Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Набережночелнинский институт (филиал)
федерального государственного автономного образовательного
учреждения высшего образования
«Казанский (Приволжский) федеральный университет»

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
И
ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Учебно-методическое пособие
для самостоятельной работы студентов заочной формы обучения
по инженерно-техническим направлениям подготовки бакалавров

Набережные Челны
2024

УДК 51 (076)

Линейная алгебра и функции нескольких переменных. *Учебно-методическое пособие для самостоятельной работы студентов заочной формы обучения по инженерно-техническим направлениям подготовки бакалавров.* /Составитель: ***Углов А.Н.*** -Набережные Челны: Изд-во: НЧИ К(П)ФУ, 2024, 85с.

Учебно-методическое пособие составлено на основании требований Государственных образовательных стандартов высшего образования для студентов инженерно-технических направлений подготовки бакалавров. Разработано на кафедре «Математика» и предназначено для использования в учебном процессе студентами заочной формы обучения. Учебно-методическое пособие может быть использовано и для самостоятельной работы студентами очной и очно-заочной форм обучения.

Учебно-методическое пособие включает в себя разделы: арифметические векторы и их системы, линейные пространства, евклидовы и нормированные пространства, линейные операторы, квадратичные формы, основные понятия о функциях нескольких переменных (ФНП), производные и дифференциалы ФНП и их приложения, экстремумы ФНП.

В учебно-методическом пособии изложены цели и задачи дисциплины, её содержание, методические указания по изучению дисциплины и выполнению индивидуальной контрольной работы; приведены задания для индивидуальной контрольной работы и теоретические вопросы к экзамену(зачёту); указана рекомендуемая литература. В приложениях приведены: образец решения контрольных задач типового варианта, краткие теоретические сведения, необходимые для решения практических задач, образец оформления обложки тетради с индивидуальной контрольной работой, таблица номеров выполняемых заданий.

УДК 51 (076)

1.Цель и задачи дисциплины, её место в учебном процессе.

Целью освоения дисциплины «Линейная алгебра и функции нескольких переменных» является - формирование системы базовых знаний по данной дисциплине, которая позволит будущим специалистам решать в своей повседневной деятельности актуальные задачи науки и практики, понимать написанные на современном научном уровне результаты других исследований и тем самым совершенствовать свои профессиональные навыки.

Основными задачами дисциплины являются:

- ознакомление студентов с ролью математики в современной жизни, с характерными чертами математического метода решения реальных задач;
- обучение студентов теоретическим основам курса;
- привитие практических навыков математического моделирования реальных естественнонаучных и технических задач с использованием математического аппарата данной дисциплины;
- развитие у студентов навыков творческого и логического мышления, повышение общего уровня математической культуры.

Для успешного освоения данной дисциплины необходимо знание элементарной математики в объёме курса средней школы, а также понятий и методов предшествующих ей дисциплин «Аналитическая геометрия» и «Математический анализ». Дисциплина является предшествующей для освоения следующих за ней математических дисциплин и большинства естественнонаучных и технических дисциплин, использующих математический аппарат.

В результате освоения дисциплины обучающийся должен:

- знать: базовые понятия теории арифметических векторов, линейных пространств, линейных операторов и квадратичных форм, функций нескольких переменных;
- уметь: использовать математический аппарат в профессиональной деятельности; проводить расчёты на основе построенных математических моделей;
- владеть: методами теории арифметических векторов, линейных пространств, линейных операторов и квадратичных форм, функций нескольких переменных; навыками применения современного математического инструментария для решения прикладных задач.

Изучение дисциплины предусматривает проведение лекционных, практических занятий и самостоятельную работу. На лекциях излагается теоретический материал. Прослушав лекцию, студент должен ознакомиться с более подробным изложением материала в учебниках из списка рекомендуемой литературы. Практические занятия проводятся с целью закрепления теоретических основ курса, получения практических навыков решения математических задач. Контроль знаний осуществляется с помощью индивидуальных контрольных работ и экзамена(зачёта).

2. Содержание дисциплины.

Раздел I. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА.

Тема. Арифметические векторы и их системы.

N–мерный арифметический вектор. Линейные операции над векторами, их свойства. Линейно зависимые и независимые системы векторов, их свойства. Критерий линейной зависимости. Базис и ранг системы векторов. Координаты вектора в заданном базисе.

Тема. Линейные пространства.

Определение линейного пространства, их примеры. Изоморфизм линейных пространств. N-мерное линейное пространство арифметических векторов R^n. Базис и размерность пространства R^n, теорема о единственности разложения вектора по его базису. Координаты вектора, линейные операции над векторами в заданном базисе R^n. Матрица перехода к новому базису. Преобразование координат вектора при замене базиса. Линейные подпространства: определение и примеры. Линейная оболочка.

Тема. Евклидовы пространства. Нормированные пространства.

Определение евклидова пространства, их примеры. Определение нормированного пространства, их примеры. Неравенство Коши-Буняковского и неравенство треугольника. Нормы арифметического вектора. Ортогональные системы арифметических векторов и их свойства. Ортогональные и ортонормированные базисы, разложение по ним арифметических векторов. Вычисления в ортонормированном базисе скалярного произведения и нормы для арифметических векторов. Ортогональная составляющая арифметического вектора. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.

Тема. Линейные операторы.

Определение линейного оператора, их примеры. Ядро, образ, дефект и ранг линейного оператора. Тождественный и нулевой операторы. Матрица линейного оператора. Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса линейного пространства, инвариантность её определителя. Подобные матрицы. Действия над линейными операторами и соответствующие действия с их матрицами. Обратный оператор. Характеристический многочлен и характеристическое уравнение линейного оператора, их независимость от базиса. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора, их свойства и нахождение. Спектр линейного оператора. След матрицы линейного оператора, его инвариантность относительно выбора базиса. Линейные операторы в евклидовых пространствах. Сопряженный и самосопряженный операторы, их матрицы в ортонормированном базисе. Собственные векторы и собственные значения самосопряжённого оператора, их свойства. Ортогональность собственных векторов самосопряжённого оператора. Ортогональные матрицы, их свойства. Ортогональные операторы, их матрицы. Приведение симметрической матрицы к диагональному виду ортогональным преобразованием.

Тема. Квадратичные формы.

Определение квадратичной формы, координатная и матричная формы её записи. Преобразование квадратичной формы при переходе к новому базису линейного пространства. Квадратичные формы канонического вида. Преобразование квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа и методом ортогональных преобразований. Ранг квадратичной формы, его инвариантность относительно выбора базиса. Закон инерции квадратичных форм. Знакоопределённость квадратичных форм. Критерий Сильвестра. Приведение уравнений кривых и поверхностей второго порядка к каноническому виду методом ортогональных преобразований.

Раздел II. Функции нескольких переменных (ФНП).

Тема. Основные понятия о функциях нескольких переменных.

Понятия n-мерной точки, n-мерного арифметического пространства R^n. Множества точек в R^n. Окрестность точки. Классификация точек. Открытые и замкнутые, связные, выпуклые множества точек. Понятие функции двух, трёх, n переменных. Область определения и график, линии и поверхности уровня, полное и частные приращения ФНП. Понятия предела и непрерывности ФНП. Свойства ФНП, непрерывных в ограниченной замкнутой области.

Тема. Производные и дифференциалы функции нескольких переменных, их приложения.

Частные производные первого и высших порядков, их нахождение. Независимость смешанных производных от порядка дифференцирования. Понятие дифференцируемости ФНП в точке, условия дифференцируемости. Полные дифференциалы ФНП первого и высших порядков, их нахождение. Применение первого дифференциала ФНП в приближённых вычислениях. Дифференцирование сложной ФНП. Производная по направлению и градиент ФНП, взаимосвязь между ними. Дифференцирование ФНП, заданных неявно. Определитель Якоби. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Выпуклость ФНП, её критерии.

Тема. Экстремумы функций нескольких переменных.

Стационарные и критические точки. Локальные безусловные экстремумы ФНП, условия их существования и нахождение. Локальные условные экстремумы ФНП, их нахождение. Метод неопределённых множителей Лагранжа. Глобальные экстремумы ФНП в ограниченной замкнутой области, их нахождение. Глобальные экстремумы выпуклой ФНП на выпуклом множестве. Метод наименьших квадратов для построения эмпирических зависимостей.

3. Рекомендуемая литература.

Основная литература:

1. Беклемишев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : учебник для вузов / Д. В. Беклемишев. - 18-е изд., перераб. - Санкт-Петербург: Лань, 2021. - 448 с. - ISBN 978-5-8114-4916-3. // Лань: электронно-библиотечная система. - URL: https://e.lanbook.com/book/152643
2. Геворкян П.С. Высшая математика. Линейная алгебра и аналитическая геометрия / П.С Геворкян. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2014. - 208 с. - ISBN 978-5-9221-1582-7. - URL: http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922115827.html.
3. Задачник по высшей математике для вузов : учебное пособие / В. Н. Земсков [и др.] ; под ред. А. С. Поспелова. - 3-е изд., стер .- Екатеринбург : Изд-во АТП, 2015 .- 512 с : ил. - (Учебник для вузов. Специальная литература) .- Прил.: с. 498-509 .- В пер .- ISBN 978-5-8114-1024-9.
4. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. - 10-е изд., испр. - Москва : Айрис-пресс, 2011. - 608 с : граф. - (Высшее образование). - Прил.: с. 599-603. - В пер. - ISBN 978-5-8112-4351-8.
5. Фихтенгольц Г.М. Основы математического анализа : учебник / Г. М. Фихтенгольц. - 12-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2020. - Часть 1. - 2020. - 444 с. - ISBN 978-5-8114-5338-2. - URL: https://e.lanbook.com/book/139261.

Дополнительная литература:

1. Антонов В.И., Копелевич Ф.И. Элементарная математика для первокурсника: Учебное пособие. –СПб.:Изд-во «Лань», 2013. -112с. ISBN: 978-5-8114-1413-0.
2. Беклемишева Л.А., Беклемишев Д.В., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре: Учебное пособие. –СПб.: Изд-во «Лань», 2008. -496с. ISBN 978-5-8114-0861-0.
3. Беклемишев Д.В. Решение задач из курса аналитической геометрии и линейной алгебры / Д.В. Беклемишев - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2014. - 192 с. - ISBN 978-5-9221-1480-6. - URL: http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922114806.html.-
4. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу : учебное пособие / Г. И. Запорожец. - 8-е изд.,стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2014. - 464 с. - ISBN 978-5-8114-0912-9. - URL: https://e.lanbook.com/book/149
5. Сборник задач по математике для вузов. Учеб. пособие для студентов вузов. /Абрамова В.В., Бикчурина Л.Ж., Валеева М.И. и др.; под ред. Котляра Л.М., Углова А.Н.; 5-е изд., перераб. и доп. -Наб. Челны: ИНЭКА, 2006. – 472с. (Гриф Министерства образования и науки РФ)

4. Методические указания по изучению дисциплины и выполнению индивидуальной контрольной работы.

В процессе изучения данной дисциплины студенты должны сначала изучить теоретический материал и выработать навыки решения типовых задач, используя рекомендованную литературу, а затем выполнить одну индивидуальную контрольную работу (задания для контрольной работы приведены в разделе **5.1**).

При выполнении контрольной работы необходимо придерживаться указанных ниже правил:

1. Контрольная работа должна быть выполнена студентом в отдельной ученической тетради с полями не менее 3 см для замечаний преподавателя.
2. На обложке тетради указываются: название дисциплины; номер варианта и номера решаемых задач; Ф.И.О. студента, выполнившего работу, его номер группы и номер зачетной книжки; Ф.И.О. преподавателя, проверяющего работу (образец оформления обложки приведён в *Приложении 6.4*).
3. Номер варианта соответствует номеру студента в списке группы.
4. Номера решаемых задач выбираются из *ТАБЛИЦЫ НОМЕРОВ ВЫПОЛНЯЕМЫХ ЗАДАНИЙ (Приложение 6.5)*.
5. Условия задач переписываются полностью, без сокращения слов, после чего приводится их подробное решение (чертежи можно выполнять аккуратно от руки). В конце решения приводится ответ.
6. В работу должны быть включены все задачи, указанные в задании, строго по порядку номеров.
7. Если в работе имеются ошибки, студент должен выполнить все требования преподавателя, изложенные в рецензии, и сдать работу с исправлениями на повторную проверку.
8. Никакие исправления в тексте уже проверенной работы не допускаются, все исправления записываются после рецензии преподавателя с указанием номера задачи, к которой относятся дополнения и исправления.
9. Работа может быть выполнена заново в случае выявления серьёзных замечаний и ошибок.
10. В конце тетради рекомендуется оставлять несколько чистых страниц для дополнений и исправлений.

После проверки контрольная работа предъявляется к защите. На защите студент должен показать свое умение решать задачи, подобные тем, что имеются в его контрольной работе.

Образец решения типового варианта контрольной работы приведён в *Приложении 6.1*.

5. Материалы для контроля знаний студентов.

Итоговой формой контроля знаний является экзамен (зачёт) в конце семестра обучения. На экзамене (зачёте) студент должен показать знание теоретических основ дисциплины в объёме вопросов, приведённых в разделе **5.2** и умение решать задачи, подобные тем, что имеются в его контрольной работе.

5.1. Задания для контрольной работы.

Раздел I. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА.

1–10. Представить вектор $\overline{d}$ в виде линейной комбинации векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$.

1. $\overline{a} = (1,2,-1), \overline{b} = (-2,0,3), \overline{c} = (-1,1,-1), \quad \overline{d} = (-2,3,1)$.

2. $\overline{a} = (2,1,0), \overline{b} = (1,0,1), \overline{c} = (4,2,1), \quad \overline{d} = (3,1,3)$.

3. $\overline{a} = (5,1,0), \overline{b} = (2,-1,3), \overline{c} = (1,0,-1), \quad \overline{d} = (13,2,7)$.

4. $\overline{a} = (4,1,1), \overline{b} = (2,0,-3), \overline{c} = (-1,2,1), \quad \overline{d} = (-9,5,5)$.

5. $\overline{a} = (1,0,2), \overline{b} = (0,1,1), \overline{c} = (2,-1,4), \quad \overline{d} = (3,-3,4)$.

6. $\overline{a} = (0,1,3), \overline{b} = (1,2,-1), \overline{c} = (2,0,-1), \quad \overline{d} = (3,1,8)$.

7. $\overline{a} = (1,4,1), \overline{b} = (-3,2,0), \overline{c} = (1,-1,2), \quad \overline{d} = (-9,-8,-3)$.

8. $\overline{a} = (3,1,0), \overline{b} = (-1,2,1), \overline{c} = (-1,0,2), \quad \overline{d} = (3,3,-1)$.

9. $\overline{a} = (1,0,5), \overline{b} = (-1,3,2), \overline{c} = (0,-1,1), \quad \overline{d} = (5,15,0)$.

10. $\overline{a} = (-1,2,1), \overline{b} = (2,0,3), \overline{c} = (1,1,-1), \quad \overline{d} = (-1,7,-4)$.

11 – 20. Вычислить ранг системы арифметических векторов и установить её линейную зависимость или независимость.

11. $\overline{x}_1 = (1,1,1,1), \overline{x}_2 = (1,2,1,2), \overline{x}_3 = (3,1,3,1), \overline{x}_4 = (0,1,1,0)$.

12. $\overline{x}_1 = (1,3,5,-1), \overline{x}_2 = (2,-1,-3,4), \overline{x}_3 = (5,1,-1,7), \overline{x}_4 = (7,7,9,1)$.

13. $\overline{x}_1 = (2,1,1), \overline{x}_2 = (1,0,2), \overline{x}_3 = (4,1,4), \overline{x}_4 = (5,2,0)$.

14. $\overline{x}_1 = (1,3,5,1), \overline{x}_2 = (2,1,3,4), \overline{x}_3 = (5,1,1,7), \overline{x}_4 = (7,7,9,1)$.

15. $\overline{x}_1 = (2,4,2), \overline{x}_2 = (-1,-2,-1), \overline{x}_3 = (3,5,1), \overline{x}_4 = (-2,1,8), \overline{x}_5 = (4,7,2)$.

16. $\overline{x}_1 = (1,3,5,7), \overline{x}_2 = (3,1,3,5), \overline{x}_3 = (-5,3,2,1), \overline{x}_4 = (0,2,3,4)$.

17. $\overline{x}_1 = (1,3,-1,2), \overline{x}_2 = (2,-1,3,5), \overline{x}_3 = (1,10,-6,1)$.

18. $\bar{x}_1=(1,2,1),\ \bar{x}_2=(1,-1,10),\ \bar{x}_3=(-1,1,-6),\ \bar{x}_4=(2,5,1)$.

19. $\bar{x}_1=(1,1,0,3),\ \bar{x}_2=(0,-3,3,-3),\ \bar{x}_3=(-2,2,-4,-2)$.

20. $\bar{x}_1=(1,2,1,-1),\ \bar{x}_2=(2,3,3,0),\ \bar{x}_3=(3,1,8,7),\ \bar{x}_4=(4,-1,13,14)$.

21 – 30. Даны векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c},\bar{d}\in R^3$. Показать, что векторы $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ образуют базис R^3 и найти координаты вектора $\bar{d}$ в этом базисе.

21. $\bar{a}=(1,-1,-1),\quad \bar{b}=(0,1,1),\quad \bar{c}=(-1,0,1),\quad \bar{d}=(-3,3,5)$.

22. $\bar{a}=(1,1,0),\quad \bar{b}=(-1,0,-1),\quad \bar{c}=(1,1,1),\quad \bar{d}=(0,2,-1)$.

23. $\bar{a}=(2,-3,1),\quad \bar{b}=(3,-3,1),\quad \bar{c}=(2,-1,2),\quad \bar{d}=(6,-8,1)$.

24. $\bar{a}=(1,1,0),\quad \bar{b}=(1,0,1),\quad \bar{c}=(1,1,1),\quad \bar{d}=(2,3,1)$.

25. $\bar{a}=(2,1,3),\quad \bar{b}=(4,2,1),\quad \bar{c}=(3,4,5),\quad \bar{d}=(1,3,2)$.

26. $\bar{a}=(2,3,1),\quad \bar{b}=(-1,2,-2),\quad \bar{c}=(1,2,1),\quad \bar{d}=(2,-2,1)$.

27. $\bar{a}=(1,2,1),\quad \bar{b}=(2,-1,3),\quad \bar{c}=(3,-1,4),\quad \bar{d}=(5,1,6)$.

28. $\bar{a}=(-1,0,2),\quad \bar{b}=(-2,2,1),\quad \bar{c}=(1,-3,2),\quad \bar{d}=(1,4,-6)$.

29. $\bar{a}=(1,-1,0),\quad \bar{b}=(0,1,-1),\quad \bar{c}=(0,0,1),\quad \bar{d}=(2,-1,0)$.

30. $\bar{a}=(3,3,-1),\quad \bar{b}=(3,1,0),\quad \bar{c}=(-1,2,1),\quad \bar{d}=(-1,0,2)$.

31 – 40. Найти координаты вектора $\bar{X}$ в базисе $B^*=(\bar{b}_1^*,\bar{b}_2^*,\bar{b}_3^*)$, если он задан в базисе $B=(\bar{b}_1,\bar{b}_2,\bar{b}_3)$.

31. $\bar{x}_B=(1,3,-2),\ \begin{cases}\bar{b}_1^*=\bar{b}_1+\bar{b}_2\\ \bar{b}_2^*=\bar{b}_1+\bar{b}_3\\ \bar{b}_3^*=\bar{b}_2+\bar{b}_3\end{cases}$

32. $\bar{x}_B=(6,-1,3),\ \begin{cases}\bar{b}_1^*=\bar{b}_1+\bar{b}_2+2\bar{b}_3\\ \bar{b}_2^*=2\bar{b}_1-\bar{b}_2\\ \bar{b}_3^*=-\bar{b}_1+\bar{b}_2+\bar{b}_3\end{cases}$

33. $\bar{x}_B=(1,2,4),\ \begin{cases}\bar{b}_1^*=\bar{b}_1+\bar{b}_2+3\bar{b}_3\\ \bar{b}_2^*=\dfrac{3}{2}\bar{b}_1-\bar{b}_2\\ \bar{b}_3^*=-\bar{b}_1+\bar{b}_2+\bar{b}_3\end{cases}$

34. $\bar{x}_B=(8,4,1),\ \begin{cases}\bar{b}_1^*=\bar{b}_1+\bar{b}_2+\dfrac{5}{4}\bar{b}_3\\ \bar{b}_2^*=5\bar{b}_1-\bar{b}_2\\ \bar{b}_3^*=-\bar{b}_1+\bar{b}_2+\bar{b}_3\end{cases}$

35. $\bar{x}_B = (1,3,6)$, $\begin{cases} \bar{b}_1^* = \bar{b}_1 + \bar{b}_2 + 4\bar{b}_3 \\ \bar{b}_2^* = \dfrac{4}{3}\bar{b}_1 - \bar{b}_2 \\ \bar{b}_3^* = -\bar{b}_1 + \bar{b}_2 + \bar{b}_3 \end{cases}$ **36.** $\bar{x}_B = (2,4,1)$, $\begin{cases} \bar{b}_1^* = \bar{b}_1 + \bar{b}_2 + \dfrac{3}{2}\bar{b}_3 \\ \bar{b}_2^* = 3\bar{b}_1 - \bar{b}_2 \\ \bar{b}_3^* = -\bar{b}_1 + \bar{b}_2 + \bar{b}_3 \end{cases}$

37. $\bar{x}_B = (6,3,1)$, $\begin{cases} \bar{b}_1^* = \bar{b}_1 + \bar{b}_2 + \dfrac{4}{3}\bar{b}_3 \\ \bar{b}_2^* = 4\bar{b}_1 - \bar{b}_2 \\ \bar{b}_3^* = -\bar{b}_1 + \bar{b}_2 + \bar{b}_3 \end{cases}$ **38.** $\bar{x}_B = (1,4,8)$, $\begin{cases} \bar{b}_1^* = \bar{b}_1 + \bar{b}_2 + 5\bar{b}_3 \\ \bar{b}_2^* = \dfrac{5}{4}\bar{b}_1 - \bar{b}_2 \\ \bar{b}_3^* = -\bar{b}_1 + \bar{b}_2 + \bar{b}_3 \end{cases}$

39. $\bar{x}_B = (2,5,10)$, $\begin{cases} \bar{b}_1^* = \bar{b}_1 + \bar{b}_2 + 6\bar{b}_3 \\ \bar{b}_2^* = \dfrac{6}{5}\bar{b}_1 - \bar{b}_2 \\ \bar{b}_3^* = -\bar{b}_1 + \bar{b}_2 + \bar{b}_3 \end{cases}$ **40.** $\bar{x}_B = (10,5,1)$, $\begin{cases} \bar{b}_1^* = \bar{b}_1 + \bar{b}_2 + \dfrac{6}{5}\bar{b}_3 \\ \bar{b}_2^* = 6\bar{b}_1 - \bar{b}_2 \\ \bar{b}_3^* = -\bar{b}_1 + \bar{b}_2 + \bar{b}_3 \end{cases}$

41 – 50. Даны векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d} \in R^3$. Требуется вычислить скалярное произведение векторов $\bar{m} \cdot \bar{n}$, если $\bar{m} = \bar{a} + 2\bar{b}$, $\bar{n} = 3\bar{c} - \bar{d}$ и установить ортогональность векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$.

41. $\bar{a} = (0, 1, 2)$, $\bar{b} = (1, 0, 1)$, $\bar{c} = (-1, 2, 4)$, $\bar{d} = (-2, 4, 7)$.

42. $\bar{a} = (1, 3, 0)$, $\bar{b} = (2, -1, 1)$, $\bar{c} = (0, -1, 2)$, $\bar{d} = (6, 12, -1)$.

43. $\bar{a} = (2, 1, -1)$, $\bar{b} = (0, 3, 2)$, $\bar{c} = (1, -1, 1)$, $\bar{d} = (1, -4, 4)$.

44. $\bar{a} = (4, 1, 1)$, $\bar{b} = (2, 0, -3)$, $\bar{c} = (-1, 2, 1)$, $\bar{d} = (-9, 5, 5)$.

45. $\bar{a} = (-2, 0, 1)$, $\bar{b} = (1, 3, -1)$, $\bar{c} = (0, 4, 1)$, $\bar{d} = (-5, -5, 5)$.

46. $\bar{a} = (5, 1, 0)$, $\bar{b} = (2, -1, 3)$, $\bar{c} = (1, 0, -1)$, $\bar{d} = (13, 2, 7)$.

47. $\bar{a} = (0, 1, 1)$, $\bar{b} = (-2, 0, 1)$, $\bar{c} = (3, 1, 0)$, $\bar{d} = (-19, -1, 7)$.

48. $\bar{a} = (1, 0, 2)$, $\bar{b} = (0, 1, 1)$, $\bar{c} = (2, -1, 4)$, $\bar{d} = (3, -3, 4)$.

49. $\bar{a} = (3, 1, 0)$, $\bar{b} = (-1, 2, 1)$, $\bar{c} = (-1, 0, 2)$, $\bar{d} = (3, 3, -1)$.

50. $\bar{a} = (-1, 2, 1)$, $\bar{b} = (2, 0, 3)$, $\bar{c} = (1, 1, -1)$, $\bar{d} = (-1, 7, -4)$.

51 – 60. Даны векторы $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3 \in R^3$, образующие базис R^3. Применяя процесс ортогонализации Грама-Шмидта произвольный базис $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)$ пространства R^3 преобразовать в ортогональный базис $(\overline{y}_1, \overline{y}_2, \overline{y}_3)$.

51. $\overline{x}_1 = (1, 1, 4)$, $\overline{x}_2 = (0, -3, 2)$, $\overline{x}_3 = (2, 1, -1)$

52. $\overline{x}_1 = (1, -2, 0)$, $\overline{x}_2 = (-1, 1, 3)$, $\overline{x}_3 = (1, 0, 4)$

53. $\overline{x}_1 = (2, 0, 1)$, $\overline{x}_2 = (1, 1, 0)$, $\overline{x}_3 = (4, 1, 2)$

54. $\overline{x}_1 = (0, 1, 3)$, $\overline{x}_2 = (1, 2, -1)$, $\overline{x}_3 = (2, 0, -1)$

55. $\overline{x}_1 = (1, 0, 5)$, $\overline{x}_2 = (-1, 3, 2)$, $\overline{x}_3 = (0, -1, 1)$

56. $\overline{x}_1 = (1, 1, 0)$, $\overline{x}_2 = (0, 1, -2)$, $\overline{x}_3 = (1, 0, 3)$

57. $\overline{x}_1 = (1, 0, 2)$, $\overline{x}_2 = (-1, 0, 1)$, $\overline{x}_3 = (2, 5, -3)$

58. $\overline{x}_1 = (1, 2, -1)$, $\overline{x}_2 = (3, 0, 2)$, $\overline{x}_3 = (-1, 1, 1)$

59. $\overline{x}_1 = (1, 0, 1)$, $\overline{x}_2 = (0, -2, 1)$, $\overline{x}_3 = (1, 3, 0)$

60. $\overline{x}_1 = (2, 1, 0)$, $\overline{x}_2 = (1, 0, 1)$, $\overline{x}_3 = (4, 2, 1)$

61 – 70. Найти линейный оператор $\tilde{C}(\overline{x})$ и его матрицу C.

61. $\tilde{C} = \tilde{A} \cdot \tilde{B}$, $\tilde{A}(\overline{x}) = (x_2 - x_3, x_1, x_1 + x_3)$, $\tilde{B}(\overline{x}) = (x_2, 2x_3, x_1)$.

62. $\tilde{C} = \tilde{A}^2$, $\tilde{A}(\overline{x}) = (x_2 - x_3, x_1, x_1 + x_3)$

63. $\tilde{C} = \tilde{A}^2 - \tilde{B}$, $\tilde{A}(\overline{x}) = (x_2 - x_3, x_1, x_1 + x_3)$, $\tilde{B}(\overline{x}) = (x_2, 2x_3, x_1)$.

64. $\tilde{C} = \tilde{B}^4$, $\tilde{B}(\overline{x}) = (x_2, 2x_3, x_1)$.

65. $\tilde{C} = 2\tilde{A} + 3\tilde{B}^2$, $\tilde{A}(\overline{x}) = (x_2 - x_3, x_1, x_1 + x_3)$, $\tilde{B}(\overline{x}) = (x_2, 2x_3, x_1)$.

66. $\tilde{C} = \tilde{B}^2$, $\tilde{B}(\overline{x}) = (x_2, 2x_3, x_1)$.

67. $\tilde{C} = \tilde{A}^2 + \tilde{B}^2$, $\tilde{A}(\overline{x}) = (x_2 - x_3, x_1, x_1 + x_3)$, $\tilde{B}(\overline{x}) = (x_2, 2x_3, x_1)$.

68. $\tilde{C} = \tilde{B}^2 + \tilde{A}$, $\tilde{A}(\overline{x}) = (x_2 - x_3, x_1, x_1 + x_3)$, $\tilde{B}(\overline{x}) = (x_2, 2x_3, x_1)$.

69. $\tilde{C} = \tilde{B} \cdot \tilde{A}$, $\tilde{A}(\overline{x}) = (x_2 - x_3, x_1, x_1 + x_3)$, $\tilde{B}(\overline{x}) = (x_2, 2x_3, x_1)$.

70. $\tilde{C} = 2\tilde{B} - \tilde{A}^2$, $\tilde{A}(\overline{x}) = (x_2 - x_3, x_1, x_1 + x_3)$, $\tilde{B}(\overline{x}) = (x_2, 2x_3, x_1)$.

71 – 80. Дана матрица A линейного оператора $\tilde{A}(\bar{x})$. Требуется:

а) найти собственные числа и векторы матрицы;

б) выяснить приводима или нет матрица A к диагональному виду и, если приводима, то записать её диагональную форму.

71. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **72.** $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ **73.** $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

74. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ **75.** $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ **76.** $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

77. $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ **78.** $A = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & -4 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ **79.** $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

80. $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$

81 – 90. Для квадратичной формы $L(x_1, x_2, x_3)$ требуется:

а) привести её к каноническому виду методом Лагранжа;

б) привести её к каноническому виду методом ортогональных преобразований;

в) установить её знакоопределённость.

81. $4x_2^2 - 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$

82. $2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 8x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3$

83. $2x_1^2 + 9x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$

84. $-4x_1^2 - 4x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3$

85. $4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$

86. $-x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 6x_2x_3$

87. $x_1^2 - 7x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$

88. $3x_1^2 - 7x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 8x_2x_3$

89. $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$

90. $-4x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$

91 – 100. Требуется:

а) для невырожденной квадратичной формы $L(x_1, x_2, x_3)$ установить её знакоопределённость по критерию Сильвестра;

б) установить тип алгебраической кривой второго порядка и построить её, используя метод ортогональных преобразований для квадратичных форм.

91. а) $x_1^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ **б)** $-x^2 - y^2 + 4xy + 2x - 4y + 1 = 0$

92. а) $x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3 + 3x_3^2$ **б)** $4xy + 4x - 4y - 2 = 0$

93. а) $4x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 3x_2^2 + 4x_3^2$ **б)** $2x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x - 2y + 1 = 0$

94. а) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_2^2 - 6x_2x_3 - 4x_3^2$ **б)** $4xy + 4x - 4y = 0$

95. а) $x_1^2 + 4x_1x_3 - x_2^2 - 2x_2x_3 + 4x_3^2$ **б)** $2x^2 + 2y^2 - 2xy + 6x - 6y - 3 = 0$

96. а) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 3x_3^2$ **б)** $2xy + 2x + 2y - 1 = 0$

97. а) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_3^2$ **б)** $3x^2 + 3y^2 - 4xy + 6x - 4y - 2 = 0$

98. а) $x_1^2 - 7x_2^2 + 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 8x_2x_3 + 3x_3^2$ **б)** $2xy + 2x + 2y - 3 = 0$

99. а) $x_1^2 + 4x_1x_3 - x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2$ **б)** $x^2 + y^2 + 4xy + 4x + 2y - 2 = 0$

100. а) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 10x_2x_3 + 4x_3^2$ **б)** $4xy + 4x + 4y + 1 = 0$

Раздел II. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ.

101 – 110. Найти частные производные: $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ и первый дифференциал dz функции $z = f(x, y)$.

101. $z = \sqrt{2xy + y^2}$ **102.** $z = \ln(x^2 + 2y)$ **103.** $z = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y}$

104. $z = y\sin(x^2)$ **105.** $z = x\cos 2y$ **106.** $z = \dfrac{\cos(xy)}{y}$

107. $z = \sin(3x + 2y)$ **108.** $z = \cos(2x + 3y)$ **109.** $z = \dfrac{\sin(xy)}{x}$

110. $z = \ln(5x + 4y)$

111 – 120. Вычислить приближённо (с помощью первого дифференциала) значение функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x_0, y_0)$.

111. $z=x^2e^y$, $M(1.94,\ 0.12)$

112. $z=\sqrt{x^2+\ln y}$, $M(1.04,1.02)$

113. $z=\sqrt{5e^x+y^2}$, $M(0.06,\ 2.03)$

114. $z=\ln(x^2+y^3)$, $M(0.99,\ 0.09)$

115. $z=\sqrt{\ln x+y^2}$, $M(1.07,1.04)$

116. $z=\sqrt{x^3+y^2}$, $M(2.03,\ 0.98)$

117. $z=\ln(x^3+y^3)$, $M(0.08,\ 0.97)$

118. $z=\sqrt{5e^y+x^2}$, $M(2.03,\ 0.02)$

119. $z=x\sqrt{1+y^3}$, $M(2.01,\ 2.05)$

120. $z=\ln(x^2+y^2)$, $M(1.05,\ 0.08)$

121 – 130. Найти:

а) производную $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ функции $u=f(x,y,z)$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ по направлению вектора $\vec{l}$;

б) градиент функции $grad\,u$ и его модуль $|grad\,u|$ в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$.

121. $u=x+\ln(z^2+y^2)$, $\vec{l}=-2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$, $M_0(2,1,1)$

122. $u=y\ln(1+x^2)-arctgz$, $\vec{l}=2\vec{i}-3\vec{j}-2\vec{k}$, $M_0(0,1,1)$

123. $u=\ln(3-x^2)+xy^2z$, $\vec{l}=-\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$, $M_0(1,3,2)$

124. $u=xy-\dfrac{x}{z}$, $\vec{l}=5\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$, $M_0(-4,3,-1)$

125. $u=z^2+2arctg(x-y)$, $\vec{l}=\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$, $M_0(1,2,-1)$

126. $u=\sqrt{xy}+\sqrt{9-z^2}$, $\vec{l}=-2\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$, $M_0(1,1,0)$

127. $u=\ln(x+\sqrt{y^2+z^2})$, $\vec{l}=-2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $M_0(1,-3,4)$

128. $u=x^2y^2z-\ln(z-1)$, $\vec{l}=5\vec{i}-6\vec{j}+2\sqrt{5}\vec{k}$, $M_0(1,1,2)$

129. $u=\ln(x^2+y^2)+xyz$, $\vec{l}=\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$, $M_0(1,-1,2)$

130. $u=(x^2+y^2+z^2)^{3/2}$, $\vec{l}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$, $M_0(1,1,1)$

131 – 140. Найти дифференциал второго порядка d^2z функции $z=f(x,y)$.

131. $z=\dfrac{x}{x+y}$

132. $z=\sin 2x\cdot\cos 3y$

133. $z=e^{2x}\cos 3y$

134. $z=\ln(x+\ln y)$ **135.** $z=\sin(x^2+y^3)$ **136.** $z=\sin\left(\dfrac{y}{x^2}\right)$

137. $z=\cos\left(\dfrac{y}{\sqrt{x}}\right)$ **138.** $z=e^{x^3y^2}$ **139.** $z=\ln(3x+y^2)$

140. $z=\sqrt{x^3+y^2}$

141 – 150. Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ функции $y=f(x)$, заданной неявно уравнением $F(x,y)=0$**.**

141. $y^2+arctg\left(\dfrac{y}{x}\right)=0$ **142.** $yx^2-\sqrt{1+\cos(xy)}=0$

143. $y^3-\sin(xy)=0$ **144.** $x^2y+\ln(x^2+y^3)=0$

145. $\sqrt{y-x}+\sin(xy)=0$ **146.** $e^y+tg\left(\dfrac{x}{y}\right)=0$

147. $e^{xy}-\sqrt{x^3+y^2}=0$ **148.** $\sin(x^2y^3)+\sqrt{x-y}=0$

149. $y(x-y)-\sin(x-y)=0$ **150.** $y^2-arctg\sqrt{y-x}=0$

151 – 160. Требуется:

а) найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=f(x,y)$, заданной неявно уравнением $F(x,y,z)=0$**;**

б) найти частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x}$**,** $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial v}{\partial x}$**,** $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ для функций $u=f(x,y)$ и $v=g(x,y)$, заданных неявно системой уравнений $\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$**.**

151. а) $z^3+3xyz+xy=0$ **б)** $\begin{cases}u+v-x=0\\u-yv=0\end{cases}$

152. а) $z^3-xz+y^3=0$ **б)** $\begin{cases}\sin(xu)-y=0\\\cos(yv)-2x=0\end{cases}$

153. а) $z-e^{x+y+z}=0$ **б)** $\begin{cases} yu+xv-1=0 \\ xu-yv=0 \end{cases}$

154. а) $x+yz-e^{z}=0$ **б)** $\begin{cases} xv+yu-2=0 \\ \dfrac{x}{u}-\dfrac{y}{v}-3=0 \end{cases}$

155. а) $e^{z}-xyz=0$ **б)** $\begin{cases} xu+yv-2=0 \\ u-xv-y=0 \end{cases}$

156. а) $z-e^{xyz}=0$ **б)** $\begin{cases} \sin(yv)-x=0 \\ \cos(u-x)-2y=0 \end{cases}$

157. а) $z^3-yz+x^3=0$ **б)** $\begin{cases} v-u-y=0 \\ xu+yv=0 \end{cases}$

158. а) $y+xz-e^{z}=0$ **б)** $\begin{cases} 2xu-v-y=0 \\ yv-x-1=0 \end{cases}$

159. а) $e^{z}-z+\cos(xy)=0$ **б)** $\begin{cases} xu+yv=0 \\ \dfrac{u}{x}+\dfrac{v}{y}-1=0 \end{cases}$

160. а) $z-x^2-\ln(x+yz)=0$ **б)** $\begin{cases} xv-u-y=0 \\ u-yv=0 \end{cases}$

161 – 170. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к заданной поверхности в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$**.**

161. $z=\dfrac{1}{2}arctg\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $M_0\left(1,1,\dfrac{\pi}{8}\right)$. **162.** $z=y+\ln\left(\dfrac{x}{y}\right)$, $M_0(1,1,1)$.

163. $z^2+4z+x^2=0$, $M_0(0,1,-4)$ **164.** $x^2+y^2-z^2=-1$, $M_0(2,2,3)$.

165. $z=arctg\left(\dfrac{x}{y}\right)$, $M_0\left(1,1,\dfrac{\pi}{4}\right)$. **166.** $x^2+y^2+z^2=3$, $M_0(1,1,1)$.

167. $z^3-4xz+y^2=4$, $M_0(1,-2,2)$. **168.** $z=1+x^2+y^2$, $M_0(1,1,3)$.

169. $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{16}=1$, $M_0(0,0,4)$. **170.** $z=\ln(x^2+y^2)$, $M_0(1,0,0)$.

171 – 180. Найти локальные экстремумы функции $z = f(x, y)$:

171. а) $z = x^2 + xy + y^2 - 12x - 3y$ **б)** $z = x^2 y(2 - x + y)$

172. а) $z = 3 + 2x - y - x^2 + xy - y^2$ **б)** $z = xy + \dfrac{50}{x} + \dfrac{20}{y}$

173. а) $z = x^2 - xy + y^2 + 9x - 6y + 20$ **б)** $z = xy^2(1 - x - y)$

174. а) $z = x^2 - 2xy + 4y^2 + 4$ **б)** $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$

175. а) $z = x^2 + y^2 - xy + 2x - y$ **б)** $z = x^2 + y^2 - 2\ln x - 18\ln y$

176. а) $z = 3x^2 + y^2 - x + y$ **б)** $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$

177. а) $z = 2x^2 + y^2 - x + 2y + 1$ **б)** $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$

178. а) $z = x^2 + y^2 + xy - 3x - 6y$ **б)** $z = \dfrac{8}{x} + \dfrac{x}{y} + y$

179. а) $z = x^2 + y^2 + xy - 2x - 2y + 2$ **б)** $z = x^3 y^2(4 - x - y)$

180. а) $z = x^2 + y^2 - xy + 2x - 2y + 1$ **б)** $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$

181–190. Найти условные экстремумы функции $z = f(x, y)$ (методом Лагранжа):

181. $z = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ при условии $x + y - 2 = 0$

182. $z = 5 - 3x - 4y$ при условии $x^2 + y^2 - 25 = 0$

183. $z = x^2 - xy + y^2 + x + y - 4$ при условии $x + y + 3 = 0$

184. $z = 1 - 4x - 8y$ при условии $x^2 - 8y^2 - 8 = 0$

185. $z = x^2 + y^2$ при условии $3x + 2y - 6 = 0$

186. $z = 6 - 5x - 4y$ при условии $x^2 - y^2 - 9 = 0$

187. $z = x^2 - y^2$ при условии $2x - y - 3 = 0$

188. $z = 6 - 4x - 3y$ при условии $x^2 + y^2 - 1 = 0$

189. $z = xy^2$ при условии $x + 2y - 1 = 0$

190. $z = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$ при условии $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{8} = 0$

191–200. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ в ограниченной и замкнутой области:

191. $z = x + y$ в круге: $x^2 + y^2 \le 4$

192. $z = x^2 + 3y^2 + x - y$ в треугольнике: $x \le 0,\ y \ge 0,\ y - x \le 1$

193. $z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2$ в прямоугольнике: $1 \le x \le 4, -3 \le y \le 2$

194. $z = x^2 + y^2 - 4x$ в прямоугольнике: $-2 \le x \le 1, -1 \le y \le 3$

195. $z = 1 + x + 2y$ в треугольнике: $x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 1$

196. $z = xy \cdot (6 - x - y)$ в треугольнике: $x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 12$

197. $z = 3 + 2xy$ в круге: $x^2 + y^2 \le 1$

198. $z = xy + x + y$ в прямоугольнике: $-2 \le x \le 2, -2 \le y \le 4$

199. $z = x - 2y + 5$ в треугольнике: $x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 1$

200. $z = x^2 - xy + y$ в прямоугольнике: $-2 \le x \le 2, -3 \le y \le 3$

5.2. Вопросы к экзамену (зачёту).

1. N-мерный арифметический вектор. Равенство векторов. Линейные операции над векторами, их свойства.
2. Скалярное произведение арифметических векторов. Длина вектора и угол между векторами. Понятие ортогональности векторов.
3. Система векторов и её линейная комбинация. Линейно зависимые и независимые системы векторов, их свойства. Теорема о необходимом и достаточном условиях линейной зависимости системы векторов.
4. Базис и ранг системы векторов. Координаты вектора в заданном базисе.
5. Определение линейного пространства, их примеры. Изоморфизм линейных пространств.
6. N-мерное линейное пространство арифметических векторов R^n. Базис, канонический базис, ранг, размерность пространства R^n. Теорема о единственности разложения вектора в данном базисе R^n.
7. Координаты вектора в R^n. Линейные операции над векторами в заданном базисе R^n.
8. Матрица перехода к новому базису. Преобразование координат арифметического вектора при замене базиса.
9. Определение линейного подпространства, их примеры. Линейная оболочка.
10. Определение евклидова пространства, их примеры. Неравенство Коши-Буняковского.

11. Определение нормированного пространства, их примеры. Неравенство треугольника. Нормы арифметического вектора.
12. Ортогональные системы векторов, их свойства. Ортогональные и ортонормированные базисы, разложение по ним арифметических векторов.
13. Ортогональная составляющая арифметического вектора. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.
14. Линейный оператор, их примеры. Ядро, образ, дефект и ранг линейного оператора. Тождественный и нулевой операторы.
15. Преобразование матрицы линейного оператора при замене базиса линейного пространства, инвариантность её определителя. Подобные матрицы.
16. Действия над линейными операторами (сложение (вычитание) операторов, умножение оператора на число, умножение оператора на оператор) и соответствующие действия с их матрицами. Обратный оператор, его нахождение.
17. Характеристический многочлен и характеристическое уравнение линейного оператора, их независимость от базиса. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора, их свойства и нахождение.
18. Теорема о линейной независимости собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям. Матрица линейного оператора в базисе из его собственных векторов.
19. Спектр линейного оператора. След матрицы линейного оператора, его инвариантность относительно выбора базиса.
20. Линейные операторы в евклидовых пространствах. Сопряжённый и самосопряжённый операторы, их матрицы в ортонормированном базисе.
21. Собственные векторы и собственные значения самосопряжённого оператора, их свойства. Ортогональность собственных векторов самосопряжённого оператора.
22. Ортогональные матриц их свойства. Ортогональные операторы, их матрицы.
23. Приведение симметрической матрицы к диагональному виду ортогональным преобразованием.
24. Определение квадратичной формы, координатная и матричная форма её записи. Квадратичные формы канонического вида.
25. Преобразование квадратичной формы при переходе к новому базису линейного пространства.
26. Преобразование квадратичной формы к каноническому виду методом Лагранжа.
27. Преобразование квадратичной формы к каноническому виду методом ортогональных преобразований.
28. Ранг квадратичной формы, его инвариантность относительно выбора базиса. Закон инерции квадратичных форм.

29. Главные миноры матрицы квадратичной формы. Знакоопределённость квадратичной формы и её критерии. Критерий Сильвестра.
30. Приведение уравнений алгебраических кривых второго порядка к каноническому виду методом ортогональных преобразований.
31. N -мерная точка. N -мерное арифметическое пространство R^n . Множества точек в R^n . Окрестность точки. Классификация точек.
32. Ограниченные, открытые и замкнутые, связные, выпуклые множества точек в R^n . Область.
33. Функции 2-х переменных, 3-х, n-переменных. Естественная область определения и график, линии и поверхности уровня функции нескольких переменных (ФНП).
34. Частные и полное приращения ФНП. Понятия предела и непрерывности ФНП. Свойства ФНП, непрерывных в ограниченной и замкнутой области.
35. Частные производные первого и высших порядков, их нахождение. Независимость смешанных производных от порядка дифференцирования.
36. Понятие дифференцируемости ФНП в точке, условия дифференцируемости.
37. Дифференциалы ФНП первого и высших порядков, их нахождение.
38. Применение первого дифференциала ФНП в приближённых вычислениях.
39. Дифференцирование сложной ФНП.
40. Производная по направлению и градиент ФНП, взаимосвязь между ними
41. Дифференцирование ФНП, заданных неявно одним уравнением.
42. Дифференцирование ФНП, заданных неявно системой уравнений. Определитель Якоби.
43. Касательная плоскость и нормаль к поверхности, их уравнения.
44. Выпуклость ФНП, её критерии.
45. Стационарные и критические точки ФНП, их нахождение.
46. Точки локального безусловного экстремума (максимума и минимума) и локальные безусловные экстремумы ФНП, условия их существования и нахождение.
47. Точки локального условного экстремума (максимума и минимума) и локальные условные экстремумы ФНП, условия их существования и нахождение. Метод неопределенных множителей Лагранжа.
48. Глобальные экстремумы (наибольшее и наименьшее значения) ФНП в ограниченной замкнутой области, их нахождение для дифференцируемой функции двух переменных.
49. Глобальные экстремумы выпуклой ФНП на выпуклом множестве.
50. Метод наименьших квадратов для построения эмпирических зависимостей.

6. Приложения.

6.1. Образец решения контрольных задач типового варианта.

Раздел I. Линейная алгебра.

1–10. Представить вектор $\overline{d}$ в виде линейной комбинации векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$, где: $\overline{a} = (1, 1, 4), \overline{b} = (-3, 0, 2), \overline{c} = (1, 2, -1), \quad \overline{d} = (-13, 2, 18)$.

Решение.

Представить вектор $\overline{d}$ в виде линейной комбинации векторов $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ означает представить вектор $\overline{d}$ в виде: $\overline{d} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{b} + \gamma\overline{c}$, где α, β, γ - некоторые действительные числа.

1) Подставляем в векторное равенство заданные векторы, получаем:

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-13\\2\\18\end{pmatrix}.$$

2) Пользуясь определениями линейной комбинации и равенства векторов, от векторного равенства переходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных чисел α, β, γ: $\begin{cases}\alpha - 3\beta + \gamma = -13\\ \alpha + 0\cdot\beta + 2\gamma = 2\\ 4\alpha + 2\beta - \gamma = 18\end{cases}$.

3) Решаем СЛАУ методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & 1 & -13\\ 1 & 0 & 2 & 2\\ 4 & 2 & -1 & 18\end{array}\right) (-1)\ (-4) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & 1 & -13\\ 0 & 3 & 1 & 15\\ 0 & 14 & -5 & 70\end{array}\right) (-14)\ 3 \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & 1 & -13\\ 0 & 3 & 1 & 15\\ 0 & 0 & -29 & 0\end{array}\right) :(-29) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1 & -3 & 1 & -13\\ 0 & 3 & 1 & 15\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{cases}\alpha - 3\beta + \gamma = -13 & \Rightarrow \alpha - 15 + 0 = -13 \Rightarrow \alpha = 2\\ \quad 3\beta + \gamma = 15 & \Rightarrow 3\beta = 15 \Rightarrow \beta = 5\\ \qquad \gamma = 0 & \end{cases}$$

и находим $\alpha = 2, \beta = 5, \gamma = 0$.

4) Выполняем проверку:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-15+0 \\ 2+0+0 \\ 8+10+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 2 \\ 18 \end{pmatrix}.$$

5) Записываем представление $\overline{d} = 2\overline{a} + 5\overline{b}$.

Ответ: $\overline{d} = 2\overline{a} + 5\overline{b}$.

Замечание. Если СЛАУ имеет бесконечно много решений, то в качестве значений α, β, γ берём любое частное решение СЛАУ. Если СЛАУ не имеет решений, то в ответе пишем, что такое представление невозможно.

11 – 20. Вычислить ранг системы арифметических векторов и установить её линейную зависимость или независимость, где: $\overline{x}_1 = (1,2,1,1), \overline{x}_2 = (2,1,1,-3), \overline{x}_3 = (3,1,-1,10), \overline{x}_4 = (1,0,1,-1), \overline{x}_5 = (1,2,1,3)$.

Решение.

Вычисляем ранг системы векторов $S_k = \{\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_k\}$ через ранг матрицы A, столбцами которой являются векторы $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_k$, учитывая, что $rangS_k = rangA$. Если $rangS_k < k$, где k число векторов в системе S_k, то система векторов – линейно зависимая, если $rangS_k = k$, то система векторов – линейно независимая.

1) Составляем матрицу A: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 10 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

2) Вычисляем ранг матрицы A методом элементарных преобразований, выполняя прямой ход метода Гаусса. Получаем $rangA = 3$.

3) Находим $rang\{\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4, \overline{x}_5\} = rangA = 3$.

4) Делаем вывод: так как $rang\{\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4, \overline{x}_5\} = 3 < 5$, то система векторов $\{\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4, \overline{x}_5\}$ - линейно зависимая.

Ответ: $rang\{\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4, \overline{x}_5\} = 3$; линейно зависимая.

21 – 30. Даны векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d} \in R^3$. Показать, что векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образуют базис R^3 и найти координаты вектора $\bar{d}$ в этом базисе, если $\bar{a} = (0, 1, 2)$, $\bar{b} = (1, 0, 1)$, $\bar{c} = (-1, 2, 4)$, $\bar{d} = (-2, 4, 7)$.

Решение.

1) Покажем, что векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образуют базис R^3**.** Для этого составим определитель, столбцами которого являются координаты этих векторов и покажем, что он отличен от нуля.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 0 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 4 - 0 \cdot 2 \cdot 1 = -1.$$

Так как $\Delta = -1 \neq 0$, то векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образуют базис R^3 и, следовательно, вектор $\bar{d} \in R^3$ единственным образом можно разложить по векторам этого базиса.

2) Записываем разложение вектора $\bar{d}$ по векторам базиса $B_{R^3} = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$:

$$\bar{d} = \alpha \cdot \bar{a} + \beta \cdot \bar{b} + \gamma \cdot \bar{c} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты разложения α, β, γ называют координатами вектора $\bar{d}$ в базисе B_{R^3} и кратко записывают: $\bar{d}_{B_{R^3}} = (\alpha, \beta, \gamma)$**.**

3) Записываем векторное уравнение относительно α, β, γ в виде эквивалентной ему системы линейных алгебраических уравнений: $\begin{cases} \beta - \gamma = -2 \\ \alpha + 2\gamma = 4 \\ 2\alpha + \beta + 4\gamma = 7 \end{cases}$, и находим единственное решение системы, например, по формулам Крамера (методом Гаусса или методом обратной матрицы):

$$\alpha = \frac{\Delta_\alpha}{\Delta}, \ \beta = \frac{\Delta_\beta}{\Delta}, \ \gamma = \frac{\Delta_\gamma}{\Delta}, \quad \text{где}$$

$$\Delta = -1 \neq 0, \ \Delta_\alpha = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 7 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -2, \ \Delta_\beta = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 2 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 1, \ \Delta_\gamma = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -1.$$

Таким образом: $\alpha = \dfrac{-2}{-1} = 2$, $\beta = \dfrac{1}{-1} = -1$, $\gamma = \dfrac{-1}{-1} = 1$.

4) Разложение вектора $\bar{d}$ по векторам базиса $B_{R^3} = (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ имеет вид: $\bar{d} = 2\bar{a} - \bar{b} + \bar{c}$ или кратко: $\bar{d}_{B_{R^3}} = (2, -1, 1)$.

Ответ: $\bar{d} = 2\bar{a} - \bar{b} + \bar{c} = (2, -1, 1)_{B_{R^3}}$.

31 – 40. Найти координаты вектора $\bar{X}$ в базисе $B^* = (\bar{b}_1^*, \bar{b}_2^*, \bar{b}_3^*)$, если он задан в базисе $B = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3)$, где $\bar{x}_B = (1, 0, -1)$, $\begin{cases} \bar{b}_1^* = 2\bar{b}_1 + 6\bar{b}_2 + 5\bar{b}_3 \\ \bar{b}_2^* = 5\bar{b}_1 + 3\bar{b}_2 - 2\bar{b}_3 \\ \bar{b}_3^* = 7\bar{b}_1 + 4\bar{b}_2 - 3\bar{b}_3 \end{cases}$.

Решение.

Координаты вектора $\bar{x}_{B^*}$ находим, используя формулу преобразования координат арифметического вектора при замене базиса $B \to B^*$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}_{B^*} = U^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}_B$$

, где $U = U_{B \to B^*}$ - матрица перехода от старого базиса B_{R^n} к новому базису $B^*_{R^n}$ пространства R^n, столбцами которой являются коэффициенты разложения векторов $\bar{b}_i^*$ нового базиса по векторам $\bar{b}_i$ старого базиса.

1) Составляем матрицу $U_{B \to B^*} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

2) Находим обратную матрицу U^{-1}, например, методом присоединённой матрицы по формуле $U^{-1} = \dfrac{1}{|U|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{23} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T$, где $|U|$ - определитель матрицы U, A_{ij} - алгебраические дополнения элементов u_{ij} матрицы U, «T» - знак транспонирования матрицы:

$$|U|=\begin{vmatrix}2&5&7\\6&3&4\\5&-2&-3\end{vmatrix}=2\cdot3\cdot(-3)+5\cdot4\cdot5+7\cdot6\cdot(-2)-7\cdot3\cdot5-5\cdot6\cdot(-3)-$$

$$-2\cdot4\cdot(-2)=-1\neq0;$$

$$A_{11}=+\begin{vmatrix}3&4\\-2&-3\end{vmatrix}=-1;\quad A_{12}=-\begin{vmatrix}6&4\\5&-3\end{vmatrix}=38;\quad A_{13}=+\begin{vmatrix}6&3\\5&-2\end{vmatrix}=-27;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix}5&7\\-2&-3\end{vmatrix}=1;\quad A_{22}=+\begin{vmatrix}2&7\\5&-3\end{vmatrix}=-41;\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}2&5\\5&-2\end{vmatrix}=29;$$

$$A_{31}=+\begin{vmatrix}5&7\\3&4\end{vmatrix}=-1;\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}2&7\\6&4\end{vmatrix}=34;\quad A_{33}=+\begin{vmatrix}2&5\\6&3\end{vmatrix}=-24;$$

$$U^{-1}=\frac{1}{(-1)}\cdot\begin{pmatrix}-1&38&-27\\1&-41&29\\-1&34&-24\end{pmatrix}^T=(-1)\cdot\begin{pmatrix}-1&1&-1\\38&-41&34\\-27&29&-24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-38&41&-34\\27&-29&24\end{pmatrix}$$

3) Находим координаты вектора $\overline{x}_{B^*}$:

$$\overline{x}_{B^*}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}_{B^*}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-38&41&-34\\27&-29&24\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot1+(-1)\cdot0+1\cdot(-1)\\-38\cdot1+41\cdot0+(-34)\cdot(-1)\\27\cdot1+(-29)\cdot0+24\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-4\\3\end{pmatrix}$$

Ответ: $\overline{x}_{B^*}=(0,-4,3)$.

41 – 50. Даны векторы $\overline{a},\overline{b},\overline{c},\overline{d}\in R^3$. Требуется вычислить скалярное произведение векторов $\overline{m}\cdot\overline{n}$, если $\overline{m}=\overline{a}+2\overline{b}$, $\overline{n}=3\overline{c}-\overline{d}$ и установить ортогональность векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если: $\overline{a}=(1,2,-1)$, $\overline{b}=(3,0,2)$, $\overline{c}=(-1,1,1)$, $\overline{d}=(8,1,-12)$.

Решение.

1) Находим векторы $\overline{m}$ и $\overline{n}$:

$$\overline{m}=\overline{a}+2\overline{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2\cdot 3\\2+2\cdot 0\\-1+2\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\2\\3\end{pmatrix};$$

$$\overline{n}=3\overline{c}-\overline{d}=3\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}8\\1\\-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot(-1)-8\\3\cdot 1-1\\3\cdot 1-(-12)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11\\2\\15\end{pmatrix}.$$

2) Вычисляем скалярное произведение векторов $\overline{m}\cdot\overline{n}$:

$\overline{m}\cdot\overline{n}=(7,2,3)\cdot(-11,2,15)=7\cdot(-11)+2\cdot 2+3\cdot 15=-28$.

3) Устанавливаем ортогональность векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$: так как $\overline{m}\cdot\overline{n}=-28\neq 0$, то векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ не ортогональны.

Ответ: $\overline{m}\cdot\overline{n}=-28$; $\vec{m}$ и $\vec{n}$ не ортогональны.

51 – 60. Даны векторы $\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3 \in R^3$, образующие базис R^3. Применяя процесс ортогонализации Грама-Шмидта произвольный базис $(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\overline{x}_3)$ пространства R^3 преобразовать в ортогональный базис $(\overline{y}_1,\overline{y}_2,\overline{y}_3)$, если:

$\overline{x}_1=(2,-3,1),\quad \overline{x}_2=(3,-3,1),\quad \overline{x}_3=(2,-1,2).$

Решение.

Согласно методу Грама-Шмидта преобразование произвольного базиса $(\overline{x}_1,\overline{x}_2,\overline{x}_3)$ в ортогональный базис $(\overline{y}_1,\overline{y}_2,\overline{y}_3)$ осуществляется последовательно: 1) строится ортогональная система $(\overline{y}_1)$, где $\overline{y}_1=\overline{x}_1$; 2) строится ортогональная система $(\overline{y}_1,\overline{y}_2)$, где $\overline{y}_2=\overline{x}_2^o$, $\overline{x}_2^o=\overline{x}_2-\alpha_1^{(2)}\overline{y}_1$ - ортогональная составляющая вектора $\overline{x}_2$ относительно ортогональной системы $(\overline{y}_1)$, $\alpha_1^{(2)}=\dfrac{\overline{x}_2\cdot\overline{y}_1}{\overline{y}_1\cdot\overline{y}_1}$; 3) строится ортогональный базис $(\overline{y}_1,\overline{y}_2,\overline{y}_3)$, где $\overline{y}_3=\overline{x}_3^o$, $\overline{x}_3^o=\overline{x}_3-\alpha_1^{(3)}\overline{y}_1-\alpha_2^{(3)}\overline{y}_2$ - ортогональная составляющая вектора $\overline{x}_3$ относительно ортогональной системы $(\overline{y}_1,\overline{y}_2)$, $\alpha_1^{(3)}=\dfrac{\overline{x}_3\cdot\overline{y}_1}{\overline{y}_1\cdot\overline{y}_1}$, $\alpha_2^{(3)}=\dfrac{\overline{x}_3\cdot\overline{y}_2}{\overline{y}_2\cdot\overline{y}_2}$.

1) Строим ортогональную систему $(\overline{y}_1)$, где $\overline{y}_1=\overline{x}_1=(2,-3,1)$.

2) Строим ортогональную систему $(\bar{y}_1, \bar{y}_2)$, где $\bar{y}_2 = \bar{x}_2^o$, $\bar{x}_2^o = \bar{x}_2 - \alpha_1^{(2)} \bar{y}_1$,

$$\alpha_1^{(2)} = \frac{\bar{x}_2 \cdot \bar{y}_1}{\bar{y}_1 \cdot \bar{y}_1} : \ \alpha_1^{(2)} = \frac{(3,-3,1)\cdot(2,-3,1)}{(2,-3,1)\cdot(2,-3,1)} = \frac{3\cdot 2 + (-3)\cdot(-3) + 1\cdot 1}{2^2 + (-3)^2 + 1^2} = \frac{8}{7} \Rightarrow$$

$$\bar{x}_2^o = (3,-3,1) - \frac{8}{7}(2,-3,1) = \left(3 - \frac{16}{7}, -3 + \frac{24}{7}, 1 - \frac{8}{7}\right) = \left(\frac{5}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{1}{7}\right) \Rightarrow$$

$$(\bar{y}_1, \bar{y}_2) = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5/7 \\ 3/7 \\ -1/7 \end{pmatrix} \right).$$

3) Строим ортогональный базис $(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3)$, где $\bar{y}_3 = \bar{x}_3^o$,

$$\bar{x}_3^o = \bar{x}_3 - \alpha_1^{(3)} \bar{y}_1 - \alpha_2^{(3)} \bar{y}_2, \qquad \alpha_1^{(3)} = \frac{\bar{x}_3 \cdot \bar{y}_1}{\bar{y}_1 \cdot \bar{y}_1}, \qquad \alpha_2^{(3)} = \frac{\bar{x}_3 \cdot \bar{y}_2}{\bar{y}_2 \cdot \bar{y}_2}:$$

$$\alpha_1^{(3)} = \frac{(2,-1,2)\cdot(2,-3,1)}{(2,-3,1)\cdot(2,-3,1)} = \frac{2\cdot 2 + (-1)\cdot(-3) + 2\cdot 1}{2^2 + (-3)^2 + 1^2} = \frac{9}{14},$$

$$\alpha_2^{(3)} = \frac{(2,-1,2)\cdot\left(\frac{5}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{1}{7}\right)}{\left(\frac{5}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{1}{7}\right)\cdot\left(\frac{5}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{1}{7}\right)} = \frac{\frac{1}{7}(2,-1,2)\cdot(5,3,-1)}{\frac{1}{49}(5,3,-1)\cdot(5,3,-1)} =$$

$$= 7 \cdot \frac{2\cdot 5 + (-1)\cdot 3 + 2\cdot(-1)}{5^2 + 3^2 + (-1)^2} = 7 \cdot \frac{5}{35} = 1 \Rightarrow$$

$$\bar{x}_2^o = (2,-1,2) - \frac{9}{14}(2,-3,1) - 1\cdot\left(\frac{5}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{1}{7}\right) =$$

$$= \left(2 - \frac{18}{14} - \frac{5}{7}, -1 + \frac{27}{14} - \frac{3}{7}, 2 - \frac{9}{14} + \frac{1}{7}\right) = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right) \Rightarrow$$

$$(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}_3) = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5/7 \\ 3/7 \\ -1/7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 3/2 \end{pmatrix} \right).$$

4) Проверка:

$\bar{y}_1 \cdot \bar{y}_2 = (2 -3{,}1)\cdot\left(\frac{5}{7},\frac{3}{7},-\frac{1}{7}\right) = \frac{10}{7} - \frac{9}{7} - \frac{1}{7} = 0$,

$\bar{y}_1 \cdot \bar{y}_3 = (2 -3{,}1)\cdot\left(0,\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right) = 0 - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0$,

$\bar{y}_2 \cdot \bar{y}_3 = \left(\frac{5}{7},\frac{3}{7},-\frac{1}{7}\right)\cdot\left(0,\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right) = 0 + \frac{3}{14} - \frac{3}{14} = 0 \quad \Rightarrow \quad (\bar{y}_1,\bar{y}_2,\bar{y}_3)$ - ортогональная система векторов, образующая ортогональный базис R^3.

Ответ: $(\bar{y}_1,\bar{y}_2,\bar{y}_3) = \left(\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}5/7\\3/7\\-1/7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1/2\\3/2\end{pmatrix}\right)$.

61 – 70. Найти линейный оператор $\tilde{C}(\bar{x})$ и его матрицу C, если: $\tilde{C} = 3\tilde{B} - \tilde{A}^2$, $\tilde{A}(\bar{x}) = (x_1, x_2 - 2x_3, 3x_1 - 4x_2 - 5x_3)$, $\tilde{B}(\bar{x}) = (2x_1 - x_2, x_3, 2x_2 + 3x_3)$.

Решение.

Действия над линейными операторами выполним с помощью аналогичных действий над их матрицами. Матрицей оператора $\tilde{A}(\bar{x})$ в каноническом базисе $(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3) = \left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ будет матрица, столбцами которой являются векторы $\tilde{A}(\bar{e}_1), \tilde{A}(\bar{e}_2), \tilde{A}(\bar{e}_3)$ - образы векторов канонического базиса.

Замечание. В каноническом базисе $(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)$ матрицей оператора $\tilde{A}(\bar{x})$ будет и матрица, строками которой являются коэффициенты при координатах вектора $\bar{x} = (x_1, x_2, x_3)$ в явном представлении данного оператора.

1) Находим образы векторов канонического базиса $(\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3)$ для операторов $\tilde{A}(\bar{x})$, $\tilde{B}(\bar{x})$ и соответствующие этим операторам матрицы A, B:

$\tilde{A}(\bar{e}_1) = \tilde{A}((1,0,0)) = (1,0,3)$, $\tilde{A}(\bar{e}_2) = \tilde{A}((0,1,0)) = (0,1,-4)$,

$$\tilde{A}(\bar{e}_3) = \tilde{A}((0,0,1)) = (0,-2,-5) \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & -5 \end{pmatrix};$$

$\tilde{B}(\bar{e}_1) = \tilde{B}((1,0,0)) = (2,0,0)$, $\tilde{B}(\bar{e}_2) = \tilde{B}((0,1,0)) = (-1,0,2)$,

$$\tilde{B}(\bar{e}_3) = \tilde{B}((0,0,1)) = (0,1,3) \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2) Находим матрицу $C = 3B - A^2$: $3B = 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 9 \end{pmatrix}$,

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & -5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0\cdot 3 & 1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 0\cdot(-4) & 1\cdot 0 + 0\cdot(-2) + 0\cdot(-5) \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0 + (-2)\cdot 3 & 0\cdot 0 + 1\cdot 1 + (-2)\cdot(-4) & 0\cdot 0 + 1\cdot(-2) + (-2)\cdot(-5) \\ 3\cdot 1 + (-4)\cdot 0 + (-5)\cdot 3 & 3\cdot 0 + (-4)\cdot 1 + (-5)\cdot(-4) & 3\cdot 0 + (-4)\cdot(-2) + (-5)\cdot(-5) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 9 & 8 \\ -12 & 16 & 33 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C = 3B - A^2 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -6 & 9 & 8 \\ -12 & 16 & 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 6 & -9 & -5 \\ 12 & -10 & -24 \end{pmatrix}.$$

3) Находим явное представление линейного оператора $\tilde{C}(\bar{x})$, учитывая, что

$$\tilde{C}(\bar{x}) = C \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}: \tilde{C}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 0 \\ 6 & -9 & -5 \\ 12 & -10 & -24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x_1 - 3x_2 \\ 6x_1 - 9x_2 - 5x_3 \\ 12x_1 - 10x_2 - 24x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{C}(\bar{x}) = (5x_1 - 3x_2, 6x_1 - 9x_2 - 5x_3, 12x_1 - 10x_2 - 24x_3).$$

Ответ:

$$C=\begin{pmatrix}5 & -3 & 0\\ 6 & -9 & -5\\ 12 & -10 & -24\end{pmatrix},\ \tilde{C}(\overline{x})=(5x_1-3x_2, 6x_1-9x_2-5x_3, 12x_1-10x_2-24x_3).$$

71 – 80. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ 0 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 3\end{pmatrix}$ линейного оператора $\tilde{A}(\overline{x})$. Требуется: **а)** найти собственные числа и собственные векторы матрицы;
б) выяснить приводима или нет матрица A к диагональному виду $\Lambda=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0\\ 0 & 0 & \lambda_3\end{pmatrix}$, где $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ - действительные числа, и, если приводима, то записать её диагональную форму.

Решение.

а) Множество собственных чисел матрицы совпадает с множеством корней характеристического уравнения матрицы A: $|A-\lambda\cdot E|=0$, где E - единичная матрица одного порядка с матрицей A, а множество собственных векторов, отвечающих собственному числу λ_i, совпадает с множеством ненулевых решений матричного уравнения $(A-\lambda_i\cdot E)\cdot X=O$, определяемым методом Гаусса.

а1) Составляем характеристическое уравнение матрицы A и записываем его в виде алгебраического уравнения:

$$|A-\lambda\cdot E|=\begin{vmatrix}2-\lambda & 1 & -1\\ 0 & 3-\lambda & -1\\ 0 & -1 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (2-\lambda)\cdot(3-\lambda)^2-(2-\lambda)\cdot(-1)\cdot(-1)=0\ \Rightarrow\ (2-\lambda)\left((3-\lambda)^2-1\right)=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2-\lambda)\left(\lambda^2-6\lambda+8\right)=0\Rightarrow(2-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-4)=0\Rightarrow(\lambda-2)^2(\lambda-4)=0.$$

а2) Находим собственные числа матрицы A, как корни характеристического уравнения (среди них могут быть и кратные): $\lambda_{1,2}=2$, $\lambda_3=4$.

а3) Находим собственные векторы матрицы A, отвечающие различным собственным числам $\lambda_{1,2}$ и λ_3.

а3.1) Составляем матричное уравнение для нахождения собственных векторов $\bar{x}^{(\lambda_{1,2})}$, отвечающих собственному числу $\lambda_{1,2} = 2$: $\quad (A-2E)\cdot X = O$

или

$$\begin{pmatrix} 2-2 & 1 & -1 \\ 0 & 3-2 & -1 \\ 0 & -1 & 3-2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

записываем его в виде системы линейных алгебраических уравнений $\begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$ и решаем методом Гаусса. Полученная система, очевидно, эквивалентна системе $\{x_2 - x_3 = 0$, имеющей специальный (трапециевидный) вид. Такая система имеет бесконечно много решений, которые записывают в виде общего решения. Для записи общего решения этой системы указываем её базисные и свободные неизвестные. Базисными являются неизвестные, столбцы коэффициентов системы при которых образуют базисный минор матрицы этой системы. Такой минор образует, например, столбец коэффициентов при неизвестной x_2: $\left|\, 1 \,\right| = 1 \neq 0$. Поэтому выбираем в качестве базисной – неизвестную x_2, тогда свободными будут неизвестные x_1 и x_3. Свободным неизвестным придаём разные, произвольные постоянные значения: $x_1 = C_1$, $x_3 = C_2$, где $C_1, C_2 \neq 0$, одновременно, и выражаем через них значение базисной неизвестной из уравнения системы: $x_2 = x_3 = C_2$. Тогда общее решение системы, задающее множество всех собственных векторов $\bar{x}^{(\lambda_{1,2})}$, отвечающих собственному числу $\lambda_{1,2} = 2$ будет иметь вид: $\bar{x}^{(\lambda_{1,2})} = (C_1, C_2, C_2)$.

а3.2) Составляем матричное уравнение для нахождения собственных векторов $\bar{x}^{(\lambda_3)}$, отвечающих собственному числу $\lambda_3 = 4$: $\quad (A-4E)\cdot X = O$

или

$$\begin{pmatrix} 2-4 & 1 & -1 \\ 0 & 3-4 & -1 \\ 0 & -1 & 3-4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

записываем его в виде системы линейных алгебраических уравнений: $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ и решаем методом Гаусса. Полученная система, очевидно, эквивалентна системе $\begin{cases} -2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$, имеющей специальный (трапециевидный) вид. Система имеет бесконечно много решений. Для записи её общего решения указываем базисные и свободные неизвестные. Базисный минор матрицы системы образуют столбцы коэффициентов при неизвестных x_1 и x_2: $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Поэтому выбираем в качестве базисных – неизвестные x_1 и x_2, тогда свободной будет неизвестная x_3. Свободной неизвестной придаём произвольное постоянное значение: $x_3 = C_3$, где $C_3 \neq 0$ и выражаем через неё значения базисных неизвестных x_1 и x_2 из уравнений системы специального (трапециевидного) вида, начиная с последнего уравнения: $\begin{cases} -x_2 = x_3 \Rightarrow x_2 = -C_3 \\ -2x_1 = -x_2 + x_3 \Rightarrow -2x_1 = 2C_3 \Rightarrow x_1 = -C_3 \end{cases}$. Тогда общее решение системы, задающее множество всех собственных векторов $\bar{x}^{(\lambda_3)}$, отвечающих собственному числу $\lambda_3 = 4$, будет иметь вид: $\bar{x}^{(\lambda_3)} = (-C_3, -C_3, C_3)$, $C_3 \neq 0$.

б) Матрица A приводима к диагональному виду $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ тогда и только тогда, когда будут выполнены условия $rang(A - \lambda_k E) = n - m_k$ для всех различных λ_k, где n - порядок матрицы A, m_k - кратность собственного числа λ_k, $\sum_k m_k = n$. Если данное условие нарушается хотя бы для одного λ_k, то матрица A к диагональному виду Λ не приводима.

б1) Проверяем выполнение условия $rang(A-\lambda_k E) = n - m_k$ для $\lambda_{1,2} = 2$.

$\lambda_{1,2} = 2$ - собственное число кратности $2 \Rightarrow m_{1,2} = 2 \Rightarrow$

$$rang(A-2E)\overset{?}{=}1:\ rang(A-2E) = rang\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= rang\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = rang\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 1$$ $\Rightarrow$ условие выполняется.

б2) Проверяем выполнение условия $rang(A-\lambda_k E) = n - m_k$ для $\lambda_3 = 4$.

$\lambda_3 = 4$ - собственное число кратности $1 \Rightarrow m_3 = 1 \Rightarrow rang(A-4E)\overset{?}{=}2$:

$$rang(A-4E) = rang\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= rang\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = rang\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 2$$ $\Rightarrow$ условие выполняется.

б3) Делаем вывод: так как условия $rang(A-\lambda_k E) = n - m_k$ выполняются для всех различных λ_k, то матрица A приводима к диагональному виду

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ответ:

а) $\lambda_{1,2} = 2$, $\overline{x}^{(\lambda_{1,2})} = (C_1, C_2, C_2)$, $C_1, C_2 \neq 0$; $\lambda_3 = 4$, $\overline{x}^{(\lambda_3)} = (-C_3, -C_3, C_3)$, $C_3 \neq 0$.

б) Приводима; $\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

81–90. Для квадратичной формы $L(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 + 5x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$ требуется:

а) привести её к каноническому виду методом Лагранжа;

б) привести её к каноническому виду методом ортогональных преобразований;

в) установить её знакоопределённость.

Решение.

Приведение квадратичной формы $L(x_1, x_2, x_3)$ к каноническому виду означает преобразование формы её записи к виду $L^*(y_1, y_2, y_3) = \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \alpha_3 y_3^2$, где $y_i = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ - некоторые действительные числа.

а) Приведение квадратичной формы $L(x_1, x_2, x_3)$ к каноническому виду методом Лагранжа осуществляется последовательным выделением полных квадратов по переменным x_1, x_2, x_3, используя преобразование выделения полного квадрата в квадратном выражении

$$ax^2 + bx = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a}$$

а1) Выделяем полный квадрат по переменной x_1:

$$L(x_1, x_2, x_3) = -2x_1^2 + 5x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3 = (-2x_1^2 + 4x_1x_2) + 5x_2^2 -$$

$$-2x_3^2 + 4x_2x_3 = -2\left(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - x_2^2\right) + 5x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_2x_3 =$$

$$= -2\left((x_1 - x_2)^2 - x_2^2\right) + 5x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_2x_3 = -2(x_1 - x_2)^2 + 7x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_2x_3$$

а2) Выделяем полный квадрат по переменной x_2:

$$L(x_1, x_2, x_3) = -2(x_1 - x_2)^2 + 7\left(x_2^2 + \frac{4}{7}x_2x_3\right) - 2x_3^2 = -2(x_1 - x_2)^2 +$$

$$+7\left(x_2^2 + \frac{4}{7}x_2x_3 + \left(\frac{4}{2\cdot 7}\right)^2 x_3^2 - \left(\frac{4}{2\cdot 7}\right)^2 x_3^2\right) - 2x_3^2 = -2(x_1 - x_2)^2 +$$

$$+7\left(\left(x_2+\frac{2}{7}x_3\right)^2-\frac{4}{49}x_3^2\right)-2x_3^2=-2(x_1-x_2)^2+7\left(x_2+\frac{2}{7}x_3\right)^2-\frac{18}{7}x_3^2.$$

а3) Полагаем: $x_1-x_2=y_1$, $x_2+\dfrac{2}{7}x_3=y_2$, $x_3=y_3$ и получаем канонический вид исходной квадратичной формы $L^*(y_1,y_2,y_3)=-2y_1^2+7y_2^2-\dfrac{18}{7}y_3^2$.

б) Согласно методу ортогональных преобразований квадратичная форма $L(x_1,x_2,x_3)$ имеет канонический вид $L^*(y_1,y_2,y_3)=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2$, где $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ - собственные числа матрицы исходной квадратичной формы.

б1) Записываем матрицу квадратичной формы: $A=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 0\\ 2 & 5 & 2\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}$.

б2)Составляем характеристическое уравнение матрицы A и записываем его в виде алгебраического уравнения:

$$|A-\lambda\cdot E|=\begin{vmatrix}-2-\lambda & 2 & 0\\ 2 & 5-\lambda & 2\\ 0 & 2 & -2-\lambda\end{vmatrix}=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (-2-\lambda)^2\cdot(5-\lambda)-(-2-\lambda)\cdot 2\cdot 2-(-2-\lambda)\cdot 2\cdot 2=0\ \Rightarrow$$

$$(2+\lambda)^2\cdot(5-\lambda)+8(2+\lambda)=0\ \Rightarrow\ (2+\lambda)^2\cdot(5-\lambda)+8(2+\lambda)=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow(2+\lambda)\big((2+\lambda)(5-\lambda)+8\big)=0\ \Rightarrow\ -(2+\lambda)\left(\lambda^2-3\lambda+18\right)=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ -(2+\lambda)\left(\lambda^2-3\lambda+18\right)=0\ \Rightarrow\ (\lambda+2)\left(\lambda+3)(\lambda-6\right)=0.$$

б3) Находим собственные числа матрицы A, как корни характеристического уравнения (среди них могут быть и кратные): $\lambda_1=-3$, $\lambda_2=-2$, $\lambda_3=6$.

б4) Записываем канонический вид исходной квадратичной формы $L^*(y_1,y_2,y_3)=-3y_1^2-2y_2^2+6y_3^2$.

в) Знакоопределённость исходной квадратичной формы $L(x_1,x_2,x_3)$ устанавливаем через знакоопределённость канонической квадратичной формы $L^*(y_1,y_2,y_3)$. Если для любых $y_1,y_2,y_3\neq 0$, одновременно, $L^*(y_1,y_2,y_3)>0$, то квадратичная форма – положительно определена; $L^*(y_1,y_2,y_3)<0$, то квадратичная форма – отрицательно определена;

$L^*(y_1, y_2, y_3) \geq 0$, то квадратичная форма – неотрицательно определена; $L^*(y_1, y_2, y_3) \leq 0$, то квадратичная форма – неположительно определена; во всех других случаях (когда присутствуют одновременно и положительные и отрицательные слагаемые) - квадратичная форма неопределена.

Данная квадратичная форма $L(x_1, x_2, x_3)$ является неопределённой, так как в её каноническом виде присутствуют как положительные, так и отрицательные слагаемые.

Ответ:

а) $L^*(y_1, y_2, y_3) = -2y_1^2 + 7y_2^2 - \dfrac{18}{7}y_3^2$; **б)** $L^*(y_1, y_2, y_3) = -3y_1^2 - 2y_2^2 + 6y_3^2$;

в) Неопределённая.

91 – 100. Требуется:

а) для невырожденной квадратичной формы $L(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ установить её знакоопределённость по критерию Сильвестра;

б) установить тип алгебраической кривой второго порядка $3x^2 + 3y^2 - 4xy + 4x + 4y - 1 = 0$ и построить её, используя метод ортогональных преобразований для квадратичных форм.

Решение.

а1) Записываем матрицу квадратичной формы: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

а2) Проверяем является ли матрица A невырожденной. Для этого вычисляем её определитель $|A|$ и проверяем, равен ли он нулю: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1$.

Так как $|A| = 1 \neq 0$, то матрица A - невырожденная и, следовательно, квадратичная форма также – невырожденная и для исследования её на знакоопределённость можно применить критерий Сильвестра.

а3) Вычисляем угловые миноры матрицы A: $\Delta_1 = |1| = 1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$,

$\Delta_3 = |A| = 1$.

а4) Делаем вывод о знакоопределённости квадратичной формы. Если выполняется условие: $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0$, то квадратичная форма - положительно определена; если выполняется условие: $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0$, то квадратичная форма - отрицательно определена; во всех других случаях квадратичная форма - неопределена.

Так как выполняется условие: $\Delta_1 = 1 > 0, \Delta_2 = 1 > 0, \Delta_3 = 1 > 0$, то по критерию Сильвестра квадратичная форма положительно определена.

б) Алгебраическая кривая второго порядка, заданная уравнением $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, имеет: 1) эллиптический тип, если $AC - B^2 > 0$; 2) гиперболический тип, если $AC - B^2 < 0$; 3) параболический тип, если $AC - B^2 = 0$.

Построение алгебраических кривых второго порядка осуществляется через приведение их общих уравнений к уравнениям:

1) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$, $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} + \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ (эллиптический тип);

2) $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = \pm 1$ (гиперболический тип);

3) $(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)$, $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$ (параболический тип).

Построение кривых, заданных этими уравнениями, считается известным.

Для приведения общего уравнения кривой к нужному виду, используем метод ортогональных преобразований для квадратичных форм. Согласно методу, часть уравнения кривой, представляющую квадратичную форму, приводим к каноническому виду ортогональным преобразованием, матрица которого составляется из ортонормированной системы собственных векторов матрицы квадратичной формы, отвечающих различным собственным числам. В результате исходное уравнение кривой будет приведено к уравнению, не содержащему произведение координат. Полученное уравнение методом выделения полных квадратов приводим к одному из указанных выше уравнений. После чего осуществляем построение кривой в исходной системе координат.

б1) Устанавливаем тип алгебраической кривой второго порядка.

Так как $A = 3$, $2B = -4$, $C = 3$, то $AC - B^2 = 3 \cdot 3 - (-2)^2 = 5 > 0$ и алгебраическая кривая является кривой эллиптического типа.

б2) Выделяем часть уравнения, являющуюся квадратичной формой и записываем её матрицу: $L(x,y)=3x^2+3y^2-4xy \Rightarrow A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & 3\end{pmatrix}$.

б3) Составляем характеристическое уравнение матрицы и находим её собственные числа: $|A-\lambda\cdot E|=\left|\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & 3\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}3-\lambda & -2\\ -2 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (3-\lambda)^2-4=0 \Rightarrow \lambda^2-6\lambda+5=0 \Rightarrow \lambda_1=1,\ \lambda_2=5.$$

б4) Находим собственные векторы матрицы A, отвечающие различным собственным числам λ_1 и λ_2.

б4.1) Составляем матричное уравнение для нахождения собственных векторов $\overline{x}^{(\lambda_1)}$, отвечающих собственному числу $\lambda_1=1$: $(A-1\cdot E)\cdot X=O$

или

$$\left(\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & 3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},$$

записываем его в виде системы линейных алгебраических уравнений $\begin{cases}2x_1-2x_2=0\\ -2x_1+2x_2=0\end{cases}$ и решаем методом Гаусса. Полученная система, очевидно, эквивалентна системе $\{x_1-x_2=0$, имеющей специальный (трапециевидный) вид. Такая система имеет бесконечно много решений, которые записывают в виде общего решения. Общее решение системы, задающее множество всех собственных векторов $\overline{x}^{(\lambda_1)}$, отвечающих собственному числу $\lambda_1=1$, будет иметь вид: $\overline{x}^{(\lambda_1)}=(C_1,C_1)$, где $C_1\neq 0$ - произвольная постоянная.

б4.2) Составляем матричное уравнение для нахождения собственных векторов $\overline{x}^{(\lambda_2)}$, отвечающих собственному числу $\lambda_2=5$: $(A-5\cdot E)\cdot X=O$

или

$$\left(\begin{pmatrix}3 & -2\\ -2 & 3\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}-2 & -2\\ -2 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},$$

записываем его в виде системы линейных алгебраических уравнений $\begin{cases}-2x_1-2x_2=0\\ -2x_1-2x_2=0\end{cases}$ и решаем методом Гаусса. Полученная система, очевидно, эквивалентна системе $\{x_1 + x_2 = 0$, имеющей специальный (трапециевидный) вид. Такая система имеет бесконечно много решений, которые записывают в виде общего решения. Общее решение системы, задающее множество всех собственных векторов $\overline{x}^{(\lambda_2)}$, отвечающих собственному числу $\lambda_2 = 5$, будет иметь вид: $\overline{x}^{(\lambda_2)} = (-C_2, C_2)$, где $C_2 \neq 0$ - произвольная постоянная.

б5) Строим ортонормированную систему собственных векторов $(\overline{e}_1, \overline{e}_2)$, отвечающих собственным числам λ_1, λ_2, где $\overline{e}_1 \cdot \overline{e}_2 = 0$, $|\overline{e}_1| = 1$, $|\overline{e}_2| = 1$.

В качестве вектора $\overline{e}_1$ берём вектор $\dfrac{\overline{x}^{(\lambda_1)}}{\left|\overline{x}^{(\lambda_1)}\right|}$, $\overline{x}^{(\lambda_1)} = (C_1, C_1)$, где $C_1 = 1$ (C_1 можно положить равным любому ненулевому числу): $\overline{e}_1 = \dfrac{(1,1)}{|(1,1)|} = \dfrac{(1,1)}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

В качестве вектора $\overline{e}_2$ берём вектор $\dfrac{\overline{x}^{(\lambda_2)}}{\left|\overline{x}^{(\lambda_2)}\right|}$, $\overline{x}^{(\lambda_2)} = (-C_2, C_2)$, где C_2 находим из условия ортогональности вектора $\overline{x}^{(\lambda_1)} = (C_1, C_1)$, где $C_1 = 1$, вектору $\overline{x}^{(\lambda_2)} = (-C_2, C_2)$:
$\overline{x}^{(\lambda_1)} \cdot \overline{x}^{(\lambda_2)} = (1,1) \cdot (-C_2, C_2) = 1 \cdot (-C_2) + 1 \cdot C_2 = 0 \cdot C_2 = 0$. Так как равенство справедливо при любом значении C_2, то положим $C_2 = 1$. Тогда $\overline{e}_2 = \dfrac{(-1,1)}{|(-1,1)|} = \dfrac{(-1,1)}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,1) = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

б6) Строим матрицу U ортогональных преобразований: $U = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

и находим ортогональное преобразование переменных $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = U \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, приводящее квадратичную форму $L(x,y)$ к каноническому виду $L^*(u,v)$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}u - \frac{1}{\sqrt{2}}v \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}u + \frac{1}{\sqrt{2}}v \end{cases}.$$

б7) Находим уравнение кривой в новых переменных u,v:

$$3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}u - \frac{1}{\sqrt{2}}v\right)^2 + 3\left(\frac{1}{\sqrt{2}}u + \frac{1}{\sqrt{2}}v\right)^2 - 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}u - \frac{1}{\sqrt{2}}v\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}u + \frac{1}{\sqrt{2}}v\right) +$$

$$+4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}u - \frac{1}{\sqrt{2}}v\right) + 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}u + \frac{1}{\sqrt{2}}v\right) - 1 = 0 \Rightarrow u^2 + 5v^2 + 4\sqrt{2}u - 1 = 0.$$

б8) Приводим уравнение $u^2 + 5v^2 + 4\sqrt{2}u - 1 = 0$, методом выделения полных квадратов по переменным u,v, к виду $\frac{(u-u_0)^2}{a^2} + \frac{(v-v_0)^2}{b^2} = 1$, являющемуся в системе координат Ouv уравнением эллипса с центром (u_0, v_0):

$$u^2 + 5v^2 + 4\sqrt{2}u - 1 = 0 \Rightarrow \left(u^2 + 4\sqrt{2}u\right) + 5v^2 - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\left(u^2 + 4\sqrt{2}u + \left(\frac{4\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{4\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) + 5v^2 - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(u + 2\sqrt{2}\right)^2 - (2\sqrt{2})^2 + 5v^2 - 1 = 0 \Rightarrow \left(u + 2\sqrt{2}\right)^2 + 5v^2 = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\left(u - (-2\sqrt{2})\right)^2}{3^2} + \frac{\left(v - 0\right)^2}{\left(3/\sqrt{5}\right)^2} = 1$$ - эллипс с центром $(-2\sqrt{2}, 0) \approx (-2.8, 0)$ и

полуосями $a = 3$, $b = \frac{3}{\sqrt{5}} \approx 1.3$ в системе координат Ouv.

б9) Строим эллипс в исходной системе координат Oxy.

б9.1) В исходной системе координат Oxy изображаем векторы ортонормированного базиса $(\overline{e}_1, \overline{e}_2)$, где $\overline{e}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx \left(0.7, 0.7\right)$,

$\overline{e}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \approx (-0.7, 0.7)$, вдоль которых проводим пунктирной линией координатные оси Ou и Ov.

б9.2) В системе координат Ouv известным способом изображаем сплошной линией эллипс с центром $O^*(-2\sqrt{2},0) \approx (-2.8,0)$ и полуосями $a = 3$, $b = \frac{3}{\sqrt{5}} \approx 1.3$, вписывая его в основной прямоугольник, изображаемый пунктирной линией (**Рис.1**).

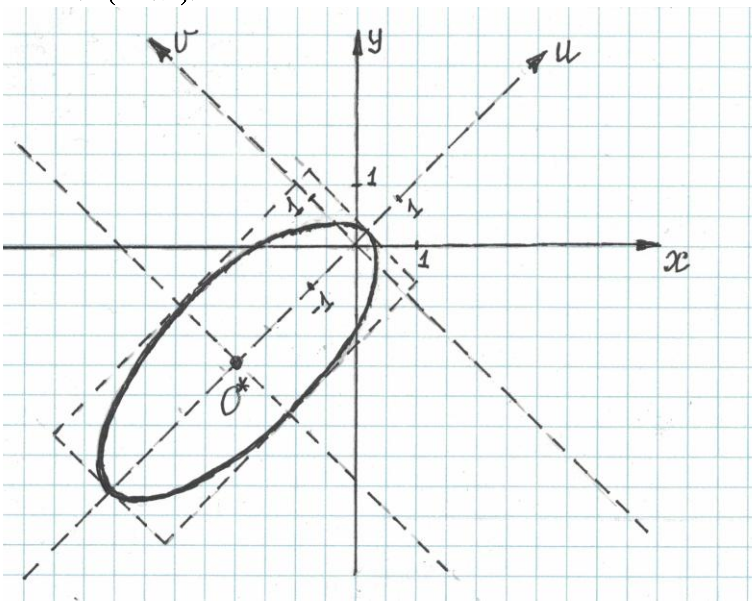


Рис.1

Ответ:

а) Квадратичная форма положительно определена.

б) Эллиптический тип. Эллипс (**Рис.1**).

Раздел II. Функции нескольких переменных.

101 – 110. Найти частные производные: $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ и первый дифференциал dz функции $z = arctg\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

Первый дифференциал функции $z = f(x, y)$ имеет вид $dz = z'_x dx + z'_y dy$.

Частные производные функции $z = f(x, y)$ находятся по обычным правилам дифференцирования функции одной переменной, в предположении, что если производная берётся по аргументу x (аргументу y), то другой аргумент y (аргумент x) считается постоянным.

Решение.

1) Находим частные производные первого порядка $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции

$$z = arctg\left(\frac{x}{y}\right):\ \frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = \left(arctg\left(\frac{x}{y}\right)\right)'_x = \left(arctgu\Big|_{u=\frac{x}{y}}\right)'_x = (arctgu)'_u \cdot u'_x =$$

$$= \frac{1}{1+u^2}u'_x = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_x = \left[\left(\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{1}{y}\cdot(x)'_x = \frac{1}{y}\right] = \frac{y}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = \left(arctg\left(\frac{x}{y}\right)\right)'_y = \left(arctgu\Big|_{u=\frac{x}{y}}\right)'_y = (arctgu)'_u \cdot u'_y = \frac{1}{1+u^2}u'_y =$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_y = \left[\left(\frac{x}{y}\right)'_y = x\left(\frac{1}{y}\right)'_y = x\left(-\frac{(y)'_y}{y^2}\right) = -\frac{x}{y^2}\right] = -\frac{x}{x^2+y^2}.$$

2) Находим первый дифференциал dz:

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = \frac{y}{x^2+y^2}dx + \left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right)dy = \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}.$$

Ответ: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $dz = \dfrac{ydx - xdy}{x^2+y^2}$.

111 – 120. Вычислить приближённо (с помощью первого дифференциала) значение функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x_0, y_0)$, если $z = arctg\left(\frac{x}{y}\right)$, $M(0.03, 0.98)$.

Формула для приближённого вычисления значений функции $z = f(x, y)$ в малой окрестности точки $M(x_0, y_0)$, в которой функция дифференцируема, имеет вид: $f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)\Delta x + f'_y(x_0,y_0)\Delta y$, где $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$. Формула тем точнее, чем меньше значение $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$.

Решение.

1) Находим частные производные первого порядка функции $z = arctg\left(\frac{x}{y}\right)$:

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = f'_x = \frac{y}{x^2 + y^2}\,;\; z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = f'_y = -\frac{x}{x^2 + y^2}\,.$$

2) Значения аргументов $x = 0.03$ и $y = 0.98$ представляем в виде $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$ таким образом, чтобы значение функции и значения её частных производных в точке $M(x_0, y_0)$ вычислялись без использования инженерного калькулятора, а значения Δx и Δy были как можно меньшими по величине:

$x = 0.03 = x_0 + \Delta x = 0 + 0.03$, где $x_0 = 0$, $\Delta x = 0.03$;

$y = 0.98 = y_0 + \Delta y = 1 + (-0.02)$, где $y_0 = 1$, $\Delta y = -0.02$.

3) Вычисляем значение функции $z = arctg\left(\frac{x}{y}\right)$ и значения её частных производных в точке $M(0,1)$:

$$f(0,1) = 0\,,\; f'_x(0,1) = \frac{1}{0^2 + 1^2} = 1\,,\; f'_y(0,1) = -\frac{0}{0^2 + 1^2} = 0\,.$$

4) Вычисляем приближённо значение функции $f(0.03, 0.98)$:

$$f(0.03, 0.98) \approx 0 + 1 \cdot 0.03 + 0 \cdot (-0.02) = 0.03\,.$$

Ответ: $f(0.03, 0.98) \approx 0.03$.

121 – 130. Найти: **а)** производную $\frac{\partial u}{\partial \vec{\ell}}$ функции $u = f(x, y, z)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ по направлению вектора $\vec{l}$, **б)** градиент функции $grad\, u$ и его модуль $|grad\, u|$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, если $u = \ln(x + y^2 + z^3)$**,** $\vec{\ell} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 4\vec{k}$**,** $M_0(1,2,1)$**.**

Градиент $grad\, u$ функции $u = f(x, y, z)$ находится по формуле $grad\, u = u'_x\ \vec{i} + u'_y\ \vec{j} + u'_z\ \vec{k} = \left(u'_x, u'_y, u'_z\right).$

Производная $\frac{\partial u}{\partial \vec{\ell}}$ функции $u = f(x, y, z)$ по направлению вектора $\vec{\ell} = \ell_x \vec{i} + \ell_y \vec{j} + \ell_z \vec{k}$ находится по формуле $\frac{\partial u}{\partial \vec{\ell}} = u'_x \cos\alpha + u'_y \cos\beta + u'_z \cos\gamma$, где $\cos\alpha = \frac{\ell_x}{\lvert\vec{\ell}\rvert}$, $\cos\beta = \frac{\ell_y}{\lvert\vec{\ell}\rvert}$, $\cos\gamma = \frac{\ell_z}{\lvert\vec{\ell}\rvert}$, $\lvert\vec{\ell}\rvert = \sqrt{\ell_x^2 + \ell_y^2 + \ell_z^2}$.

Решение.

а1) Находим частные производные первого порядка функции $u = \ln(x + y^2 + z^3)$**:**

$$u'_x = (\ln(x + y^2 + z^3))'_x = \left(\ln t\Big|_{t = x + y^2 + z^3}\right)'_x = (\ln t)'_t \cdot t'_x = \frac{1}{t} \cdot t'_x =$$

$$= \frac{(x + y^2 + z^3)'_x}{x + y^2 + z^3} = \frac{(x)'_x + (y^2)'_x + (z^3)'_x}{x + y^2 + z^3} = \frac{1 + 0 + 0}{x + y^2 + z^3} = \frac{1}{x + y^2 + z^3};$$

$$u'_y = (\ln(x + y^2 + z^3))'_y = \left(\ln t\Big|_{t = x + y^2 + z^3}\right)'_y = (\ln t)'_t \cdot t'_y = \frac{1}{t} \cdot t'_y =$$

$$= \frac{(x + y^2 + z^3)'_y}{x + y^2 + z^3} = \frac{(x)'_y + (y^2)'_y + (z^3)'_y}{x + y^2 + z^3} = \frac{0 + 2y + 0}{x + y^2 + z^3} = \frac{2y}{x + y^2 + z^3};$$

$$u'_z = (\ln(x + y^2 + z^3))'_z = \left(\ln t\Big|_{t = x + y^2 + z^3}\right)'_z = (\ln t)'_t \cdot t'_z = \frac{1}{t} \cdot t'_z =$$

$$=\frac{(x+y^2+z^3)'_z}{x+y^2+z^3}=\frac{(x)'_z+(y^2)'_z+(z^3)'_z}{x+y^2+z^3}=\frac{0+0+3z^2}{x+y^2+z^3}=\frac{3z^2}{x+y^2+z^3}.$$

а2) Вычисляем значения частных производных в точке $M_0(1,2,1)$:

$$u'_x(M_0)=\frac{1}{1+2^2+1^3}=\frac{1}{6},\ u'_y(M_0)=\frac{2\cdot 2}{1+2^2+1^3}=\frac{4}{6},\ u'_y(M_0)=\frac{3\cdot 1^2}{1+2^2+1^3}=\frac{3}{6}$$

а3) Вычисляем направляющие косинусы вектора $\vec{\ell}=2\vec{i}+4\vec{j}+4\vec{k}=(2,4,4)$:

$$|\vec{\ell}|=\sqrt{2^2+4^2+4^2}=6,\ \cos\alpha=\frac{2}{6}=\frac{1}{3},\ \cos\beta=\frac{4}{6}=\frac{2}{3},\ \cos\gamma=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}.$$

а4) Вычисляем значение $\frac{\partial u}{\partial\vec{\ell}}$ в точке $M_0(1,2,1)$:

$$\frac{\partial u}{\partial\vec{\ell}}(M_0)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}+\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{3}+\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1+8+6}{18}=\frac{15}{18}.$$

б1) Находим значение градиента функции $grad\,u$ в точке $M_0(1,2,1)$:

$$gradu(M_0)=\frac{1}{6}\cdot\vec{i}+\frac{4}{6}\cdot\vec{j}+\frac{4}{6}\cdot\vec{k}=\left(\frac{1}{6},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right).$$

б2) Вычисляем $|\,grad\,u\,|$ в точке $M_0(1,2,1)$:

$$|\,gradu(M_0)\,|=\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{4}{6}\right)^2+\left(\frac{4}{6}\right)^2}=\sqrt{\frac{1+16+16}{6^2}}=\frac{\sqrt{33}}{6}.$$

Ответ: а) $\frac{\partial u}{\partial\vec{\ell}}(M_0)=\frac{15}{18}$; **б)** $gradu(M_0)=\left(\frac{1}{6},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$, $|\,gradu(M_0)\,|=\frac{\sqrt{33}}{6}$.

131 – 140. Найти дифференциал второго порядка d^2z функции $z=\ln(x^2+y^3)\cdot$

Дифференциал второго порядка функции $z=f(x,y)$ имеет вид $d^2z=z''_{xx}(dx)^2+2z''_{xy}dxdy+z''_{yy}(dy)^2\cdot$

Решение.

1) Находим частные производные первого порядка функции $z=\ln(x^2+y^3)$:

$$z'_x=\left(\ln(x^2+y^3)\right)'_x=\left(\ln u\big|_{u=x^2+y^3}\right)'_x=(\ln u)'_u\big|_{u=x^2+y^3}\cdot u'_x=$$

$$=\frac{1}{x^2+y^3}\cdot\left(x^2+y^3\right)_x' = \left[\left(x^2\right)_x' = 2x, \quad \left(y^3\right)_x' = 0\right] = \frac{2x}{x^2+y^3};$$

$$z_y' = \left(\ln(x^2+y^3)\right)_y' = \left(\ln u\big|_{u=x^2+y^3}\right)_y' = (\ln u)_u'\big|_{u=x^2+y^3}\cdot u_y' =$$

$$=\frac{1}{x^2+y^3}\cdot\left(x^2+y^3\right)_y' = \left[\left(x^2\right)_y' = 0, \quad \left(y^3\right)_y' = 3y^2\right] = \frac{3y^2}{x^2+y^3};$$

2) Находим частные производные второго порядка функции $z = \ln(x^2+y^3)$:

$$z_{xx}'' = \left(z_x'\right)_x' = \left(\frac{2x}{x^2+y^3}\right)_x' = \frac{(2x)_x'\cdot(x^2+y^3)-(2x)\cdot(x^2+y^3)_x'}{(x^2+y^3)^2} =$$

$$=\left[(2x)_x' = 2, \left(x^2\right)_x' = 2x, \left(y^3\right)_x' = 0\right] = \frac{2(x^2+y^3)-2x\cdot 2x}{(x^2+y^3)^2} = \frac{2y^3-2x^2}{(x^2+y^3)^2};$$

$$z_{xy}'' = \left(z_x'\right)_y' = \left(\frac{2x}{x^2+y^3}\right)_y' = \frac{(2x)_y'\cdot(x^2+y^3)-(2x)\cdot(x^2+y^3)_y'}{(x^2+y^3)^2} =$$

$$=\left[(2x)_y' = 0, \left(x^2\right)_y' = 0, \left(y^3\right)_y' = 3y^2\right] = \frac{0\cdot(x^2+y^3)-2x\cdot 3y^2}{(x^2+y^3)^2} = \frac{-6xy^2}{(x^2+y^3)^2};$$

$$z_{yy}'' = \left(z_y'\right)_y' = \left(\frac{3y^2}{x^2+y^3}\right)_y' = \frac{(3y^2)_y'\cdot(x^2+y^3)-(3y^2)\cdot(x^2+y^3)_y'}{(x^2+y^3)^2} =$$

$$=\left[(3y^2)_y' = 6y, \left(x^2\right)_y' = 0, \left(y^3\right)_y' = 3y^2\right] = \frac{6y\cdot(x^2+y^3)-3y^2\cdot 3y^2}{(x^2+y^3)^2} =$$

$$=\frac{6x^2y-3y^4}{(x^2+y^3)^2}.$$

3) Находим дифференциал второго порядка d^2z:

$$d^2z = \frac{2y^3-2x^2}{(x^2+y^3)^2}(dx)^2 - \frac{12xy^2}{(x^2+y^3)^2}dxdy + \frac{6x^2y-3y^4}{(x^2+y^3)^2}(dy)^2.$$

Ответ: $d^2z = \frac{2y^3-2x^2}{(x^2+y^3)^2}(dx)^2 - \frac{12xy^2}{(x^2+y^3)^2}dxdy + \frac{6x^2y-3y^4}{(x^2+y^3)^2}(dy)^2$

141 – 150. Найти производную $\dfrac{dy}{dx}$ функции $y = f(x)$, заданной неявно уравнением $y^3 = 3x^2\sin(yx)$.

Производная $\dfrac{dy}{dx}$ функции $y = f(x)$, заданной неявно уравнением $F(x, y) = 0$ находится по формуле $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$.

Решение.

1) Неявное уравнение записываем в виде $F(x, y) = 0$: $y^3 = 3x^2\sin(yx) \Rightarrow$ $y^3 - 3x^2\sin(yx) = 0$, где $F(x, y) = y^3 - 3x^2\sin(yx)$.

2) Находим частные производные F'_x, F'_y:

$$F'_x = \frac{\partial}{\partial x}(F(x, y)) = \left(y^3 - 3x^2\sin(xy)\right)'_x = \left(y^3\right)'_x - \left(3x^2\cdot\sin(xy)\right)'_x,$$

$$\left(y^3\right)'_x = 0, \left(3x^2\sin(xy)\right)'_x = \left(3x^2\right)'_x\cdot\sin(xy) + 3x^2\left(\sin(xy)\right)'_x, \left(3x^2\right)'_x = 6x,$$

$$(\sin(xy))_x{}' = \left(\sin u\big|_{u=xy}\right)'_x = (\sin u)'_u\big|_{u=xy}\cdot u'_x = \cos(xy)\cdot(xy)'_x =$$

$$= \cos(xy)\cdot y\cdot(x)'_x = \cos(xy)\cdot y\cdot 1 = y\cos(xy) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F'_x = -6x\sin(xy) - 3x^2\cdot y\cos(xy);$$

$$F'_y = \frac{\partial}{\partial y}(F(x, y)) = \left(y^3 - 3x^2\sin(xy)\right)'_y = \left(y^3\right)'_y - \left(3x^2\cdot\sin(xy)\right)'_y,$$

$$\left(y^3\right)'_y = 3y^2, \left(3x^2\sin(xy)\right)'_x = 3x^2\left(\sin(xy)\right)'_y, \left(3x^2\right)'_y = 0,$$

$$(\sin(xy))_y{}' = \left(\sin u\big|_{u=xy}\right)'_y = (\sin u)'_u\big|_{u=xy}\cdot u'_y = \cos(xy)\cdot(xy)'_y =$$

$$= \cos(xy)\cdot x\cdot(y)'_y = \cos(xy)\cdot x\cdot 1 = x\cos(xy) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F'_y = 3y^2 - 3x^2\cdot x\cos(xy) = 3y^2 - 3x^3\cos(xy).$$

3) Находим производную $\dfrac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}=-\frac{-6x\sin(xy)-3x^2\cdot y\cos(xy)}{3y^2-3x^3\cos(xy)}=\frac{x^2y\cos(xy)+2x\sin(xy)}{y^2-x^3\cos(xy)}.$$

Ответ: $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2y\cos(xy)+2x\sin(xy)}{y^2-x^3\cos(xy)}$.

151 – 160. Требуется:

а) найти частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=f(x,y)$, заданной неявно уравнением $z^3+3xyz+xy=0$**; б)** найти частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x}$**,** $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ и $\dfrac{\partial v}{\partial x}$**,** $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ для функций $u=f(x,y)$ и $v=g(x,y)$, заданных неявно системой уравнений $\begin{cases} xy+u^2=-y \\ uv+y^2=0 \end{cases}$**.**

Частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z=f(x,y)$, заданной неявно уравнением $F(x,y,z)=0$ находятся по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}.$$

Частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x}$ для функций $u=f(x,y)$ и $v=g(x,y)$, заданных неявно системой уравнений $\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$ находят как решение системы линейных алгебраических уравнений $\begin{cases} F'_x(x,y,u,v)=0 \\ G'_x(x,y,u,v)=0 \end{cases}$, определителем которой является определитель Якоби $I=\begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix}\neq 0$.

Частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$ для функций $u = f(x,y)$ и $v = g(x,y)$, заданных неявно системой уравнений $\begin{cases} F(x,y,u,v)=0 \\ G(x,y,u,v)=0 \end{cases}$ находят как решение системы линейных алгебраических уравнений $\begin{cases} F'_y(x,y,u,v)=0 \\ G'_y(x,y,u,v)=0 \end{cases}$, определителем которой является определитель Якоби $I = \begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix} \neq 0$.

Решение.

а1) Неявное уравнение записываем в виде $F(x,y,z)=0$ **:** $z^3+3xyz+xy=0$

а2) Находим частные производные F'_x, F'_y, F'_z:

$$F'_x = \frac{\partial}{\partial x}(F(x,y,z)) = \left(z^3+3xyz+xy\right)'_x = \left(z^3\right)'_x + (3xyz)'_x + \left(xy\right)'_x$$

$$\left(z^3\right)'_x = 0, \left(3xyz\right)'_x = 3yz\cdot(x)'_x = 3yz\cdot 1 = 3yz, \left(xy\right)'_x = y(x)'_x = y\cdot 1 = y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F'_x = 3yz + y;$$

$$F'_y = \frac{\partial}{\partial y}(F(x,y,z)) = \left(z^3+3xyz+xy\right)'_y = \left(z^3\right)'_y + (3xyz)'_y + \left(xy\right)'_y$$

$$\left(z^3\right)'_y = 0, \left(3xyz\right)'_y = 3xz\cdot(y)'_y = 3xz\cdot 1 = 3xz, \left(xy\right)'_y = x(y)'_y = x\cdot 1 = x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F'_y = 3xz + x;$$

$$F'_z = \frac{\partial}{\partial z}(F(x,y,z)) = \left(z^3+3xyz+xy\right)'_z = \left(z^3\right)'_z + (3xyz)'_z + \left(xy\right)'_z$$

$$\left(z^3\right)'_z = 3z^2, \left(3xyz\right)'_z = 3xy\cdot(z)'_z = 3xy\cdot 1 = 3xy, \left(xy\right)'_z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F'_z = 3z^2 + 3xy;$$

а3) Находим частные производные $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{3yz+y}{3z^2+3xy},\ \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{3xz+x}{3z^2+3xy}.$$

б1) Неявную систему уравнений записываем в виде $\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\G(x,y,u,v)=0\end{cases}$:

$$\begin{cases}xy+u^2=-y\\uv+y^2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}xy+u^2+y=0\\uv+y^2\ \ =\ \ 0\end{cases}.$$

б2) Составляем систему уравнений, дифференцируя каждое уравнение по x и решаем его относительно неизвестных $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial x}$:

$$F'_x=\frac{\partial}{\partial x}(F(x,y,u,v))=\left(xy+u^2+y\right)'_x=\left(xy\right)'_x+\left(u^2\right)'_x+(y)'_x=$$

$$=y\cdot(x)'_x+2uu'_x+0=y\cdot 1+2uu'_x=y+2u\frac{\partial u}{\partial x};$$

$$G'_x=\frac{\partial}{\partial x}(G(x,y,u,v))=\left(uv+y^2\right)'_x=u'_xv+uv'_x+\left(y^2\right)'_x=u'_xv+uv'_x+0=$$

$$=v\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial v}{\partial y};$$

$$\begin{cases}y+2u\dfrac{\partial u}{\partial x}=0\\v\dfrac{\partial u}{\partial x}+u\dfrac{\partial v}{\partial y}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2u\dfrac{\partial u}{\partial x}\qquad=-y\\v\dfrac{\partial u}{\partial x}+u\dfrac{\partial v}{\partial y}=0\end{cases}\Rightarrow\text{ (по формулам Крамера) }\Rightarrow$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\Delta_1}{\Delta},\qquad\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\Delta_2}{\Delta},\qquad\text{где}\qquad\Delta=I=\begin{vmatrix}F'_u&F'_v\\G'_u&G'_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2u&0\\v&u\end{vmatrix}=2u^2\neq 0,$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}-y&0\\0&u\end{vmatrix}=-yu,\ \Delta_2=\begin{vmatrix}2u&-y\\v&0\end{vmatrix}=yv\ \Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-yu}{2u^2}=\frac{-y}{2u},\ \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{yv}{2u^2}.$$

б3) Составляем систему уравнений, дифференцируя каждое уравнение по y и решаем его относительно неизвестных $\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial y}$:

$$F'_y=\frac{\partial}{\partial y}(F(x,y,u,v))=\left(xy+u^2+y\right)'_y=\left(xy\right)'_y+\left(u^2\right)'_y+(y)'_y=$$

$$=x\cdot(y)'_y+2uu'_y+1=x\cdot 1+2uu'_x+1=x+2u\frac{\partial u}{\partial x}+1;$$

$$G'_y=\frac{\partial}{\partial y}(G(x,y,u,v))=\left(uv+y^2\right)'_y=u'_yv+uv'_y+\left(y^2\right)'_y=u'_xv+uv'_x+2y=$$

$$=v\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial v}{\partial y}+2y;$$

$$\begin{cases} x+2u\dfrac{\partial u}{\partial x}+1=0 \\ v\dfrac{\partial u}{\partial x}+u\dfrac{\partial v}{\partial y}+2y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2u\dfrac{\partial u}{\partial x}= \quad -x-1 \\ v\dfrac{\partial u}{\partial x}+u\dfrac{\partial v}{\partial y}=-2y \end{cases} \Rightarrow \text{(по формулам Крамера)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \text{где} \quad \Delta=I=\begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2u & 0 \\ v & u \end{vmatrix}=2u^2\neq 0,$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} -x-1 & 0 \\ -2y & u \end{vmatrix}=-(x+1)u, \; \Delta_2=\begin{vmatrix} 2u & -x-1 \\ v & -2y \end{vmatrix}=-4yu+(x+1)v \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-(x+1)u}{2u^2}=\frac{-(x+1)}{2u}, \; \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{(x+1)v-4yu}{2u^2}.$$

Ответ: а) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{3yz+y}{3z^2+3xy}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{3xz+x}{3z^2+3xy}$.

б) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{-y}{2u}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{yv}{2u^2}$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{-(x+1)}{2u}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{(x+1)v-4yu}{2u^2}$, $2u^2\neq 0$.

161 – 170. Составить уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z=e^{\frac{x}{y}}+e^{\frac{x}{z}}-y$ в точке $M_0\left(0,1,1\right)$.

Уравнение касательной плоскости к поверхности, заданной уравнением $z=f(x,y)$ в точке $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ имеет вид:

$$z=z_0+f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Уравнение нормали к поверхности, заданной уравнением $z=f(x,y)$ в точке $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ имеет вид:

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

Уравнение касательной плоскости к поверхности, заданной неявным уравнением $F(x,y,z)=0$ в точке $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ имеет вид:

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0\cdot$$

Уравнение нормали к поверхности, заданной неявным уравнением $F(x,y,z)=0$ в точке $M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ имеет вид:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

Решение.

1) Уравнение поверхности записываем в виде $F(x,y,z)=0$, так как оно является неявным: $z-e^{\frac{x}{y}}-e^{\frac{x}{z}}+y=0$**.**

2) Находим частные производные F'_x, F'_y, F'_z и их значения в точке $M_0\left(0,1,1\right)$**:**

$$F'_x=\frac{\partial}{\partial x}(F(x,y,z))=\left(z-e^{\frac{x}{y}}-e^{\frac{x}{z}}+y=0\right)'_x=\left(z\right)'_x-\left(e^{\frac{x}{y}}\right)'_x-\left(e^{\frac{x}{z}}\right)'_x+\left(y\right)'_x$$

$$\left(z\right)'_x=0,\qquad \left(e^{\frac{x}{y}}\right)'_x=e^{\frac{x}{y}}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_x=e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y},\qquad \left(e^{\frac{x}{z}}\right)'_x=e^{\frac{x}{z}}\cdot\left(\frac{x}{z}\right)'_x=e^{\frac{x}{z}}\cdot\frac{1}{z},$$

$$\left(y\right)'_x=0\;\Rightarrow\; F'_x=-e^{\frac{x}{y}}\cdot\frac{1}{y}-e^{\frac{x}{z}}\cdot\frac{1}{z}\;\Rightarrow F'_x(0,1,1)=-e^{\frac{0}{1}}\cdot\frac{1}{1}-e^{\frac{0}{1}}\cdot\frac{1}{1}=-2.$$

$$F'_y=\frac{\partial}{\partial y}(F(x,y,z))=\left(z-e^{\frac{x}{y}}-e^{\frac{x}{z}}+y=0\right)'_y=\left(z\right)'_y-\left(e^{\frac{x}{y}}\right)'_y-\left(e^{\frac{x}{z}}\right)'_y+\left(y\right)'_y$$

$$\left(z\right)'_y=0,\quad \left(e^{\frac{x}{y}}\right)'_y=e^{\frac{x}{y}}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)'_y=e^{\frac{x}{y}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right),\quad \left(e^{\frac{x}{z}}\right)'_y=0,\quad \left(y\right)'_y=1\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow F'_y = e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{x}{y^2} + 1 \Rightarrow F'_y(0,1,1) = e^{\frac{0}{1}} \cdot \frac{0}{1^2} + 1 = 1.$$

$$F'_z = \frac{\partial}{\partial z}(F(x,y,z)) = \left(z - e^{\frac{x}{y}} - e^{\frac{x}{z}} + y = 0 \right)'_z = (z)'_z - \left(e^{\frac{x}{y}} \right)'_z - \left(e^{\frac{x}{z}} \right)'_z + (y)'_z$$

$$(z)'_z = 1, \quad \left(e^{\frac{x}{y}} \right)'_z = 0, \quad \left(e^{\frac{x}{z}} \right)'_z = e^{\frac{x}{z}} \cdot \left(\frac{x}{z} \right)'_z = e^{\frac{x}{z}} \cdot \left(-\frac{x}{z^2} \right), \quad (y)'_z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F'_z = 1 + e^{\frac{x}{z}} \cdot \frac{x}{z^2} \Rightarrow F'_z(0,1,1) = 1 + e^{\frac{1}{1}} \cdot \frac{0}{1^2} = 1.$$

3) Составляем уравнение касательной плоскости:

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + F'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + F'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-2)(x-0) + 1 \cdot (y-1) + 1 \cdot (z-1) = 0 \Rightarrow 2x - y - z + 2 = 0$$

4) Составляем уравнение нормали:

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)} = \frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)} = \frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)} \Rightarrow \frac{x-0}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}.$$

Ответ: $2x - y - z + 2 = 0$, $\frac{x}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$.

171 – 180. Найти локальные экстремумы функции $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

Для нахождения локальных экстремумов дифференцируемой функции $z = f(x,y)$ необходимо:

1) Найти область определения $D(z)$ функции.

2) Найти первые частные производные z'_x и z'_y функции.

3) Решить систему уравнений (необходимое условие экстремума) $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$ и найти точки $M_i(x_i, y_i) \in D(z)$ возможного локального экстремума функции.

4) Найти вторые частные производные $A(x,y) = z''_{xx}$, $B(x,y) = z''_{xy}$, $C(x,y) = z''_{yy}$; составить выражение $D(x,y) = A \cdot C - B^2$ и вычислить значения $D\big|_{M_i}$ и $A\big|_{M_i}$ в каждой точке M_i возможного экстремума.

5) Сделать вывод о наличии экстремумов функции $z = f(x, y)$, используя достаточное условие экстремума: если $D\big|_{M_i} < 0$, то в точке M_i экстремума нет; если $D\big|_{M_i} > 0$ и $A\big|_{M_i} > 0$, то в точке M_i - локальный минимум; если $D\big|_{M_i} > 0$ и $A\big|_{M_i} < 0$, то в точке M_i - локальный максимум; если $D\big|_{M_i} = 0$, то требуется дополнительное исследование точки M_i (например, по определению).
6) Найти локальные экстремумы (экстремальные значения) функции.

Решение.

1) Находим область определения функции $D(z) = \left\{(x, y) \in R^2\right\}$

2) Находим первые частные производные z'_x и z'_y:

$$z'_x = (x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y)'_x = (x^3)'_x + (3xy^2)'_x - (15x)'_x - (12y)'_x =$$
$$= (x^3)'_x + 3y^2(x)'_x - 15(x)'_x - 0 = 3x^2 + 3y^2 \cdot 1 - 15 \cdot 1 = 3x^2 + 3y^2 - 15;$$
$$z'_y = (x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y)'_y = (x^3)'_y + (3xy^2)'_y - (15x)'_y - (12y)'_y =$$
$$= 0 + 3x(y^2)'_y - 0 - 12(y)'_y = 3x \cdot 2y - 12 \cdot 1 = 6xy - 12.$$

3) Составляем систему уравнений $\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 = 15 \\ xy = 2 \end{cases}$ и решаем её. Получим четыре решения: $M_1\ (1, 2)$, $M_2\ (2, 1)$, $M_3\ (-1, -2)$, $M_4\ (-2, -1)$. Все они являются точками возможного экстремума функции $z = f(x, y)$ в области $D(z)$.

4) Находим вторые частные производные:

$$A(x, y) = z''_{xx} = (z'_x)'_x = (3x^2 + 3y^2 - 15)'_x = (3x^2)'_x + (3y^2)'_x - (15)'_x =$$
$$= 3(x^2)'_x + 0 - 0 = 3 \cdot 2x = 6x;$$
$$B(x, y) = z''_{xy} = (z'_x)'_y = (3x^2 + 3y^2 - 15)'_y = (3x^2)'_y + (3y^2)'_y - (15)'_y =$$
$$= 0 + 3(y^2)'_y - 0 = 3 \cdot 2y = 6y;$$
$$C(x, y) = z''_{yy} = (z'_y)'_y = (6xy - 12)'_y = (6xy)'_y - (12)'_y = 6x(y)'_y - 0 = 6x,$$

составляем выражение $D(x,y)=AC-B^2=6x\cdot 6x-(6y)^2=36x^2-36y^2$ и вычисляем:

$D\big|_{M_1(1,2)}=36\cdot 1^2-36\cdot 2^2=-108<0$, $\quad A\big|_{M_1(1,2)}=6\cdot 1=6>0$;

$D\big|_{M_2(2,1)}=36\cdot 2^2-36\cdot 1^2=108>0$, $\quad A\big|_{M_2(2,1)}=6\cdot 2=12>0$;

$D\big|_{M_3(-1,-2)}=36\cdot(-1)^2-36\cdot(-2)^2=-108<0$, $\quad A\big|_{M_3(-1,-2)}=6\cdot(-1)=-6<0$;

$D\big|_{M_4(-2,-1)}=36\cdot(-2)^2-36\cdot(-1)^2=108>0$, $\quad A\big|_{M_4(-2,-1)}=6\cdot(-2)=-12<0$.

5) Делаем вывод о наличии экстремумов. Так как:

$D\big|_{M_1}=-108<0$, то в точке $M_1(1,2)$ экстремума нет;

$D\big|_{M_2}=108>0$, $A\big|_{M_2}=12>0$, то в точке $M_2(2,1)$ - локальный минимум.

$D\big|_{M_3}=-108<0$, то в точке $M_3\ (-1,-2)$ экстремума нет;

$D\big|_{M_4}=108>0$, $A\big|_{M_4}=-12<0$, то в точке $M_4\ (-2,-1)$ - локальный максимум.

6) Находим локальные экстремумы

$$z_{\min}=f(2,1)=2^3+3\cdot 2\cdot 1^2-15\cdot 2-12\cdot 1=-28,$$

$$z_{\max}=f(-2,-1)=(-2)^3=3\cdot(-2)\cdot(-1)^2-15\cdot(-2)-12\cdot(-1)=28\cdot$$

Ответ: $z_{\min}=f(2,1)=-28$**,** $z_{\max}=f(-2,-1)=28\cdot$

181–190. Найти условные экстремумы функции $z=2x+y$ при условии $x^2+y^2-5=0$**.**

Для нахождения методом Лагранжа локальных экстремумов дифференцируемой функции $z=f(x,y)$ при условии $\varphi(x,y)=0$ необходимо:

1) Найти область определения $D(z)$ функции.

2) Составить функцию Лагранжа $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\,\varphi(x,y)$, где λ - неопределённый постоянный множитель Лагранжа.

3) Решить систему уравнений (необходимое условие условного экстремума) $\begin{cases} L'_x=0 \\ L'_y=0 \\ \varphi(x,y)=0 \end{cases}$ и найти точки $M_i(x_i,y_i)\in D(z)$ возможного условного локального экстремума и соответствующие им значения λ_i множителя Лагранжа.

4) Найти выражение второго дифференциала функции Лагранжа $d^2L = L''_{xx}(dx)^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{yy}(dy)^2$ в точках $M_i(x_i, y_i)$ при условии, что dx и dy связаны уравнением $\varphi'_x dx + \varphi'_y dy = 0$.

5) Сделать вывод о наличии экстремумов функции $z = f(x, y)$ при условии $\varphi(x, y) = 0$, используя достаточное условие условного экстремума. Если для всех dx, $dy \neq 0$ (одновременно), связанных уравнением $\varphi'_x dx + \varphi'_y dy\Big|_{M_i} = 0$, $d^2L\Big|_{M_i} < 0$, то в точке M_i - локальный максимум; если $d^2L\Big|_{M_i} > 0$, то в точке M_i - локальный минимум. Если $d^2L\Big|_{M_i}$ принимает как положительные, так и отрицательные значения, то в точке M_i экстремума нет.

6) Найти локальные условные экстремумы функции $z = f(x, y)$.

Решение.

1) Находим область определения функции $D(z) = \left\{(x, y) \in R^2\right\}$.

2) Составляем функцию Лагранжа: $L(x, y, \lambda) = 2x + y + \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 5)$.

3) Записываем необходимое условие условного экстремума $\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ \varphi(x, y) = 0 \end{cases}$,

где: $L'_x = (2x + y + \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 5))'_x = 2 + 2\lambda x$,

$L'_y = (2x + y + \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 5))'_y = 2 + 2\lambda y$. Получим $\begin{cases} 2 + 2\lambda\, x = 0 \\ 1 + 2\lambda\, y = 0 \\ x^2 + y^2 - 5 = 0 \end{cases}$.

Решая систему, находим две точки возможного условного экстремума функции $z = f(x, y)$ в области $D(z)$ и соответствующие им значения множителя Лагранжа λ: $M_1(-2,-1)$ при $\lambda_1 = 1/2$ и $M_2(2,1)$ при $\lambda_2 = -1/2$.

4) Находим выражение второго дифференциала функции Лагранжа

$d^2L = L''_{xx}(dx)^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{yy}(dy)^2 =$

$$= \left[\begin{array}{c} L''_{xx} = (L'_x)'_x = (2 + 2\lambda\, x)'_x = (2)'_x + (2\lambda\, x)'_x = 0 + 2\lambda(x)'_x = 2\lambda \\ L''_{xy} = (L'_x)'_y = (2 + 2\lambda\, x)'_y = 0 \\ L''_{yy} = (L'_y)'_y = (1 + 2\lambda\, y)'_y = (1)'_y + (2\lambda\, y)'_y = 0 + 2\lambda(y)'_y = 2\lambda \end{array}\right] =$$

$$= 2\lambda(dx)^2 + 2\cdot 0\cdot dxdy + 2\lambda(dy)^2 = 2\lambda\left((dx)^2 + (dy)^2\right).$$

Вычисляем $d^2L\big|_{M_i}$ при условии $\varphi'_x dx + \varphi'_y dy\big|_{M_i} = 0$, учитывая, что:

$$\varphi'_x = (x^2 + y^2 - 5)'_x = (x^2)'_x + (y^2)'_x - (5)'_x = 2x + 0 - 0 = 2x;$$

$$\varphi'_y = (x^2 + y^2 - 5)'_y = (x^2)'_y + (y^2)'_y - (5)'_y = 0 + 2y - 0 = 2y.$$

Получим:

$$d^2L\big|_{M_1(-2,-1),\lambda_1=1/2} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left((dx)^2 + (dy)^2\right) =$$

$$= \left[\begin{array}{c} 2xdx + 2ydy\big|_{M_1(-2,-1)} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -4dx - 2dy = 0 \Rightarrow dy = -2dx \end{array}\right] = (dx)^2 + (-2dx)^2 = 5(dx)^2;$$

$$d^2L\big|_{M_2(2,1),\lambda_2=-1/2} = 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left((dx)^2 + (dy)^2\right) =$$

$$= \left[\begin{array}{c} 2xdx + 2ydy\big|_{M_1(2,1)} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 4dx + 2dy = 0 \Rightarrow dy = -2dx \end{array}\right] = -((dx)^2 + (-2dx)^2) = -5(dx)^2.$$

5) Делаем вывод о наличии экстремумов. Так как для всех $dx \neq 0$: $d^2L\big|_{M_1(-2,-1),\lambda_1=1/2} = 5(dx)^2 > 0$, то в точке $M_1(-2,-1)$ - условный локальный минимум;

$d^2L\big|_{M_2(2,1),\lambda_2=-1/2} = -5(dx)^2 < 0$, то в точке $M_2(2,1)$ - условный локальный максимум.

6) Находим условные минимум и максимум функции $z = 2x + y$ при условии $x^2 + y^2 = 5$:

$$z_{\min} = f(-2,-1) = 2\cdot(-2) + (-1) = -5, \qquad z_{\max} = f(2,1) = 2\cdot 2 + 1 = 5$$

Ответ: $z_{\min} = f(-2,-1) = -5$, $z_{\max} = f(2,1) = 5$ при условии $x^2 + y^2 = 5$.

191–200. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

$z = f(x,y) = x^2 - y^2 + 2xy + 4x$ в области: $x \le 0$, $y \le 0$, $x + y \ge -3$.

Функция $z = f(x,y)$, дифференцируемая в ограниченной замкнутой области $\overline{D} = D \cup \Gamma$, достигает своего наибольшего и наименьшего значений или в стационарных точках $M_i \in D$, или в точках границы Γ области $\overline{D}$. Для их нахождения необходимо:

1) Найти все стационарные точки $M_i \in D$ функции и вычислить в них значения функции $f(M_i)$.

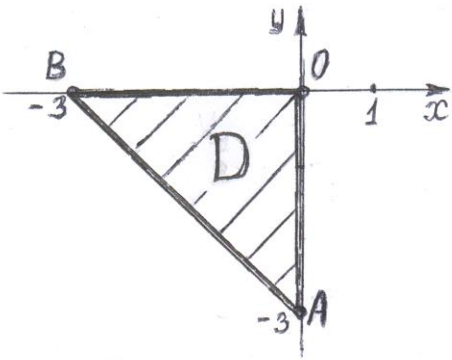
2) Найти наибольшее $M_\Gamma = \max\limits_{\Gamma} f(x, y)$ и наименьшее $m_\Gamma = \min\limits_{\Gamma} f(x, y)$ значения функции на границе Γ, задаваемой одним аналитическим выражением в явном виде $y = \varphi(x)$ или $x = \psi(y)$. Если $\Gamma = \cup\Gamma_k$, где Γ_k задаются одним аналитическим выражением в явном виде, то находят наибольшие и наименьшие значения M_{Γ_k} и m_{Γ_k} функции на каждом из участков Γ_k границы.

3) Сравнить значения функции $f(M_i)$, M_{Γ_k}, m_{Γ_k} и выбрать из них наибольшее $M = \max\limits_{\overline{D}} f(x, y)$ и наименьшее $m = \min\limits_{\overline{D}} f(x, y)$ значения функции в области $\overline{D}$.

Решение.

1) Изображаем область $\overline{D}$ (она представляет собой треугольник, ограниченный прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x + y = -3$), находим стационарные точки $M_i \in D$ функции $z = x^2 - y^2 + 2xy + 4x$, решая систему уравнений

$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases}$, и вычисляем в них значения функции $f(M_i)$.



Учитывая, что: $z'_x = (x^2 - y^2 + 2xy + 4x)'_x = 2x + 2y + 4$, $z'_y = (x^2 - y^2 + 2xy + 4x)'_y = -2y + 2x$, получим $\begin{cases} 2x + 2y + 4 = 0 \\ 2x - 2y \quad\;\; = 0 \end{cases}$. Отсюда $x = -1$, $y = -1$ и, следовательно, единственной стационарной точкой функции в области D является точка $M_1(-1,-1)$.

Вычислив значение функции в этой точке, получим $f(M_1) = f(-1,-1) = (-1)^2 - (-1)^2 + 2\cdot(-1)(-1) + 4\cdot(-1) = -2$.

2) Границу Γ области $\overline{D}$ представляем в виде $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$, где $\Gamma_1 = OA: x = 0, -3 \le y \le 0$; $\Gamma_2 = AB: y = -x-3, -3 \le x \le 0$; $\Gamma_3 = BO: y = 0, -3 \le x \le 0$ и находим наибольшие и наименьшие значения функции на каждом из участков границы: $M_{\Gamma_1}, m_{\Gamma_1}$, $M_{\Gamma_2}, m_{\Gamma_2}$, M_{Γ_3}, m_{Γ_3}.

<u>На участке</u> $\Gamma_1 = OA: x = 0, -3 \le y \le 0$: $z_{OA} = z_1(y) = -y^2$. Таким образом, пришли к задаче нахождения наибольшего и наименьшего значений функции одной переменной $z_1(y) = -y^2$ на отрезке $[-3, 0]$. Эти значения функция принимает или в критических точках, принадлежащих интервалу $(-3, 0)$ или на концах отрезка. Для их отыскания находим первую производную функции: $(z_1(y))'_y = (-y^2)'_y = -2y$ и определяем её внутренние критические точки, т.е. точки $y_i \in (-3, 0)$ в которых $z_1'(y_i) = 0$ или $z_1'(y_i)$ не существует: $z_1' = -2y = 0 \Rightarrow y = 0 \notin (-3, 0)$, точек $y_i \in (-3, 0)$ в которых z_1' не существует нет. Вычисляем значения функции $z_1(y)$ во внутренних критических точках (таких точек нет) и на концах отрезка $[-3, 0]$: $z_1(-3) = -(-3)^2 = -9$, $z_1(0) = -(0)^2 = 0$. Сравнивая значения $z_1(-3)$, $z_1(0)$ находим наименьшее и наибольшее значения функции $z_1(y)$ на отрезке $[-3, 0]$:

$m_{\Gamma_1} = \min\limits_{[-3, 0]} z_1(y) = z_1(-3) = z(0,-3) = -9$,

$M_{\Gamma_1} = \max\limits_{[-3, 0]} z_1(y) = z_1(0) = z(0,0) = 0$.

<u>На участке</u> $\Gamma_2 = AB: y = -x-3, -3 \le x \le 0$: $z_{AB} = z_2(x) = -2x^2 - 8x - 9$. Таким образом, пришли к задаче нахождения наибольшего и наименьшего значений функции одной переменной $z_2(x)$ на отрезке $[-3, 0]$. Эти значения функция принимает или в критических точках, принадлежащих интервалу $(-3, 0)$ или на концах отрезка. Для их отыскания находим первую производную функции: $(z_2(x))'_x = (-2x^2 - 8x - 9)'_x = -4x - 8$ и определяем её внутренние критические точки, т.е. точки $x_i \in (-3, 0)$ в которых $z_2'(x_i) = 0$ или $z_2'(x_i)$ не существует: $z_2' = -4x - 8 = 0 \Rightarrow x = -2 \in (-3, 0)$, точек $x_i \in (-3, 0)$ в которых z_2' не существует нет. Вычисляем значения функции $z_2(x)$ во внутренних критических точках и на концах отрезка $[-3, 0]$:

$z_2(-2) = -2(-2)^2 - 8(-2) - 9 = -1$, $z_2(-3) = -2(-3)^2 - 8(-3) - 9 = -3$, $z_2(0) = -2\cdot(0)^2 - 8\cdot 0 - 9 = -9$. Сравнивая значения $z_2(-3)$, $z_2(-2)$, $z_2(0)$ находим наименьшее и наибольшее значения функции $z_2(x)$ на отрезке $[-3, 0]$: $m_{\Gamma_2} = \min\limits_{[-3,\,0]} z_2(x) = z_2(0) = z(0,-3) = -9$, $M_{\Gamma_2} = \max\limits_{[-3,\,0]} z_2(x) = z_2(-2) = z(-2,-1) = -1$.

<u>На участке</u> $\Gamma_3 = BO: y = 0, -3 \le x \le 0$: $z_{BO} = z_3(x) = x^2 + 4x$. Таким образом, пришли к задаче нахождения наибольшего и наименьшего значений функции одной переменной $z_3(x) = x^2 + 4x$ на отрезке $[-3, 0]$. Эти значения функция принимает или в критических точках, принадлежащих интервалу $(-3, 0)$ или на концах отрезка. Для их отыскания находим первую производную функции: $(z_3(x))'_x = (x^2 + 4x)'_x = 2x + 4$ и определяем её внутренние критические точки, т.е. точки $x_i \in (-3, 0)$ в которых $z'_3(x_i) = 0$ или $z'_3(x_i)$ не существует: $z'_3 = 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2 \in (-3, 0)$, точек $x_i \in (-3, 0)$ в которых z'_3 не существует нет. Вычисляем значения функции $z_3(x)$ во внутренних критических точках и на концах отрезка $[-3, 0]$: $z_3(-2) = (-2)^2 + 4(-2) = -4$, $z_3(-3) = (-3)^2 + 4(-3) = -3$, $z_3(0) = (0)^2 + 4\cdot 0 = 0$. Сравнивая значения $z_3(-3)$, $z_3(-2)$, $z_3(0)$ находим наименьшее и наибольшее значения функции $z_3(x)$ на отрезке $[-3, 0]$: $m_{\Gamma_3} = \min\limits_{[-3,\,0]} z_3(x) = z_3(-3) = z(-3,0) = -3$, $M_{\Gamma_3} = \max\limits_{[-3,\,0]} z_3(x) = z_3(0) = z(0,0) = 0$

3) Сравнивая значения функции $f(-1,-1) = -2$, $m_{\Gamma_1} = z(0,-3) = -9$, $M_{\Gamma_1} = z(0,0) = 0$, $m_{\Gamma_2} = z(0,-3) = -9$, $M_{\Gamma_2} = z(-2,-1) = -1$, $m_{\Gamma_3} = z(-3,0) = -3$, $M_{\Gamma_3} = z(0,0) = 0$, делаем вывод, что $m = z_{наим} = z(0,-3) = -9$, $M = z_{наиб} = z(0,0) = 0$.

Ответ: $m = z_{наим} = z(0,-3) = -9$, $M = z_{наиб} = z(0,0) = 0$.

6.2. Краткие теоретические сведения.

Тема. <u>Арифметические векторы и их системы.</u>

Арифметическим вектором называют упорядоченную совокупность из n действительных чисел: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и обозначают $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Числа x_i называют ***компонентами*** вектора $\bar{x}$, число компонент называют его ***размерностью***.

Векторы $\bar{x}$ и $\bar{y}$ называют ***равными***, если они одинаковой размерности и их соответствующие компоненты равны: $x_i = y_i, i = \overline{1, n}$.

Суммой (разностью) векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ одной размерности называют вектор $\bar{z} = \bar{x} \pm \bar{y}$ той же размерности, для которого: $z_i = x_i \pm y_i$, $i = \overline{1, n}$.

Произведением вектора $\bar{x}$ ***на число*** α называют вектор $\bar{y} = \alpha\bar{x}$ той же размерности, для которого: $y_i = \alpha x_i$, $i = \overline{1, n}$.

Линейной комбинацией векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ одной размерности, называют вектор $\bar{z} = \alpha\bar{x} + \beta\bar{y}$ той же размерности (α и β - произвольные числа), для которого: $z_i = \alpha x_i + \beta y_i$, $i = \overline{1, n}$.

Скалярным произведением двух векторов $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\bar{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ называют число: $\bar{x} \cdot \bar{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$.

Два вектора $\bar{x}$ и $\bar{y}$ называют ***ортогональными***, если $\bar{x} \cdot \bar{y} = 0$.

Систему векторов $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k\}$ называют ***линейно зависимой***, если найдутся числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, не равные одновременно нулю, такие, что $\alpha_1\bar{x}_1 + \alpha_2\bar{x}_2 + \ldots + \alpha_k\bar{x}_k = \bar{0}$, где $\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ - нулевой вектор. Если равенство выполняется, только при условии $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$, то систему называют ***линейно независимой***.

Базисом системы векторов $S = \{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k\}$ называют упорядоченную систему векторов $B_S = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_m)$, удовлетворяющую условиям:

1) $\bar{b}_i \in S$, $i = \overline{1, m}$; **2)** система B_S линейно независима; **3)** для любого вектора $\bar{x} \in S$ найдутся числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ такие, что $\bar{x} = \alpha_1\bar{b}_1 + \alpha_2\bar{b}_2 + \ldots + \alpha_m\bar{b}_m$. Коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, однозначно определяемые вектором $\bar{x}$, называют ***координатами вектора*** в базисе B_S, а формулу называют ***разложением вектора*** $\bar{x}$ ***по базису*** B_S и пишут: $\bar{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)_{B_S}$.

Рангом системы векторов S называется число векторов в любом из её базисов и обозначается $rangS$ или $r(S)$. Ранг системы векторов равен рангу матрицы, столбцами которой являются компоненты векторов системы. Если ранг $rangS$ меньше числа векторов в системе, то система векторов - линейно зависима, в противном случае – линейно независима.

Тема. <u>Линейные пространства. Евклидовы и нормированные пространства.</u>

Линейным пространством называют множество L элементов $x, y, z, \ldots$ любой природы, если выполнены условия:

1) задано сложение элементов L, т.е. $\forall x, y \in L$ соответствует элемент $z = x + y \in L$, называемый суммой элементов x, y;
2) задано умножение элемента L на число, т.е. $\forall x \in L$ и $\forall \alpha \in R$ соответствует элемент $z = \alpha \cdot x \in L$, называемый произведением элемента x на действительное число α;
3) указанные операции подчиняются следующим аксиомам линейного пространства:

   а) $x + y = y + x$, **б)** $(x + y) + z = x + (y + z)$, **в)** $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$,
   г) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$, **д)** $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$, **е)** для $\forall x : 1 \cdot x = x$,
   ж) $\exists$ элемент $o \in L$: $x + o = x$ для $\forall x$,
   з) $\exists$ элемент $(-x) \in L$: $x + (-x) = o$ для $\forall x$.

   Здесь $\alpha, \beta \in R$ - действительные числа.

Линейное пространство называют ***пространством арифметических векторов*** (линейным векторным пространством, арифметическим пространством) и обозначают R^n, если его элементами являются арифметические векторы.

В пространстве R^n базисом является всякая упорядоченная система из n линейно независимых векторов: $B_{R^n} = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n)$. Представление $\bar{x} = \alpha_1\bar{b}_1 + \alpha_2\bar{b}_2 + \ldots + \alpha_n\bar{b}_n$ называют ***разложением вектора*** $\bar{x} \in R^n$ ***по***

базису B_{R^n}, коэффициенты $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ - ***координатами вектора* в базисе** B_{R^n} и пишут $\overline{x} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)_{B_{R^n}}$.

Каноническим базисом R^n называется базис $(\overline{e}_1, \overline{e}_2, \ldots, \overline{e}_n)$, где $\overline{e}_1 = (1,0,0,\ldots,0,0)$, $\overline{e}_2 = (0,1,0,\ldots,0,0)$, $\overline{e}_n = (0,0,0,\ldots,0,1)$ -единичные векторы.

Всякая упорядоченная система из n векторов $(\overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_n)$ образует базис R^n, если определитель, столбцами которого являются компоненты векторов $\overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_n$, не равен нулю.

Ранг пространства R^n равен n и называют его ***размерностью***.

Координаты одного и того же вектора $\overline{x} \in R^n$ в двух базисах B_{R^n} и $B^*_{R^n}$ связаны соотношением: $\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \ldots \\ x_n^* \end{pmatrix} = U^{-1}_{B \to B^*} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$, где матрица

$U_{B \to B^*} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \ldots & \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$, столбцами которой являются коэффициенты

α_{ij} разложения векторов $\overline{b}_i^* \in B^*_{R^n}$ по базису B_{R^n}: $\overline{b}_i^* = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \overline{b}_j$, $i = \overline{1,n}$,

называется ***матрицей перехода от базиса*** B_{R^n} ***к базису*** $B^*_{R^n}$.

Пространство R^n называют ***евклидовым,*** если в нём введено скалярное произведение векторов $\overline{x} \cdot \overline{y}$ - число, удовлетворяющее аксиомам: **1)** $\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{y} \cdot \overline{x}$; **2)** $(\overline{x} + \overline{y}) \cdot \overline{z} = \overline{x} \cdot \overline{z} + \overline{y} \cdot \overline{z}$; **3)** $(\alpha \overline{x}) \cdot \overline{y} = \overline{x} \cdot (\alpha \overline{y})$, где $\alpha \in R$; **4)** $\overline{x} \cdot \overline{x} > 0$, если $\overline{x} \neq \overline{o}$ и $\overline{x} \cdot \overline{x} = 0$, если $\overline{x} = \overline{o}$, где $\overline{o}$ - нулевой вектор.

$\overline{x} \cdot \overline{x} = \overline{x}^2 \geq 0$ называют скалярным квадратом вектора $\overline{x}$.

Если векторы $\overline{x}$ и $\overline{y}$ заданы в произвольном базисе $B_{R^n} = (\overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_n)$ разложениями $\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{b}_i$, $\overline{y} = \sum_{i=1}^{n} y_i \overline{b}_i$, то скалярное произведение в пространстве R^n вычисляют по формуле $\bar{x}\cdot\bar{y}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}x_i y_j\left(\bar{b}_i\cdot\bar{b}_j\right)$, где матрица

$$G=\begin{pmatrix}\bar{b}_1\cdot\bar{b}_1 & ... & \bar{b}_1\cdot\bar{b}_n\\ ... & ... & ...\\ \bar{b}_n\cdot\bar{b}_1 & ... & \bar{b}_n\cdot\bar{b}_n\end{pmatrix}$$ называется ***матрицей Грама***.

В каноническом базисе $R^n:\left(\bar{e}_1,\bar{e}_2,...,\bar{e}_n\right)$, где $\bar{e}_i$ - единичный вектор, матрица Грама является единичной $G=\begin{pmatrix}1 & ... & 0\\ ... & ... & ...\\ 0 & ... & 1\end{pmatrix}=E$ и формула для вычисления скалярного произведения имеет наиболее простой вид $\bar{x}\cdot\bar{y}=\sum_{i=1}^{n}x_i y_i=x_1y_1+x_2y_2+...+x_ny_n$.

Базис $B^{\perp}=(\bar{b}_1,\bar{b}_2,\ldots,\bar{b}_n)$ n-мерного евклидова пространства называют ***ортогональным***, если $\bar{b}_i\cdot\bar{b}_j=0$ при $i\neq j$. В разложении вектора $\bar{x}$ по базису $B^{\perp}$: $\bar{x}=\alpha_1\bar{b}_1+\alpha_2\bar{b}_2+\ldots+\alpha_n\bar{b}_n$, числа $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$ называемые ***координатами вектора*** $\bar{x}$ ***в ортогональном базисе*** $B^{\perp}$, находят по формулам: $\alpha_i=\dfrac{\bar{x}\cdot\bar{b}_i}{\bar{b}_i\cdot\bar{b}_i}=\dfrac{\bar{x}\cdot\bar{b}_i}{\bar{b}_i^2}$, ($i=\overline{1,n}$).

Ортогональной составляющей вектора $\bar{y}$ относительно ортогональной системы векторов $\{\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_k\}$ называется вектор $\bar{y}^0=\bar{y}-\alpha_1\bar{x}_1-\alpha_2\bar{x}_2-\ldots-\alpha_k\bar{x}_k$, где $\alpha_i=\dfrac{\bar{y}\cdot\bar{x}_i}{\bar{x}_i\cdot\bar{x}_i}=\dfrac{\bar{y}\cdot\bar{x}_i}{\bar{x}_i^2}$, ($i=\overline{1,k}$).

Процессом ортогонализации Грама-Шмидта произвольной системы векторов $\{\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots,\bar{x}_k\}$ называется построение ортогональной системы ненулевых векторов $\{\bar{y}_1,\bar{y}_2,\ldots,\bar{y}_k\}$ по формулам: $\bar{y}_1=\bar{x}_1$, $\bar{y}_2=\bar{x}_2^0$, $\bar{y}_3=\bar{x}_3^0,\ldots,$ $\bar{y}_k=\bar{x}_k^0$, где $\bar{x}_i^0$ - ортогональные составляющие векторов $\bar{x}_i$ относительно ортогональных систем векторов $\{\bar{y}_1,\bar{y}_2,\ldots,\bar{y}_{i-1}\}$ ($i=\overline{2,k}$). Если исходная система векторов $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k\}$ линейно зависима, то число векторов в ортогональной системе будет меньше k.

Пространство R^n называют ***нормированным,*** если в нём введена норма вектора $\|\bar{x}\|$ - число, удовлетворяющее аксиомам: **1)** $\|\bar{x}\| > 0$, если $\bar{x} \neq \bar{o}$ и $\|\bar{x}\| = 0$, если $\bar{x} = \bar{o}$, где $\bar{o}$ - нулевой вектор.; **2)** $\|\alpha\bar{x}\| = |\alpha| \cdot \|\bar{x}\|$, где $\alpha \in R$; **3)** $\|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$ (неравенство треугольника).

В пространстве R^n норму вектора $\bar{x}$ вводят одним из следующих способов: **1)** $\|\bar{x}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$ (октаэдрическая норма); **2)** $\|\bar{x}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ (сферическая норма); **3)** $\|\bar{x}\|_3 = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ (кубическая норма). Нормы $\|\bar{x}\|_1$, $\|\bar{x}\|_2$, $\|\bar{x}\|_3$ одного и того же вектора $\bar{x} \in R^n$ связаны неравенствами $\|x\|_1 \geq \|x\|_2 \geq \|x\|_3$, непосредственно следующими из определений этих норм.

Тема. Линейные операторы.

Оператором называется закон (правило), по которому каждому вектору $\bar{x} \in R^n$ ставится в соответствие единственный вектор $\bar{y} \in R^m$, и пишут $\tilde{A} : R^n \to R^m$ или $\bar{y} = \tilde{A}(\bar{x})$. В дальнейшем, рассматривается случай $\tilde{A} : R^n \to R^n$ (***преобразование пространства*** R^n). Оператор $\tilde{A}$ называется ***линейным***, если для любых векторов $\bar{x}, \bar{y} \in R^n$ и действительных чисел α, β выполнено условие: $\tilde{A}(\alpha \cdot \bar{x} + \beta \cdot \bar{y}) = \alpha \cdot \tilde{A}(\bar{x}) + \beta \cdot \tilde{A}(\bar{y})$.

Если $B_{R^n} = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n)$ - базис пространства R^n, то ***матрицей линейного оператора*** $\tilde{A}$ ***в базисе*** B_{R^n} называется квадратная матрица A порядка n, столбцами которой являются столбцы координат векторов $\tilde{A}(\bar{b}_i)$.

Между линейными операторами, действующими в R^n и квадратными матрицами порядка n, существует взаимно однозначное соответствие, что позволяет оператор $\bar{y} = \tilde{A}(\bar{x})$ представить в матричном виде $Y = A \cdot X$, где X, Y - матрицы-столбцы координат векторов $\bar{x}, \bar{y}$, A - матрица оператора $\tilde{A}$ в базисе B_{R^n}.

Для линейных операторов, действующих в R^n вводятся следующие операции: **1)** ***сложение операторов***: $(\widetilde{A}+\widetilde{B})(\overline{x})=\widetilde{A}(\overline{x})+\widetilde{B}(\overline{x})$; **2*)*** ***умножение операторов на число***: $(\alpha\widetilde{A})(\overline{x})=\alpha(\widetilde{A}(\overline{x}))$; **3)** ***умножение операторов***: $(\widetilde{A}\cdot\widetilde{B})(\overline{x})=\widetilde{A}(\widetilde{B}(\overline{x}))$.

Обратным к оператору $\widetilde{A}$ называется оператор $\widetilde{A}^{-1}$ такой, что $\widetilde{A}\cdot\widetilde{A}^{-1}=\widetilde{A}^{-1}\cdot\widetilde{A}=\widetilde{E}$, где $\widetilde{E}$ - ***единичный*** *(тождественный)* ***оператор***, реализующий отображение $\widetilde{E}(\overline{x})=\overline{x}$. Обратный оператор $\widetilde{A}^{-1}$ существует только для невырожденных операторов $\widetilde{A}$ (операторов, матрица которых является невырожденной). Все, рассмотренные выше, действия над линейными операторами выполняют, выполняя аналогичные действия над их матрицами.

Пусть число λ и вектор $\overline{x}\in R^n$, $(\overline{x}\neq\overline{0})$, таковы, что выполняются равенства: $\widetilde{A}(\overline{x})=\lambda\cdot\overline{x}$ или $A\cdot X=\lambda\cdot X$. Тогда число λ называется ***собственным числом (собственным значением)*** линейного оператора $\widetilde{A}$ (или матрицы A), а вектор $\overline{x}$ - ***собственным вектором*** этого оператора (или матрицы), соответствующим собственному числу λ. Равенство $A\cdot X=\lambda\cdot X$ может быть записано в виде $(A-\lambda\cdot E)\cdot X=O$, где E - единичная матрица порядка n, X - матрица-столбец координат собственного вектора $\overline{x}^{(\lambda)}$, соответствующего собственному числу λ, O - нулевая матрица-столбец.

Характеристическим уравнением оператора $\widetilde{A}$ (или матрицы A) называется уравнение:
$$|A-\lambda\cdot E|=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Множество собственных чисел оператора (или матрицы) совпадает с множеством корней его характеристического уравнения: $|A-\lambda\cdot E|=0$, а множество собственных векторов, отвечающих собственному числу λ_i, совпадает с множеством ненулевых решений матричного уравнения: $(A-\lambda_i\cdot E)\cdot X=O$.

Если квадратная матрица A порядка n имеет собственные числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ кратности $m_1, m_2, ..., m_k$, где $(m_1 + m_2 + ... + m_k) = n$, то она ***приводима к диагональному виду*** $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{pmatrix}$ тогда и только тогда, когда выполнены условия: $rang(A - \lambda_i E) = n - m_i$ ($i = \overline{1, k}$). Если нарушается хотя бы одно из условий, то матрица к диагональному виду неприводима.

Приведение матрицы A к диагональному виду Λ осуществляется преобразованием: $\Lambda = S^{-1} \cdot A \cdot S$, где S - матрица, столбцами которой являются n линейно независимых собственных векторов матрицы A, отвечающих собственным числам $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ (каждому собственному числу λ_i кратности m_i отвечает m_i линейно независимых собственных векторов, образующих фундаментальную систему решений уравнения: $(A - \lambda_i \cdot E) \cdot X = O$). Матрица Λ при этом будет иметь диагональный вид, причём на главной диагонали будут стоять собственные числа матрицы A.

Тема. Квадратичные формы.

Квадратичной формой $L(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (или кратко $L(\bar{x})$) от n-переменных называется однородный многочлен второй степени с действительными коэффициентами: $L(\bar{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, где $a_{ij} = a_{ji}$. Квадратичную форму всегда можно записать в матричном виде: $L = X^T \cdot A \cdot X$, где $A = (a_{ij})$ - матрица квадратичной формы (являющаяся симметрической, так как выполняется условие $a_{ij} = a_{ji}$), X - матрица-столбец, X^T - матрица-строка, составленные из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Квадратичная форма называется ***невырожденной***, если её матрица является невырожденной.

Квадратичная форма называется **канонической,** если она имеет вид:

$$L(\bar{x}) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 .$$

Всякую квадратичную форму всегда можно привести к каноническому виду, например, методами Лагранжа и ортогональных преобразований.

Метод Лагранжа состоит в последовательном выделении в квадратичной форме полных квадратов. Если в квадратичной форме все коэффициенты $a_{ii}=0$ $(i=\overline{1,n})$, а коэффициент $a_{kl}\neq 0$ $(k\neq l)$, то, до выделения полных квадратов, в квадратичной форме следует перейти к новым переменным по формулам: $\begin{cases} x_k=z_k+z_l, \quad x_l=z_k-z_l, \\ x_i=z_i \quad (i=\overline{1,n},\ i\neq k,l). \end{cases}$.

Метод ортогональных преобразований состоит в приведении квадратичной формы $L(\overline{x})=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ к каноническому виду $L(\overline{y})=\lambda_1y_1^2+\ldots+\lambda_ny_n^2$, где $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ - собственные числа матрицы квадратичной формы. Такое приведение осуществляется с помощью ортогонального преобразования $X=U\cdot Y$, где U - ортогональная матрица, столбцами которой служат ортонормированные собственные векторы матрицы квадратичной формы; X,Y - матрицы-столбцы переменных квадратичной формы.

Квадратная матрица A называется ***ортогональной***, если её столбцы представляют ортонормированную систему векторов (длина каждого вектора равна единице, все попарные скалярные произведения векторов равны нулю).

Квадратная матрица A будет ортогональной, тогда и только тогда, когда: $A^T=A^{-1}$.

Квадратичные формы подразделяют на различные типы в зависимости от множества их значений. Квадратичная форма $L(\overline{x})$ называется:

положительно (отрицательно) определённой, если для любого $\overline{x}\neq\overline{0}$ выполняется неравенство $L(\overline{x})>0$ ($L(\overline{x})<0$); ***неотрицательно (неположительно) определённой***, если для любого $\overline{x}$ выполняется неравенство $L(\overline{x})\geq 0$ ($L(\overline{x})\leq 0$), причём существует $\overline{x}\neq\overline{0}$, для которого $L(\overline{x})=0$; ***знакопеременной*** (или ***неопределённой***), если существуют такие $\overline{x}$ и $\overline{y}$, что $L(\overline{x})>0$ и $L(\overline{y})<0$.

Невырожденная квадратичная форма может быть либо положительно определённой, либо отрицательно определённой, либо знакопеременной. Тип невырожденной квадратичной формы можно определить, проверяя знаки главных миноров матрицы квадратичной формы.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$, где $a_{ij} = a_{ji}$ - матрица квадратичной формы. ***Главными минорами матрицы*** A называются миноры порядка k ($k = 1,2,...,n$), составленные из первых k строк и первых k столбцов матрицы: $\Delta_1 = a_{11}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, ... , $\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Критерием знакоопределённости невырожденной квадратичной формы является ***критерий Сильвестра***:

- квадратичная форма $L(\bar{x})$ ***положительно определена*** тогда и только тогда, когда все главные миноры её матрицы положительны, т.е. $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, …, $\Delta_n > 0$;
- квадратичная форма $L(\bar{x})$ ***отрицательно определена*** тогда и только тогда, когда для всех главных миноров её матрицы выполняются неравенства: $-\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $-\Delta_3 > 0$, …, $(-1)^n \Delta_n > 0$ (все миноры нечётного порядка отрицательны, а чётного – положительны) ;
- квадратичная форма $L(\bar{x})$ ***знакопеременна*** тогда и только тогда, когда для главных миноров её матрицы выполняется хотя бы одно из условий: один из главных миноров равен нулю, один из главных миноров чётного порядка отрицателен, два главных минора нечётного порядка имеют разные знаки .

Тема. <u>Основные понятия о функциях нескольких переменных (ФНП).</u>

Всякий упорядоченный набор из n действительных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется ***точкой*** n***-мерного арифметического*** (координатного) ***пространства*** R^n и обозначается $\bar{x}$ или $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, при этом числа x_i называются её ***координатами***.

Расстояние между любыми двумя точками $M(x_1, \ldots, x_n)$ и $M_0(x_{10}, \ldots, x_{n0})$ пространства R^n определяется формулой:

$$\rho(M, M_0) = \sqrt{(x_1 - x_{10})^2 + \ldots + (x_n - x_{n0})^2} .$$

Пусть $X \subset R^n$ и $Y \subset R$ - некоторые множества точек R^n и R. Если каждой точке $M \in X$ ставится в соответствие по некоторому правилу f одно вполне определённое действительное число $y \in Y$, то говорят, что на множестве X задана числовая функция от n переменных и пишут $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ или кратко $y = f(M)$ и $y = f(\overline{x})$, при этом X называется ***областью определения***, Y - ***множеством значений***, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ - ***аргументами*** (независимыми переменными) функции.

Функцию двух переменных часто обозначают $z = f(x, y)$, функцию трёх переменных - $u = f(x, y, z)$. Область определения функции $z = f(x, y)$ представляет собой некоторое множество точек плоскости, функции $u = f(x, y, z)$ - некоторое множество точек пространства.

Наиболее распространённым способом задания функции является аналитический способ, при котором функция задаётся формулой. ***Естественной областью определения*** функции $y = f(M)$ называется множество $D \subset R^n$ точек $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, для координат которых формула имеет смысл.

Графиком функции $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$ в прямоугольной системе координат $Oxyz$, называется множество точек пространства с координатами $(x, y, f(x, y))$, $(x, y) \in D$, представляющее собой, вообще говоря, некоторую поверхность в R^3. ***Линией уровня*** функции $z = f(x, y)$ называется линия $f(x, y) = C$ на плоскости Oxy, в точках которой функция принимает одно и тоже значение $z = C$.

Число b называется ***пределом*** функции $y = f(M)$ при $M \to M_0$ (или в точке M_0), и пишут $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = b$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при всех M, удовлетворяющих условию $0 < \rho(M, M_0) < \delta(\varepsilon)$, выполняется неравенство $|\, f(M) - b \,| < \varepsilon$. Для функции $z = f(x, y)$ пишут $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = b$.

Вычисление предела функции нескольких переменных часто сводят к вычислению предела функции одной переменной с помощью замены переменных.

Функция $y = f(M)$ называется ***непрерывной в точке*** M_0, если $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$. Функция непрерывная в каждой точке некоторой области, называется ***непрерывной в*** этой ***области***. Если в точке M_0 нарушено хотя бы одно из следующих условий: **1)** функция $f(M)$ определена в точке M_0; **2)** существует конечный предел $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)$; **3)** $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=f(M_0)$, то M_0 называется ***точкой разрыва*** функции $y=f(M)$. Точки разрыва могут быть изолированными, образовывать линии разрыва, поверхности разрыва.

Тема. <u>Производные и дифференциалы ФНП, их приложения.</u>

Частной производной (1-ого порядка) функции $y=f(M)$ в точке $M(x_1,\ldots x_k,\ldots,x_n)$ по переменной x_k называется предел $\lim\limits_{\Delta x_k\to 0}\dfrac{f(x_1,\ldots,x_k+\Delta x_k,\ldots,x_n)-f(x_1,\ldots,x_k,\ldots,x_n)}{\Delta x_k}$, если этот предел существует. Частную производную обозначают $\dfrac{\partial y}{\partial x_k}$ или y'_{x_k}.

Частные производные вычисляются по обычным правилам дифференцирования функции одной переменной, в предположении, что все аргументы функции, кроме аргумента x_k, по которому берётся производная, постоянны.

Частными производными второго порядка функции $y=f(M)$ называются частные производные от её частных производных первого порядка. При этом используются обозначения:

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial y}{\partial x_k}\right)=\frac{\partial^2 y}{\partial x_k^2}=y''_{x_k x_k}, \qquad \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\frac{\partial y}{\partial x_k}\right)=\frac{\partial^2 y}{\partial x_k\partial x_m}=y''_{x_k x_m}\ (k\neq m).$$

Производные $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x_k\partial x_m}$ $(k\neq m)$ называются ***смешанными.*** Аналогично определяются и обозначаются частные производные порядка выше второго. Для функции $z=f(x,y)$ частные производные обозначаются:

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x},\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},\ldots \text{ или } z'_x,\ z'_y,\ z''_{xx},\ z''_{xy},\ z''_{yx},\ z''_{yy},\ldots.$$

Если смешанные частные производные, подлежащие вычислению, непрерывны, то результат многократного дифференцирования функции по различным переменным не зависит от порядка дифференцирования.

Полным приращением функции $y = f(M)$ в точке $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, соответствующим приращениям аргументов $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ называется разность $\Delta y = f(x_1 + \Delta x_1, x_2 + \Delta x_2, \ldots, x_n + \Delta x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Функция $y = f(M)$ называется ***дифференцируемой*** в точке $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если её полное приращение может быть представлено в виде $\Delta y = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \ldots + A_n \Delta x_n + o(\rho)$, где $\rho = \sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2 + \ldots + \Delta x_n^2} \to 0$ при $\Delta x_1 \to 0, \Delta x_2 \to 0, \ldots, \Delta x_n \to 0$, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ - числа, не зависящие от $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$.

Полным дифференциалом dy функции $y = f(M)$ в точке M называется главная, линейная относительно $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ часть $A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \ldots + A_n \Delta x_n$ полного приращения Δy функции, равная $dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 + \ldots + \frac{\partial y}{\partial x_n} dx_n$, где $dx_1 = \Delta x_1, \ldots, dx_n = \Delta x_n$.

Функция $y = f(M)$, обладающая в точке M непрерывными частными производными, всегда имеет в этой точке полный дифференциал dy.

Форма записи первого дифференциала не изменится и в том случае, если переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ являются функциями новых, независимых переменных (***свойство инвариантности формы первого дифференциала***).

Дифференциалом 2-ого порядка функции $y = f(M)$ называется дифференциал от её первого дифференциала и обозначается $d^2 y$, т. е. $d^2 y = d(dy)$. В общем ***дифференциалом порядка*** m называется дифференциал от дифференциала $(m-1)$-ого порядка и обозначается $d^m y$, т.е. $d^m y = d(d^{m-1} y)$.

Если x - независимая переменная, то для нахождения дифференциала $d^m y$ функции $y = f(M)$ справедлива символическая формула $d^m y = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^m y$, формально раскрываемая по биномиальному закону. Например, для функции $z = f(x, y)$ справедливы формулы: $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$, $d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dxdy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2$, а для функции $u = f(x, y, z)$ - формулы: $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$,

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}dz^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}dxdy + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z}dxdz + 2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z}dydz.$$

Для функции $y = f(M)$ m-кратная дифференцируемость в точке M равносильна существованию в этой точке её полного дифференциала m-ого порядка $d^m y$.

Если функция $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ m раз дифференцируема в точке $M(x_1, \ldots, x_n)$, то в этой точке значение любой смешанной частной производной m-ого порядка не зависит от порядка дифференцирования.

Если функция $y = f(x_1, \ldots, x_n) = f(M)$ дифференцируема m раз в точке $M_0(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$, то при $M \to M_0$ имеет место ***формула Тейлора (порядка** m**) с остаточным членом в форме Пеано***

$$f(M) = f(M_0) + \frac{df(M_0)}{1!} + \frac{d^2 f(M_0)}{2!} + \ldots + \frac{d^m f(M_0)}{m!} + o(\rho^m),$$

где $\rho = \rho(M, M_0) \to 0$ при $M \to M_0$. Частный случай формулы Тейлора в точке $(0,0,\ldots,0)$ называется ***формулой Маклорена***.

Уравнение касательной плоскости к поверхности $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0),$$

а ***уравнение нормали*** – вид $\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$.

Первый дифференциал применяют для приближённого вычисления значений функции $y = f(M)$ в малой окрестности точки M_0, в которой функция дифференцируема, по формуле: $f(M) \approx f(M_0) + df(M_0)$.

В частности, для функции $z = f(x, y)$ по формуле: $f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$, где $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$. Чем меньше значение $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, тем точнее формула.

Если $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - дифференцируемая функция переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, являющихся дифференцируемыми функциями независимой переменной t: $x_1 = \varphi_1(t), x_2 = \varphi_2(t), \ldots, x_n = \varphi_n(t)$, то ***производная сложной функции*** $y = f(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t))$ находится по формуле

$\frac{dy}{dt}=\frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}+\ldots+\frac{\partial y}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}$. Если t совпадает с одним из аргументов, например x_1, то производная $\frac{dy}{dx_1}$, называемая «полной» производной функции y по x_1, находится по формуле

$$\frac{dy}{dx_1}=\frac{\partial y}{\partial x_1}+\frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1}+\ldots+\frac{\partial y}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dx_1} .$$

Если $y=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ - дифференцируемая функция переменных $x_1,x_2,\ldots,x_n$, являющихся дифференцируемыми функциями независимых переменных $t_1,\ldots,t_m$: $x_1=\varphi_1(t_1,\ldots,t_m),\ldots,x_n=\varphi_n(t_1,t_2,\ldots,t_m)$, то ***частные производные сложной функции*** $y=f(\varphi_1(t_1,\ldots,t_m),\ldots,\varphi_n(t_1,\ldots,t_m))$ находятся по формулам:

$$\frac{\partial y}{\partial t_1}=\frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_1}+\frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_1}+\ldots+\frac{\partial y}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_1},$$

……………………………..……………..,

$$\frac{\partial y}{\partial t_m}=\frac{\partial y}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_m}+\frac{\partial y}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_m}+\ldots+\frac{\partial y}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_m}.$$

В частности, для функции $y=f(x,y)$ справедливы формулы:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}, \quad \text{где } x=x(t), y=y(t);$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}, \quad \text{где } y=y(x);$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},\ \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}, \text{ где } x=x(u,v),\ y=y(u,v).$$

Если $y=f(x_1,\ldots,x_n)$ - дифференцируемая функция переменных $x_1,\ldots,x_n$, то ***производная по направлению вектора*** $\vec{\ell}=(\ell_1,\ldots,\ell_n)$ в точке $M(x_1,\ldots,x_n)$ находится по формуле $\frac{\partial y}{\partial\vec{\ell}}=\frac{\partial y}{\partial x_1}\cos\alpha_1+\frac{\partial y}{\partial x_2}\cos\alpha_2+\ldots+\frac{\partial y}{\partial x_n}\cos\alpha_n$, где $\cos\alpha_1,\ldots,\cos\alpha_n$ - координаты единичного вектора $\vec{\ell}_0=\vec{\ell}/|\vec{\ell}|$, $|\vec{\ell}|=\sqrt{\ell_1^2+\ldots+\ell_n^2}$.

Градиентом функции $y = f(x_1, \dots, x_n)$ называют вектор $\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}, \frac{\partial y}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_n} \right)$ и обозначают $grad\ y$ или ∇y.

Скорость наибольшего изменения функции y по направлению $\vec{\ell}$ в точке M_0 достигает наибольшего значения, если направление $\vec{\ell}$ совпадает с направлением $grad\ f(M_0)$, т.е. $\left| \frac{\partial y}{\partial \vec{\ell}} \right|_{\max} = | grad\ f(M_0) |$.

В частности, для функции $u = f(x, y, z)$ производную по направлению вектора $\vec{\ell} = \ell_x \vec{i} + \ell_y \vec{j} + \ell_z \vec{k}$ и градиент, находят по формулам: $\frac{\partial u}{\partial \vec{\ell}} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$, где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ - направляющие косинусы вектора $\vec{\ell}$, $\cos \alpha = \frac{\ell_x}{|\,\bar{\ell}\,|}$, $\cos \beta = \frac{\ell_y}{|\,\bar{\ell}\,|}$, $\cos \gamma = \frac{\ell_z}{|\,\bar{\ell}\,|}$,
$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$; $grad\, u = \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{\partial u}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \bar{k}$.

Если уравнение $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0$, где F - дифференцируемая функция по переменным $x_1, x_2, \dots, x_n, y$, определяет y как функцию независимых переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, то частные производные этой неявной функции $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ находятся по формулам: $\frac{\partial y}{\partial x_1} = -\frac{F'_{x_1}}{F'_y}, \frac{\partial y}{\partial x_2} = -\frac{F'_{x_2}}{F'_y}, \dots, \frac{\partial y}{\partial x_n} = -\frac{F'_{x_n}}{F'_y}$ при условии, что $F'_y \neq 0$.

В частности, для функции $y = f(x)$, заданной неявно уравнением $F(x, y) = 0$ справедлива формула $y'_x = \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$, при условии $F'_y \neq 0$, а для функции $z = f(x, y)$, заданной уравнением $F(x, y, z) = 0$ справедливы формулы: $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$, при условии $F'_z \neq 0$.

Частные производные $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$ для функций $u = f(x, y)$ и $v = g(x, y)$, заданных неявно системой уравнений $\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$ находят, соответственно, как решение систем линейных алгебраических уравнений $\begin{cases} F'_x(x, y, u, v) = 0 \\ G'_x(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} F'_y(x, y, u, v) = 0 \\ G'_y(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$, определителем которых является ***определитель Якоби*** $I = \begin{vmatrix} F'_u & F'_v \\ G'_u & G'_v \end{vmatrix} \neq 0$.

Уравнение касательной плоскости к поверхности $z = f(x, y)$, заданной неявным уравнением $F(x, y, z) = 0$, в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет вид $F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$, а ***уравнение нормали*** –вид $\dfrac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \dfrac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \dfrac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}$.

Множество точек $X \subset R^n$ называют ***выпуклым***, если вместе с любыми двумя своими точками A и B, оно содержит и отрезок AB.

Функция $y = f(x_1, \ldots, x_n)$, определённая на выпуклом множестве $D \subset R^n$ называется ***выпуклой вверх***, если для всех точек $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in D$, где $\bar{x}_1 = (x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1})$, $\bar{x}_2 = (x_{12}, x_{22}, \ldots, x_{n2})$ и для любого $t \in (0,1)$ выполняется неравенство $f(t\bar{x}_1 + (1-t)\bar{x}_2) > t f(\bar{x}_1) + (1-t) f(\bar{x}_2)$ и ***выпуклой вниз***, если выполняется неравенство $f(t\bar{x}_1 + (1-t)\bar{x}_2) < t f(\bar{x}_1) + (1-t) f(\bar{x}_2)$.

Матрицей Гессе функции $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ в точке $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ называется матрица $G(x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 y}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$.

Дважды дифференцируемая на выпуклом множестве D функция $y = f(\bar{x})$ является на этом множестве: **1)** ***выпуклой вниз***, если $G(\bar{x}) > 0$ при всех $\bar{x} \in D$; **2)** ***выпуклой вверх***, если $G(\bar{x}) < 0$ при всех $\bar{x} \in D$. Если на множестве

D матрица Гессе $G(\bar{x})$ функции $y = f(\bar{x})$ знакопеременна, то $f(\bar{x})$ на этом множестве выпуклой не является.

Тема. <u>Экстремумы функций нескольких переменных.</u>

Внутренняя точка $M_0(x_{10},\ldots,x_{n0})$, принадлежащая области определения D функции $y = f(x_1,\ldots,x_n) = f(M)$, называется ***стационарной точкой*** функции, если в этой точке каждая из её частных производных равна нулю, т.е. $f'_{x_1}(M_0) = 0$,..., $f'_{x_n}(M_0) = 0$ или $df(M_0) = 0$.

Внутренняя точка M_0 называется ***точкой локального минимума*** (***максимума***) функции $y = f(M)$, если существует окрестность точки M_0 такая, что для всех точек $M \neq M_0$ этой окрестности выполняется неравенство $f(M) > f(M_0)$ ($f(M) < f(M_0)$).

Точки локального минимума и максимума функции называются ***точками локального экстремума***, а значения функции в этих точках – ***локальными экстремумами*** функции.

Необходимое условие локального экстремума. Если M_0 - точка локального экстремума функции $y = f(M)$, дифференцируемой в точке M_0, то M_0 - стационарная точка функции.

Достаточное условие локального экстремума. Пусть M_0 - стационарная точка дважды дифференцируемой в точке M_0 функции $y = f(M)$. Тогда, если при всевозможных наборах значений $dx_1,\ldots,dx_n$, не равных одновременно нулю: **1)** $d^2 f(M_0) < 0$, то в точке M_0 функция $f(M)$ имеет локальный максимум; **2)** $d^2 f(M_0) > 0$, то в точке M_0 функция имеет локальный минимум; **3)** $d^2 f(M_0)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения, то в точке M_0 функция $f(M)$ не имеет локального экстремума.

Исследование знака $d^2 f(M_0)$ сводится к исследованию на знакоопределённость второго дифференциала, как квадратичной формы относительно переменных $dx_1, dx_2,\ldots, dx_n$ (например, с помощью критерия Сильвестра).

В частности, функция $z = f(x, y)$ в стационарной точке $M_0(x_0, y_0)$, при условии $D = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 \neq 0$, где $A = f''_{xx}(M_0)$, $B = f''_{xy}(M_0)$, $C = f''_{yy}(M_0)$: **1)** имеет максимум, если $D > 0$ и $A < 0$; **2)** имеет минимум, если $D > 0$ и $A > 0$; **3)** не имеет экстремума, если $D < 0$.

Внутренняя точка $M_0 \in D$ называется ***точкой условного локального минимума*** (***максимума***) функции $y = f(x_1, \ldots, x_n) = f(M)$, если существует окрестность точки M_0 такая, что для всех точек $M \neq M_0$ этой окрестности, удовлетворяющих уравнениям связи $\varphi_k(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_k(M) = 0$ ($k = \overline{1, m}$, $m < n$) выполняется неравенство $f(M) > f(M_0)$ ($f(M) < f(M_0)$). Точки условного локального минимума и максимума функции называются ***точками условного локального экстремума***, а значения функции в этих точках – ***условными* локальными *экстремумами функции.***

Задача нахождения условного локального экстремума сводится к нахождению обычного локального экстремума ***функции Лагранжа*** $L(M, \lambda_1, \ldots \lambda_m) = f(M) + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k(M)$, где λ_k ($k = \overline{1, m}$) –постоянные ***множители Лагранжа***.

Необходимое условие условного экстремума. Если M_0 - точка условного локального экстремума функции $y = f(M)$ при наличии уравнений связи $\varphi_k(M) = 0$ ($k = \overline{1, m}$, $m < n$), то в точке M_0 выполняются условия

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(M_0)}{\partial x_i} = 0 \quad (i = \overline{1, n}) \\ \varphi_k(M_0) = 0 \quad (k = \overline{1, m}) \end{cases}.$$

Решая данную систему, находят неизвестные координаты точки M_0, в которой возможен условный локальный экстремум и соответствующие ей значения множителей Лагранжа $\lambda_{10}, \lambda_{20}, \ldots, \lambda_{m0}$.

Вопрос о существовании и характере условного локального экстремума решается на основании изучения (например, с помощью критерия Сильвестра) знака второго дифференциала функции Лагранжа $d^2 L(M_0, \lambda_{10}, \ldots, \lambda_{m0})$ в точке M_0 при значениях $\lambda_{10}, \ldots, \lambda_{m0}$, рассматриваемого как квадратичная форма относительно переменных $dx_1, \ldots, dx_n$ при условии, что они связаны соотношениями: $\dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \dfrac{\partial \varphi_k}{\partial x_n} dx_n = 0$ ($k = \overline{1, m}$).

В частности, для функции $z = f(x, y)$ исследуется знак $d^2 L = \dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} dx^2 + 2 \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} dx dy + \dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} dy^2$ при условии $\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0$.

Достаточное условие условного локального экстремума. Пусть M_0 - точка возможного условного локального экстремума функции $y = f(M)$, т.е. в этой точке выполнены необходимые условия условного локального экстремума. Тогда, если при всевозможных наборах значений $dx_1, \ldots, dx_n$, удовлетворяющих соотношениям $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x_1} dx_1 + \ldots + \frac{\partial \varphi_k}{\partial x_n} dx_n = 0$ ($k = \overline{1, m}$) и не равных одновременно нулю: **1)** $d^2 L(M_0, \lambda_{10}, \ldots, \lambda_{m0}) < 0$, то в точке M_0 функция $f(M)$ имеет условный локальный максимум; **2)** $d^2 L(M_0, \lambda_{10}, \ldots, \lambda_{m0}) > 0$, то в точке M_0 функция имеет условный локальный минимум; **3)** $d^2 L(M_0, \lambda_{10}, \ldots, \lambda_{m0})$ принимает как положительные, так и отрицательные значения, то в точке M_0 функция $f(M)$ не имеет условного локального экстремума.

Если функция $y = f(M)$ дифференцируема в ограниченной и замкнутой области, то она достигает своих ***наибольшего и наименьшего значений*** в этой области или во внутренней стационарной точке, или в граничной точке области. Эти значения называют также ***глобальными экстремумами ФНП*** в ограниченной и замкнутой области.

6.3 Основные математические формулы.

Формулы сокращённого умножения:

1. $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ **2.** $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

3. $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$

4. $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3$ **5.** $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$

Формулы тригонометрии:

1. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1,$ **2.** $tg\alpha \cdot ctg\alpha = 1,$

3. $1 + tg^2\alpha = 1/\cos^2 \alpha$, **4.** $1 + ctg^2\alpha = 1/\sin^2 \alpha$.

5. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$

6. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta \mp \sin\alpha \cdot \sin\beta$

7. $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ **8.** $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$

9. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos[(\alpha+\beta)/2] \cdot \cos[(\alpha-\beta)/2]$

10. $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin[(\alpha+\beta)/2] \cdot \sin[(\alpha-\beta)/2]$

11. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin[(\alpha+\beta)/2] \cdot \cos[(\alpha-\beta)/2]$

12. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin[(\alpha-\beta)/2] \cdot \cos[(\alpha+\beta)/2]$

13. $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$ **14.** $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$

Формулы приведения.

Функция	$\beta = \frac{\pi}{2} \pm \alpha$	$\beta = \pi \pm \alpha$	$\beta = \frac{3\pi}{2} \pm \alpha$	$\beta = 2\pi - \alpha$
$\sin\beta$	$+\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\beta$		$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$+\cos\alpha$
$tg\beta$	$\mp ctg\alpha$	$\pm tg\alpha$	$\mp ctg\alpha$	$-tg\alpha$
$-tg\beta$	$\mp tg\alpha$	$\pm ctg\alpha$	$\mp tg\alpha$	$-ctg\alpha$

Значения тригонометрических функций некоторых углов.

α	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	π	$3\pi/2$	2π
$\sin\alpha$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	-1	0	1
$tg\alpha$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	0	∞	0
$ctg\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$1/\sqrt{3}$	0	$-1/\sqrt{3}$	∞	0	∞

Таблица производных и дифференциалов основных элементарных функций.

№ п/п	$f(x)$	$f'(x)$	$df(x)$
1	$x^{\alpha}\ \ (\alpha \neq 0)$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha x^{\alpha-1}dx$
2	$a^{x}\ \ (a > 0, \neq 1)$	$a^{x}\ln a$	$a^{x}\ln a dx$
3	e^{x}	e^{x}	$e^{x}dx$
4	$\log_{a} x\ \ (a > 0, \neq 1)$	$\frac{1}{x\ln a}$	$\frac{dx}{x\ln a}$
5	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\frac{dx}{x}$
6	$\sin x$	$\cos x$	$\cos x dx$
7	$\cos x$	$-\sin x$	$-\sin x dx$
8	tgx	$\frac{1}{\cos^{2} x}$	$\frac{dx}{\cos^{2} x}$
9	$ctgx$	$-\frac{1}{\sin^{2} x}$	$-\frac{dx}{\sin^{2} x}$
10	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$	$\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}}$
11	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$	$-\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}}$
12	$arctgx$	$\frac{1}{1+x^{2}}$	$\frac{dx}{1+x^{2}}$
13	$arcctgx$	$-\frac{1}{1+x^{2}}$	$-\frac{dx}{1+x^{2}}$
14	chx	shx	$shxdx$
15	shx	chx	$chxdx$
16	thx	$\frac{1}{ch^{2}x}$	$\frac{dx}{ch^{2}x}$
17	$cthx$	$-\frac{1}{sh^{2}x}$	$-\frac{dx}{sh^{2}x}$

6.4 Образец оформления обложки с контрольной работой.

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Набережночелнинский институт (филиал)
федерального государственного автономного образовательного
учреждения высшего образования
«Казанский (Приволжский) федеральный университет»

кафедра математики

Контрольная работа

по дисциплине
«Линейная алгебра и функции нескольких переменных»

Вариант № ____
(номера выполняемых заданий: ___________________________)

Выполнил: студент группы №_______
*Ф.И.О. студента*_________
зач. книжка - №_________
Проверил: преподаватель кафедры математики
*Ф.И.О. преподавателя*_____

Набережные Челны
20…

6.5. Таблица номеров выполняемых заданий.

Номер варианта	***Номера выполняемых заданий в разделе I***									
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
1	**1**	**11**	**21**	**31**	**41**	**51**	**61**	**71**	**81**	**91**
2	**2**	**12**	**22**	**32**	**42**	**52**	**62**	**72**	**82**	**92**
3	**3**	**13**	**23**	**33**	**43**	**53**	**63**	**73**	**83**	**93**
4	**4**	**14**	**24**	**34**	**44**	**54**	**64**	**74**	**84**	**94**
5	**5**	**15**	**25**	**35**	**45**	**55**	**65**	**75**	**85**	**95**
6	**6**	**16**	**26**	**36**	**46**	**56**	**66**	**76**	**86**	**96**
7	**7**	**17**	**27**	**37**	**47**	**57**	**67**	**77**	**87**	**97**
8	**8**	**18**	**28**	**38**	**48**	**58**	**68**	**78**	**88**	**98**
9	**9**	**19**	**29**	**39**	**49**	**59**	**69**	**79**	**89**	**99**
10	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**	**70**	**80**	**90**	**100**
11	**3**	**12**	**21**	**32**	**43**	**52**	**61**	**72**	**83**	**92**
12	**4**	**13**	**22**	**33**	**44**	**53**	**62**	**73**	**84**	**93**
13	**5**	**16**	**27**	**38**	**49**	**60**	**69**	**78**	**87**	**96**
14	**6**	**17**	**28**	**39**	**50**	**59**	**68**	**77**	**86**	**95**
15	**7**	**18**	**29**	**40**	**49**	**58**	**67**	**76**	**85**	**94**
16	**8**	**19**	**30**	**39**	**48**	**57**	**66**	**75**	**84**	**93**
17	**9**	**20**	**29**	**38**	**47**	**56**	**65**	**74**	**83**	**92**
18	**1**	**12**	**23**	**34**	**45**	**56**	**67**	**78**	**89**	**100**
19	**2**	**13**	**24**	**35**	**46**	**57**	**68**	**79**	**90**	**99**
20	**3**	**14**	**25**	**36**	**47**	**58**	**69**	**80**	**89**	**98**
21	**4**	**15**	**26**	**37**	**48**	**59**	**70**	**79**	**88**	**97**
22	**5**	**14**	**23**	**32**	**41**	**52**	**63**	**74**	**85**	**96**
23	**6**	**15**	**24**	**33**	**42**	**51**	**62**	**73**	**84**	**95**
24	**7**	**16**	**25**	**34**	**43**	**52**	**61**	**72**	**83**	**94**
25	**8**	**17**	**26**	**35**	**44**	**53**	**62**	**71**	**82**	**93**
26	**9**	**18**	**27**	**36**	**45**	**54**	**63**	**72**	**81**	**92**
27	**10**	**19**	**28**	**37**	**46**	**55**	**64**	**73**	**82**	**91**
28	**2**	**11**	**22**	**33**	**44**	**55**	**66**	**77**	**88**	**99**
29	**3**	**12**	**21**	**32**	**43**	**54**	**65**	**76**	**87**	**98**
30	**4**	**13**	**22**	**31**	**42**	**53**	**64**	**75**	**86**	**97**

Номер варианта соответствует номеру студента в списке группы.

Номер варианта	***Номера выполняемых заданий в разделе II***									
	11	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*
1	**107**	**118**	**129**	**140**	**149**	**158**	**167**	**176**	**185**	**194**
2	**106**	**117**	**128**	**139**	**150**	**159**	**168**	**177**	**186**	**195**
3	**105**	**116**	**127**	**138**	**149**	**160**	**169**	**178**	**187**	**196**
4	**104**	**113**	**122**	**133**	**144**	**153**	**162**	**173**	**184**	**193**
5	**103**	**112**	**121**	**132**	**143**	**152**	**161**	**172**	**183**	**192**
6	**110**	**120**	**130**	**140**	**150**	**160**	**170**	**180**	**190**	**200**
7	**109**	**119**	**129**	**139**	**149**	**159**	**169**	**179**	**189**	**199**
8	**106**	**115**	**124**	**133**	**142**	**151**	**162**	**173**	**184**	**195**
9	**107**	**117**	**127**	**137**	**147**	**157**	**167**	**177**	**187**	**197**
10	**106**	**116**	**126**	**136**	**146**	**156**	**166**	**176**	**186**	**196**
11	**105**	**115**	**125**	**135**	**145**	**155**	**165**	**175**	**185**	**195**
12	**104**	**114**	**124**	**134**	**144**	**154**	**164**	**174**	**184**	**194**
13	**103**	**113**	**123**	**133**	**143**	**153**	**163**	**173**	**183**	**193**
14	**102**	**112**	**122**	**132**	**142**	**152**	**162**	**172**	**182**	**192**
15	**101**	**111**	**121**	**131**	**141**	**151**	**161**	**171**	**181**	**191**
16	**104**	**113**	**122**	**131**	**142**	**153**	**164**	**175**	**186**	**197**
17	**103**	**112**	**121**	**132**	**143**	**154**	**165**	**176**	**187**	**198**
18	**102**	**111**	**122**	**133**	**144**	**155**	**166**	**177**	**188**	**199**
19	**110**	**119**	**128**	**137**	**146**	**155**	**164**	**173**	**182**	**191**
20	**109**	**118**	**127**	**136**	**145**	**154**	**163**	**172**	**181**	**192**
21	**108**	**117**	**126**	**135**	**144**	**153**	**162**	**171**	**182**	**193**
22	**107**	**116**	**125**	**134**	**143**	**152**	**161**	**172**	**183**	**194**
23	**108**	**118**	**128**	**138**	**148**	**158**	**168**	**178**	**188**	**198**
24	**105**	**114**	**123**	**132**	**141**	**152**	**163**	**174**	**185**	**196**
25	**104**	**115**	**126**	**137**	**148**	**159**	**170**	**179**	**188**	**197**
26	**103**	**114**	**125**	**136**	**147**	**158**	**169**	**180**	**189**	**198**
27	**102**	**113**	**124**	**135**	**146**	**157**	**168**	**179**	**190**	**199**
28	**101**	**112**	**123**	**134**	**145**	**156**	**167**	**178**	**189**	**200**
29	**109**	**120**	**129**	**138**	**147**	**156**	**165**	**174**	**183**	**192**
30	**108**	**119**	**130**	**139**	**148**	**157**	**166**	**175**	**184**	**193**

Номер варианта соответствует номеру студента в списке группы.

С О Д Е Р Ж А Н И Е