Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2011, №8, с. 9–13 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421100123\0078*

А.Н. БАХВАЛОВ

О ЛОКАЛИЗАЦИИ СРЕДНИХ ЧЕЗАРО РЯДОВ ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ Λ-ВАРИАЦИИ

Аннотация. Рассматриваются классы периодических функций ограниченной Λ-вариации со степенным порядком роста Λ. Показано, что в таком классе найдется непрерывная функция, средние Чезаро ряда Фурье которой (порядка, зависящего от скорости роста Λ) не обладают свойством локализации.

Ключевые слова: средние Чезаро, обобщенная вариация.

УДК: 517.518

Abstract. We consider classes of periodic functions of bounded Λ-variation of the power order of growth Λ. We show that this class contains a continuous function whose Cesaro means (of a power that depends on the order of growth Λ) of the Fourier series do not satisfy the localization property.

Keywords: Cesaro means, generalized variation.

Введем необходимые обозначения. Положим $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$. Через $C(\alpha)$ будут обозначаться величины, зависящие лишь от α, не обязательно одинаковые в различных случаях. Для промежутка I на прямой через $\Omega(I)$ обозначим множество всех конечных систем попарно непересекающихся интервалов $\{I_n\}$ таких, что $\overline{I_n} \subset I$, через $\chi_I(t)$ — индикатор I, а через $f(I)$ — приращение функции f на I.

Скажем, что неубывающая последовательность положительных чисел $\Lambda = \{\lambda_n\}$ задает класс функций ограниченной Λ-вариации (класс Ватермана), если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} = \infty$. Далее будем рассматривать только такие Λ. Частичные суммы $\sum\limits_{k=1}^{N} \frac{1}{\lambda_k}$ обозначаются через $\Lambda(N)$. Положим также $H = \{n\}_{n=1}^{\infty}$.

Определение 1. Пусть Λ — последовательность, задающая класс Ватермана. Тогда Λ-вариацией функции $f(x)$ по промежутку Δ называется величина

$$V_\Lambda^x(f;\Delta) = \sup_{\{I_k\}\in\Omega(\Delta)} \sum_k \frac{|f(I_k)|}{\lambda_k}.$$

Поступила 19.04.2010

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 09-01-00175) и программы “Ведущие научные школы” (проект НШ-3252.2010.1).

Множество функций, для которых она конечна, называется классом ограниченной Λ-вариации на Δ и обозначается $\Lambda BV(\Delta)$.

Классы ΛBV были определены в одномерном случае Д. Ватерманом [1]. В этой работе им была установлена

Теорема A. *Пусть $f \in HBV(\mathbb{T})$ — 2π-периодическая функция. Тогда в каждой точке $x \in \mathbb{T}$ ряд Фурье f сходится к величине $\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))$, и сходимость равномерна на любом отрезке, лежащем внутри интервала непрерывности функции. В каждом классе $\Lambda BV(\mathbb{T})$, не вложенном в $HBV(\mathbb{T})$, найдется непрерывная функция, ряд Фурье которой расходится в точке.*

Напомним также определение методов суммирования Чезаро (например, [3], гл. 3, § 1). Пусть задано $\alpha > -1$, а числа A_n^α определяются из формулы

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^\alpha x^n = (1-x)^{-\alpha-1}, \quad \text{т. е.} \quad A_n^\alpha = \frac{(\alpha+1)\dots(\alpha+n)}{n!}.$$

Тогда чезаровскими средними порядка α для ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty} u_k$ называются величины

$$\sigma_n^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \frac{A_{n-k}^\alpha}{A_n^\alpha} u_k.$$

Если в качестве ряда выступает ряд Фурье интегрируемой функции f в точке x, то эти величины будем обозначать через $\sigma_n^\alpha(f,x)$. Как показано в ([3], гл. 3, § 5), средние Чезаро ряда Фурье интегрируемой функции можно выразить формулой

$$\sigma_n^\alpha(f,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) K_n^\alpha(t)\,dt,$$

где

$$K_n^\alpha(t) = \frac{1}{A_n^\alpha}\sum_{k=1}^{n} A_{n-k}^{\alpha-1} D_k(t)$$

— ядро метода (C,α). Для этого ядра справедливо представление

$$K_n^\alpha(t) = \frac{1}{A_n^\alpha}\frac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}+\frac{\alpha}{2}\right)t - \frac{\pi\alpha}{2}\right]}{\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^{\alpha+1}} + \frac{2\theta\alpha}{n\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^2} = K_n^{\alpha,*}(t) + R_n^\alpha(t), \tag{1}$$

где $\theta = \theta(t,\alpha)$, $|\theta| < 1$.

Ядра методов Чезаро удовлетворяют также оценкам

$$|K_n^\alpha(t)| \le n+1 \le 2n, \quad |K_n^\alpha(t)| \le C(\alpha) n^{-\alpha} t^{-(\alpha+1)}. \tag{2}$$

Как известно (например, [3], гл. 3, (1.17)), $A_n^\alpha \sim n^\alpha$.

В статье [2] Д. Ватерманом было введено

Определение 2. Скажем, что функция $f(x)$ из класса $\Lambda BV([a,b])$ непрерывна по Λ-вариации на $[a,b]$ ($f \in C\Lambda V([a,b])$), если для последовательностей $\Lambda_n = \{\lambda_{n+k}\}_{k=1}^{\infty}$ выполнено условие

$$\lim_{n\to\infty} V_{\Lambda_n}(f;[a,b]) = 0.$$

В [2] им были получены такие результаты.

Теорема B. *Пусть* $\alpha \in (-1,0)$. *Тогда для любой функции* f *из класса* $\{n^{\alpha+1}\}BV(\mathbb{T})$ *ее ряд Фурье всюду* (C,α)*-ограничен и равномерно* (C,α)*-ограничен внутри каждого интервала непрерывности. Если к тому же* f *непрерывна по* $\{n^{\alpha+1}\}$*-вариации, то ее ряд Фурье всюду* (C,α)*-суммируется к среднему арифметическому пределов слева и справа, и сходимость средних равномерна на любом отрезке, лежащем внутри интервала непрерывности функции.*

Теорема C. *Пусть* $\alpha \in (-1,0)$, *а* Λ *такова, что класс* $\{n^{\alpha+1}\}BV(\mathbb{T})$ *строго вложен в* $\Lambda BV(\mathbb{T})$. *Тогда существует непрерывная функция из класса* $\Lambda BV(\mathbb{T})$, (C,α)*-средние ряда Фурье которой не ограничены в некоторой точке.*

Как показано в работе А.И. Саблина [4], в одномерном случае при $-1 < \alpha < 0$ всякая функция ограниченной $\{n^{\alpha+1}\}$-вариации непрерывна по ней, поэтому условие непрерывности по вариации в теореме B оказалось несущественным.

Цель нашей работы — усилить теорему C, а именно, показать, что в более широком классе не выполняется и свойство локализации средних Чезаро. Сформулируем основное утверждение.

Теорема. *Пусть* $\alpha \in (-1,0)$, *а последовательность* Λ *такова, что класс* $\Lambda BV(\mathbb{T})$ *не содержится в* $\{n^{\alpha+1}\}BV(\mathbb{T})$. *Тогда найдется* 2π*-периодическая функция* $f \in \Lambda BV(\mathbb{T})$, *непрерывная на* $\mathbb{R}$ *и тождественно равная нулю на* $[-1,1]$, *для которой числа* $\sigma_n^\alpha(f,0)$ *не ограничены в совокупности.*

Доказательство. Пусть $\alpha \in (-1,0)$ фиксировано, $\beta = \alpha+1$, а $\{N_k\}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел, которую подберем позднее. Положим $\nu_k = N_k + \frac{1+\alpha}{2}$, а через u_k и v_k обозначим соответственно первый и последний нули функции $\sin(\nu_k t - \frac{\pi\alpha}{2})$ на отрезке $[\frac{\pi}{2},\pi]$. Пусть теперь

$$f_k(t) = A_{N_k}^\alpha \cdot \chi_{[u_k,v_k]}(t) \cdot \sin\left(\nu_k t - \frac{\pi\alpha}{2}\right).$$

В силу выбора чисел u_k и v_k эти функции непрерывны. Нетрудно видеть, что

$$V_\Lambda(f_k;\mathbb{T}) \le 2A_{N_k}^\alpha \sum_{j=1}^{N_k} \frac{1}{\lambda_j}.$$

С другой стороны, справедливы неравенства

$$\sum_{j=1}^{N_k} \frac{1}{j^\beta} \le C(\alpha) N_k^{-\alpha} \le \frac{C(\alpha)}{A_{N_k}^\alpha}.$$

Согласно критерию вложенности классов Ватермана друг в друга [5], из условия, что класс $\Lambda BV(\mathbb{T})$ не содержится в $\{n^\beta\}BV(\mathbb{T})$, следует

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{\lambda_j}}{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{j^\beta}} = 0.$$

Поэтому можно выбрать сколь угодно быстро растущую последовательность $\{N_k\}$, для которой выполняются оценки

$$V_\Lambda(f_k;\mathbb{T}) \le \frac{1}{k^3}. \tag{3}$$

Тогда в силу полноты пространства $\Lambda BV(\mathbb{T})$, установленной Д. Ватерманом [6], функция $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k f_k(x)$ будет принадлежать классу $\Lambda BV(\mathbb{T})$. Поскольку из (3) и равенства функций f_k нулю на части промежутка $\mathbb{T}$ следует, что $\max_{\mathbb{T}} |f_k| \le \frac{\lambda_1}{k^3}$, то ряд, определяющий f, сходится равномерно. Поэтому функция f непрерывна на $\mathbb{T} = [-\pi, \pi]$. Так как $u_k \ge \pi/2$, $v_k \le \pi$, то $f(-\pi) = f(\pi) = 0$. Как следствие, после 2π-периодического продолжения с отрезка $[-\pi, \pi]$ функция f будет непрерывна на всей прямой.

Оценим $\sigma_{N_p}^{\alpha}(f_p, 0)$. Согласно (1) имеем

$$\sigma_{N_p}^{\alpha}(f_p, 0) = \frac{1}{\pi} \int_{u_p}^{v_p} \frac{\sin^2\left(\nu_p t - \frac{\pi\alpha}{2}\right)}{\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^{\alpha+1}}\, dt + \frac{2\alpha A_{N_p}^{\alpha}}{\pi N_p} \int_{u_p}^{v_p} \frac{\sin\left(\nu_p t - \frac{\pi\alpha}{2}\right)}{\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^2}\, \theta(t, \alpha)\, dt.$$

Второе слагаемое стремится к нулю с ростом N_p, что сразу видно, поскольку $A_{N_p}^{\alpha}/N_p \to 0$, а подинтегральные функции равномерно ограничены на $[\pi/2, \pi]$. В первом слагаемом

$$\int_{u_p}^{v_p} \frac{\sin^2\left(\nu_p t - \frac{\pi\alpha}{2}\right)}{\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^{\alpha+1}}\, dt = \frac{1}{2} \int_{u_p}^{v_p} \frac{dt}{\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^{\alpha+1}} - \frac{1}{2} \int_{u_p}^{v_p} \frac{\cos\left(2\nu_p t - \pi\alpha\right)}{\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^{\alpha+1}}\, dt.$$

Последний интеграл стремится к нулю по теореме о среднем, а

$$\int_{u_p}^{v_p} \frac{dt}{\left(2\sin\frac{t}{2}\right)^{\alpha+1}} \ge \int_{u_p}^{v_p} \frac{dt}{t^{\alpha+1}} \xrightarrow[p\to\infty]{} \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dt}{t^{\alpha+1}}.$$

Получаем, что существует величина $c_0 = c_0(\alpha) > 0$, для которой

$$\sigma_{N_p}^{\alpha}(f_p, 0) \ge c_0 \tag{4}$$

при достаточно больших N_p.

Далее, если $N_1, \dots, N_{p-1}$ уже заданы, то средние Чезаро функции $g_p(t) = \sum\limits_{k=1}^{p-1} k f_k(t)$ сходятся к нулю в нуле (например, по теореме B), т. е. найдется такое n, что для любого $N_p > n$ выполняется оценка

$$|\sigma_{N_p}^{\alpha}(g_p, 0)| \le c_0. \tag{5}$$

Наконец, рассмотрим величину $\sigma_{N_p}^{\alpha}(f_k, 0)$ при $k > p$. Учитывая вторую из оценок (2), замечаем, что

$$|\sigma_{N_p}^{\alpha}(f_k, 0)| \le \frac{C(\alpha) A_{N_k}^{\alpha}}{(N_p)^{\alpha}} \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dt}{t^{\beta}} \le C_1(\alpha) \left(\frac{N_p}{N_k}\right)^{|\alpha|}.$$

Выберем теперь по индукции $\{N_k\}$ так, чтобы выполнялись условия (3), (5) и неравенство

$$\left(\frac{N_k}{N_{k+1}}\right)^{|\alpha|} < \min\left\{\frac{c_0}{8C_1(\alpha)}, \frac{1}{2}\right\}. \tag{6}$$

Проверим, что тогда построенная функция f удовлетворяет условиям теоремы. Действительно, как отмечалось выше, она принадлежит классу $\Lambda BV(\mathbb{T})$ в силу (3). Для любого натурального p справедлива оценка

$$\sigma_{N_p}^{\alpha}(f, 0) \ge p\sigma_{N_p}^{\alpha}(f_p, 0) - |\sigma_{N_p}^{\alpha}(g_p, 0)| - \sum_{k=p+1}^{\infty} k |\sigma_{N_p}^{\alpha}(f_k, 0)|.$$

Здесь при $k > p$ в силу (6) имеют место оценки

$$|\sigma^{\alpha}_{N_p}(f_k, 0)| \le C_1(\alpha) \left(\frac{N_p}{N_k}\right)^{|\alpha|} \le C_1(\alpha) \prod_{j=p}^{k-1} \left(\frac{N_j}{N_{j+1}}\right)^{|\alpha|} \le \frac{c_0}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-p}.$$

Учитывая их, а также неравенства (5) и (4), при достаточно больших p получаем

$$\sigma^{\alpha}_{N_p}(f, 0) \ge pc_0 - c_0 - \frac{c_0}{4} \sum_{k=p+1}^{\infty} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-p} = (p-1)c_0 - \frac{(p+2)c_0}{4} \ge \frac{pc_0}{2}. \qquad \square$$

Литература

[1] Waterman D. *On convergence of Fourier series of functions of generalized bounded variation,* Studia math. **44** (2), 107–117 (1972).

[2] Waterman D. *On the summability of Fourier series of functions of* Λ*-bounded variation*, Studia math. **55** (1), 87–95 (1976).

[3] Зигмунд А. *Тригонометрические ряды*, Т. 1 (Мир, М., 1965).

[4] Саблин А.И. Λ*-вариация и ряды Фурье*, Изв. вузов. Матем., № 10, 66–68 (1987).

[5] Perlman S., Waterman D. *Some remarks on functions of* Λ*-bounded variation*, Proc. Amer. Math. Soc. **74** (1), 113–118 (1979).

[6] Waterman D. *On* Λ*-bounded variation*, Studia math. **57** (1), 33–45 (1976).

А.Н. Бахвалов

доцент, механико-математический факультет,
Московский государственный университет,
ГСП-1, Ленинские горы, г. Москва, 119991,

`e-mail:` an-bakh@yandex.ru

A.N. Bakhvalov

Associate Professor, Faculty of Mathematics and Mechanics,
Moscow State University,
Leninskie gory GSP-1, Moscow, 119991 Russia,

`e-mail:` an-bakh@yandex.ru