ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
ИМ. Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО

КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

010101.65 МАТЕМАТИКА

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

(Дипломная работа)

"Экспоненты блочных неотрицательных матриц"

Работа завершена:

«____»________________2015 г. ________________ Потёмкин А. Г.

Работа допущена к защите:

Научный руководитель:
кандидат физ.-мат. наук,
доцент
«____»________________2015 г. ________________ Альпин Ю. А.

Заведующий кафедрой:
доктор физ.-мат. наук,
профессор
«____»________________2015 г. ________________ Арсланов М. М.

Казань — 2015

Содержание

Введение

Данная дипломная работа посвящена изучению условия примитивности неотрицательных матриц с помощью их разбиения на блоки и построения соответствующих факторграфов.

Неотрицательную матрицу называют примитивной, если $A^t > 0$ при некотором натуральном t. Наименьшее натуральное k, при котором $A^k > 0$, называется экспонентом матрицы A. Теория неотрицательных примитивных матриц достаточно подробно излагается в [1, 3]. Некоторые известные результаты в переработанном виде представлены в дипломной работе.

Известная оценка экспонента опубликована Виландтом в 1950г. Она послужила основой для дальнейших исследований экспонента. Обзор результатов по этой теме и некоторые новые оценки опубликованы в [5, 6].

В дипломной работе применяется подход, по-видимому новый, основанный на разбиении матрицы на блоки и построения соответствующего факторграфа графа матрицы. Затем этот подход расширяется. Рассматриваются произвольные разбиения множества вершин и соответствующие этим разбиениям факторграфы. При таком подходе условия примитивности формулируются в терминах факторграфа и некоторого подграфа графа матрицы. Оценки для экспонента опираются на оценки эскпонента подграфа.

В параграфе 1 приводятся определения неотрицательной и положительной матриц, а также сведения из теории графов, в частности, определение графа матрицы. Записывается лемма являющаяся основой применения графов в теории неотрицательных матриц.

В параграфе 2 даётся определение неразложимой матрицы и устанавливается связь неразложимости с сильной связностью графа матрицы. Также определяется примитивная матрица и доказывается критерий примитивности связанный с индексом импримитивности матрицы.

В параграфе 3 даётся определение экспонента примитивной матрицы и приводятся некоторые известные оценки.

Параграф 4 посвящен блочным матрицам и соответствующим им фактографам графов матриц.

В параграфе 5 определяются два разбиения матрицы на блоки, связанные с разбиением множества вершин её графа, и соответствующие этим разбиениям факторграфы. Приводятся достаточные условия примитивности матрицы, связанные с этими разбиениями. Устанавливаются оценки для экспонента матрицы.

1 Неотрицательные матрицы и их графы

Матрица A называется *неотрицательной* (пишется $A \geqslant 0$), если все её элементы — вещественные неотрицательные числа. Матрица с положительными элементами называется *положительной* (пишется $A > 0$).

Лемма 1. *Произведение двух прямоугольных неотрицательных матриц без нулевых строк и столбцов является матрицей без нулевых строк и столбцов. Если одна из матриц положительна, то произведение положительно.*

Доказательство. Рассмотрим матрицы A размера $m \times n$ (m — строк, n — столбцов) и B размера $n \times p$ (n — строк, p — столбцов). Рассмотрим произвольную, например i-ую строку матрицы A. Согласно условию существует k такое, что $a_{ik} > 0$. В матрице B в строке k существует j такое, что $b_{kj} > 0$. Следовательно

$$(AB)_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj} \geqslant a_{ik} b_{kj} > 0. \tag{1}$$

Формула (1) справедлива $\forall i = 1, \cdots, m$. Она доказывает, что все строки матрицы AB — ненулевые. Аналогично доказывается, что и все столбцы ненулевые.

Предположим A — положительная матрица, т.е. $a_{ik} > 0 \quad \forall i = 1, \cdots, m$, $\forall k = 1, \cdots, n$. При умножении матрицы A на матрицу B, по условию в B для любого $j = 1, \cdots, p$ существует такое k, что $b_{kj} > 0$, получим

$$(AB)_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj} \geqslant a_{ik} b_{kj} > 0. \tag{2}$$

Формула (2) верна для любых i, j. Аналогично доказывается, что $AB > 0$ при условии, что $B > 0$. □

Лемма 1 легко обобщается на произведение большего числа матриц. Имеет место следствие.

Следствие 1. *Предположим, что $A_1, \ldots, A_k$ — прямоугольные неотрицательные матрицы без нулевых строк и столбцов таких размеров, что произведение $A_1 \ldots A_k$ существует. Тогда это произведение также не содержит нулевых строк и столбцов. При этом, если один из сомножителей — положительная матрица, то и матрица $A_1 \ldots A_k$ положительна.*

Доказательство проводится индукцией по k. Опустим его.

При изложении теории графов использовалась книга [4]. Ориентированным графом (орграфом) называется пара (V, E), где V — непустое множество вершин, $E \subseteq V \times V$ — множество *дуг*. Таким образом, дуга — это упорядоченная пара вершин. Будем считать, что вершины пронумерованы натуральными числами, то есть множеством вершин служит множество $N = \{1, \ldots, n\}$.

Тогда дуги — это упорядоченные пары чисел из N. Дуги можно записывать различно, например ij или $i \to j$. Вершина i называется *началом* дуги ij, а вершина j её *концом*. Говорят, что дуга ij ведёт из вершины i в вершину j. Дуга ii называется *петлёй*. *Путём* длины k в орграфе называется любая последовательность вершин

$$i_1 i_2 \ldots i_{k+1},$$

такая, что $i_m i_{m+1}$ — дуга ($m = 1, \ldots, k$). Если начало и конец пути совпадают, то такой путь называется *контуром*. Длина пути равна количеству входящих в него дуг. Путь называется *простым*, если в нём все вершины различны, кроме, может быть, первой и последней.

Лемма 2. *В графе с n вершинами:*

1) *длина простого (i, j)-пути при $i \neq j$ не превосходит $n - 1$;*

2) *длина простого контура не превосходит n;*

3) *если существует (i, j)-путь, то существует и простой (i, j)-путь.*

Доказательство. Длина (i, j)-пути при $i \neq j$ равна числу вершин минус единица, а длина контура равна числу вершин, входящих в него. Отсюда и из определения простого пути следуют пункты 1) и 2).

Для доказательства пункта 3) рассмотрим произвольный (i, j)-путь. Если он не простой, то в нём содержится контур. Удалив контур мы получим более короткий путь. Если же и он не простой, то повторяем операцию. Последовательно удаляя все контуры на некотором шаге мы получим простой (i, j)-путь. □

Говорят, что из вершины i *достижима* вершина j, если $i = j$ или существует (i, j)-путь. Две вершины i и j *взаимодостижимы*, если из i достижима j и из j достижима i. Граф называется *сильно связным*, если из любой вершины достижимы все вершины, то есть любые две вершины взаимодостижимы. Одновершинный граф считается сильно связным по определению. *Подграфом*, порождённым множеством $S \subset N$, называется граф, содержащий те и только те дуги исходного графа, которые соединяют вершины из S.

Нагруженным графом называется такой ориентированный граф, каждой дуге которого поставлено в соответствие неотрицательное число, называемое *весом* дуги. Весом пути $i_1 i_2 \ldots i_k i_{k+1}$ в нагруженном графе называется произведение весов дуг пути.

Пусть $A = (a_{ij})$ — матрица порядка n над полем действительных чисел. *Графом матрицы* A называется орграф $G(A)$ со множеством вершин $N = \{1, \ldots, n\}$, в котором

$$i \to j \Longleftrightarrow a_{ij} \neq 0.$$

Если каждой дуге ij графа матрицы приписать число a_{ij}, то получится наглядное представление матрицы в виде нагруженного графа. И наоборот, всякий нагруженный орграф очевидным образом определяет матрицу.

Графы матриц особенно эффективны для изучения неотрицательных матриц. Для них, разумеется,

$$i \to j \Longleftrightarrow a_{ij} > 0.$$

Согласно правилу умножения матриц ij-элемент матрицы A^k определяется формулой

$$a_{ij}^{(k)} = \sum_{l_2, \ldots, l_k} a_{il_2} a_{l_2 l_3} \ldots a_{l_k j}, \tag{3}$$

где суммирование ведется по всевозможным последовательностям индексов $l_2, \ldots, l_k$.

Используя понятие графа матрицы и веса пути можно сказать, что

$$a_{ij}^{(k)} = \text{сумме весов } (i,j)\text{-путей длины } k, \tag{4}$$

$$a_{il_2} a_{l_2 l_3} \ldots a_{l_k j} > 0 \Longleftrightarrow \text{ в графе } G(A) \text{ существует путь } i l_2 l_3 \ldots l_k j. \tag{5}$$

Отсюда и из формулы (3) следует лемма, являющаяся основой применения графов в теории неотрицательных матриц:

Лемма 3. *Пусть $A = (a_{ij})$ — неотрицательная матрица порядка n. Для любых i, j, k:*

$$a_{ij}^{(k)} > 0 \Longleftrightarrow \textit{в графе } G(A) \textit{ существует } (i,j)\textit{-путь длины } k.$$

Доказательство. Элемент $a_{ij}^{(k)} = \sum\limits_{l_2, \ldots, l_k} a_{il_2} a_{l_2 l_3} \ldots a_{l_k j}$. Если $a_{ij}^{(k)} > 0$, то существуют $1 \leqslant l_2, l_3, \ldots, l_k \leqslant n$ такие, что $a_{il_2}, a_{l_2 l_3}, \ldots, a_{l_k j} > 0$. Следовательно, в графе $G(A)$ существуют дуги $(i, l_2), (l_2, l_3), \ldots, (l_k, j)$, а значит, существует путь длины k из вершины i в вершину j.

Наоборот, пусть существует путь длины k из вершины i в вершину j. И он имеет вид:

$$i l_2 l_3 \ldots l_k j, \quad 1 \leqslant l_2, l_3, \ldots, l_k \leqslant n.$$

Значит, существуют дуги $(i, l_2), (l_2, l_3), \ldots, (l_k, j)$. Для матрицы это означает, что элементы $a_{il_2}, a_{l_2l_3}, \ldots, a_{l_kj} > 0$. Согласно формуле (3) $a_{ij}^{(k)} = \sum\limits_{l_2,\ldots,l_k} a_{il_2}a_{l_2l_3}\ldots a_{l_kj}$. Следовательно, $a_{ij}^{(k)} > 0$. □

2 Неразложимые и примитивные матрицы

Сначала дадим определение переставляющей матрицы и расскажем о перестановочном подобии матриц. *Переставляющая матрица* P — это квадратная $(0,1)$-матрица, в каждой строке и в каждом столбце которой находится лишь одна единица. Обратной к матрице P является транспонированная матрица P^T.

Умножение произвольной матрицы A на переставляющую матрицу справа, переставляет столбцы матрицы A. Умножение слева, переставляет строки матрицы A.

Рассмотрим ситуацию подробнее. Пусть в переставляющей матрице P единица первой строки стоит в столбце i_1, единица второй строки — в столбце i_2 и т.д. наконец, единица n-й строки стоит в столбце i_n. Тогда умножение матрицы A слева на P переставляет строку i_1 на первое место, строку i_2 — на второе место и т.д., строка i_n переставляется на n-ое место. Умножение матрицы A на P^T справа осуществляет такую же перестановку столбцов.

Матрицы A и PAP^T называются *перестановочно подобными.* Легко видеть, что граф $G(PAP^T)$ изоморфен графу $G(A)$ и получается из него перенумерацией вершин. А именно, вершина i_1 графа $G(A)$ получает номер 1, вершина i_2 — номер 2 и т.д. И наоборот, всякой перенумерации вершин графа $G(A)$ отвечает подобное перестановочное преобразование с помощью соответствующей переставляющей матрицы.

Матрица $A \geqslant 0$ порядка $n \geqslant 1$ называется *разложимой*, если найдется переставляющая матрица P такая, что с помощью неё матрица A может быть приведена к виду

$$PAP^T = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где B_{11} — блок размера $k \times k$, $\quad B_{12}$ — $k \times (n-k)$, $\quad B_{22}$ — $(n-k) \times (n-k)$, и нулевой блок размера $(n-k) \times k$, $\quad (0 < k < n)$.

Матрица, не являющаяся разложимой, называется *неразложимой.*

Проверить матрицу на неразложимость можно с помощью следующей теоремы.

Теорема 1. *Матрица $A \geqslant 0$ порядка n неразложима тогда и только тогда, когда*

$$E + A + \cdots + A^{n-1} > 0. \tag{7}$$

Доказательство. Из лемм 2 и 3 следует, что при $i \neq j$ вершина j достижима из вершины i тогда и только тогда, когда $a_{ij}^{(k)} > 0$ для некоторого $k, (1 \leqslant k \leqslant n-1)$. То есть условие (7) равносильно тому, что

$$a_{ij} + a_{ij}^{(2)} + \cdots + a_{ij}^{(n-1)} > 0. \tag{8}$$

Неразложимость матрицы означает, что неравенство (8) выполняется для любых i, j, то есть имеет место (7). Единичная матрица в сумме (7) соответствует тому, что каждая вершина считается достижимой из себя. $\square$

Следующая теорема позволяет определить неразложимость матрицы с помощью её графа.

Теорема 2. *Матрица $A \geqslant 0$ порядка n неразложима тогда и только тогда, когда её граф $G(A)$ сильно связен.*

Доказательство. Пусть матрица A неразложима. Докажем от противного. Предположим граф $G(A)$ не сильно связен. Значит существует пара вершин i и j такая, что из вершины i в вершину j не существует пути. Обозначим через S_1 множество вершин из которых достижима вершина j, а через S_2 обозначим множество оставшихся вершин. Очевидно что не существует пути из любой вершины $k \in S_2$ в любую вершину $l \in S_1$, иначе k принадлежала бы множеству S_1 по определению. Оба множества не пусты, так как $j \in S_1$, $i \in S_2$. Предположим, что S_1 содержит r вершин, а S_2 содержит $n-r$ вершин соответственно. Рассмотрим перестановочное преобразование $B = PAP^T$, которое изменяет нумерацию вершин графа $G(A)$ так, что вершины $1, 2, \ldots, r \in S_1$ и $r+1, r+2, \ldots, n \in S_2$. Из этого следует, что $b_{kl} = 0$ для любых $k = r+1, \ldots, n$ и $l = 1, \ldots, r$. Следовательно, матрица B принимает вид (6). Но это противоречит неразложимости матрицы A.

Теперь пусть граф $G(A)$ сильно связен. Также докажем от противного. Предположим матрица A разложима и, значит, существует перестановочное преобразование $B = PAP^T$, приводящее матрицу B к виду (6). Граф $G(B)$ не будет сильно связным, так как в нём из вершин с номерами $n-k, \ldots, n$ не достижимы вершины с номерами $1, \ldots, k$. А из того, что граф $G(B)$ изоморфен графу $G(A)$ следует, что $G(A)$ также не сильно связен. Пришли к противоречию. $\square$

Из теоремы 2 следует эквивалентное определение неразложимой матрицы. Матрица A называется неразложимой, если её граф $G(A)$ сильно связен.

Неотрицательную матрицу называют *примитивной*, если $A^t > 0$ при некотором натуральном t. Если не существует такого t, то неотрицательную неразложимую матрицу называют *импримитивной*. Граф называется *примитивным*, если из любой вершины в любую другую можно перейти путем некоторой длины t.

Из леммы 3 следует что матрица примитивна в точности тогда, когда примитивен её граф. Примитивный граф, очевидно, сильно связен. Следовательно из примитивности матрицы следует её неразложимость. Обратное, в общем случае, неверно.

Предложение 1. *Если $A^k > 0$, то $A^l > 0$ при любом $l > k$.*

Доказательство. Очевидно, что если в матрице некоторая i-ая строка — нулевая, то она и в любой степени матрицы останется нулевой, аналогично и для столбцов. По условию матрица A^k целиком положительна и, следовательно, в матрице A нет нулевых строк и столбцов, иначе A ни в какой степени не могла бы стать положительной. По лемме 1 произведение матрицы A^k и матрицы A даст в результате положительную матрицу A^{k+1}. Это верно и для больших показателей. Значит, возводя матрицу A в степень $l > k$, получим положительную матрицу A^l, это верно для любого l. □

Приведём критерий примитивности матрицы. Для этого нам потребуется новое определение и лемма. *Индексом импримитивности* сильно связного графа называется наибольший общий делитель длин его контуров. Индекс импримитивности матрицы $A \geqslant 0$ равен индексу импримитивности её графа.

Лемма 4. *Пусть L — полугруппа натуральных чисел относительно сложения. Если НОД чисел из L равен 1, то полугруппа L содержит все натуральные числа, за исключением, может быть, их конечного числа.*

Доказательство. В полугруппе L можно найти конечное множество взаимно простых чисел $l_1, l_2, \ldots, l_p$, т.е. таких, что НОД$(l_1, l_2, \ldots, l_p) = 1$. Из элементарной теории чисел известно, что при некоторых целых коэффициентах $a_1, a_2, \ldots, a_p$ имеет место равенство

$$a_1 l_1 + a_2 l_2 + \cdots + a_p l_p = 1. \tag{9}$$

Сложив отдельно положительные и отрицательные члены этой суммы, получим равенство

$$m - n = 1. \tag{10}$$

Заметим, что $m, n \in L$. Пусть q — любое натуральное число, такое, что $q \geqslant n(n-1)$. Его можно представить в виде

$$q = an + b, \tag{11}$$

где $a \geqslant n - 1, b \leqslant n - 1$. Из (10) и (11) получаем

$$q = an + b = an + b(m - n) = (a - b)n + bm. \tag{12}$$

Учитывая, что $a-b$ и b — неотрицательные числа, и $m, n \in L$, заключаем, что $q \in L$. $\square$

Докажем критерий примитивности неразложимой матрицы, связанный с её индексом импримитивности.

Теорема 3. *Неразложимая матрица A примитивна тогда и только тогда, когда её индекс импримитивности равен 1.*

Доказательство. Пусть матрица A примитивна и $A^k > 0$. Тогда и $A^{k+1} > 0$, согласно предложению 1. В частности, $a_{11}^{(k)} > 0$ и $a_{11}^{(k+1)} > 0$. Следовательно, по лемме 3, в графе $G(A)$ есть контуры взаимно простых длин k и $k+1$ (проходящие через вершину 1), значит, индекс импримитивности матрицы A равен 1.

Теперь предположим, что матрица A неразложима и её индекс импримитивности равен 1. Обозначим через L_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ множество длин контуров, проходящих через вершину i. Если есть контур длины l, проходящий через вершину i и контур длины m, также проходящий через вершину i, то, очевидно, существует контур длины $l+m$, проходящий через вершину i. Следовательно, каждое из множеств L_i является полугруппой относительно сложения. Возьмём, к примеру, множество L_1. По лемме 4 это множество содержит все натуральные числа, начиная с некоторого числа q. Для графа $G(A)$, согласно лемме 3, это означает, что существуют $(1,1)$-пути любой длины $k \geqslant q$. Для любой пары вершин i, j существует (i,j)-путь, проходящий через вершину 1. Обозначим длину кратчайшего из таких путей через $g(i,j)$. В силу доказанного выше для любой пары i, j существуют также (i,j)-пути любой длины, большей или равной $g(i,j) + q$. Ясно, что можно выбрать такие числа $h(i,j) \geqslant q$, чтобы суммы $g(i,j) + h(i,j)$ для всех i, j были равны одному числу. Обозначим это число буквой r. Таким образом, доказано, что в графе A для любых i, j существуют (i,j)-пути некоторой, одной и той же, длины r. То есть, граф $G(A)$ примитивен и $A^r > 0$. $\square$

3 Оценки экспонента примитивной матрицы

Пусть A — примитивная матрица. Наименьшее натуральное k, при котором $A^k > 0$, называется *экспонентом* или *показателем примитивности* матрицы A. Экспонент, обычно, обозначается через $\gamma(A)$.

Приведём следующую известную теорему для оценки экспонента из книги [1] и следствие из неё.

Заметим, что в доказательстве теоремы в книге используется, но не доказывается, ограничение на длину простого контура в графе примитивной матрицы порядка n. Однако, оно доказывается позднее. Запишем это ограничение в виде леммы.

Лемма 5. *В графе примитивной матрицы A порядка n длина самого короткого простого контура не превосходит $n-1$.*

Доказательство. Предположим что самый короткий простой контур в $G(A)$ имеет длину n. Он проходит через все вершины графа и в нём не существует никаких других дуг, кроме тех, которые входят в этот контур. Иначе, мы могли бы получить простой контур меньшей длины. Из этого предположения следует импримитивность матрицы, т.к. возведя матрицу A в степень n, получим единичную матрицу $A^n = E$. Таким образом, длина самого короткого контура в $G(A)$ меньше или равна $n-1$ □

Теорема 4. *Если матрица $A \geqslant 0$ порядка n примитивна, то*

$$A^{s(n-2)+n} > 0,$$

где s — длина самого короткого простого контура в графе матрицы A.

Доказательство. Так как матрица A примитивна и, следовательно, неразложима, то для любой вершины в графе $G(A)$ должен существовать контур, и самый короткий контур, по лемме 5, должен быть длины не более $n-1$. Можем считать, что $1, 2, \ldots, s$ — вершины этого самого короткого контура, так как мы можем этого добиться с помощью перенумерации вершин. Заметим, что $n + s(n-2) = n - 2 + s(n-1)$ и рассмотрим $A^{n-s+s(n-1)} = A^{n-s}(A^s)^{n-1}$. Запишем матрицу A^{n-s} в блочном виде

$$A^{n-s} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix},$$

где блок B_{11} имеет размеры $s \times s$ и блок B_{22} — $n-s \times n-s$.

Блок B_{11} не содержит нулевых строк и столбцов. Это объясняется тем, что если записать A в блочном виде

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

где A_{11} размером $s \times s$ и A_{22} размером $n-s \times n-s$, блок A_{11} не будет содержать нулевых строк и столбцов, так как в графе $G(A)$ вершины $1, 2, \ldots, s$ образуют контур. И при возведении матрицы A в любую степень, на месте $(1, 1)$ будет получаться матрица без нулевых строк и столбцов. В блоке B_{21} также не существует нулевых строк и столбцов, потому, что для каждой вершины $s+1, s+2, \ldots, n$, не входящей в контур рассмотренный выше, в графе $G(A)$ существует путь длины не более $n-s$, ведущий в какую-то вершину нашего контура. С помощью данного контура для любой вершины, не входящей в него, мы можем получить путь в какую-то вершину этого контура точной длины $n-s$.

Теперь запишем $(A^s)^{n-1}$ в блочном виде:

$$(A^s)^{n-1} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix},$$

где блок C_{11} имеет размеры $s \times s$ и блок C_{22} — $n-s \times n-s$. Так как в графе $G(A)$ вершины $1, 2, \ldots, s$ образуют контур, то в графе $G(A^s)$ в каждой вершине $1, 2, \ldots, s$ есть петля. Поскольку A примитивна, то A^s тоже примитивна по предложению 1, следовательно, неразложима. Из каждой вершины $1, 2, \ldots, s$ в графе $G(A^s)$ существует путь в любую другую вершину этого графа, длины не более $n-1$. Мы можем достичь точной длины $n-1$ проходя сколь угодно раз по петле в начальной вершине. Из этого следует, что блоки C_{11} и C_{12} положительны.

Запишем

$$A^{n-s}(A^s)^{n-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} B_{11}C_{11} & B_{11}C_{12} \\ B_{21}C_{11} & B_{21}C_{12} \end{pmatrix}.$$

В каждой строке блоков B_{11} и B_{21} есть хотя бы один ненулевой элемент и блоки C_{11} и C_{12} положительны. По лемме 1 последняя матрица в неравенстве будет целиком положительной, то есть $A^{n-s}(A^s)^{n-1} = A^{n-s+s(n-1)} = A^{n+s(n-2)} > 0$. □

Следствием теоремы 4 является знаменитый результат Виландта, устанавливающий точную верхнюю оценку экспонента для произвольной примитивной матрицы.

Следствие 2. *Матрица $A \geqslant 0$ порядка n примитивна тогда и только тогда, когда $A^{n^2-2n+2} > 0$.*

Доказательство. Импликация слева направо очевидна по предложению 1.

Докажем обратное утверждение. При $n = 1$ результат тривиален, поэтому будем считать, что $n > 1$. Матрица неразложима в силу своей примитивности и значит содержит контуры. Из леммы 5 следует, что длина самого короткого контура в $G(A)$ меньше или равна $n-1$, и, значит, в силу теоремы 4

$$\gamma(A) \leqslant n + s(n-2) \leqslant n + (n-1)(n-2) = n^2 - 2n + 2. \tag{13}$$

□

Виландт привёл пример матрицы, показывающей невозможность улучшения оценки (13). Матрица Виландта порядка n имеет вид

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \hdotsfor{5} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Матрица V в степени n^2-2n+1 еще содержит нули, а конкретно $v_{11}^{n^2-2n+1} = 0$. В то же время $V^{n^2-2n+2} > 0$.

Следующий результат Холидея и Варги из книги [1] устанавливает верхнюю оценку экспонента в тех случаях, когда некоторые, но, возможно, не все элементы главной диагонали являются положительными.

Теорема 5. *Пусть матрица $A \geqslant 0$ порядка n неразложима и, предположим она имеет d положительных элементов на главной диагонали, где $1 \leqslant d \leqslant n$. Тогда $A^{2n-d-1} > 0$ и, значит, $\gamma(A) \leqslant 2n-d-1$.*

Доказательство. Положительный элемент на диагонали матрицы A в графе $G(A)$ означает петлю, а петля это контур длины 1. И таких контуров в графе имеется d штук. Можем считать, что вершины $1, \dots, d$ имеют петли, так как этого можно добиться с помощью перенумерации вершин. Рассмотрим $A^{2n-d-1} = A^{n-d}A^{n-1}$ и запишем

$$A^{n-d} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}, \qquad A^{n-1} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix},$$

где блоки B_{11}, C_{11} размеров $d \times d$ и блоки B_{22}, C_{22} размеров $n-d \times\ n-\ d$. По тем же причинам, что и в доказательстве теоремы 4, блоки A_{11} и A_{21} не содержат нулевых строк и столбцов, а блоки B_{11} и B_{12} целиком положительны. Также, как в теореме 4 записав

$$A^{n-d}A^{n-1} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} B_{11}C_{11} & B_{11}C_{12} \\ B_{21}C_{11} & B_{21}C_{12} \end{pmatrix}$$

увидим, что произведение $A^{n-d}A^{n-1}$ будет положительным, по той же лемме 1. $\square$

Установим точную оценку экспонента в случае, когда на главной диагонали расположен один положительный элемент. Несмотря на то, что следующая лемма является частным случаем теоремы 5, она устанавливает точность оценки экспонента для данного случая, в отличии от самой теоремы, где точность не доказана.

Лемма 6. *Пусть матрица A неразложима и имеет на главной диагонали положительный элемент (то есть в графе $G(A)$ есть петля). Тогда A примитивна, причем $A^{2n-2} > 0$. Другими словами, в графе $G(A)$ из любой вершины в любую другую можно попасть за $2n-2$ шага.*

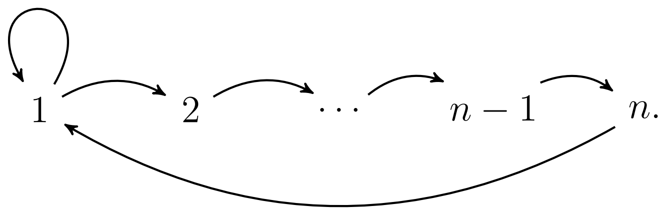
Доказательство. В силу неразложимости матрицы в её графе существует путь из произвольной вершины i в вершину с петлёй. Обозначим её через p. И длина самого короткого такого пути не превосходит $n-1$, по лемме 2. Из вершины p мы также можем попасть в произвольную вершину

j не более чем за $n-1$ шаг, по той же лемме. Следовательно из произвольной вершины i в произвольную вершину j существует путь, проходящий через вершину p, длины не более чем $(n-1)+(n-1)=2n-2$. Петля в вершине p даёт нам возможность получить (i,j)-путь длины $2n-2$, так как при необходимости мы можем обходить по петле сколь угодно раз, тем самым увеличивая длину пути до числа $2n-2$. Таким образом мы доказали, что любая вершина j достижима из любой вершины i путём длины $2n-2$. Согласно лемме 3 это означает, что $A^{2n-2}>0$ и, в частности, что A примитивна. $\square$

Проверим, что матрица

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \hdotsfor{5}\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

удовлетворяет условию леммы. Рассмотрим граф этой матрицы:



Как видно по рисунку, он является сильно связным, то есть матрица A неразложима. Также в нем содержится петля. Следовательно условия леммы выполнены. Выберем две вершины 2 и n. Из вершины 2 в вершину n существует путь длины $n-2$ и следующий самый короткий, но большей длины, путь будет иметь длину $2n-2$. Получается, что из вершины 2 не достижима вершина n за $2n-3$ шага и, следовательно, матрица A^{2n-3} еще будет содержать нули, а именно, $a_{2n}^{(2n-3)}=0$.

Данный пример показывает, что показатель $2n-2$ нельзя уменьшить. То есть оценка $2n-2$ точная.

4 О примитивных блочных матрицах и соответствующих им фактографах

Если некоторую, обычно — квадратную, матрицу A разбить на части вертикальными и горизонтальными линиями, то получаются прямоугольные таблицы, которые сами по себе являются матрицами — подматрицами матрицы A. Эти подматрицы называют *блоками матрицы*. Сама матрица A может рассматриваться как таблица, элементами которой являются более мелкие матрицы. При таком построении матрица A составляется из блоков, и поэтому её называют блочной. Например, матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}$$

можно разбить на блоки различными способами:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ \hline a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ \hline a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{array}\right).$$

Обозначим блоки первого разбиения следующим образом:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \qquad A_{12} = \begin{pmatrix} a_{14} & a_{15} \\ a_{24} & a_{25} \\ a_{34} & a_{35} \end{pmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} a_{41} & a_{42} & a_{43} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} \end{pmatrix}, \qquad A_{22} = \begin{pmatrix} a_{44} & a_{45} \\ a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}.$$

Тогда матрицу A можно записать в виде блочной матрицы, элементами которой будут эти матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Блочная матрица по второму разбиению запишется так:

$$A = \begin{pmatrix} A'_{11} & A'_{12} & A'_{13} \\ A'_{21} & A'_{22} & A'_{23} \end{pmatrix}, \text{ где}$$

$$A'_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad A'_{12} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix}, \qquad A'_{13} = \begin{pmatrix} a_{14} & a_{15} \\ a_{24} & a_{25} \end{pmatrix},$$

$$A'_{21} = \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \\ a_{51} & A_{52} \end{pmatrix}, \qquad A'_{22} = \begin{pmatrix} a_{33} \\ a_{43} \\ a_{53} \end{pmatrix}, \qquad A'_{23} = \begin{pmatrix} a_{34} & a_{35} \\ a_{44} & a_{45} \\ a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}.$$

Выражения *блочная строка* и *блочный столбец* употребляются в очевидном смысле. В первой матрице, приведённой выше, две блочных строки и два блочных столбца. Первая блочная строка состоит из трёх обычных строк, а вторая — из двух. То же верно и для столбцов. Во второй блочной матрице две блочных строки и три блочных столбца. И первая блочная строка состоит из двух обычных строк, а вторая — из трёх. Первый блочный столбец состоит из двух обычных столбцов, второй — из одного и третий — из двух.

Сведения об операциях с блочными матрицами взяты из книги [2]. Операции с блочными матрицами выполняются по тем же правилам, что и с числовыми матрицами. Если числовые матрицы A и B равных размеров одинаково разбиты на блоки $A = (A_{ij})$ и $B = (B_{ij})$, то их сумму $C = A+B$ можно аналогичным образом разбить на блоки $C = (C_{ij})$, причем для каждого блока $C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$. Если блочную матрицу $A = (A_{ij})$ умножить на число λ, то получим матрицу $\lambda A = A\lambda = (\lambda A_{ij})$. При транспонировании блочной матрицы транспонированию подлежит блочная структура и все её блоки, например

$$A^T = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right)^T = \left(\begin{array}{c|c} A_{11}^T & A_{21}^T \\ \hline A_{12}^T & A_{22}^T \end{array}\right).$$

Рассмотрим теперь операцию умножения блочных матриц A и B. Блочные матрицы A и B называются согласованными, если разбиение матрицы $A = (A_{ik})$ на блоки по столбцам совпадает с разбиением матрицы $B = (B_{kj})$ по строкам, то есть блоки A_{ik} имеют размеры $m_i \times p_k$, а блоки B_{kj} — $p_k \times n_j \quad (k = 1, 2, \ldots, s)$. У согласованных блочных матриц блоки A_{ik} и B_{kj} являются согласованными матрицами. Произведением $C = AB$ согласованных блочных матриц A и B называется блочная матрица $C = (C_{ij})$, блоки которой вычисляются по следующей формуле

$$C_{ij} = \sum_{k=1}^{s} A_{ik}B_{kj} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{is}B_{sj}. \tag{15}$$

Это означает, что блочные матрицы, разделенные на блоки надлежащим образом, можно перемножать обычным способом. Чтобы получить блок C_{ij} произведения, надо выделить i-ю строку блоков матрицы A и j-й столбец блоков матрицы B. Затем найти сумму попарных произведений соответствующих блоков: первый блок i-й строки блоков умножается на первый блок j-го столбца блоков, второй блок i-й строки блоков умножается на второй блок j-го столбца и так далее, а результаты произведений складываются.

Назовем разбиение квадратной матрицы на блоки *правильным* и соответствующую блочную матрицу *правильной*, если её диагональные блоки — квадратные. При правильном блочном разбиении мы можем корректно говорить о *блочном порядке* матрицы и *диагональных блоках*.

В дальнейшем мы будем иметь дело лишь с правильными блочными матрицами, поэтому слово *правильный* будем опускать. Приведём общий вид блочной матрицы блочного порядка r:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rr} \end{pmatrix}. \tag{16}$$

Здесь блоки $A_{11}, \dots, A_{rr}$ — квадратные, остальные блоки в общем случае — прямоугольные.

Возведение блочной матрицы в любую степень k выполняется по тем же правилам, что и для обычной числовой матрицы, но при этом с блоками оперируем как с числами, не забывая про некоммутативность матриц. Исходя из формулы (15) и применяя метод математической индукции по параметру k легко вывести полный блочный аналог формулы (3):

$$A^k_{st} = \sum_{v_2,\dots,v_k} A_{sv_2} A_{v_2v_3} \dots A_{v_kt}, \tag{17}$$

где суммирование производится по всевозможным последовательностям $v_2, \dots, v_k$.

С каждым правильным блочным разбиением матрицы связано разбиение множества вершин её графа. Пусть первая блочная строка содержит m_1 строк матрицы, вторая — m_2 строк и т.д. Тогда в первый класс разбиения включим вершины 1, 2, ..., m_1; во второй класс — следующие m_2 вершин и т.д.

Определим факторграф графа матрицы по её разбиению на блоки. Вершинами факторграфа являются классы разбиения. Из класса s ведёт дуга в класс t тогда и только тогда, когда блок A_{st} не содержит нулевых строк и столбцов. Этот блок назовём весом дуги st. Каждому пути в факторграфе сопоставим вес, равный произведению весов дуг, то есть вес пути — матрица. Эта матрица, как произведение матриц без нулевых строк и столбцов, обладает тем же свойством: она не содержит нулевых строк и столбцов по лемме 1. Если факторграф сильно связен, то матрицу A назовём *блочно-неразложимой*.

Приведём пример блочной матрицы и построим соответствующий факторграф. Пусть матрица A разбита на блоки следующим образом:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|cc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Тогда множество вершин $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ графа $G(A)$ разобьется на классы $L_1 = \{1, 2, 3\}, L_2 = \{4, 5\}, L_3 = \{6, 7, 8\}$. И факторграф, по этому разбиению, будет выглядеть так

$$\begin{tikzcd} L_1 \arrow[loop above] \arrow[r, bend left] & L_2 \arrow[r, bend left] & L_3 \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}.$$

Весами дуг являются соответствующие блоки, например весом дуги $L_1 \to L_2$ является блок A_{12}, весом дуги $L_2 \to L_3$ — блок A_{23}, и т.д.

Запишем лемму, являющеюся блочным вариантом леммы 6. Она устанавливает точную оценку экспонента блочной матрицы, при некоторых достаточных условиях.

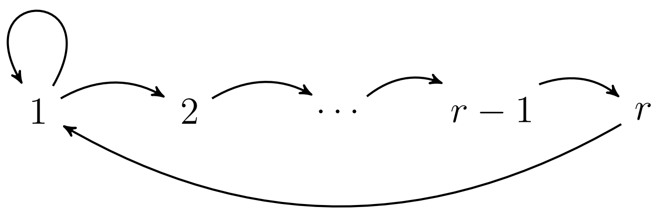
Лемма 7. *Если в блочно-неразложимой матрице A блочного порядка r один из диагональных блоков положителен, то A примитивна, причем $A^{2r-1} > 0$. Эта оценка — точная.*

Доказательство. Перейдем на язык графов. А именно, будем говорить о факторграфе графа $G(A)$. Положительность одного из диагональных блоков означает что в факторграфе есть петля, вес которой — положительная матрица. В силу блочной неразложимости матрицы A в её факторгрфае, согласно лемме 2, из произвольной вершины i в вершину с петлей существует путь длины не превосходящей $r - 1$, но для того, чтобы вес нашего пути точно был положительной матрицей, необходимо один раз пройтись по петле. После чего, согласно лемме 1, весом нашего пути станет положительная матрица, а из вершины с петлей в произвольную вершину j в силу неразложимости матрицы A также существует путь длины, не превосходящей $r - 1$. Следовательно из произвольной вершины i в произвольную вершину j существует путь длины не превосходящий $(r-1)+1+(r-1) = 2r-1$. Здесь петля, также как в доказательстве леммы 6, даёт нам возможность получить (i, j)-путь длины $2r-1$. Получили, что из любой вершины i факторграфа в любую другую вершину j существует путь длины $2r-1$, вес которого — положительная матрица. Это значит, что для нашей блочной матрицы в формуле (17) при $k = 2r-1$ хотя бы одно из блочных слагаемых является положительной матрицей. Следовательно, $A_{st}^{(2r-1)} > 0$ и в целом $A^{2r-1} > 0$. □

Докажем точность данной оценки. Возьмём блочную матрицу произвольного блочного порядка r:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & E & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & E & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & E \\ E & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

где $A_{11} > 0$, а E — единичная матрица. Её граф сильно связен.



Рассмотрим две вершины 2 и r. Из вершины 2 в вершину r можно попасть за $r-2$ шага, весом этого пути будет единичная матрица. Далее, самый короткий, но большей длины путь получится обходом по простому контуру, его длина $r-2+r = 2r-2$. Однако, весом этого пути также будет единичная матрица. Чтобы весом пути стала положительная матрица необходимо хотя бы один раз пройтись по петле в вершине 1. Следовательно, самый короткий путь из вершины 2 в вершину r, вес которого положительная матрица, будет иметь длину $2r-2+1 = 2r-1$. Тем самым получили, что существует матрица, которая удовлетворяет условиям леммы, но в степени $2r-2$ еще содержит нули.

Условие леммы 7 можно ослабить, заменив требование положительности диагонального блока на более «мягкое» требование примитивности. Верна следующая лемма:

Лемма 8. *Если в блочно-неразложимой матрице A блочного порядка r один из диагональных блоков примитивен, то A — примитивна.*

Мы не будем приводить доказательство, т.к. позже докажем более общее утверждение.

В следующем предложении приводится случай, когда экспонент блочной матрицы может быть вычислен в явном виде.

Предложение 2. *Предположим, что в блочной матрице A все блоки не содержат нулевых строк и столбцов, при этом на диагонали имеется положительный блок. Тогда $A^3 > 0$.*

Доказательство. Рассмотри блочную матрицу A блочного порядка r

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2r} \\ \hdotsfor{4} \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rr} \end{pmatrix}.$$

Пусть $A_{ii} > 0$.

Вычислим A^2, оперируя с блоками, как с числами. Умножая i-ую блочную строку на j-ый блочный столбец, получим

$$A_{ij}^{(2)} = \sum_{k=1}^{r} A_{ik}A_{kj} = A_{i1}A_{1j} + A_{i2}A_{2j} + \cdots + A_{ii}A_{ij} + \cdots + A_{ir}A_{rj}.$$

В нашей блочной матрице блок A_{ii} положителен, следовательно, согласно лемме 1, произведение $A_{ii}A_{ij}$, входящее в сумму, также будет положительной матрицей. Остальные же произведения блоков, т.е. неотрицательных матриц, входящих в сумму, также будут неотрицательными матрицами. Складывая положительную матрицу с неотрицательными получим положительную матрицу. Это верно для любого $j = 1, 2, \cdots, r$. То есть в A^2 все блоки i-ой блочной строки положительны. По аналогичной причине все блоки i-го блочного столбца положительны. В матрице A^3 элемент

$$A_{ij}^{(3)} = \sum_{k=1}^{r} A_{ik}^{(2)}A_{kj} \geqslant A_{li}^{(2)}A_{im},$$

а матрица $A_{li}^{(2)}A_{im} > 0$ для любых $l, m = 1, 2, \cdots, r$, по лемме 1. Следовательно матрица A^3 целиком положительна. □

Блочная неразложимость матрицы не является необходимым условием примитивности. Приведём пример. Возьмём матрицу Виландта порядка 4

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Разобьём её на блоки следующем образом

$$V = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right). \tag{19}$$

Факторграф блочной матрицы (19) состоит из двух вершин и, при нашем определении дуги, является пустым графом, то есть графом без дуг. То есть блочная неразложимость не имеет места. Однако, как известно, матрица (18) является примитивной матрицей (см. стр. 12).

5 Оценки для экспонента, основанные на блочных разбиениях матрицы

В параграфе 4 разбиение вершин графа матрицы задаётся разбиением матрицы на блоки. И по этому разбиению строится факторграф графа матрицы. Однако, такие разбиения носят специальный характер (см. стр. 17). И более широкие достаточные условия примитивности блочных матриц можно получить, если определить разбиение матрицы на блоки по произвольному разбиению множества вершин её графа.

Пусть дана неотрицательная матрица A порядка n и её граф $G(A)$ со множеством вершин $N = \{1, 2, \dots, n\}$. Пусть есть некоторое разбиение множества вершин N, обозначим его через ρ. Для представления матрицы A в блочном виде, соответствующем разбиению ρ, сначала перенумеруем классы разбиения: $\rho = L_1, \dots, L_m$. Затем следует перенумеровать вершины в классах разбиения. Берем первый класс разбиения, содержащий, скажем, k вершин и нумеруем их числами от 1 до k. Затем берем следующий класс и нумеруем его вершины соответственно. Поступаем так со всеми классами. Затем производим перестановку строк и столбцов соответствующую новой нумерации. Получим, что матрица A примет правильный блочный вид, блочные строки и столбцы которого отвечают классам разбиения.

Определим факторграф по такому разбиению $G(A)/\rho$. Вершинами факторграфа служат классы разбиения ρ. Дуга в факторграфе $G(A)/\rho$ из вершины L_i в вершину L_j существует тогда и только тогда, когда в исходном графе $G(A)$ существует дуга из любой вершины $s \in L_i$ в некоторую вершину $t \in L_j$ и наоборот, в любую вершину $l \in L_j$ ведёт дуга из некоторой вершины $k \in L_i$. Такие условия существования дуги в факторграфе обеспечивают отсутствие нулевых строк и столбцов в блоке, являющимся весом дуги $L_i \to L_j$.

Построить такой факторграф можно и не приводя матрицу к блочному виду. В таком случае веса дуг в факторграфе определяются следующим образом. Если существует дуга из класса L_i в класс L_j, то весом этой дуги будет подматрица матрицы A, расположенная в пересечении строк с номерами из L_i и столбцов с номерами из L_j. В случае, когда $L_i = L_j$ получается петля, весом которой является подматрица расположенная в пересечении строк и столбцов с номерами из одного класса, такие подматрицы называются *главными*.

В дальнейшем будем считать, что матрица преобразована к блочному виду по заданному разбиению вершин. Определим достаточные условия примитивности через факторграф, описанный выше.

Теорема 6. *Если существует разбиение ρ множества вершин N графа $G(A)$ такое, что факторграф $G(A)/\rho$ сильно связен, а подграф порождённый некоторым классом разбиения, примитивен, то граф $G(A)$ примитивен. Соответственно, матрица A примитивна.*

Доказательство. Пусть $\rho = \{L_1, L_2, \ldots, L_m\}$ и примитивный подграф порождается классом L_1. В вершине L_1 факторграфа $G(A)/\rho$, в силу сильной связности подграфа, порождаемого классом L_1, есть петля. Её вес – примитивная матрица с экспонентом k. Возьмём произвольные классы L_i и L_j. Из L_i существует путь в L_1 длины не превосходящей $m-1$. Далее, k раз проходя по петле в L_1, получаем (L_i, L_1)-путь с положительной матрицей в качестве веса, а из L_1 существует путь в L_j, также длины не превосходящей $m-1$. Получили, что между двумя произвольными вершинами факторграфа существует путь длины, не превосходящей $m-1+k+m-1 = 2m-2+k$, положительного веса.

В силу предложения 1 мы можем проходить по петле сколько угодно раз, увеличивая длину пути до числа $2m-2+k$ и при этом вес его останется положительной матрицей. □

Можем записать эту оценку через порядок матрицы и количество вершин примитивного подграфа. Число классов разбиения m, очевидно, не превосходит порядка матрицы n. А экспонент k запишем через оценку Виландта из следствия 2. Пусть прмитивный подграф содержит r вершин. Тогда

$$2m - 2 + k \leqslant 2n - 2 + r^2 - 2r + 1 = r^2 - 2r + 2n - 1. \qquad (20)$$

Если ограничиться только разбиением матрицы и факторграфом, описанным в параграфе 4, то мы можем и не суметь применить наши достаточные условия. И тогда определение разбиения матрицы на блоки по произвольному разбиению вершин её графа расширяет наши возможности. Приведём пример. Пусть матрица A порядка 4 имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим все её правильные блочные разбиения и соответствующие факторграфы. Классы разбиения обозначим через L_i.

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right), \qquad \begin{tikzcd} L_1 & L_2 \arrow[loop above] \end{tikzcd} ;$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right), \qquad \begin{tikzcd} L_1 \arrow[loop above] & L_2 \arrow[l, bend right] \end{tikzcd} ;$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right), \qquad \begin{tikzcd} L_2 \arrow[loop above] \arrow[r, bend left] & L_1 \end{tikzcd} ;$$

$$\left(\begin{array}{c|cc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right), \qquad \begin{tikzcd} L_1 \arrow[r, bend left] & L_3 \arrow[loop above] \arrow[l, bend left] \arrow[r, bend right] & L_2 \end{tikzcd} .$$

Ни к одному из приведённых выше факторграфов не может быть применено условие теоремы 6. Однако, если взять разбиение множества вершин $N = \{1, 2, 3, 4\}$ на классы $L_1 = \{1, 3\}, L_2 = \{2, 4\}$ факторграф примет вид

$$\begin{tikzcd} L_1 \arrow[r, bend left] & L_2 \arrow[loop above] \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

Перенумеруем вершины согласно разбиению

$$\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 2 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

Произведём перестановку строк и столбцов в матрице и получим, что матрица A после всех манипуляций, примет вид

$$A^* = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

К этой матрице и её факторграфу уже применима теорема 6. И можно сразу сказать, что матрица A примитивна.

Теперь рассмотрим случай когда факторграф примитивен и найдём достаточные условия примитивности матрицы.

Теорема 7. *Если существует разбиение ρ множества вершин N графа $G(A)$ такое, что факторграф $G(A)/\rho$ примитивен, и в нём существует контур примитивного веса, то исходный граф примитивен. Соответственно, матрица A примитивна.*

Доказательство. Пусть длина контура примитивного веса равна p. Возведя матрицу A в степень p получим на диагонали матрицы A^p примитивную матрицу. И так как факторграф примитивен, то любые две вершины соединены некоторым путём одной и той же длины r. То есть, возведя матрицу A^p в степень r, получим, что в ней все блоки не содержат нулевых строк и столбцов. Следовательно найдется такой, достаточно большой показатель k, что возведя матрицу A в степень k будем иметь следующую картину: на диагонали будет находиться положительный блок, а остальные блоки не будут содержать нулевых строк и столбцов. И, таким образом, воспользовавшись предложением 2, можно сказать, что матрица A, а соответственно и граф $G(A)$, примитивны. $\square$

Следующее утверждение содержит условие, которое обеспечивает существование контура положительного веса.

Следствие 3. *Если существует разбиение ρ множества вершин N графа $G(A)$ такое, что факторграф $G(A)/\rho$ примитивен, и в нём существует путь положительного веса, то исходный граф примитивен.*

Доказательство. В силу сильной связности факторграфа из существования пути положительного веса следует существование контура положительного веса. Пусть длина этого контура равна k. Возведём матрицу A в степень k и получим на диагонали матрицы A^k положительный блок. Дальнейшее доказательство практически совпадает с доказательством теоремы 7. $\square$

Рассмотрим другое специальное разбиение матрицы A порядка n на блоки, определяемое главной подматрицей.

Выбираем главную подматрицу, порядка $r \le n$. По ней берется разбиение множества вершин $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ графа $G(A)$. Вершины входящие в выбранную главную подматрицу образуют один класс, а остальные вершины образуют одноэлементные классы. При обозначении одноэлементных классов будем сверху добавлять точку. Класс содержащий вершины подматрицы получает первый номер — L_1, а остальные одноэлементные классы получают номера со 2-го по $n - r + 1$-й — $\dot{L}_2, \ldots, \dot{L}_{n-r+1}$. Затем перенумеровываем вершины в самих классах. Вершины в первом классе нумеруем числами $1, \ldots, r$, а вершины в остальных классах — числами $r + 1, \ldots, n$. И, согласно новой нумерации, производим перестановку строк и столбцов в исходной матрице. После всех манипуляций матрица A примет правильный блочный вид, где главная подматрица соберётся в один блок, размера $r \times r$, и расположится в левом верхнем углу.

Определим факторграф по разбиению вершин, определяемому главной подматрицей. Класс L_1 образует подграф графа $G(A)$, обозначим его также, через L_1. Поэтому факторграф по разбиению вершин, определяемому главной подматрицей, можно назвать факторграфом порождённым подграфом, т.к. всё разбиение основано на этом классе.

Вершинами факторграфа являются одноэлементные классы и класс, содержащий вершины подграфа. Дуга в факторграфе из вершины $\dot{L}_i = \{s\}$ в вершину $\dot{L}_j = \{t\}$ существует только тогда, когда в исходном графе существует дуга из вершины s в вершину t. Дуга из вершины L_1 в вершину $\dot{L}_i = \{s\}$ существует, если в исходном графе существует, по крайней мере одна дуга, из любой вершины $l \in L_1$ в вершину s. Аналогично, дуга из вершины $\dot{L}_j = \{t\}$ в вершину L_1 существует, если в исходном графе из вершины t существует дуга в какую-либо вершину $m \in L_1$.

Может показаться, что данный вид факторграфа является частным случаем факторграфа по произвольному разбиению, однако это не совсем так. В данном виде факторграфа условие существования дуги более «мягкое». Оно не требует отсутствия нулевых строк и столбцов в блоке преобразованной матрицы, являющимся весом дуги.

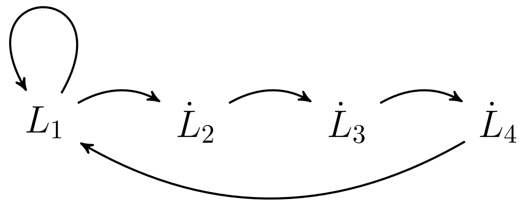
Приведём пример такого разбиения на классы и построения соответствующего факторграфа. Возьмём матрицу M и выделим в ней, с помощью круглых скобок, главную подматрицу:

$$M = \begin{pmatrix} (1) & (1) & 0 & (0) & 0 & 0 & (0) \\ (0) & (0) & 1 & (1) & 0 & 0 & (0) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ (0) & (0) & 0 & (0) & 0 & 0 & (1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ (1) & (0) & 1 & (0) & 0 & 0 & (0) \end{pmatrix}. \qquad (21)$$

Главная подматрица расположена в пересечении строк и столбцов с номерами $\{1, 2, 4, 7\}$. Множество вершин $N = \{1, 2, \ldots, 7\}$ разобьется на классы следующим образом:

$$L_1 = \{1, 2, 4, 7\}, \dot{L}_2 = \{3\}, \dot{L}_3 = \{5\}, \dot{L}_4 = \{6\}. \qquad (22)$$

Факторграф матрицы (21) по разбиению (22) будет выглядеть следующим образом:



.

Теперь приведём матрицу (21) к блочному виду. Перенумеровываем вершины согласно их разбиению на классы (22)

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 4 & 7 & 3 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow. \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{array}$$

Затем совершаем перестановку строк и столбцов, согласно новой нумерации. Получаем, что матрица (21) примет блочный вид

$$M^* = \left(\begin{array}{cccc|c|c|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \qquad (23)$$

Лемма 9. *Если подграф L_1 графа $G(A)$ и порождённый им факторграф сильно связны, то граф $G(A)$ сильно связен. Соответственно матрица A неразложима.*

Доказательство. Докажем что из любой вершины $s \in N$ существует путь в любую вершину $t \in N$, где N — это множество вершин графа $G(A)$. Возможны три случая.

1. Пусть $s \in L_1, L_1 \subset N$, а $t \in N \backslash L_1$. В силу сильной связности факторграфа в нём существует простой путь из вершины L_1 в вершину $\dot{L}_i = \{t\}$. То есть в $G(A)$ существует путь из какой-то вершины $l \in L_1$ в вершину t, а вершина l, в свою очередь, достижима из вершины s, в силу сильной связности подграфа L_1. Следовательно, в графе $G(A)$ существует путь из вершины s в вершину t.

2. Рассмотрим случай когда $s \in N \backslash L_1$, а $t \in L_1$. В силу сильной связности факторграфа, из вершины $\dot{L}_i = \{s\}$ существует путь в вершину L_1. То есть в графе $G(A)$ существует путь из вершины s в какую-то вершину $l \in L_1$, а из вершины l достижима вершина t, в силу сильной связности подграфа L_1. Следовательно, в графе $G(A)$ из вершины s существует путь в вершину t.

3. Случай когда $s, t \in N \backslash L_1$. В факторграфе для вершин $\dot{L}_i = \{s\}$ и $\dot{L}_j = \{t\}$ возможны два варианта: либо существует простой путь из $\dot{L}_i$ в $\dot{L}_j$, не проходящий через вершину L_1, либо нет.

В первом варианте путь в факторграфе можно записать следующим образом:

$$\dot{L}_i \to \dot{L}_{l_1} = \{u\} \to \cdots \to \dot{L}_{l_k} = \{v\} \to \dot{L}_j. \tag{24}$$

Тогда, в графе $G(A)$ существует путь

$$s \to u \to \cdots \to v \to t. \tag{25}$$

Во втором варианте в графе $G(A)$ из вершины s существует путь в какую-то вершину $l \in L_1$. В подграфе L_1 из вершины l достижима вершина $m \in L_1$, из которой существует путь в вершину t. Следовательно, существует путь

$$s \to \cdots \to l \to \cdots \to m \to \ldots t.$$

□

Следующая теорема похожа на теорему 6, но использует другой метод доказательства с использованием контурного индекса.

Теорема 8. *Если в матрице A, порядка n, существует примитивная главная подматрица и факторграф построенный по разбиению, задаваемому этой подматрицей, сильно связен, то граф $G(A)$ примитивен. Соответственно примитивна матрица A.*

Доказательство. Пусть примитивная главная подматрица имеет порядок r. Через L_1 мы обозначили класс, содержащий вершины главной подматрицы. Перейдём на язык графов. Так как подматрица примитивна, то множеством L_1 порождается примитивынй подграф, графа $G(A)$. Из примитивности следует его сильная связность. Следовательно, по лемме 9, граф $G(A)$ сильно связен. Из теоремы 3 следует, что контурный индекс L_1 равен 1. Множество длин контуров графа $G(A)$ содержит множество длин контуров его подграфа L_1. Следовательно их НОД также будет равен единице и по теореме 3 граф $G(A)$ примитивен. □

Найдём оценку для экспонента. Пусть теорема 8 верна. Предположим, что экспонент примитивной главной подматрицы равен γ. Рассмотрим матрицу A^γ. Она содержит положительную главную подматрицу какого-то порядка r, в частности, имеет r положительных элементов главной диагонали. О ней также известно, что она неразложима (как степень примитивной матрицы). Следовательно, можно применить теорему 5. Тогда экспонент A^γ не больше, чем

$$2n - r - 1.$$

А экспонент матрицы A, соответственно, не больше, чем

$$\gamma(2n - r - 1).$$

Чтобы получить оценку экспонента матрицы A, зависящую только от порядка матрицы A (то есть от n) и порядка примитивной подматрицы, подставим вместо γ оценку Виландта из следствия 2 и получим оценку

$$(r^2 - 2r + 2)(2n - r - 1).$$

При $r = 1$ получается известная оценка $2n - 2$ из леммы 6.

Список литературы

[1] Джонсон Ч., Хорн Р. Матричный анализ — М.: Мир, 1989. — 655 с.

[2] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц — М.: «Наука», 1966. — 576 с.

[3] Сачков В.Н., Тараканов В.Е. Комбинаторика неотрицательных матриц — М.: ТВП, 2000. — 448 с.

[4] Альпин Ю.А., Ильин С.Н. Дискретная математика: графы и автоматы. Учебное пособие — Казань: Казанский государственный университет, 2006. — 78 с.

[5] Фомичев В.М. Оценки экспонентов примитивных графов / Прикладная дискретная математика, №2(12), 2011

[6] Когос К.Г., Фомичев В.М. Положительные свойства неотрицательных матриц / Прикладная дискретная математика, №4(18), 2012