

**КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО**

Кафедра общей математики

Н.Р. Абубакиров, М.С. Малакаев, Е.А. Широкова

**Профессионально ориентированные задачи по
математике для гуманитарных направлений
бакалавриата**

2018

Настоящий сборник задач по математике составлен с учетом общекультурных и профессиональных компетенций образовательных стандартов направлений 37.03.01 Психология, 37.03.02 Конфликтология,

40.03.01 Юриспруденция, 41.03.01 Зарубежное регионоведение, 41.03.03 Востоковедение и африканистика 41.03.04 Политология, 42.03.01 Реклама и связи с общественностью, 41.04.05 Международные отношения, 42.03.02 Журналистика, 42.03.04 Телевидение, 44.03.03 Дефектология, 45.03.01 Филология, 45.03.02 Лингвистика, 46.03.01 История, 46.03.01 Антропология и этнология, 47.03.01 Философия, 47.03.03 Религиоведение, 48.03.01 Теология, 53.03.01 Культурология, 51.03.04 Музеология и охрана объектов культурного и природного наследия.

Разные направления обучения требуют корректировки программ по математике в соответствии с соответствующими компетенциями. Так, например, «Элементы теории графов» читаются только для направлений Лингвистика, Филология, Востоковедение и африканистика, Зарубежное регионоведение, Международные отношения и Туризм. Однако программы для всех гуманитарных направлений содержат разделы «Элементы математической логики» и «Элементы теории вероятностей, случайных величин и математической статистики».

Элементы математической логики

1. В результате тестирования были установлены следующие факты (И):

1) если Иванов не увлекается историей, то либо Петров, либо Сидоров ею увлечены, причем не Сидоров и Иванов одновременно;

2) если Сидоров не увлечен историей, то Иванов увлечен ею, Петров нет

3) если Иванов историк, то и Сидоров историк.

Выяснить, кто согласно указанным фактам увлекается историей.

2 Переведите каждое рассуждение в логическую символику и установите, имеет ли место в нем логическое следование:

1) Если он принадлежит к нашей компании (К), то он храбр (Х) и на него можно положиться (П). Он не принадлежит нашей компании. Значит, он не храбр или же на него нельзя положиться.

2) В бюджете возникнет дефицит (D), если не повысят пошлины (Р). Если в бюджете имеется дефицит, то государственные расходы на общественные нужды сократятся (О). Значит, если повысят пошлины, то государственные расходы на общественные нужды не сократятся.

3) Если он автор этого слуха (А), то он глуп (Г) или беспринципен (Б). Он не глуп и не лишен принципов. Значит, не он автор этого слуха.

4) Если бы он ей не сказал, она ни за что не узнала бы. А не спроси она его, он бы и не сказал. Но она узнала. Значит: Она его спросила.

3 Проверить правильность рассуждения средствами логики суждений: «Если бы он не пошел в кино, он не получил бы двойки. Если бы он подготовил домашнее задание, то он не пошел бы в кино. Он получил двойку. Значит, он не подготовил домашнее задание».

4 Пользуясь правилом построения противоположного высказывания, записать утверждения, противоположные следующим:

1) На любом курсе каждого института КФУ есть студенты, сдающие все экзамены на «отлично».

2) Каждый студент юридического факультета КФУ имеет друга, который умеет решать все логические задачи.

3) В любом самолете на рейсе Вашингтон-Москва присутствует хотя бы один сотрудник силовых органов, в каждой пуговице одежды которого вмонтирован микрофон.

5. Проверить правильность рассуждения средствами логики суждений: «Если человек осужден судом, то он лишается избирательных прав. Если человек признан невменяемым, то он также лишается избирательных прав. Следовательно, если человек обладает избирательным правом, то он здоров и не был осужден судом».

6. Один из четырех задержанных (Михайлов, Костин, Викторов, Тимофеев) подозревается в краже. На вопрос следователя «Кто совершил кражу?» были получены такие ответы:

- 1) Это сделал или Михайлов, или Костин;
- 2) Это сделал или Викторов, или Костин;
- 3) Это не могли сделать ни Тимофеев, ни Михайлов;
- 4) Это сделал или Викторов, или Михайлов.

Можно ли по этим данным установить, кто виновен в совершении преступления, если известно, что из четырех высказываний истинны а) ровно три; б) ровно два?

7. Иванов и Петров подозреваются в совершении убийства. В ходе следствия допросили четырех свидетелей, которые последовательно дали следующие показания: «Иванов не виновен», «Петров не виновен», «Из двух первых показаний по крайней мере одно истинно», «Показания третьего свидетеля ложны». Четвертый свидетель оказался прав. Кто виновен?

8. В одном городе было совершено ограбление квартиры. Подозрение пало на двух известных воров – Иванова и Петрова. Кроме того, были найдены три свидетеля, которые заявили: «Это они сделали вместе»,

«Ограбление совершил Иванов, Петров в этом не участвовал», «Если Петров совершил ограбление, то Иванов тоже принимал в этом участие». Какой вывод можно сделать из показаний свидетелей, если они все дали ложные показания?

9. Браун, Джонс и Смит обвиняются в подделке сведений о подлежащих налоговому обложению доходах. Они дают под присягой такие показания:

Браун: Джонс виновен, а Смит нет.

Джонс: Если Браун виновен, то виновен и Смит.

Смит: Я невиновен, но хотя бы один из них двоих виновен.

Ответьте на следующие вопросы: 1) Совместны ли показания всех троих (т.е. могут ли они быть верны одновременно)? 2) Показания одного из обвиняемых следуют из показаний другого; о чьих показаниях идет речь? 3) Если все трое невиновны, то кто совершил

лжесвидетельство? 4) Предполагая, что показания всех трех обвиняемых верны, укажите, кто невиновен, а кто виновен. 5) Если невинный говорит истину, а виновный лжет, то кто невиновен, а кто виновен.

Элементы теории множеств

1. Прочтите записи и перечислите элементы каждого из множеств: $A = \{x | x \in \mathbb{N}, x < 5\}$; $D = \{x | x \in \mathbb{Z}, -5 < x \leq 2\}$; $E = \{x | x \in \mathbb{Z}, -3 \leq x \leq 2\}$.

2. Установите, какое из подмножеств A или B является подмножеством другого множества, если: 1) $A = \{1; 2; 3; \dots; 10\}$, $B = \{2; 4; 6; 8\}$; 2) $A = \{2; 4; 6; 8; 10\}$, B - множество чисел первого десятка; 3) A - множество четных однозначных чисел, B - множество однозначных чисел, кратных 4; 4) A - множество двузначных натуральных чисел, B - множество четных двузначных чисел; 5) $A = \mathbb{N}$, $D = \mathbb{N}_0$; 6) $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{Z}$; 7) $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{Z}$.

3. Заданы множества: $A = \{3, 5, 7, a, c\}$; $B = \{a, p, c, 3, 5, 6, 7\}$; $C = \{a, 3, c, 7\}$. Расположите их так, чтобы каждое из них было подмножеством следующего за ним.

4. Пусть A - множество всех натуральных делителей числа 18; B - множество всех натуральных делителей числа 24. Найти: 1) множество общих делителей чисел 18 и 24; 2) самый большой общий делитель.

5. Найдите пересечение и объединение множества A различных букв, входящих в слово "педагогика", и множества B различных букв, входящих в слово "математика".

6. Пусть даны множества A , B , C . Найдите $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$, $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, если:

1) $A = \{2; 3; 8; 9\}$, $B = \{16; 18; 20\}$, $C = \mathbb{N}$; 2) $A = \mathbb{N}$, $B = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$, $C = \{3;$

$5; 7\}$;

3) $A = \{3; 4; 5; \dots\}$, $B = \mathbb{N}$, $C = \{-1; 0; 1; 2\}$; 4) $A = \{21; 22; \dots; 26\}$, $B = \{3; 5\}$, $C = \mathbb{N}$.

7. Заданы множества $A=\{1,2,3,5,a,c\}$, $B=\{1,2,3,p,a\}$, $C=\{5,c\}$. Какие из приведенных соотношений: 1) $B \subset A$, 2) $C \subset A$, 3) $A \setminus B = C$, 4) $A \cap B = C$, 5) $A \cap C = C$ верны?

8. Найти пересечение и объединение множеств: 1) $[3; 4]$ и $[2; 6]$; 2) $(-1; 3)$ и $(-4; 2]$; 3) $(-2; 1]$ и $[-2; 0)$; 4) $(-\infty; 3)$ и $(-1; \infty)$; 5) $A=[-2; 3]$, $B=(1; 5]$; 6) $A=[-1; 4]$, $B=[1; 2)$; 7) $A=(-\infty; 2)$, $B=[-3; \infty)$. (Указание. Для решения использовать числовую прямую).

9. Дано: $A=\{1; 2; 3\}$, $B=\{2; 4\}$, $C=[2; 8]$. Найдите результат следующих операций:

1) $A \cap (B \cup C)$; 2) $A \cup (B \cap C)$; 3) $(A \cup B) \cap C$; 4) $(A \cap C) \cup (A \cap B)$.

10. Найдите результаты операций для каждой тройки множеств A , B , C : 1) $A \cup (B \cap C)$; 2) $(A \cap B) \cap C$; 3) $A \cap (B \cup C)$; 4) $(A \cap B) \cup C$, если
а) $A=(0; 2]$, $B=[-1; 3]$, $C=(-3; 6)$; б) $A=(-3; 6)$, $B=[0; 4)$, $C=[2; 7]$.

11. Найти разности $A \setminus B$ и $B \setminus A$ множеств A и B , если: 1) $A=\{1; 2; 3; \dots; 10\}$, $B=\{5; 6; \dots; 12\}$; 2) A – множество натуральных делителей числа 18; B – множество натуральных делителей числа 24; 3) A – множество правильных многоугольников, B – множество прямоугольников; 4) $A=\{x|x \in \mathbb{R}, 2 \leq x \leq 6\}$, $B=\{x|x \in \mathbb{R}, 3 \leq x \leq 7\}$; 5) $A=\{x|x \in \mathbb{R}, 1 < x \leq 4\}$, $B=\{x|x \in \mathbb{R}, 2 < x \leq 8\}$; 6) $A=\{x|x \in \mathbb{R}, 0 < x < 2\}$, $B=\{x|x \in \mathbb{R}, 1 < x \leq 3\}$.

12. Для множеств A , B , C общего положения (т.е. $A \cap B \cap C \neq \emptyset$) на диаграмме Эйлера изобразить множества

1) $(A \cup C) \setminus B$; 2) $(A \setminus C) \cup B$; 3) $(A \cap B) \setminus C$; 4) $(A \cup B) \cap C$.

Элементы теории графов.

1. На квадратной доске 3×3 расставлены 4 коня так, как показано на рис.1. Можно ли сделав несколько ходов конями, переставить их в положение, показанное на рис.2?

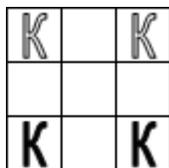


Рис.
1

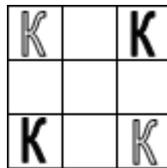


Рис.
2

2. В стране Ц есть 9 городов с названиями 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены авиалинией в том и только в том случае, если двузначное число, образованное названиями городов, делится на 3. Можно ли долететь по воздуху из города 1 в город 9?

3. В государстве 100 городов и из каждого города выходит 4 дороги. Сколько всего дорог в государстве.

4. В группе 30 человек. Может ли быть так, что 9 человек имеют по 3 друга, 11 – по 4 друга, а 10 – по 5 друзей?

5. Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит ровно 3 дороги, быть ровно 100 дорог?

6. Докажите, что число людей, живших когда-либо на Земле и сделавших нечетное число рукопожатий, четно.

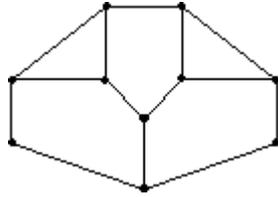
7. В стране из каждого города выходит 100 дорог и из каждого города можно добраться до любого другого. Одну дорогу закрыли на ремонт. Докажите, что и теперь из любого города можно добраться до любого другого.

8. Имеется группа островов, соединенных мостами так, что от каждого острова можно добраться до любого другого. Турист обошел все острова, пройдя по каждому мосту ровно 1 раз. На острове Т он побывал трижды.

Сколько мостов ведет с Т, если турист

- а) не с него начал и не на нем закончил?
- б) с него начал, но не на нем закончил?
- в) с него начал и на нем закончил?

9. На рисунке изображен парк, разделенный на несколько частей ручьями. Можно ли прогуляться по парку и его окрестностям так, чтобы перепрыгнуть через каждый ручей ровно 1 раз?



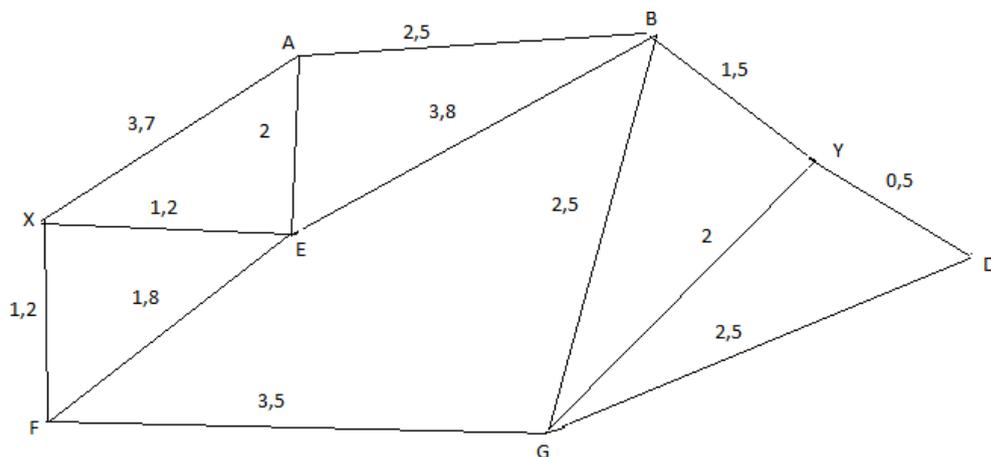
10. Между населёнными пунктами A, B, C, D, E, F построены дороги, протяжённость которых приведена в таблице. (Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет). Определите длину кратчайшего маршрута из A в F.

	A	B	C	D	E	F
A		2	4			
B	2		1		7	
C	4	1		3	4	
D			3		3	
E		7	4	3		2
F					2	

11. Между населёнными пунктами A, B, C, D, E построены дороги, протяжённость которых приведена в таблице. (Отсутствие числа в таблице означает, что прямой дороги между пунктами нет). Определите длину кратчайшего маршрута из A в B.

	A	B	C	D	E
A				1	
B			4		1
C		4		4	2
D	1		4		
E		1	2		

12. Посыльный должен доставить донесение из пункта А в пункт G. У него имеется карта района с указанием схемы дорог и их протяженности (в км), представленная ниже. Какой маршрут для быстрой доставки донесения должен выбрать посыльный, если скорость его движения по различным дорогам постоянна?



13. Туристическому агентству Татарстана необходимо выбрать маршрут в юго-восточном направлении республики так, чтобы проходил по всем избранным историческим местам и имел наименьшую протяженность, если указаны исторические места, которые нужно посетить туристам и расстояния между ними (в км): Казань-Арск 40, Казань-Мамадыш 150, Казань-Набережные Челны 220, Казань-Чистополь 90, Арск-Мамадыш 85, Мамадыш-Елабуга 50, Елабуга-Набережные Челны 40, Набережные Челны-Бугульма 110, Набережные Челны- Чистополь 90, Чистополь- Болгар 95, Чистополь-Билярск 40, Чистополь-Бугульма 160, Бугульма- Билярск 150, Болгар-Билярск 60. Составить граф соответствующий схеме дорог между историческими местами и по нему определить нужный маршрут.

Элементы теории вероятностей, случайных величин и математической статистики

1. В небольшом государстве работают 3 банка независимо друг от друга. Вероятность того, что за год первый банк не потребует вливания бюджетных денег, равна 0,9, второй – 0,8, третий – 0,75. Найти вероятность того, что за год: а) только один банк потребует бюджетных вливаний; б) хотя бы один банк потребует вливаний; в) только третий банк потребует вливания.

2. Отмечено, что в городе N в среднем 10 % заключенных браков в течение года заканчиваются разводом. Какова вероятность того, что из 8 случайно отобранных пар в течение года: а) ни одна пара не разведется; б) разведутся 2 пары?

3. В деканат поступили работы студентов по трем предметам в соотношении 2:3:5. При этом вероятности неудовлетворительной оценки по каждому из этих предметов соответственно равны 0,05; 0,02 и 0,08. Определить вероятность того, что взятая наудачу работа окажется неудовлетворительной.

4. Известно количество автоаварий в будние дни одного месяца: 3, 1, 2, 1, 0, 4, 1, 4, 5, 6, 2, 5, 1, 0, 2, 3, 3, 3, 0,1.

- Составить таблицы частот и относительных частот;
- Построить полигоны частот и относительных частот;

- Вычислить среднее;
- Составить интервальные таблицы частот и относительных частот с шагом $h = 2$;
- Построить гистограмму.

5. По сведениям автоинспекции, количество дорожных происшествий на улицах города N в первую декаду октября было таким: 6, 8, 10, 7, 6, 11, 9, 8, 7, 11. В сводке за следующие 10 дней оказались такие данные: 0, 5, 7, 7, 12, 11, 14, 13, 7, 6. Найти среднее арифметическое происшествий за первую и вторую декаду октября и модуль разности этих двух величин.

6. УВД города опубликовало сводку о числе правонарушений, совершенных подростками за первые 20 дней сентября: 8, 6, 13, 4, 13, 13, 12, 9, 7, 6, 12, 14, 13, 12, 17, 6, 8, 12, 7, 12.

- Составить таблицу частот и относительных частот;
- Найти среднее и дисперсию;
- Найти моду и медиану.