдем поправку к основной частоте, пропорциональную квадрату амплитуды колебания:

$$\omega^{(2)} = \left( \frac{3\beta}{8\omega_0} - \frac{5\alpha^2}{12\omega_0^3} \right) a^2. \quad (\text{I.94})$$

Комбинационное же колебание третьего порядка

$$x^{(3)} = \frac{a^3}{16\omega_0^2} \left( \frac{\alpha^2}{3\omega_0^2} + \frac{\beta}{2} \right) \cos 3\omega t. \quad (\text{I.95})$$

## Глава II

# Дифференциальные уравнения первого порядка

### II.1 Уравнения первого порядка, разрешенной относительно производной

Обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка первой степени можно, разрешив относительно производной, представить в виде

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

Простейший пример такого уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x)$$

рассматривается в курсе интегрального исчисления. В этом простейшем случае решение

$$y = \int f(x)dx + c$$

содержит произвольную постоянную, которая может быть определена, если известно значение  $y(x_0) = y_0$ , тогда

$$y = y_0 + \int_{x_0}^x f(x)dx.$$

В дальнейшем будет доказано, что при некоторых ограничениях, налагаемых на функцию  $f(x, y)$ , уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

также имеет единственное решение, удовлетворяющее условию  $y(x_0) = y_0$ , а его *общее решение*, т. е. множество решений, содержащее все без исключения решения, зависит от одной произвольной постоянной.

Дифференциальное уравнение  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  устанавливает зависимость между координатами точки и угловым коэффициентом касательной  $\frac{dy}{dx}$  к графику решения в той же точке. Зная  $x$  и  $y$ , можно вычислить  $\frac{dy}{dx}$ . Следовательно, дифференциальное уравнение рассматриваемого вида определяет поле направлений и задача интегрирования

## II.2. Уравнения с разделяющимися переменными

дифференциального уравнения заключается в том, чтобы найти кривые, называемые *интегральными кривыми*, направление касательных к которым в каждой точке совпадает с направлением поля.

Пример 1.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

В каждой точке, отличной от точки  $(0, 0)$ , угловой коэффициент касательной к искомой интегральной кривой равен отношению  $\frac{y}{x}$ , т. е. совпадает с угловым коэффициентом прямой, направленной из начала координат в ту же точку  $(x, y)$ . На рисунке стрелками изображено поле направлений, определяемое рассматриваемым уравнением. Очевидно, что интегральными кривыми в данном случае будут прямые  $y = cx$ , так как направления этих прямых всюду совпадают с направлением поля

Пример 2.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

Замечаем, что угловой коэффициент касательной к искомым интегральным кривым  $-\frac{x}{y}$  и угловой коэффициент касательной  $\frac{y}{x}$  к интегральным кривым примера 1 в каждой точке удовлетворяют условию ортогональности:  $-\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x} = -1$ . Следовательно, поле направлений, определяемое рассматриваемым дифференциальным уравнением, ортогонально полю направлений, изображенному на рис. 1.2. Очевидно, что интегральными кривыми уравнения  $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$  являются окружности с центром в начале координат  $x^2 + y^2 = c^2$  (рис. 1.3) (точнее, полуокружности  $y = \sqrt{c^2 - x^2}$  и  $y = -\sqrt{c^2 - x^2}$ ).

Во многих задачах, в частности почти во всех задачах геометрического характера, переменные  $x$  и  $y$  совершенно равноправны. Поэтому в таких задачах, если они сводятся к решению дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{II.1}$$

естественно наряду с уравнением (II.1) рассматривать также уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}. \tag{II.2}$$

Если оба эти уравнения имеют смысл, то они эквивалентны, так как если функция  $y = y(x)$  является решением уравнения (II.1), то обратная функция  $x = x(y)$  является решением уравнения (II.2), и следовательно, уравнения (II.1) и (II.2) имеют общие интегральные кривые.

Если же в некоторых точках одно из уравнений (II.1) или (II.2) теряет смысл, то в таких точках естественно его заменять другим из этих уравнений.

Например, уравнение  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$  теряет смысл при  $x = 0$ . Заменяя его уравнением  $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y}$ , правая часть которого уже не теряет смысла при  $x = 0$ , находим в дополнение к ранее найденным решениям  $y = cx$  еще одну интегральную кривую  $x = 0$  этого уравнения.

## II.2 Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальные уравнения вида

$$f_2(y)dy = f_1(x)dx \tag{II.3}$$

называются *уравнениями с разделенными переменными*. Функции  $f_1(x)$  и  $f_2(y)$  будем считать непрерывными.

Предположим, что  $y(x)$  является решением этого уравнения, тогда при подстановке  $y(x)$  в уравнение (II.3) получим тождество, интегрируя которое, будем иметь:

$$\int f_2(y)dy = \int f_1(x)dx + c, \quad (\text{II.4})$$

где  $c$  - произвольная постоянная.

Мы получили конечное уравнение (II.4), которому удовлетворяют все решения уравнения (II.3), причем каждое решение уравнения (II.4) является решением уравнения (II.3), так как если некоторая функция  $y(x)$  при подстановке обращает уравнение (II.4) в тождество, то, дифференцируя это тождество, обнаружим, что  $y(x)$  удовлетворяет и уравнению (II.3).

Конечное уравнение  $\Phi(x, y) = 0$ , которое определяет решение  $y(x)$  дифференциального уравнения как неявную функцию  $x$ , называется *интегралом* рассматриваемого дифференциального уравнения.

Если это конечное уравнение определяет все без исключения решения данного дифференциального уравнения, то оно называется *общим интегралом* рассматриваемого дифференциального уравнения. Следовательно, уравнение (II.4) является общим интегралом уравнения (II.3). Для того чтобы уравнение (II.4) определяло  $y$  как неявную функцию  $x$ , достаточно потребовать, чтобы  $f_2(y) \neq 0$ .

Вполне возможно, что в некоторых задачах неопределенные интегралы  $\int f_1(x)dx$  и  $\int f_2(y)dy$  нельзя будет выразить в элементарных функциях, тем не менее мы и в этом случае будем считать задачу интегрирования дифференциального уравнения (II.3) выполненной в том смысле, что мы свели ее к более простой и уже изученной в курсе интегрального исчисления задаче вычисления неопределенных интегралов — квадратур<sup>1</sup>.

Если надо выделить частное решение, удовлетворяющее условию  $y(x_0) = y_0$ , то оно, очевидно, определится из уравнения

$$\int_{y_0}^y f_2(y)dy = \int_{x_0}^x f_1(x)dx,$$

которое получим из

$$\int_{y_0}^y f_2(y)dy = \int_{x_0}^x f_1(x)dx + c,$$

воспользовавшись начальным условием  $y(x_0) = y_0$ .

Пример 1.

$$xdx + ydy = 0$$

Переменные разделены, так как коэффициент при  $dx$  является функцией только  $x$ , а коэффициент при  $dy$  является функцией только  $y$ . Интегрируя, получим

$$\int xdx + \int ydy = c$$

<sup>1</sup>Так как термин «интеграл» в теории дифференциальных уравнений часто применяется в смысле интеграла дифференциального уравнения, то во избежание недоразумений для интегралов функций  $\int f(x)dx$  обычно применяется термин «квadrатур».

## II.2. Уравнения с разделяющимися переменными

или

$$x^2 + y^2 = c_1^2$$

-семейство окружностей с центром в начале координат.

Пример 2.

$$e^{x^2} dx = \frac{dy}{\ln y}.$$

Интегрируя, получаем

$$\int e^{x^2} dx = \int \frac{dy}{\ln y} + c.$$

Интегралы  $\int e^{x^2} dx$  и  $\int \frac{dy}{\ln y}$  не берутся в элементарных функциях, тем не менее исходное уравнение считается проинтегрированным, так как задача доведена до квадратур.

Уравнения вида

$$\varphi_1(x)\psi_1(y)dx = \varphi_2(x)\psi_2(y)dy,$$

в которых коэффициенты при дифференциалах распадаются на множители, зависящие только от  $x$  и только от  $y$ , называются дифференциальными *уравнениями с разделяющимися переменными*, так как путем деления на  $\psi_1(y)\varphi_2(x)$  они приводятся к уравнению с разделенными переменными:

$$\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} dx = \frac{\psi_2(y)}{\psi_1(y)} dy.$$

Заметим, что деление на  $\psi_1(y)\varphi_2(x)$  может привести к потере частных решений, обращающих в нуль произведение  $\psi_1(y) * \varphi_2(x)$ , а если функции  $\psi_1(y)$  и  $\varphi_2(x)$  могут быть разрывными, то возможно появление лишних решений, обращающих в нуль множитель

$$\frac{1}{\psi_1(y)\varphi_2(x)}.$$

Пример 3.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x},$$

$$\ln |y| = \ln |x| + \ln c, c > 0.$$

Потенцируя, получим  $|y| = c|x|$ . Если речь идет только о гладких решениях, то уравнение  $|y| = c|x|$ , где  $c > 0$ , эквивалентно уравнению  $y = \pm cx$  или  $y = c_1x$ , где  $c_1$  может принимать как положительные, так и отрицательные значения, но  $c_1 \neq 0$ . Если же принять во внимание, что при делении на  $y$  мы потеряли решение  $y = 0$ , то можно считать, что в решении  $y = c_1x$  постоянная  $c_1$  принимает и значение  $c_1 = 0$ , при котором мы получаем потерянное ранее решение  $y = 0$ .

Пример 4.

$$x(1 + y^2)dx - y(1 + x^2)dy = 0$$

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\frac{ydy}{1 + y^2} = \frac{xdx}{1 + x^2}; \int \frac{ydy}{1 + y^2} = \int \frac{xdx}{1 + x^2} + c;$$

$$\ln(1 + y^2) = \ln(1 + x^2) + \ln c_1; 1 + y^2 = c_1(1 + x^2).$$

Пример 5.

$$\frac{dx}{dt} = 4t\sqrt{x}.$$

Найти решение  $x(t)$ , удовлетворяющее условию  $x(1) = 1$ .

Разделяем переменные и интегрируем:

$$\int_1^x \frac{dx}{2\sqrt{x}} = \int_1^t 2t dt, \sqrt{x} = t^2, x = t^4.$$

### II.3 Уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными

Многие дифференциальные уравнения путем замены переменных могут быть приведены к уравнениям с разделяющимися переменными. К числу таких уравнений относятся, например, уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by),$$

где  $a$  и  $b$  — постоянные величины, которые заменой переменных  $z = ax + by$  преобразуются в уравнения с разделяющимися переменными. Действительно, переходя к новым переменным  $x$  и  $z$ , будем иметь

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx} = a + bf(z),$$

или

$$\frac{dz}{a + bf(z)} = dx,$$

и переменные разделились. Интегрируя, получим

$$x = \int \frac{dz}{a + bf(z)} + c.$$

Пример 1.

$$\frac{dy}{dx} = 2x + y.$$

Полагая  $z = 2x + y$ , будем иметь

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 2, \frac{dz}{dx} - 2 = z.$$

Разделяя переменные и интегрируя, получим

$$\frac{dz}{z + 2} = dx, \ln |z + 2| = x + \ln c, z = -2 + ce^x,$$

$$2x + y = -2 + ce^x, y = ce^x - 2x - 2.$$

Пример 2.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x - y} + 1.$$



### II.3. Уравнения, приводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными

Полагая  $x - y = z$ , получим

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{dz}{dx}, 1 - \frac{dz}{dx} = \frac{1}{z} + 1;$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{1}{z}, z dz = -dx, z^2 = -2x + c, (x - y)^2 = -2x + c.$$

К уравнениям с разделяющимися переменными приводятся и так называемые *однородные дифференциальные уравнения первого порядка*, имеющие вид

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Действительно, после подстановки  $z = \frac{y}{x}$  или  $y = xz$  получим

$$\frac{dy}{dx} = x \frac{dz}{dx} + z, x \frac{dz}{dx} + z = f(z), \frac{dz}{f(z) - z} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dz}{f(z) - z} = \ln|x| + \ln c.$$

$$x = ce^{\int \frac{dz}{f(z) - z}}.$$

Заметим, что правая часть однородного уравнения является однородной функцией переменных  $x$  и  $y$  нулевой степени однородности, поэтому уравнение вида

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

будет однородным, если  $M(x, y)$  и  $N(x, y)$  являются однородными функциями  $x$  и  $y$  одинаковой степени однородности, так как в этом случае

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Пример 3.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \operatorname{tg} \frac{y}{x}.$$

Полагая  $y = xz$ ,  $\frac{dy}{dx} = x \frac{dz}{dx} + z$  и подставляя в исходное уравнение получим

$$x \frac{dz}{dx} + z = z + \operatorname{tg} z, \frac{\cos z dz}{\sin z} = \frac{dx}{x},$$

$$\ln |\sin z| = \ln |x| + \ln c, \sin z = cx, \sin \frac{y}{x} = cx.$$

Пример 4.

$$(x + y)dx - (y - x)dy = 0$$

Полагая  $y = xz$ ,  $dy = xdz + zdx$  получим

$$(x + xz)dx - (xz - x)(xdz + zdx) = 0,$$

$$(1 + 2z - z^2)dx + x(1 - z)dz = 0,$$

$$\frac{(1 - z)dz}{1 + 2z - z^2} + \frac{dx}{x} = 0, \frac{1}{2} \ln |1 + 2z - z^2| + \ln |x| = \frac{1}{2} \ln c, x^2(1 + 2z - z^2) = c, x^2 + 2xy - y^2 = c.$$

Уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \quad (\text{II.5})$$

преобразуются в однородные уравнения путем переноса начала координат в точку пересечения  $(x_1, y_1)$  прямых

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0$$

и

$$a_2x + b_2y + c_2 = 0.$$

Действительно, свободный член в уравнениях этих прямых в новых координатах  $X = x - x_1, Y = y - y_1$  будет равен нулю, коэффициенты при текущих координатах остаются неизменными, а  $\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}$ , и уравнение (II.5) преобразуется к виду

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1X + b_1Y}{a_2X + b_2Y}\right)$$

или

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1 + b_1\frac{Y}{X}}{a_2 + b_2\frac{Y}{X}}\right) = \varphi\left(\frac{Y}{X}\right)$$

и является уже однородным уравнением.

Этот метод нельзя применить лишь в случае параллельности прямых  $a_1x + b_1y + c_1 = 0$  и  $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ . Но в этом случае коэффициенты при текущих координатах пропорциональны  $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = k$ , и уравнение (II.) может быть записано в виде

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{k(a_1x + b_1y) + c_2}\right) = F(a_1x + b_1y),$$

и следовательно, как указано на стр. 28, замена переменных  $z = a_1x + b_1y$  преобразует рассматриваемое уравнение в уравнение с разделяющимися переменными.

Пример 5.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y + 1}{x + y - 3}.$$

Решая систему уравнений  $x - y + 1 = 0, x + y - 3 = 0$ , получим  $x_1 = 1, y_1 = 2$ . Полагая  $x = X + 1, y = Y + 2$ , будем иметь

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X - Y}{X + Y}.$$

Замена переменных  $z = \frac{Y}{X}$  или  $Y = zX$  приводит к уравнению с разделяющимися переменными

$$z + X \frac{dz}{dX} = \frac{1 - z}{1 + z}, \frac{(1 + z)dz}{1 - 2z - z^2} = \frac{dX}{X},$$

$$-\frac{1}{2} \ln |1 - 2z - z^2| = \ln |X| - \frac{1}{2} \ln c,$$

$$(1 - 2z - z^2)X^2 = c, X^2 - 2XY - Y^2 = c,$$

$$x^2 - 2xy - y^2 + 2x + 6y = c_1.$$

## II.4 Линейные уравнения первого порядка

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение линейное относительно неизвестной функции и ее производной. Линейное уравнение имеет вид

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x), \quad (\text{II.6})$$

где  $p(x)$  и  $f(x)$  в дальнейшем будем считать непрерывными функциями  $x$  в той области, в которой требуется проинтегрировать уравнение (II.6).

Если  $f(x) \equiv 0$ , то уравнение (II.6) называется линейным однородным. В линейном однородном уравнении переменные разделяются:  $\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$ , откуда  $\frac{dy}{y} = -p(x)dx$ , и, интегрируя, получаем

$$\begin{aligned} \ln|y| &= - \int p(x)dx + \ln c_1, \quad c_1 > 0, \\ y &= ce^{-\int p(x)dx}, \quad c \neq 0. \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

При делении на  $y$  мы потеряли решение  $y \equiv 0$ , однако оно может быть включено в найденное семейство решений (II.7), если считать что  $c$  может принимать и значение 0.

Для интегрирования неоднородного линейного уравнения

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x) \quad (\text{II.8})$$

может быть применен так называемый *метод вариации постоянной*. При применении этого метода сначала интегрируется соответствующее (т. е. имеющее ту же левую часть) однородное уравнение

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$$

общее решение которого, как указано выше, имеет вид

$$y = ce^{-\int p(x)dx}.$$

При постоянном  $c$  функция  $ce^{-\int p(x)dx}$  является решением однородного уравнения. Попробуем теперь удовлетворить неоднородному уравнению, считая  $c$  функцией  $x$ , т. е. по существу совершая замену переменных

$$y = c(x)e^{-\int p(x)dx},$$

где  $c(x)$  — новая неизвестная функция  $x$ .

Вычисляя производную

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dc}{dx}e^{-\int p(x)dx} - c(x)p(x)e^{-\int p(x)dx}$$

и подставляя в исходное неоднородное уравнение (II.8), получим

$$\frac{dc}{dx}e^{-\int p(x)dx} - c(x)p(x)e^{-\int p(x)dx} + p(x)c(x)e^{-\int p(x)dx} = f(x)$$

или

$$\frac{dc}{dx} = f(x)e^{\int p(x)dx},$$

откуда, интегрируя, находим

$$c(x) = \int f(x)e^{\int p(x)dx} dx + c_1,$$

а следовательно,

$$y = c(x)e^{-\int p(x)dx} = c_1e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \int f(x)e^{\int p(x)dx} dx. \quad (\text{II.9})$$

Итак, общее решение неоднородного линейного уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения

$$c_1e^{-\int p(x)dx}$$

и частного решения неоднородного уравнения

$$e^{-\int p(x)dx} \int f(x)e^{\int p(x)dx} dx,$$

получающегося из (II.9) при  $c_1 = 0$ .

Заметим, что в конкретных примерах нецелесообразно пользоваться громоздкой и трудно запоминаемой формулой (II.9), значительно легче каждый раз повторять все приведенные выше вычисления.

Пример 1.

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x^2.$$

Интегрируем соответствующее однородное уравнение

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0, \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}, \ln |y| = \ln |x| + \ln c, y = cx.$$

Считаем  $c$  функцией  $x$ , тогда  $y = c(x)x$ ,  $\frac{dy}{dx} = \frac{dc}{dx}x + c(x)$  и, подставляя в исходное уравнение, после упрощения получаем

$$\frac{dc}{dx}x = x^2$$

или  $dc = xdx$ ,  $c(x) = \frac{x^2}{2} + c_1$ .

Следовательно, общее решение

$$y = c_1(x) + \frac{x^3}{2}.$$

Пример 2.

$$\frac{dy}{dx} - y \operatorname{ctg} x = 2x \sin x$$

Интегрируем соответствующее однородное уравнение

$$\frac{dy}{dx} - y \operatorname{ctg} x = 0, \frac{dy}{y} = \frac{\cos x}{\sin x} dx,$$

$$\ln |y| = \ln |\sin x| + \ln c, y = c \sin x.$$

Варьируем постоянную

$$y = c(x) \sin x, y' = c'(x) \sin x + c(x) \cos x.$$

#### II.4. Линейные уравнения первого порядка

Подставляя в исходное уравнение, получим

$$c'(x) \sin x + c(x) \cos x - c(x) \cos x = 2x \sin x,$$

$$c'(x) = 2x, c(x) = x^2 + c_1,$$

$$y = x^2 \sin x + c_1 \sin x.$$

Многие дифференциальные уравнения путем замены переменных могут быть сведены к линейным. Например, уравнение Бернулли, имеющее вид

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = f(x)y^n, n \neq 1,$$

или

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + p(x)y^{1-n} = f(x), \quad (\text{II.10})$$

заменой переменных  $y^{1-n} = z$  сводится к линейному уравнению. Действительно, дифференцируя  $y^{1-n} = z$ , находим  $(1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$ , подставляя в (II.10), получим линейное уравнение

$$\frac{1}{1-n} \frac{dz}{dx} + p(x)z = f(x).$$

Пример 4.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x} + \frac{x^2}{2y},$$

$$2y \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x} + x^2, y^2 = z, 2y \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx},$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x} + x^2$$

и далее, как в примере 1 стр. 35.

Уравнение

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y + q(x)y^2 = f(x)$$

называемое уравнением Риккати, в общем виде не интегрируется в квадратурах, но может быть заменой переменных преобразовано в уравнение Бернулли, если известно одно частное решение  $y_1(x)$  этого уравнения. Действительно, полагая  $y = y_1 + z$ , получим

$$y_1' + z' + p(x)(y_1 + z) + q(x)(y_1 + z)^2 = f(x)$$

или, так как  $y_1' + p(x)y_1 + q(x)y_1^2 \equiv f(x)$ , будем иметь уравнение Бернулли

$$z' + [p(x) + 2q(x)y_1]z + q(x)z^2 = 0$$

Пример 5.

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - \frac{2}{x^2}.$$

В этом примере нетрудно подобрать частное решение  $y_1 = \frac{1}{x}$ . Пологая  $y = z + \frac{1}{x}$ , получим  $y' = z' - \frac{1}{x^2}$ ,  $z' - \frac{1}{x^2} = (z + \frac{1}{x})^2 - \frac{2}{x^2}$ , или  $z' = z^2 + 2\frac{z}{x}$  - уравнение Бернулли.

$$\frac{z'}{z^2} = \frac{2}{xz} + 1, u = \frac{1}{z}, \frac{du}{dx} = -\frac{z'}{z^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= -\frac{2u}{x} - 1, \quad \frac{du}{u} = -\frac{2dx}{x}, \\ \ln |u| &= -2 \ln |x| + \ln c, \quad u = \frac{c}{x^2}, \quad u = \frac{c(x)}{x}, \\ \frac{c'(x)}{x^2} &= -1, \quad c(x) = -\frac{x^3}{3} + c_1, \\ u &= \frac{c_1}{x^2} - \frac{x}{3}, \quad \frac{1}{z} = \frac{c_1}{x^2} - \frac{x}{3}, \quad \frac{1}{y - \frac{1}{x}} = \frac{c_1}{x^2} - \frac{x}{3}, \\ y &= \frac{1}{x} + \frac{3x^2}{c_2 - x^3}. \end{aligned}$$

## II.5 Уравнения в полных дифференциалах

Может случиться, что левая часть дифференциального уравнения

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (\text{II.11})$$

является полным дифференциалом некоторой функции  $u(x, y)$ :

$$du(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

и, следовательно, уравнение (II.11) принимает вид

$$du(x, y) = 0.$$

Если функция  $y(x)$  является решением уравнения (II.11), то

$$du(x, y(x)) \equiv 0$$

и, следовательно,

$$u(x, y(x)) = c, \quad (\text{II.12})$$

где  $c$  — постоянная, и наоборот, если некоторая функция  $y(x)$  обращает в тождество конечное уравнение (II.12), то, дифференцируя полученное тождество, получим  $du(x, y(x)) = 0$ , и следовательно,  $u(x, y) = c$ , где  $c$  произвольная постоянная, является общим интегралом исходного уравнения.

Если даны начальные значения  $y(x_0) = y_0$ , то постоянная  $c$  определяется из (II.12)  $c = u(x_0, y_0)$  и

$$u(x, y) = u(x_0, y_0) \quad (\text{II.13})$$

является искомым частным интегралом. Если  $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) \neq 0$  в точке  $(x_0, y_0)$ , то уравнение (II.13) определяет  $y$  как неявную функцию  $x$ .

Для того чтобы левая часть уравнения (II.11)

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

являлась полным дифференциалом некоторой функции  $u(x, y)$ , как известно, необходимо и достаточно, чтобы

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial N(x, y)}{\partial x}. \quad (\text{II.14})$$

## II.5. Уравнения в полных дифференциалах

Если это условие, впервые указанное Эйлером, выполнено, то уравнение (II.11) легко интегрируется. Действительно,

$$du = Mdx + Ndy.$$

С другой стороны,

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y); \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y),$$

откуда

$$u(x, y) = \int M(x, y)dx + c(y).$$

При вычислении интеграла  $\int M(x, y)dx$  величина  $y$  рассматривается как постоянная, поэтому  $c(y)$  является произвольной функцией  $y$ . Для определения функции  $c(y)$  дифференцируем найденную функцию  $u(x, y)$  по  $y$  и, так как  $\frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y)$ , получим

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \int M(x, y)dx \right) + c'(y) = N(x, y).$$

Из этого уравнения определяем  $c'(y)$  и, интегрируя, находим  $c(y)$ .

Как известно из курса математического анализа, еще проще можно определить функцию  $u(x, y)$  по ее полному дифференциалу  $du = M(x, y)dx + N(x, y)dy$ , взяв криволинейный интеграл от  $M(x, y)dx + N(x, y)dy$  между некоторой фиксированной точкой  $(x_0, y_0)$  и точкой с переменными координатами  $(x, y)$  по любому пути:

$$u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} M(x, y)dx + N(x, y)dy.$$

Чаще всего в качестве пути интегрирования удобно брать ломаную, составленную из двух звеньев, параллельных осям координат; в этом случае

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Mdx + Ndy = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y_0)} Mdx + \int_{(x, y_0)}^{(x, y)} Ndy$$

или

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} Mdx + Ndy = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_0, y)} Ndy + \int_{(x_0, y)}^{(x, y)} Mdx.$$

В некоторых случаях, когда левая часть уравнения

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

не является полным дифференциалом, легко удастся подобрать функцию  $\mu(x, y)$ , после умножения на которую левая часть уравнения (II.11) превращается в полный дифференциал

$$du = \mu Mdx + \mu Ndy.$$

Такая функция  $\mu$  называется *интегрирующим множителем*. Заметим, что умножение на интегрирующий множитель  $\mu(x, y)$  может привести к появлению лишних частных решений, обращающих этот множитель в нуль.

## II.6 Теоремы существования и единственности решения уравнения $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$

Класс интегрирующихся в квадратурах дифференциальных уравнений весьма узок, поэтому уже со времени Эйлера приближенные методы в теории дифференциальных уравнений приобрели большое значение.

В настоящее время в связи с быстрым развитием вычислительной техники приближенные методы приобретают еще несравненно большее значение.

Теперь часто целесообразно применять приближенные методы даже в тех случаях, когда уравнение интегрируется в квадратурах. Более того, если даже решение может быть несложно выражено в элементарных функциях, то нередко использование таблиц этих функций оказывается более трудоемким, чем приближенное интегрирование уравнения на быстродействующей машине. Однако, для того чтобы применять тот или иной метод приближенного интегрирования дифференциального уравнения, надо прежде всего быть уверенным в существовании искомого решения, а также и в единственности решения, так как при отсутствии единственности остается неясным, какое именно решение требуется приближенно определить.

Чаще всего доказательство теорем существования решения одновременно дает и метод точного или приближенного нахождения решения, что еще более увеличивает значение теорем существования. Например, доказываемая ниже теорема 1.1 дает обоснование *метода Эйлера* приближенного интегрирования дифференциальных уравнений, который заключается в том, что искомая интегральная кривая дифференциального уравнения  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  проходящая через точку  $(x_0, y_0)$  заменяется ломаной, состоящей из прямолинейных отрезков, каждое звено которой касается интегральной кривой в одной из своих граничных точек. При применении этого метода для приближенного вычисления значения искомого решения  $y(x)$  в точке  $x = b$ , отрезок  $x_0 \leq x \leq b$  (если  $b > x_0$ ) делится на  $n$  равных частей точками  $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ , где  $x_n = b$ . Длина каждой части  $x_{i+1} - x_i = h$  называется *шагом вычисления*. Приближенные значения искомого решения в точках  $x_i$  обозначаем  $y_i$ .

Для вычисления  $y_1$  заменяем на отрезке  $x_0 \leq x \leq x_1$  искомую интегральную кривую отрезком ее касательной в точке  $(x_0, y_0)$ . Следовательно,  $y_1 = y_0 + hy'_0$ , где  $y'_0 = f(x_0, y_0)$ .

Аналогично вычисляем:

$$y_2 = y_1 + hy'_1, \quad \text{где } y'_1 = f(x_1, y_1)$$

$$y_3 = y_2 + hy'_2, \quad \text{где } y'_2 = f(x_2, y_2)$$

.....

$$y_n = y_{n-1} + hy'_{n-1}, \quad \text{где } y'_{n-1} = f(x_{n-1}, y_{n-1}).$$

Если  $b < x_0$ , то схема вычислений остается прежней, но шаг  $h$  отрицателен.

Естественно ожидать, что при  $h \rightarrow 0$  *ломанные Эйлера* приближаются к графику искомой интегральной кривой, и следовательно, с уменьшением шага  $h$  метод Эйлера дает все более и более точное значение искомого решения в точке  $b$ . Доказательство этого утверждения одновременно приведет нас к следующей фундаментальной теореме о существовании и единственности решения уравнения  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$  с начальным условием  $y(x_0) = y_0$  при весьма общих *достаточных* условиях, наложенных на функцию  $f(x, y)$ .

**Теорема 1.1 (о существовании и единственности решения).**

Если в уравнении

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{II.15}$$



II.6. Теоремы существования и единственности решения уравнения  $\frac{DY}{DX} = F(X, Y)$

функция  $f(x, y)$  непрерывна в прямоугольнике  $D$ :

$$x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, y_0 - b \leq y \leq y_0 + b,$$

и удовлетворяет в  $D$  условию Липшица:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N|y_1 - y_2|,$$

где  $N$  — постоянная, то существует единственное решение  $y = \bar{y}(x)$ ,  $x_0 - H \leq x \leq x_0 + H$ , уравнения (II.15), удовлетворяющее условию  $y(x_0) = y_0$ , где

$$H < \min\left(a, \frac{b}{M}, \frac{1}{N}\right),$$

$$M = \max f(x, y).$$

Пример 1. Найти несколько последовательных приближений  $y_1, y_2, y_3$  решению уравнения

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2; y(0) = 0, -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1.$$

**Теорема 1.2 (О непрерывной зависимости решения от параметра и от начальных значений).**

Если правая часть дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \mu) \tag{II.16}$$

непрерывна по  $\mu$  при  $\mu_0 \leq \mu \leq \mu_1$  и удовлетворяет условиям теоремы существования и единственности, причем постоянная Липшица  $N$  не зависит от  $\mu$ , то решение  $y(x, \mu)$  рассматриваемого уравнения удовлетворяющее условию  $y(x_0) = y_0$ , непрерывно зависит от  $\mu$ . Аналогичные теоремы теми же методами могут быть доказаны для систем уравнений.

Заметим, что непрерывная зависимость решения

$$y(x, x_0, y_0), \quad x_0 \leq x \leq b$$

или  $(b \leq x \leq x_0,)$  от начальных значений  $x_0$  и  $y_0$  означает, что для любого  $\epsilon > 0$  можно подобрать  $\delta(\epsilon, b) > 0$  такое, что из неравенств

$$|x_0 - x_0| < \delta(\epsilon, b)$$

и

$$|y_0 - y_0| < \delta(\epsilon, b)$$

следует неравенство

$$|y(x, x_0, y_0) - y(x, x_0, y_0)| < \epsilon \tag{II.17}$$

при  $x_0 \leq x \leq b$ .

С возрастанием  $b$  число  $\delta(\epsilon, b)$ , вообще говоря, уменьшается и при  $b \rightarrow \infty$  может стремиться к нулю. Поэтому далеко не всегда удастся подобрать такое число  $\delta(\epsilon) > 0$ , при котором неравенство (II.17) удовлетворялось бы для всех  $x > x_0$ , т.е. не всегда решения, близкие по начальным значениям, остаются близкими при сколь угодно больших значениях аргумента.

Решение, которое мало изменяется при произвольном, но достаточно малом изменении начальных значений для сколь угодно больших значений аргумента, называется устойчивым.

**Теорема 1.3 (Об аналитической зависимости решения от параметра, теорема Пуанкаре).**

Решение  $x(t, \mu)$  дифференциального уравнения  $\dot{x} = f(t, x, \mu)$ , удовлетворяющее условию  $x(t_0) = x_0$ , аналитически зависит от параметра  $\mu$  в окрестности значения  $\mu = \mu_0$ , если функция  $f$  в заданной области изменения  $t$  и  $x$  и в некоторой окрестности точки  $\mu_0$  непрерывна по  $t$  и аналитически зависит от  $\mu$  и  $x$ .

Аналогичное утверждение справедливо и для системы уравнений

$$\dot{x}_i(t) = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n, \mu) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

причем в этом случае предполагается, что функция  $f_i$  непрерывна по первому аргументу и аналитически зависит от всех остальных аргументов.

Подробнее доказательство этой теоремы, как и других теорем, требующих применения теории аналитических функций, мы не приводим.

**Теорема 1.4 (О дифференцируемости решений).**

Если в окрестности точки  $(x_0, y_0)$  функция  $f(x, y)$  имеет непрерывные производные до  $k$ -го порядка включительно, то решение  $y(x)$  уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{II.18}$$

удовлетворяющее начальному условию  $y(x_0) = y_0$ , в некоторой окрестности точки  $(x_0, y_0)$  имеет непрерывные производные до  $(k + 1)$ -го порядка включительно.

## II.7 Приближенные методы интегрирования уравнений первого порядка

Нам знакома два приближенных метода интегрирования дифференциальных уравнений: методом Эйлера и методом последовательных приближений. Однако оба эти метода имеют существенные недостатки, в силу которых ими сравнительно редко пользуются в практике приближенных вычислений.

Достоинства приближенных методов оцениваются по точности даваемых ими результатов и по простоте вычислений. Недостатками метода последовательных приближений являются сравнительно медленная сходимость приближений к решению и сложность вычислений. Недостатком метода Эйлера является малая точность, для повышения которой приходится брать весьма малый шаг  $h$ , что приводит к длительным вычислениям.

Впрочем, небольшое усовершенствование метода Эйлера, так называемое *уравнивание* (или итерация), приводит уже к довольно удобной вычислительной схеме. При применении метода Эйлера с уравниванием делят отрезок  $x_0 \leq x \leq b$ , на котором надо вычислить решение уравнения  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ , определяемое условием  $y(x_0) = y_0$  на равные части длиной  $h = \frac{b-x_0}{n}$ . Обозначая  $x_0 + kh = x_k$ ,  $y(x_0 + kh) = y_k$ ,  $y'(x_0 + kh) = y'_k$ , вычисляют  $y_{k+1}$ , если уже найдено  $y_k$ , в начале по формуле Эйлера:

$$y_{k+1} = y_k + hy'_k \quad \text{или} \quad \Delta y_k = y_{k+1} - y_k = hy'_k, \tag{II.19}$$

т. е. на отрезке  $x_0 + kh \leq x \leq x_0 + (k + 1)h$  заменяют интегральную кривую, проходящую через точку  $(x_k, y_k)$ , отрезком ее касательной в той же точке. Затем уточняют

## II.7. Приближенные методы интегрирования уравнений первого порядка

вычисленное значение  $y_{k+1}$ , для чего определяют производную  $y'_{k+1} = f(x_{k+1}, y_{k+1})$  и снова применяют формулу Эйлера (II.16), но вместо  $y'_k$  берут среднее арифметическое вычисленных значений производных в граничных точках  $\frac{y'_k + y'_{k+1}}{2}$ , т. е. считают

$$\bar{y}_{k+1} = y_k + h \frac{y'_k + y'_{k+1}}{2}. \quad (\text{II.20})$$

Вновь вычисленное значение  $\bar{y}_{k+1}$  дает возможность вычислить новое значение производной  $\bar{y}'_{k+1} = f(x_{k+1}, \bar{y}_{k+1})$ , после чего снова вычисляют среднее арифметическое значений производных  $\frac{y'_k + \bar{y}'_{k+1}}{2}$ , снова применяют формулу (II.17)

$$\bar{y}_{k+1} = y_k + h \left( \frac{y'_k + \bar{y}'_{k+1}}{2} \right)$$

и продолжают этот процесс до тех пор, пока в пределах заданной точности не совпадут результаты двух последовательных вычислений значений  $y_{k+1}$ . После этого тем же методом вычисляется  $y_{k+2}$  и т. д.

Метод Эйлера с уравниванием дает на каждом шаге погрешность порядка  $h^3$  и нередко применяется в вычислительной практике. Однако значительно чаще применяются более точные методы (методы Штермера, Рунге, Мильна и др.), основанные на замене искомого решения несколькими членами его тейлоровского разложения

$$y_{k+1} \approx y_k + hy'_k + \frac{h^2}{2!} y''_k + \dots + \frac{h^n}{n!} y_k^{(n)}, \quad (\text{II.21})$$

т. е. замене искомой интегральной кривой параболой  $n$ -го порядка, имеющей касание  $n$ -го порядка с интегральной кривой в точке  $x = x_k, y = y_k$ .

Непосредственное применение формулы Тейлора (II.18) на каждом шаге приводит к сложным и неоднотипным вычислениям, поэтому эта формула обычно применяется лишь для вычисления нескольких близких к  $x = x_0$  значений, необходимых для применения более удобных вычислительных схем, среди которых в первую очередь следует назвать *метод Штермера*, в котором вычисление проводится по одной из следующих формул в зависимости от порядка аппроксимирующей параболы:

$$y_{k+1} = y_k + q_k + \frac{1}{2} \Delta q_{k-1}, \quad (\text{II.22})$$

$$y_{k+1} = y_k + q_k + \frac{1}{2} \Delta q_{k-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 q_{k-2}, \quad (\text{II.23})$$

$$y_{k+1} = y_k + q_k + \frac{1}{2} \Delta q_{k-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 q_{k-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 q_{k-3}, \quad (\text{II.24})$$

$$y_{k+1} = y_k + q_k + \frac{1}{2} \Delta q_{k-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 q_{k-2} + \frac{3}{8} \Delta^3 q_{k-3} + \frac{251}{720} \Delta^4 q_{k-4}, \quad (\text{II.25})$$

.....

где

$$q_k = y_k h, \Delta q_{k-1} = q_k - q_{k-1}, \Delta^2 q_{k-2} = \Delta q_{k-1} - \Delta q_{k-2},$$

$$\Delta^3 q_{k-3} = \Delta^2 q_{k-2} - \Delta^2 q_{k-3}, \Delta^4 q_{k-4} = \Delta^3 q_{k-3} - \Delta^3 q_{k-4},$$

.....

Формулы Штермера могут быть получены путём интегрирования в пределах от  $x_k$  до  $x_{k+1}$  тождества  $y' \equiv f(x, y(x))$ , в котором  $y(x)$  является искомым решением:

$$y_{k+1} \equiv y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y(x)) dx,$$

и применения известной из курса анализа квадратурной формулы:

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(x) dx \approx h[\varphi_k + \frac{1}{2}\Delta\varphi_{k-1} + \frac{5}{12}\Delta^2\varphi_{k-2} + \frac{3}{8}\Delta^3\varphi_{k-3} + \frac{251}{720}\Delta^4\varphi_{k-4} + \dots]. \quad (\text{II.26})$$

Напомним, что эта квадратурная формула получается путем замены подынтегральной функции  $\varphi(x)$  аппроксимирующим многочленом по интерполяционной формуле Ньютона и вычисления интегралов от отдельных слагаемых.

Оценка остаточного члена квадратурной формулы (II.23) показывает, что погрешность в формуле (II.19) при одном шаге имеет порядок  $h^3$ , в формуле (II.20)  $h^4$ , в формуле (II.21)  $h^5$ , в формуле (II.22)  $h^6$ . Если же принять во внимание, что при нескольких шагах погрешности могут суммироваться, то для оценки погрешности при  $n$  шагах надо оценки, полученные для одного шага, умножить на  $n = \frac{b-x_0}{h}$ , что может привести к изменению указанного выше порядка погрешности.

**Замечание.**

Можно показать непосредственным разложением по формуле Тейлора в окрестности точки  $x = x_k$ , что правая часть формулы Штермера (II.19) с точностью до членов, содержащих  $h$  в степенях выше второй, совпадает с первыми тремя членами разложения  $y_{k+1}$  по формуле Тейлора (II.18):

$$y_k + hy'_k + \frac{h^2}{2!}y''_k; \quad (\text{II.27})$$

правая часть следующей формулы Штермера (II.20) с точностью до членов, содержащих  $h$  в степенях выше третьей, совпадает с

$$y_k + hy'_k + \frac{h^2}{2!}y''_k + \frac{h^3}{3!}y'''_k$$

и т.д. Для формулы (II.19), например, получим

$$y_k + hy'_k + \frac{1}{2}h\Delta y'_{k-1} = y_k + hy'_k + \frac{1}{2}h(y'_k - y'_{k-1}), \quad (\text{II.28})$$

или, разлагая

$$y'_{k-1} = y'(x_{k-1})$$

по формуле Тейлора

$$y'(x_{k-1}) = y'(x_k) - hy''(x_k) + \frac{1}{2}h^2y'''(x_k) + \dots$$

и подставляя в (II.28), получим

$$y_k + hy'_k + \frac{1}{2}h(y'_k - y'_{k-1}) = y_k + hy'_k + \frac{1}{2}h^2y''_k - \frac{1}{4}h^3y'''_k + \dots,$$

## II.7. Приближенные методы интегрирования уравнений первого порядка

и, следовательно, три первых члена совпадают с тремя членами разложения по формуле Тейлора (II.27).

Для начала вычисления по формулам Штермера необходимо знать значения искомой функции не в одной, а в нескольких точках (при применении формулы (II.19) в двух точках:  $x_0$  и  $x_0 + h$ , при применении формулы (II.20) в трех точках:  $x_0, x_0 + h$  и  $x_0 + 2h$ , и т. д.). Эти несколько первых значений могут быть вычислены методом Эйлера с уменьшенным шагом или путем использования формулы Тейлора (II.18), или кратко изложенным ниже *методом Рунге*.

Возьмем для определенности формулу (1.21):

$$y_{k+1} = y_k + q_k + \frac{1}{2}\Delta q_{k-1} + \frac{5}{12}\Delta^2 q_{k-2} + \frac{3}{8}\Delta^3 q_{k-3}$$

и предположим, что, кроме заданного начального значения  $y_0$ , уже найдены  $y_1, y_2$  и  $y_3$ . Тогда можно вычислить:

$$q_0 = f(x_0, y_0)h, q_1 = f(x_1, y_1)h,$$

$$q_2 = f(x_2, y_2)h, q_3 = f(x_3, y_3)h,$$

а следовательно, и

$$\Delta q_0 = q_1 - q_0, \Delta q_1 = q_2 - q_1, \Delta q_2 = q_3 - q_2,$$

$$\Delta^2 q_0 = \Delta q_1 - \Delta q_0, \Delta^2 q_1 = \Delta q_2 - \Delta q_1, \Delta^2 q_2 = \Delta q_3 - \Delta q_2$$

Теперь по формуле (II.21) вычисляем значение  $y_4$ , зная которое получим  $q_4, \Delta q_3, \Delta^2 q_2, \Delta^3 q_1$ . Затем по той же формуле (II.21) вычисляем  $y_5$  и т. д.

Результаты вычисления заносятся в приводимую ниже, постепенно заполняющуюся таблицу:

$x$	$y$	$q$	$\Delta q$	$\Delta^2 q$	$\Delta^3 q$
$x_0$	$y_0$	$q_0$	$\Delta q_0$	$\Delta^2 q_0$	$\Delta^3 q_0$
$x_1$	$y_1$	$q_1$	$\Delta q_1$	$\Delta^2 q_1$	
$x_2$	$y_2$	$q_2$	$\Delta q_2$		
$x_3$	$y_3$	$q_3$			
$x_4$					
$x_5$					
$x_6$					

Обычно требуется вычислить значение искомого решения дифференциального уравнения в некоторой точке  $x = b$  с заданной точностью. При этом сейчас же возникает вопрос, какой из формул Штермера целесообразно пользоваться и какой шаг  $h$  гарантирует требуемую точность вычислений и в то же время не является чрезмерно малым и тем самым не приводит к лишним вычислениям. Некоторое Представление о выборе формулы, по которой целесообразно вести вычисления, и о выборе шага дают указанные выше порядки погрешностей при каждом шаге, при этом, конечно, надо иметь в виду, что при нескольких шагах погрешности могут суммироваться. При правильном выборе шага  $h$  все разности в таблице должны меняться плавно, а последние разности в формуле (II.21) должны влиять лишь на запасные знаки. Резкое изменение какой-нибудь разности указывает на то, что при выбранном шаге  $h$  могут оказаться неучтенными особенности изменения функции на рассматриваемом отрезке, что может повлечь за собой значительные ошибки при вычислении  $y_{k+1}$ .

Однако все эти соображения не являются вполне надежными, а более точные оценки погрешности оказываются весьма громоздкими и неудобными. Поэтому обычно применяют следующий практически достаточно надежный метод: выбрав, исходя из указанных выше неточных соображений, некоторый шаг  $h$ , проводят вычисления по одной из формул Штермера с шагом  $h$  и  $\frac{h}{2}$  и сравнивают результаты в общих точках.

Если в пределах заданной точности результаты совпадают, то считают, что шаг  $h$  обеспечивает заданную точность вычисления; если же результаты в пределах заданной точности не совпадают, то снова уменьшают шаг вдвое и проводят вычисления с шагом  $\frac{h}{2}$  и  $\frac{h}{4}$  и опять сравнивают результаты и т. д.

Вычисления с шагом  $h$  и  $\frac{h}{2}$  целесообразно проводить параллельно, чтобы как можно раньше заметить несовпадение результатов и не производить лишней работы. Этот способ двойного счета имеет еще то преимущество, что при его применении почти полностью исключаются ошибки в вычислениях, так как они, как правило, немедленно обнаруживаются при сравнении результатов вычислений с шагом  $h$  и  $\frac{h}{2}$ .

Для нахождения нескольких первых значений  $y_i$ , необходимых для начала вычислений по методу Штермера, кроме указанных выше способов (метод Эйлера с уменьшенным шагом с итерациями или без итераций или метод разложения по формуле Тейлора), можно рекомендовать еще метод Рунге.

По методу Рунге для нахождения  $y_{k+1}$  надо вычислить четыре числа:

$$m_1 = f(x_k, y_k), m_2 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{m_1 h}{2}\right), m_3 = f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{m_2 h}{2}\right), m_4 = f(x_k + h, y_k + m_3 h), \quad (\text{II.29})$$

и тогда

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4). \quad (\text{II.30})$$

Обычно метод Рунге применяется лишь для вычисления нескольких первых значений  $y_1, y_2, \dots$ , необходимых для начала вычисления по методу Штермера, однако можно этим методом вычислять и остальные значения. Метод Рунге, так же как и метод Штермера, основан на аппроксимации искомой интегральной кривой соприкасающейся параболой.

Если сравнить правую часть формулы Рунге (II.25) с разложением по формуле Тейлора

$$y_{k+1} = y_k + y'_k h + \frac{1}{2!} y''_k h^2 + \frac{1}{3!} y'''_k h^3 + \frac{1}{4!} y^{IV}_k h^4 + \dots,$$

то окажется, что члены со степенями ниже пятой совпадают. Поэтому при вычислении нескольких начальных значений по методу Рунге с переходом затем на вычисление по методу Штермера по формулам (II.19), (II.20) или (II.21) можно вычисление вести с тем же шагом  $h$ ; если же в дальнейшем применяется формула Штермера (II.22), то начало вычисления по методу Рунге надо вести с уменьшенным шагом, так как при одном и том же шаге формула (1.25) не гарантирует той точности вычислений, какую гарантирует формула (1.20). Впрочем, нередко даже при использовании формул Штермера (II.20) и (II.21) начало вычислений все же ведут по формулам Рунге с уменьшенным шагом, так как даже небольшая погрешность в вычислении исходных для формул Штермера значений может резко уменьшить точность дальнейших вычислений.

Современные быстродействующие вычислительные машины дискретного действия позволяют выполнить указанные выше вычисления по методу Штермера или Рунге с необычайной быстротой (многие десятки и даже сотни тысяч операций в секунду), причем и процесс программирования может быть значительно упрощен применением стандартных программ, разработанных для методов Штермера и Рунге. При этом при приближенном интегрировании дифференциального уравнения  $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$ ,

## II.8. Обыкновенные дифференциальные уравнения в MAPLE

надо составить лишь подпрограмму для вычисления значений  $y'_k = f(x_k, y_k)$  и включить ее в стандартную программу.

Пример.

$$y' = x^2 + y^2; y(0) = -1$$

Найти значение  $y(0, 5)$  с точностью до 0,01.

Воспользовавшись разложением по формуле Тейлора

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)x^2}{2!} + \frac{y'''(0)x^3}{3!} + \dots,$$

вычисляем значение  $y(x)$  в точках  $x_1 = 0, 1$  и  $x_2 = 0, 2$ :

$$y(0, 1) = -0, 9088$$

и

$$y(0, 2) = -0, 8309$$

(или вместо  $y(0, 2)$  вычисляем  $y(-0, 1)$ , что даже предпочтительнее, так как точка  $x_1 = -0, 1$  лежит ближе к начальной точке  $x_0 = 0$ , чем точка  $x_2 = 0, 2$ ). Дальнейшее значение вычисляем по формуле Штермера (??) с шагом  $h = 0, 1$  а результаты вычисления заносим в таблицу (без разностей  $\Delta^3 q$ ). После этого параллельно проводим вычисления с шагом  $\frac{h}{2} = 0, 05$ . В результате получим:

$$y(0, 5) \approx -0, 63.$$

## II.8 Обыкновенные дифференциальные уравнения в Maple

Maple позволяет решать одиночные дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений как аналитически, так и в численном виде. Разработчикам системы объявлено о существенном расширении средств решения дифференциальных уравнений и о повышении их надежности в смысле нахождения решений для большинства классов дифференциальных уравнений.

Для решения системы простых дифференциальных уравнений (*задача Коши*) используется функция `dsolve` в разных формах записи:

```
dsolve(ODE);  
dsolve(ODE, y(x), extra-args);  
dsolve(ODE,Ics, y(x), extra-args);  
dsolve(SysODE, Ics, funcs, extra-args);
```

Здесь ODE - одно обыкновенное дифференциальное уравнение или система из дифференциальных уравнений первого порядка с указанием начальных условий,  $y(x)$ -функция одной переменной, Ics - выражение задающее начальные условия, SysODE - множество дифференциальных уравнений, funcs - множество неопределенных функций, extra-args - опция, задающая тип решения.

Параметр extra-args задает класс решаемых уравнений. Отметим основные значения этого параметра: exact - аналитическое решение (принято по умолчанию);

```
explicit - решение в явном виде;  
system - решение системы дифференциальных уравнений;
```

ICs - решение системы дифференциальных уравнений с заданным начальными условиями;

formal series - решение в форме степенного многочлена;

integral transform - решение на основе интегральных преобразований Лапласа, Фурье и др.;

series - решение в виде ряда с порядком, указываемым значением переменной Order;

numeric - решение в численном виде

Для решения задачи Коши в параметры dsolve надо включать начальные условия, а при решения краевых задач - краевые условия. Если Maple способна найти решения при числе начальных или краевых условий меньше порядка системы, то в решении будут появляться неопределенные константы вида C1, C2, и т.д. Они же могут быть при аналитическом решении системы, когда начальные условия не заданы.

Несколько примеров на составление и решение дифференциальных уравнений первого порядка в аналитическом виде:

Для задания производной искомой функции в дифференциальном уравнении можно использовать команду diff() или оператор D, причем саму неизвестную функцию следует определять с явным указанием независимой переменной, например  $y(x)$ . Оператор D определяет операцию дифференцирования и имеет следующий синтаксис:

$(D@@n)(\text{функция})(\text{переменная});$

В этой записи  $n$  представляет целое число, определяющее порядок производной, параметр *функция* - используемый идентификатор функции, а параметр *переменная* - независимую переменную функции. Например, производную второго порядка функции  $f(x)$  с использованием этого оператора следует задавать следующим образом:

$(D@@2)(f)(x);$



# Глава III

## Приложение

### III.1 Модель ангармонических колебаний

```
>NonOsc:=table():
```

Процедура колебания первого порядка  $x^{(1)}$ , зависящий от  $a, \omega$  и  $t$ , где  $a$  - амплитуда,  $\omega$  - частота колебания,  $t$  - время

```
>NonOsc[x1] := proc (a, omega, t) options operator, arrow;  
a*cos(omega*t) end proc
```

Процедура колебания второго порядка  $x^{(2)}$ , зависящий от  $a, \alpha, \beta, \omega$  и  $t$ , где  $\alpha$ -коэффициент нелинейности третьей степени,  $\beta$ -коэффициент нелинейности четвертой степени,  $a$  - амплитуда,  $\omega$  - частота колебания,  $t$  - время

```
>NonOsc[x2] := proc (a, alpha, beta, omega, t) options operator, arrow;  
-(1/2)*alpha^2*a^2/omega^2+(1/6)*alpha*a^2*cos(2*omega*t)/omega^2 end proc
```

Процедура колебания третьего порядка  $x^{(3)}$ , зависящий от  $a, \alpha, \beta, \omega$  и  $t$ , где  $\alpha$ -коэффициент нелинейности третьей степени,  $\beta$ -коэффициент нелинейности четвертой степени,  $a$  - амплитуда,  $\omega$  - частота колебания,  $t$  - время

```
>NonOsc[x3] := proc (a, alpha, beta, omega, t) options operator, arrow;  
(1/16)*a^3*((1/3)*alpha^2/omega^2+(1/2)*beta)*cos(3*omega*t)/omega^2 end proc
```

Ряд последовательных приближений, где  $\alpha$ -коэффициент нелинейности третьей степени,  $\beta$ -коэффициент нелинейности четвертой степени,  $\omega$  - частота,  $t$  - время

```
>NonOsc[x] := proc (alpha, beta, a, t, omega) options operator, arrow;  
NonOsc[x1](a, omega, t)+NonOsc[x2](a, alpha, beta, omega, t)+  
+NonOsc[x3](alpha, beta, omega, a, t) end proc
```

Поправку к основной частоте, пропорциональную квадрату амплитуды колебания, где  $\alpha$ -коэффициент нелинейности третьей степени,  $\beta$ -коэффициент нелинейности четвертой степени,  $\omega$  - частота,  $t$  - время:

```
>NonOsc [omega2] :=(alpha,beta,a,omega0)->
((3*beta)/(8*omega0)-(5*alpha^2)/(12*omega0^3))*a^2;
```

Точное значение  $\omega$  частота, записанное в виде ряда, где  $\alpha$ -коэффициент нелинейности третьей степени,  $\beta$ -коэффициент нелинейности четвертой степени,  $\omega_0$  - частота,  $t$  - время

```
>NonOsc [omega] := proc (alpha, beta, a, omega0) options operator, arrow;
omega0+omega2(alpha, beta, a, omega0) end proc
```

X-амплитуда колебания, где  $\alpha$ -коэффициент нелинейности третьей степени,  $\beta$  - коэффициент нелинейности четвертой степени,  $a$  - амплитуда,  $\omega$  - частота колебания,  $t$  - время

```
>NonOsc [X] := proc (alpha, beta, a, omega0, t) options operator, arrow;
```

Процедура вычисления фазовой траектории колебания:

```
>NonOsc [V] :=proc(alpha,beta,a,omega0,t) local xx,T,dxx:
xx:=(T)->subs(t=T,NonOsc [X] (alpha,beta,a,omega0,t)):
dxx:=diff(xx(T),T):
subs(T=t,dxx):
end proc:
```

Построение графика. Для построения графика используем команду plot. Здесь  $\alpha$  - коэффициент нелинейности третьей степени,  $\beta$  - коэффициент нелинейности четвертой степени,  $a$  - амплитуда,  $\omega$  - частота,  $t$  - время

```
>NonOsc [GX] :=(alpha,beta,a,omega,t1)-> plot(NonOsc [X] (alpha,beta,a,omega,t),
t=0..t1)
```

X-амплитуда колебания, где первый коэффициент  $\alpha$  - коэффициент нелинейности третьей степени,  $\beta$ - коэффициент нелинейности четвертой степени,  $a$  - амплитуда,  $\omega_0$  - частота,  $t$  - время

```
>NonOsc [GF] :=(alpha,beta,a,omega,t1,c)->plot([X(alpha,beta,a,omega,t),
V(alpha,beta,a,omega,t),t=0..t1],
color=c,title='Фазовая траектория колебания');
```

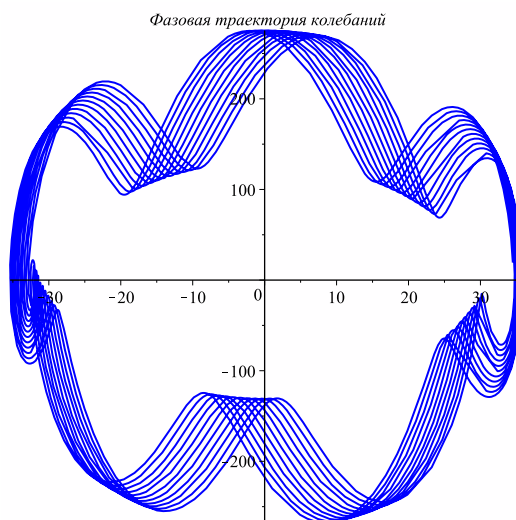
## III.2 Тестирование программы

Тестирование программы состоит в построении графика фазовой траектории колебания. NonOsc [GF](alpha,beta,a,omega,t1) - Фазовая траектория колебания, где первый коэффициент  $\alpha$  - коэффициент нелинейности третьей степени,  $\beta$ - коэффициент нелинейности четвертой степени,  $a$  - амплитуда,  $\omega_0$  - частота,  $t1$  - время

```
>GF(5,3,2,1,12,blue);
```

NonOsc [GF](alpha,beta,a,omega,t1) - Фазовая траектория колебания, где первый коэффициент  $\alpha$  - коэффициент нелинейности третьей степени,  $\beta$ - коэффициент нелинейности четвертой степени,  $a$  - амплитуда,  $\omega_0$  - частота,  $t1$  - время

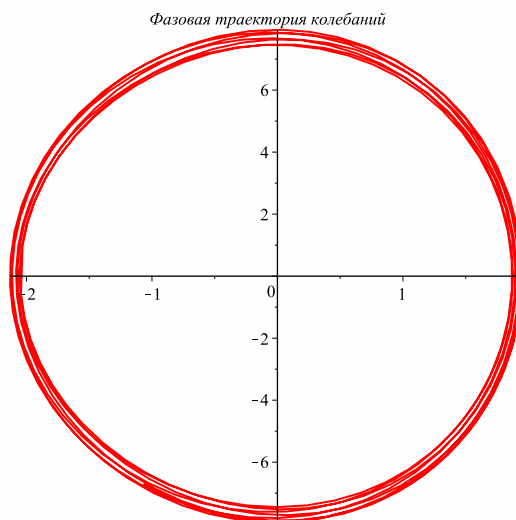
### III.2. Тестирование программы



**Рис. 2.** Фазовая траектория колебания

```
>GF(1,3,2,1,12,red);
```

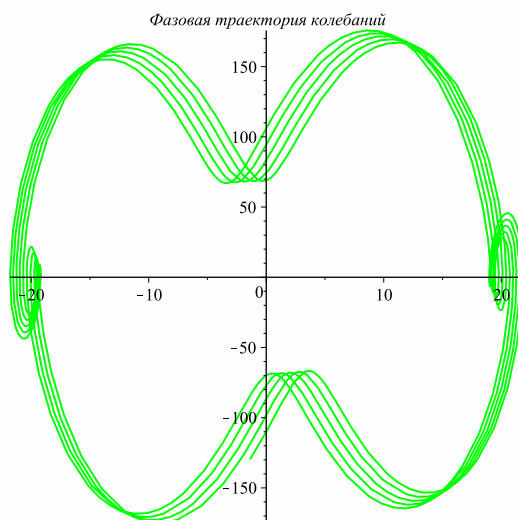
NonOsc [GF](alpha,beta,a,omega,t1) - Фазовая траектория колебания, где первый коэффициент  $\alpha$  - коэффициент нелинейности третьей степени,  $\beta$  - коэффициент нелинейности четвертой степени,  $a$  - амплитуда,  $\omega_0$  - частота,  $t1$  - время



**Рис. 3.** Фазовая траектория колебания

```
>GF(5,7,2,1,5,green);
```

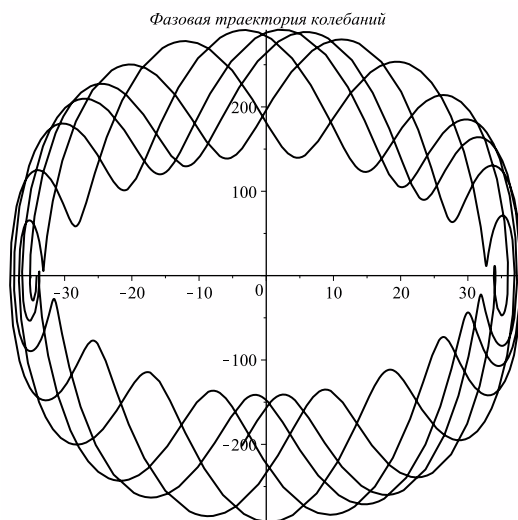
NonOsc [GF](alpha,beta,a,omega,t1) - Фазовая траектория колебания, где первый коэффициент  $\alpha$  - коэффициент нелинейности третьей степени,  $\beta$  - коэффициент нелинейности четвертой степени,  $a$  - амплитуда,  $\omega_0$  - частота,  $t1$  - время



**Рис. 4.** Фазовая траектория колебания

`>GF(5,2,2,1,5,black);`

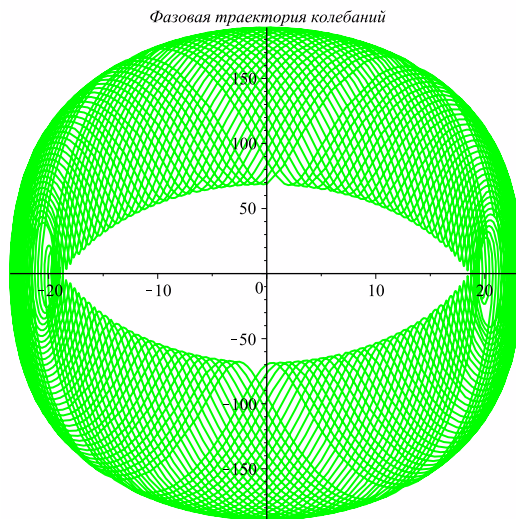
`NonOsc [GF](alpha,beta,a,omega,t1)` - Фазовая траектория колебания, где первый коэффициент  $\alpha$  - коэффициент нелинейности третьей степени,  $\beta$  - коэффициент нелинейности четвертой степени,  $a$  - амплитуда,  $\omega_0$  - частота,  $t1$  - время



**Рис. 5.** Фазовая траектория колебания

`>GF(5,7,2,1,35,green);`

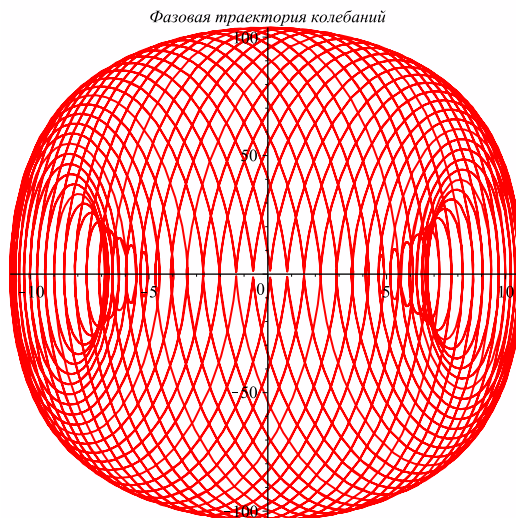
`NonOsc [GF](alpha,beta,a,omega,t1)` - Фазовая траектория колебания, где первый коэффициент  $\alpha$  - коэффициент нелинейности третьей степени,  $\beta$  - коэффициент нелинейности четвертой степени,  $a$  - амплитуда,  $\omega_0$  - частота,  $t1$  - время



**Рис. 6.** Фазовая траектория колебания

```
>GF(5,10,2,1,35,red);
```

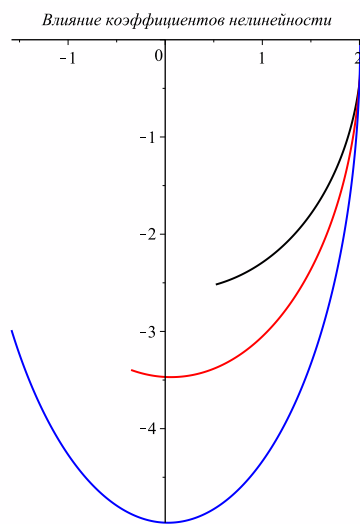
NonOsc [GF](alpha,beta,a,omega,t1) - Фазовая траектория колебания, где первый коэффициент  $\alpha$  - коэффициент нелинейности третьей степени,  $\beta$ - коэффициент нелинейности четвертой степени,  $a$  - амплитуда,  $\omega_0$  - частота,  $t1$  - время



**Рис. 7.** Фазовая траектория колебания

Рассмотрим влияние коэффициентов нелинейности: Черный график с коэффициентами нелинейности третьей степени 0.1, четвертой степени 0.2; красный график с коэффициентом нелинейности четвертой степени 1 и синий график с коэффициентом нелинейности четвертой степени 1

```
>plots[display]( GF(0.1,0.2,2,1,1,black),GF(0.1,0.5,2,1,1,red),
GF(0.1,1,2,1,1,blue),scaling=CONSTRAINED,
title='Влияние коэффициентов нелинейности');
```



**Рис. 8.** *Влияние коэффициентов нелинейности*

# Заключение

Таким образом, в данной работе решены следующие задачи: рассмотрена теория ангармонических колебаний, теория обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, рассмотрена их решения в пакете Maple. В третьей главе показаны результаты компьютерной модели ангармонических колебаний.

Таким образом, задачи поставленные в квалификационной работе, выполнены.

# Литература

- [1] Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшиц *Теоретическая физика, Том 1, Механика*// Москва: Наука. - 1988. - 216с.
- [2] Л.Э.Эльсгольц, *Дифференциальные уравнения и вариационные исчисления* // Москва. - 1965. - 424с.
- [3] А.П.Норден, *Краткий курс дифференциальной геометрии* // Москва: Наука. - 1962. - 424с.
- [4] В.П.Дьяконов, *Марле 9,5/10 в математике, физике и образовании геометрия.*// Москва: СОЛОН-пресс. - 2006. - 720с.
- [5] В.Н. Говорухин, В. Г. Цибулин *Введение в Марле. Математический пакет для всех.* // Москва: Мир. - 1997.
- [6] Матросов А. *Марле 6. Решение задач высшей математики и механики.*// Санкт-Петербург: БХВ-Петербург. - 2001.
- [7] Р. В. Загретдинов, Ф. М. Аблаев, Т. М. Гаврилова, С. Н. Перфилов: *Издательская система LaTeX* . // Казань. - 1994.
- [8] С. Львовский: *TEX* // Москва. - 1996. - 448с.



---

<sup>1</sup>© Оформление: LaTeX - стиль  $\mathcal{B}\mathcal{L}\mathcal{T}\mathcal{O}$  профессора Ю.Г. Игнатьева



Заключительный лист

---

Подпись автора работы \_\_\_\_\_

Дата \_\_\_\_\_

Квалификационная работа допущена к защите

Назначен рецензент

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Дата \_\_\_\_\_

Защищена в ГАК с оценкой  
" \_\_\_\_\_ "

Дата \_\_\_\_\_

Секретарь ГАК \_\_\_\_\_