Казанский государственный университет
им. В.И. Ульянова-Ленина

Б.Г. Габдулхаев

ПРЯМЫЕ И ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЛАБОСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ I-РОДА

Учебное пособие

Казань
2006

УДК 517.9:519.6

Печатается по решению
Учебно-методической комиссии
механико–математического факультета
Казанского государственного университета
от 26 мая 2006 г.

Научный редактор
кандидат физико-математических наук, доцент Ожегова А.В.

Габдулхаев Б.Г.

Прямые и проекционные методы решения слабосингулярных интегральных уравнений I-го рода. Учебное пособие. — Казань: Казанский государственный университет им. В.И. Ульянова-Ленина, 2006.— 137с.

Излагаются прямые и проекционные методы решения слабосингулярных интегральных уравнений I-го рода с разрывными разностными ядрами в главных частях интегральных операторов. Предлагается теоретико-функциональное обоснование основных полиномиальных и сплайновых методов в смысле общей теории приближенных методов функционального анализа.

Книга предназначена для студентов старших курсов и аспирантов, специализирующихся в области теории функций и приближений, интегральных и интегродифференциальных уравнений.

УДК 517.9:519.6

ПРЕДИСЛОВИЕ

Многочисленные теоретические и прикладные задачи науки, техники и производства приводят (см.,напр.,монографии [9, 34, 35, 44, 49, 52, 54, 59, 67, 69, 70], докторские диссертации [46, 80], работы обзорного характера [56, 72, 73, 81] и библиографию в них) к необходимости решения различных классов слабосингулярных интегральных уравнений I-рода с разностными разрывными ядрами в главных частях интегральных операторов.Такие уравнения относятся к классу некорректно поставленных задач [53, 58, 65, 76] и, как правило, точно не решаются. Поэтому для их решения разработаны и применяются различные приближенные методы (см.,напр.,монографии [9, 34, 35, 44, 49, 52, 54, 67, 69], диссертации [2, 8, 46, 50, 68, 74, 80], а также библиографию в них).

В данном учебном пособии излагаются результаты по аппроксимативным (в первую очередь, по *прямым и проекционным*) методам решения указанных выше уравнений. Книга состоит из двух глав, в которых излагаются соответственно *полиномиальные* и *сплайновые* методы решения слабосингулярных интегральных уравнений I-рода. Изложение ведется в основном по работам автора, в первую очередь по его монографиям [25, 34, 35].

В обеих главах основное внимание уделено: 1) корректной постановке задачи решения слабосингулярных интегральных уравнений I-го рода путем подходящего подбора пространств искомых элементов в зависимости от пространств правых частей, а следовательно, в зависимости от исходных данных; 2) теоретическому обоснованию приближенных методов решения таких уравнений, под которым понимается следующий круг задач (см. гл.14 [55] и гл.1 [25]): а) доказательство теорем существования и единственности решения аппроксимирующих уравнений; б) установление эффективных оценок погрешности приближенного решения в зависимости от структурных свойств исходных данных; в) доказательство сходимости приближенных решений к точному решению при наличии последовательности аппроксимирующих уравнений и установление скорости сходимости; г) исследование устойчивости и обусловленности приближенных методов.

Книга предназначена для студентов старших курсов и аспирантов, специализирующихся в области теории функций и приближений, интегральных и интегродифференциальных уравнений.

ГЛАВА I

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЛАБОСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ I-РОДА

Данная глава посвящена *полиномиальным* приближенным методам решения слабосингулярных интегральных уравнений (кратко: слабо с.и.у.) вида

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\sin\frac{s-\sigma}{2}\right|x(\sigma)d\sigma+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h(s,\sigma)x(\sigma)d\sigma=y(s), \qquad (0.1)$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}\ln\frac{1}{|t-\tau|}\frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}d\tau+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}g(t,\tau)\frac{\varphi(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}d\tau=f(t),\ |t|\leqslant 1, \quad (0.2)$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\mathrm{ctg}\frac{s-\sigma}{2}\right|^{\gamma}x(\sigma)d\sigma+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h(s,\sigma)x(\sigma)d\sigma=y(s) \qquad (0.3)$$

и некоторых их обобщений; здесь $h(s,\sigma)$, $y(s)$, $g(t,\tau)$, $f(t)$ – известные непрерывные функции в своих областях определения, $x(s)$, $\varphi(t)$ – искомые функции, $0<\gamma=const<1$, причем h, y и x являются 2π-периодическими функциями, а слабо сингулярные интегралы понимаются как несобственные.[1)]

§1. Уравнения с логарифмическими ядрами. Периодический случай

1.1. Корректность и некорректность задачи. Построение приближенных методов решения с.и.у. (0.1) (как и с.и.у. (0.2) и (0.3)) не представляет особых трудностей. Однако большие трудности представляет теоретическое обоснование указанных методов. Это связано с некорректностью задачи решения с.и.у. (0.1), что, в свою очередь, связано с полной непрерывностью слабо сингулярного оператора $S : X \longrightarrow X$,

[1)] В каждой из глав принята автономная двойная нумерация теорем, лемм, формул и т. п.; напр., формула (2.3) и теорема 1.4 гл. I (соответственно гл. II) означают формулу 3 § 2 и теорему 4 § 1 соответствующей главы.

$$Sx \equiv -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln\left|\sin\frac{s-\sigma}{2}\right| x(\sigma)\,d\sigma, \qquad x \in X, \tag{1.1}$$

и вытекающей отсюда полной непрерывностью оператора $A : X \longrightarrow X$,

$$Ax \equiv Sx + Rx, \quad Rx \equiv \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} h(s,\sigma)x(\sigma)\,d\sigma, \tag{1.2}$$

в известных функциональных пространствах X.

Пусть ниже $L_p = L_p[0,2\pi]$, $C_{2\pi} = \widetilde{C}$, $H^\beta = H^\beta[0,2\pi]$ – пространства соответственно суммируемых со степенью p $(1 \leqslant p < \infty)$, непрерывных и удовлетворяющих условию Гёльдера ($H^\beta \equiv H_\beta$) с показателем β $(0 < \beta \leqslant 1)$ 2π–периодических функций с нормами

$$\|x\|_{L_p} = \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |x(s)|^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}} \equiv \|x\|_p, \qquad x \in L_p\,;$$

$$\|x\|_{C_{2\pi}} = \max_s |x(s)| \equiv \|x\|_\infty = \|x\|_{\widetilde{C}}, \quad x \in C_{2\pi};$$

$$\|x\|_{H^\beta} = \|x\|_\infty + H(x;\beta) \equiv \|x\|_\beta, \quad x \in H^\beta \equiv H_\beta,$$

где

$$H(x;\beta) = \sup\{|x(s') - x(s'')| \cdot |s' - s''|^{-\beta} : \quad s' \neq s''\}.$$

Лемма 1.1. *Пусть X – любое из пространств: L_p $(1 \leqslant p < \infty)$, $C_{2\pi}$, H^β $(0 < \beta \leqslant 1)$. Тогда оператор $S : X \longrightarrow X$ вполне непрерывен.*

Следствие. *Пусть в случае $X = H^\beta$ функция $h(s,\sigma)$ по переменной s дополнительно удовлетворяет условиям: $h(s,\sigma) \in H^\alpha$ $(0 < \beta < \alpha \leqslant 1)$ при $\beta < 1$ и $h'_s(s,\sigma) \in H^\delta$ $(\delta > 0)$ при $\beta = 1$ равномерно относительно σ. Тогда в условиях леммы оператор $A : X \longrightarrow X$ вполне непрерывен, а обратный оператор $A^{-1} : X \longrightarrow X$, в случае его существования, неограничен.*

Доказательство леммы проводится с учетом соотношения

$$g(\sigma) \equiv -\ln\left|\sin\frac{\sigma}{2}\right| = O\left(|\sigma|^{-\varepsilon}\right), \qquad \sigma \to 0 \tag{1.3}$$

(здесь ε – любое сколь угодно малое положительное число), и при $X = C_{2\pi}$ и $X = L_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ оно ничем не отличается от доказательства теоремы 1 (и ее следствия 2) работы [38].

Пусть $X = H^\beta$. Тогда в силу известной теоремы И.И.Привалова [4, 66] для любой функции $x(s) \in H^\beta$ функция $\psi(s) = S(x;s)$ удовлетворяет условиям: $\psi'(s) \in H^\beta$ при $0 < \beta < 1$ и $\psi'(s) \in Z$ при $\beta = 1$; здесь $Z = Z[0, 2\pi]$ означает класс непрерывных 2π–периодических функций, удовлетворяющих условию Зигмунда, т.е. $\omega_2(\varphi;\delta) = O(\delta)$, $0 < \delta \leqslant \pi$, где $\omega_2(\varphi;\delta)$ – второй модуль непрерывности (модуль гладкости) функции $\varphi(s) \in C_{2\pi}$. Из последнего неравенства следует, как известно, оценка $\omega(\psi';\delta) = O\{\delta(1 + |\ln\delta|)\}$, где $\omega(\varphi;\delta) = \omega(\varphi;\delta)_\infty = = \omega(\varphi;\delta)_C$ – обычный модуль непрерывности функции $\varphi \in C_{2\pi}$. Тогда для завершения доказательства леммы остается воспользоваться критерием компактности в пространстве гёльдеровых функций. В силу сказанного утверждение следствия становится очевидным.

Заметим, что утверждение, аналогичное лемме, имеет место также при другом способе выбора функциональных пространств X. Поэтому, если мы хотим решать с.и.у. (0.1) в пространстве X, считая $A : X \longrightarrow X$, то должны использовать теорию некорректно поставленных задач (см., напр., [53, 58, 65, 76]) для операторных уравнений I-рода, в частности, хорошо развитые методы регуляризации и квазирешений, со всеми вытекающими отсюда трудностями.

Однако для с.и.у. (0.1)–(0.3) и им подобных существует также другой подход, основанный на соответствующем выборе пространств правых частей (обозначим его Y) и искомых элементов X. Другими словами, теперь операторы S и A будем рассматривать как операторы из X в Y, где $X \neq Y$. Тогда при подходящем выборе пространства $X(Y)$ в зависимости от данного пространства $Y(X)$ (или же наоборот) и условий решаемой задачи с.и.у. (0.1) – (0.3) становятся уравнениями, приводящимися к уравнениям II-рода (здесь мы пользуемся терминологией [55]), а тогда задача решения с.и.у. (0.1) – (0.3) будет поставлена корректно.

Следует отметить, что лемма 1.1 допускает различные обобщения; здесь приведем (без доказательства) лишь следующее

Добавление к лемме 1.1. а) *Оператор* $S : C_{2\pi} \longrightarrow H^\beta$ *вполне непрерывен при любых* $\beta \in (0,1)$, *а при* $\beta = 1$ *неограничен;* б) *оператор* $S : L_p \longrightarrow H^\beta$, *где* $p \in (1,\infty)$ *дано, вполне непрерывен при любых* $\beta \in \left(0, 1 - \frac{1}{p}\right)$; в) *оператор* $S : L_p \longrightarrow H^\beta$, *где* $\beta \in (0,1)$ *дано, вполне непрерывен при любых* $p \in (1, \frac{1}{1-\beta})$.

С учетом сказанного и исходя из пространства X, введем пространства 2π–периодических функций

$$X^{(r)} = \{\varphi(s) \in X : \exists \varphi^{(r)}(s) \in X\} \equiv X^r,\ r+1 \in \mathbb{N}, \quad X^{(\circ)} \equiv X,$$

с нормой

$$\|\varphi\|_{X^r} = \sum_{i=0}^{r} \|\varphi^{(i)}(s)\|_X, \qquad \varphi^{(\circ)}(s) \equiv \varphi(s).$$

В случае $X = L_p \quad (1 \leqslant p < \infty)$ будем пользоваться стандартным обозначением $X^r \equiv W_p^r$, а также $\|\varphi\|_{W_p^r} = \|\varphi\|_{r;p}$ $(\varphi \in W_p^r)$.

В пространстве L_p рассмотрим оператор Гильберта

$$I\varphi = I(\varphi; s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} \varphi(\sigma)\, d\sigma, \quad \varphi \in L_p,\ 1 < p < \infty, \tag{1.4}$$

где сингулярный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши – Лебегу [45, 61, 66]. Ниже всюду через

$$c_k(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\sigma) e^{-ik\sigma}\, d\sigma, \quad \varphi \in L_1,\ k = 0, \pm 1, \ldots$$

будем обозначать комплексные коэффициенты Фурье функции $\varphi \in L_1 \equiv L$. Кроме того, регулярные ядра и правые части с.и.у. (0.1) – (0.3) без ограничения общности будем считать вещественными [1)].

Лемма 1.2. *Пусть $X = L_p\,(1 < p < \infty)$ или $H^\beta\,(0 < \beta < 1)$, а $Y = X^1$. Тогда оператор $S : X \longrightarrow Y$ непрерывно обратим и обратный оператор $S^{-1} : Y \longrightarrow X$ определяется по любой из формул*

$$S^{-1}(y; s) = -2\, I(y'; s) + \frac{1}{2\pi \ln 2} \int_0^{2\pi} y(s)\, ds, \quad y \in Y, \tag{1.5}$$

$$S^{-1}(y; s) = \frac{c_0(y)}{\ln 2} + 2\, i \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|\, c_k(y)\, e^{iks} =$$

$$= \frac{c_0(y)}{\ln 2} - 2\, i \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{sgn}\ k \cdot c_k(y') e^{iks}, \qquad y \in Y \tag{1.6}$$

где $\operatorname{sgn} a = \{+1 \quad \text{\textit{при}}\ a > 0; \quad 0 \quad \text{\textit{при}}\ a = 0; \quad -1 \quad \text{\textit{при}}\ a < 0\}$.

Следствие 1. *При $X = L_2$, $Y = W_2^1$ для обратного оператора S^{-1} справедлива формула*

$$\|S^{-1}\| = 2, \qquad S^{-1} : W_2^1 \longrightarrow L_2. \tag{1.7}$$

[1)] Несмотря на это, ради упрощения выкладок мы иногда пользуемся рядами Фурье в комплексной форме.

Следствие 2. *Пусть ядро* $h(s, \sigma)$ *таково, что оператор* $R : X \longrightarrow Y$ *вполне непрерывен. Если однородное уравнение, соответствующее с.и.у.* (0.1), *имеет только нулевое решение, то оператор* $A \equiv S + R : X \longrightarrow Y$ *непрерывно обратим.*

Доказательство. Формулы (1.5) и (1.6) по существу известны (см., напр., [45, 77]), поэтому их доказательства приводятся лишь ради полноты изложения. Рассмотрим уравнение $Sx = y$ $(x \in X, y \in Y)$, где оператор S определен в (1.1). Дифференцируя и интегрируя его, получим уравнения

$$I(x; s) = 2\, y'(s) \qquad (x \in X, \quad y \in Y), \tag{1.8}$$

$$\ln 2 \cdot \int\limits_0^{2\pi} x(s)\, ds = \int\limits_0^{2\pi} y(s)\, ds \quad (x \in X, \quad y \in Y). \tag{1.9}$$

Известно [45, 66], что уравнение (1.8) разрешимо и его общее решение имеет вид $x(s) = -2\, I(y'; s) + \text{const}$. Отсюда, определяя const с помощью (1.9), получаем представление (1.5).

Докажем представление (1.6). В условиях леммы функции $x \in X$ и $y \in Y$ можно разложить в ряды Фурье

$$x(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(x) e^{iks}, \quad y(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(y) e^{iks}. \tag{1.10}$$

Тогда в силу (1.1) и (1.3) имеем

$$Sx = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \ln \left| \sin \frac{\sigma}{2} \right| \, x(s - \sigma)\, d\sigma = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(x) c_k(g) e^{iks}. \tag{1.11}$$

Отсюда, с учетом линейной независимости системы функций $\{e^{ijs}\}$, находим $c_k(x) = c_k(y)/c_k(g) \equiv c_k(x^*)$, где,

$$c_k(g) = \{\ln 2 \ \textit{при} \ k = 0; \ \frac{1}{2|k|} \ \textit{при} \ k \neq 0\}, \ g(\sigma) = -\ln \left| \sin \frac{\sigma}{2} \right|. \tag{1.12}$$

Тогда

$$x^*(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(x^*) e^{iks} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{c_k(y)}{c_k(g)} e^{iks} =$$

$$= \frac{c_0(y)}{\ln 2} - 2\, i \sum_{|k|=1}^{\infty} \operatorname{sgn} \ k \cdot c_k(y') e^{iks} \equiv S^{-1} y.$$

Легко показать, что в условиях леммы только что построенная функция $x^*(s)$ является единственным решением уравнения $Sx = y$ ($x \in X$, $y \in Y$).

Далее, разлагая $y'(s) \in L_2$ в ряд Фурье

$$y'(s) = \sum_{|k|=1}^{\infty} c_k(y')e^{iks},\ c_k(y') = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} y'(s)e^{-iks}\,ds,\ y \in Y, \tag{1.13}$$

и пользуясь известными формулами

$$I(\cos k\sigma; s) = -\sin ks,\ k+1 \in \mathbb{N}; \quad I(\sin k\sigma; s) = \cos ks,\ k \in \mathbb{N}, \tag{1.14}$$

имеем

$$I(y'; s) = i\sum_{k=-\infty}^{\infty} \text{sgn}\ k \cdot c_k(y')e^{iks} = -\sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|\, c_k(y)\, e^{iks}. \tag{1.15}$$

Тогда, как легко видеть, из (1.6) и (1.15) следует представление (1.5). В свою очередь, с учетом (1.10) и (1.15) из (1.5) следует представление (1.6). Другими словами, представления (1.5) и (1.6) являются эквивалентными, что, очевидно, естественно.

Из (1.6), (1.13) с учетом равенства Парсеваля находим

$$\|S^{-1}y\|_2^2 = |c_0(y)|^2/\ln^2 2 + 4\sum_{|k|=1}^{\infty} |c_k(y')|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \|y\|_2^2/\ln^2 2 + 4\|y'\|_2^2 \leqslant 4\|y\|_{1;2}^2, \quad y \in W_2^1.$$

Отсюда (равно как и из (1.5)) следует неравенство $\|S^{-1}\| \leqslant 2$, $S^{-1} : W_2^1 \longrightarrow L_2$. Обычным способом легко доказывается также обратное неравенство.

Лемма 1.2 и ее следствие 1 доказаны, а тогда следствие 2 становится очевидным в силу известных результатов (см., напр., [55]) для операторных уравнений, приводящихся к уравнениям II рода в B – пространствах.

Добавление к лемме 1.2. *Операторы* $S : C_{2\pi} \longrightarrow C_{2\pi}^1$ *и* $S^{-1} : C_{2\pi}^1 \longrightarrow C_{2\pi}$ *неограничены, где* $C_{2\pi}^1$ *– пространство непрерывно дифференцируемых* 2π*-периодических функций с обычной нормой*

$$\|x\| = \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty.$$

Это утверждение следует из леммы 1.2 и известного результата Н.Н.Лузина о сопряженных функциях (см., напр., в [4]).

Лемма 1.3. *Оператор* $S : L_2 \longrightarrow L_2$ *симметричен и положителен, а его собственные значения* λ_k $(k = 0, \pm 1, \cdots)$ *и соответствующие собственные функции* $\varphi_k(s)$ *определяются по формулам*

$$\lambda_k = c_k(g) = \{\ln 2,\ k = 0;\ \frac{1}{2|k|},\ k = \pm 1, \pm 2, \ldots\},\ \varphi_k(s) = e^{iks}. \quad (1.16)$$

Следствие. $\|S\| = \ln 2,\ S : L_2 \longrightarrow L_2$, *и однородное уравнение* $Sx = 0$ *имеет в* L_2 *лишь тривиальное решение* $x^* = 0$.

Доказательство. Симметричность оператора S очевидна, докажем его положительность. С помощью (1.10) – (1.12) для любого $x \in L_2$ $(x \neq 0)$ находим

$$(Sx, x)_2 = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(x) c_k(g) e^{iks}, \quad \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j(x) e^{ijs} \right)_{L_2} =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(x)|^2 c_k(g) = |c_0(x)|^2 \ln 2 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|c_k(x)|^2}{k} > 0, \qquad (1.17)$$

где $(\varphi, \phi)_2$ – скалярное произведение функций $\varphi, \phi \in L_2$, причем $(1,1)_2 \equiv 1$. Ясно, что из (1.17) следует [62] положительность оператора $S : L_2 \longrightarrow L_2$. В силу сказанного выше, формула (1.16) становится очевидной. Тогда первое утверждение следствия выводится из (1.16), а второе – из (1.17).

Далее, с.и.у. (0.1) запишем в операторном виде

$$Ax \equiv Sx + Rx = y \quad (x \in X,\, y \in Y), \qquad (1.18)$$

где $X = L_p\,(1 < p < \infty)$ или $H^\beta\,(0 < \beta < 1)$, а $Y = X^1$. Тогда в силу леммы 1.2 это уравнение эквивалентно любому из интегральных уравнений II-рода

$$x + S^{-1}Rx = S^{-1}y\ (x, S^{-1}y \in X), \qquad (1.18')$$

$$\varphi + RS^{-1}\varphi = y \qquad (\varphi = Sx, y \in Y), \qquad (1.18'')$$

рассматриваемых соответственно в пространствах X и Y. Другими словами, при соответствующих условиях с.и.у. (0.1) становится, как уже отмечалось, уравнением, приводящимся к уравнениям Фредгольма II-рода, где при некоторых естественных условиях на регулярное ядро $h(s, \sigma)$ операторы $S^{-1}R : X \longrightarrow X$ и $RS^{-1} : Y \longrightarrow Y$ являются вполне непрерывными в пространствах X и $Y = X^1$ соответственно.

Указанная процедура регуляризации с.и.у. (0.1), т.е. приведение его к эквивалентным уравнениям $(1.18')$ и $(1.18'')$, может быть положена в основу построения численных методов его решения (см., напр.,

[77]); в этом случае обоснование численных методов не представляет особых трудностей, т.к. уравнения ($1.18'$) и ($1.18''$) являются обычными интегральными уравнениями Фредгольма II-рода. Тем не менее для многих приближенных методов, особенно для методов проекционного типа, непосредственное численное решение с.и.у. (0.1), т.е. не приводя его к уравнению II -рода, является более эффективным со многих точек зрения. Ниже мы именно так и будем поступать как относительно с.и.у. (0.1), так и относительно других с.и.у. Однако в этом случае обоснование численных методов будет представлять существенную трудность, которая в ряде случаев до сих пор не преодолена.

Этот раздел закончим доказательством устойчивости решений слабо с.и.у. Наряду с (0.1) рассмотрим также с.и.у. вида

$$A_\varepsilon x_\varepsilon \equiv -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\sin\frac{s-\sigma}{2}\right| x_\varepsilon(\sigma)\,d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h_\varepsilon(s,\sigma)x_\varepsilon(\sigma)\,d\sigma = y_\varepsilon(s), \tag{1.19}$$

где непрерывные функции h_ε и y_ε в определенном смысле аппроксимируют функции соответственно $h(s,\sigma)$ и $y(s)$ из с.и.у. (0.1), а ε – положительный параметр. Имеет место следующая

Лемма 1.4. *Пусть с.и.у.* (0.1) *имеет единственное решение* $x^*(s) \in X$ *при любой правой части* $y(s) \in Y$ *и выполнены условия:*

а) *при* $X = L_2$, $Y = W_2^1$

$$\sum_{i=0}^{1} \left\| y^{(i)} - y_\varepsilon^{(i)} \right\|_{L_2[0,2\pi]} < \varepsilon, \quad \sum_{i=0}^{1} \| h_s^{(i)} - h_{\varepsilon s}^{(i)} \|_{L_2[0,2\pi]^2} < \varepsilon;$$

б) *при* $X = H^\beta$, $Y = X^1 = H^{1+\beta}\,(0<\beta<1)$

$$\sum_{i=0}^{1} \left\| y^{(i)} - y_\varepsilon^{(i)} \right\|_{\beta} < \varepsilon, \quad \sum_{i=0}^{1} \| h_s^{(i)} - h_{\varepsilon s}^{(i)} \|_{H^\beta \otimes C_{2\pi}} < \varepsilon,$$

где

$$\|\varphi(s,\sigma)\|_{L_2[0,2\pi]^2} = \left\{ \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |\varphi(s,\sigma)|^2\,ds\,d\sigma \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$\|\varphi(s,\sigma)\|_{H^\beta\otimes C_{2\pi}} = \max_{s,\sigma} |\varphi(s,\sigma)| + \sup_{\substack{s',s'',\sigma \\ s'\neq s''}} \frac{|\varphi(s',\sigma)-\varphi(s'',\sigma)|}{|s'-s''|^\beta}.$$

Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, *что для всех* $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ *с.и.у.* (1.19) *также имеет единственное решение* $x_\varepsilon^*(s) \in X$, *которое при*

$\varepsilon \to 0$ *сходится к* $x^*(s)$ *со скоростью*

$$\|x^* - x_\varepsilon^*\|_X = O(\varepsilon).$$

Доказательство почти очевидно. Действительно, из условий леммы следует, что

$$\|A - A_\varepsilon\|_{X\to Y} = O(\varepsilon), \quad \|y - y_\varepsilon\|_Y < \varepsilon.$$

Отсюда и из известной теоремы функционального анализа об обратимости операторов, близких к обратимому оператору (см., напр., [55]), в силу леммы 1.2 получаем требуемое утверждение.

С учетом сказанного выше всюду в дальнейшем, если нет других условий, будем считать, что

$$y(s) \in W_2^1, \quad h(s,\sigma) \in C_{2\pi} \otimes L_2, \quad \frac{d}{ds}R(x;s) \in L_2 \ (x \in L_2), \qquad (1.20)$$

где $\varphi(s,\sigma) \in C_{2\pi} \otimes L_2$ означает, что $\varphi(s,\sigma) \in C_{2\pi}$ по s почти для всех σ и $\varphi(s,\sigma) \in L_2[0,2\pi]$ по σ равномерно относительно s.

1.2. Общий прямой и проекционный методы. Приближенное решение с.и.у. (0.1) будем искать в виде тригонометрического полинома

$$x_n(s) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{iks}, \quad \overline{\alpha}_k = \alpha_{-k}, \quad n \in \mathbb{N}, \qquad (1.21)$$

коэффициенты которого определим исходя из минимальности невязки [1)]

$$r_n \equiv y - Ax_n \equiv \Phi(s; \{\alpha_k\}_{-n}^{n}) = r_n(s) \qquad (1.22)$$

в том или ином смысле. В зависимости от смысла минимизации будем получать тот или иной проекционный метод решения с.и.у. (0.1). Например, если коэффициенты $\{\alpha_k\}$ определяются из условия

$$\|\Phi(s; \{\alpha_k\}_{-n}^{n})\|_U \Longrightarrow \min, \quad U = X \text{ или } Y, \qquad (1.23)$$

то будем иметь *метод наименьших квадратов.* Если

$$\int_0^{2\pi} \Phi(s; \{\alpha_k\}_{-n}^{n}) e^{-ijs}\, ds = 0, \quad j = \overline{-n,n}, \qquad (1.24)$$

то получим *метод Галеркина (редукции)* по тригонометрической системе функций. Если

$$\Phi(s_j; \{\alpha_k\}_{-n}^{n}) = 0, \quad j = \overline{0,2n}, \qquad (1.25)$$

[1)] Здесь и далее $\overline{\alpha}$ – комплексно сопряженная с α величина.

где $\{s_j\}$ – некоторая система попарно неэквивалентных узлов, то получим *метод коллокации (совпадения).* Если же коэффициенты $\{\alpha_k\}$ определяются из условий

$$\int\limits_{s_j}^{s_{j+1}} \Phi(s; \{\alpha_k\}_{-n}^{n})\, ds = 0, \quad j = \overline{0, 2n}, \tag{1.26}$$

где $\{s_j\}$ – некоторая система узлов, то получим *метод подобластей.*

Заметим, что каждое из условий (1.23) – (1.26) приводит к системе линейных алгебраических уравнений (далее кратко: СЛАУ) порядка $N = 2n + 1$. Если указанная система имеет решение $\{\alpha_k^*\}_{-n}^{n}$, то за приближенное решение с.и.у. (0.1) будем принимать полином

$$x_n^*(s) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k^* e^{iks}, \quad \overline{\alpha}_k{}^* = \alpha_{-k}^*, \tag{1.21*}$$

причем свой для каждого конкретного приближенного метода.

К построению приближенного решения с.и.у. (0.1) – (0.3) можно подойти также с других и, как нам представляется, более общих позиций. Обьясним суть дела снова на примере с.и.у. (0.1).

Обозначим (здесь и далее) через $\mathbb{H}_n^T$ множество всех тригонометрических полиномов порядка не выше n. Через $X_n \subset X$ и $Y_n \subset Y$ будем обозначать множество $\mathbb{H}_n^T$, наделенное нормами пространств соответственно X и Y. Обозначим через P_n некоторый аддитивный и однородный оператор, отображающий пространство Y в подпространство Y_n, где $2n + 1 \in \mathbb{N}$. Теперь приближенное решение $x_n^*(s)$ с.и.у. (0.1) будем определять как точное решение одного из следующих операторных уравнений:

$$A_n x_n \equiv S_n x_n + R_n x_n = y_n \quad (x_n \in X_n,\, y_n \in Y_n), \tag{1.27}$$

$$A_n x_n \equiv P_n S x_n + P_n R x_n = P_n y \quad (x_n \in X_n,\, P_n y \in Y_n), \tag{1.28}$$

где операторы $S_n, R_n : X_n \longrightarrow Y_n$ и элементы $y_n \in Y_n$ суть некоторые аппроксимации соответственно операторов S, $R : X \longrightarrow Y$ и правой части $y \in Y$ уравнения (1.18).

Отметим, что каждое из уравнений (1.27), (1.28) эквивалентно СЛАУ относительно коэффициентов полинома (1.21). Поскольку этот полином можно представить в виде

$$x_n(s) = \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} x_n(s_k) D_n(s - s_k) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(x_n) e^{iks}, \tag{1.29}$$

где

$$D_n(\varphi) = \frac{\sin(n+1/2)\varphi}{2\sin(\varphi/2)} = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n} \cos m\varphi, \quad s_k = \frac{2k\pi}{2n+1}, \tag{1.30}$$

— ядро Дирихле n-го порядка, то каждое из уравнений (1.27), (1.28) эквивалентно СЛАУ относительно $x_n(s_k)$ – приближенных значений искомой функции $x(s)$ в узлах s_k, $k = \overline{0,\, 2n}$, или же относительно коэффициентов Фурье $c_k(x_n)$, $k = \overline{-n, n}$, приближенного решения $x_n(s)$.

Отметим, что если $S_n x_n = P_n S x_n$ и $R_n x_n = P_n R x_n$ для $x_n \in X_n$, а операторы $P_n : Y \longrightarrow Y_n$ являются проекционными, т.е. $P_n^2 = P_n$, то уравнения (1.27) и (1.28) являются эквивалентными; однако в общем случае эти уравнения указанным свойством не обладают. Отсюда ясно, что наиболее общим из них является уравнение (1.27), представляющее собой приближенное уравнение *общего полиномиального прямого метода решения* с.и.у. (0.1), а (1.28) является приближенным уравнением *общего проекционного метода решения* с.и.у. (0.1). Поэтому при соответствующем выборе операторов P_n, S_n, R_n и элементов y_n из (1.27), (1.28) можно получить СЛАУ многих известных прямых и проекционных методов решения с.и.у. (0.1), в том числе указанных выше методов Галеркина, коллокации, подобластей и механических квадратур.

Для уравнений (0.1) и (1.27) справедлива следующая общая

Теорема 1.1. *Пусть выполнены условия:*

а) *с.и.у.* (0.1) *однозначно разрешимо в* X *при любой правой части* $y \in Y = X^1$*;*

$$\text{б) } \varepsilon_n \equiv \|A - A_n\| \to 0,\ n \to \infty; \quad A - A_n : X_n \longrightarrow Y. \tag{1.31}$$

Тогда при всех $n \in \mathbb{N}$ *таких, что*

$$q_n \equiv \|A^{-1}\|\, \varepsilon_n < 1,\ A^{-1} : Y \longrightarrow X, \tag{1.32}$$

приближенные уравнения (1.27) *также однозначно разрешимы. Если, кроме того, выполнено условие*

$$\text{в) } \delta_n \equiv \|y - y_n\|_{Y} \to 0, \quad n \to \infty, \tag{1.33}$$

то приближенные решения (1.21*), *определяемые из уравнения* (1.27), *сходятся к точному решению* x^* *с.и.у.* (0.1) *в пространстве* X *и*

$$\|x^* - x_n^*\|_X \leqslant \frac{\|A^{-1}\|}{1 - q_n} \left[\, \|y - y_n\|_{Y} + q_n \|y\|_{Y} \,\right] = O\,(\varepsilon_n + \delta_n)\,. \tag{1.34}$$

Следствие. *В условиях теоремы операторы* $A_n : X_n \longrightarrow Y_n$ *линейно обратимы и обратные операторы* $A_n^{-1} : Y_n \longrightarrow X_n$ *ограничены по норме в совокупности:*

$$\|A_n^{-1}\| \leqslant \|A^{-1}\|(1-q_n)^{-1} = O\,(1)\,, \quad n \to \infty. \tag{1.35}$$

Доказательство этой теоремы с учетом сказанного в разделе 1.1 следует из теоремы 7 гл. I монографии [25] (см. также ниже §5).

Очевидно, что для уравнения (1.28) теорема 1.1 и ее следствие остаются в силе. Однако в этом случае из теорем 6 и 14 гл. I монографии [25] и леммы 1.2 следует более общий результат:

Теорема 1.2. *Справедливы утверждения:* а) *если оператор* $A = S + R : X \longrightarrow Y$ *линейно обратим, то при* n *таких, что*

$$r_n \equiv \|A^{-1}\|\,\|R - P_n R\| < 1, \quad R - P_n R : X_n \longrightarrow Y, \tag{1.36}$$

операторы $A_n = S + P_n R : X_n \longrightarrow Y_n$ *также линейно обратимы и*

$$\|x^* - x_n^*\|_X \leqslant \frac{\|A^{-1}\|}{1 - r_n}\,[\,\|y - P_n y\|_Y + r_n\|y\|_Y]\,, \tag{1.31$'$}$$

$$\|x^* - x_n^*\|_X \leqslant \|E - A_n^{-1}P_n A\|_{X\to X}\,\|x^* - \tilde{x}_n\|_X, \quad \forall\,\tilde{x}_n \in X_n, \tag{1.37}$$

где $x^* = A^{-1}y$, $x_n^* = A_n^{-1}P_n y$, *а* E *– единичный оператор;* б) *если с.и.у.* (0.1) *имеет решение* x^* *при данной правой части* $y \in Y$ *и операторы* $A_n = S + P_n R : X_n \longrightarrow Y_n$ *линейно обратимы (напр., в условиях пункта* а) *), то при* $P_n^2 = P_n$ *для погрешности приближенного решения справедливы соотношения*

$$\|x^* - x_n^*\|_X = \|(E - A_n^{-1}P_n R)(x^* - S^{-1}P_n S x^*)\|_X \leqslant$$
$$\leqslant \|E - A_n^{-1}P_n R\|_{X\to X}\cdot\|S^{-1}\|_{Y\to X}\cdot\|Sx^* - P_n Sx^*\|_Y; \tag{1.38}$$

$$\|x^* - x_n^*\|_X \leqslant \|E - A_n^{-1}P_n R\|_{X\to X}\cdot\|x^* - P_n x^*\|_X \ \text{при}\ S^{-1}P_n S = P_n. \tag{1.38$'$}$$

Следствие. *Если оператор* $A = S + R : X \longrightarrow Y$ *линейно обратим и*

$$\varepsilon_n' \equiv \|R - P_n R\| \to 0,\ n \to \infty, \quad R - P_n R : X \longrightarrow Y,\ P_n^2 = P_n, \tag{1.39}$$

то при n *таких, что* $q_n' \equiv \|A^{-1}\|\varepsilon_n' < 1$, *каждый из операторов* $A_n = S + P_n R : X \longrightarrow Y$ *и* $A_n = S + P_n R : X_n \longrightarrow Y_n$ *линейно обратим и для погрешности приближенного решения справедливы соотношения*

$$\|x^* - x_n^*\|_X = \big\|(S + P_n R)^{-1}(Sx^* - P_n Sx^*)\big\|_X \leqslant$$

$$\leqslant \left\|(S+P_nR)^{-1}\right\|_{Y\to X}\cdot\|Sx^*-P_nSx^*\|_{Y}=O\{\|Sx^*-P_nSx^*\|_{Y}\}. \quad (1.40)$$

В силу сказанного выше остается заметить, что соотношения (1.40) следуют из (1.38) и очевидных тождеств

$$E-A_n^{-1}P_nR=E-(S+P_nR)^{-1}P_nR=(S+P_nR)^{-1}S,$$

где оператор $A_n=S+P_nR : X_n\longrightarrow Y_n$ определен в (1.28).

В следующих пунктах приводятся вычислительные схемы ряда прямых и проекционных методов решения с.и.у. (0.1) и с помощью теорем 1.1 и 1.2 дается их теоретическое обоснование. При этом всюду в пределах этого параграфа, если нет других условий, будем считать, что с.и.у. (0.1) *однозначно разрешимо* в пространстве $X=L_2[0,2\pi]$ при любой правой части $y\in Y=W_2^1[0,2\pi]$. Всюду через $E_n^T(\varphi)_2$ будем обозначать наилучшее среднеквадратическое приближение функции $\varphi\in L_2$ элементами из $\mathbb{H}_n^T$; аналогично, через $E_n^{Ts}(\psi)_2$ будем обозначать частное наилучшее среднеквадратическое приближение функции $\psi(s,\sigma)\in L_2[0,2\pi]^2$ по переменной s.

1.3. Метод Галеркина (кратко: м.Г.). В силу (1.11) для элементов (1.21) имеем

$$S(x_n;s)=\sum_{k=-n}^{n}\alpha_k c_k(g)e^{iks},\qquad \alpha_{-k}=\overline{\alpha}_k. \quad (1.41)$$

Поэтому условия (1.24) эквивалентны СЛАУ

$$\alpha_j c_j(g)+\sum_{k=-n}^{n}h_{jk}\alpha_k=c_j(y),\qquad j=\overline{-n,n}, \quad (1.42)$$

где $c_j(g)$ определены в (1.12), $h_{jk}=c_j(\varphi_k)$, $\varphi_k(s)=R(e^{ik\sigma};s)$, а $c_j(\varphi)$ – как и выше, коэффициенты Фурье функции $\varphi(s)\in L_1[0,2\pi]$.

Сходимость м.Г. (0.1), (1.21), (1.42) и оценку погрешности устанавливает следующая

Теорема 1.3. *Пусть ядро $h(s,\sigma)$ таково, что регулярный оператор $R : L_2\longrightarrow W_2^1$ вполне непрерывен. Тогда при всех $n\geqslant n_0$ (n_0 определяется свойствами $h(s,\sigma)$) СЛАУ* (1.42) *имеет единственное решение α_k^*, $k=\overline{-n,n}$. Приближенные решения* (1.21*) *сходятся к точному решению с.и.у.* (0.1) *со скоростью*

$$\|x^*-x_n^*\|_2=O\left\{E_n^T(x^*)_2\right\}=O\left\{E_n^T((Sx^*)')_2\right\}. \quad (1.43)$$

Следствие. *В условиях теоремы справедливы оценки*

$$\|x^*-x_n^*\|_2=O\left\{E_n^T(\frac{d}{ds}y)_2+E_n^T(\frac{d}{ds}Rx^*)_2\right\}, \quad (1.44)$$

$$\|x^*-x_n^*\|_2 \leqslant E_n^T(x^*)_2 \left\|E - A_n^{-1}\Phi_n R\right\|, \ E-A_n^{-1}\Phi_n R : L_2 \longrightarrow L_2, \quad (1.45)$$

$$\|x^* - x_n^*\|_2 \leqslant 2E_n^T(x^*)_2 \left\|(S + \Phi_n R)^{-1}\right\|, \ S + \Phi_n R \,:\, L_2 \longrightarrow W_2^1. \quad (1.46)$$

Если, кроме того, существует $h'_s(s,\sigma) \in L_2[0,2\pi]^2$, *то*

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O\,\left\{E_n^T(y')_2 + E_n^{Ts}({h'}_s)_2\right\}, \qquad (1.44')$$

где Φ_n *– оператор Фурье* n*–го порядка:*

$$\Phi_n(\varphi; s) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(\varphi)e^{iks}, \qquad \varphi \in L_2. \qquad (1.47)$$

Доказательство. Пусть $X_n = \mathbb{H}_n^T \subset X = L_2$ и $Y_n = \mathbb{H}_n^T \subset Y = W_2^1$. Тогда СЛАУ (1.42) эквивалентна линейному операторному уравнению

$$A_n x_n \equiv \Phi_n A x_n = \Phi_n y \qquad (x_n \in X_n, \, \Phi_n y \in Y_n).$$

Ясно, что $\Phi_n^2 = \Phi_n$ и $\Phi_n \,:\, W_2^1 \longrightarrow Y_n$. Поэтому $\Phi_n S x_n = S x_n$ для любого $x_n \in X_n$ и СЛАУ (1.42) эквивалентна операторному уравнению

$$A_n x_n \equiv S x_n + \Phi_n R x_n = \Phi_n y \quad (x_n \in X_n, \, \Phi_n y \in Y_n), \qquad (1.48)$$

т.е. уравнению (1.28) при $P_n = \Phi_n$, $X = L_2$, $Y = W_2^1$.

Из уравнений (1.18) и (1.48) для любого $x_n \in X_n$ находим

$$\|Ax_n - A_n x_n\|_Y = \|Rx_n - \Phi_n R x_n\|_Y = \|Rz_n - \Phi_n R z_n\| \cdot \|x_n\|_X \leqslant$$

$$\leqslant \|x_n\|_X \left\{\sup \|\varphi - \Phi_n\varphi\|_Y \,:\, \varphi \in R\text{Ш}\right\}, \qquad z_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}, \qquad (1.49)$$

где Ш $=$ Ш$(0,1)$ – единичный шар пространства $L_2[0,2\pi]$.

Для любого $\psi \in W_2^1$ справедливо тождество

$$\frac{d}{ds}\Phi_n(\psi(\sigma); s) = \Phi_n\left(\frac{d\psi(\sigma)}{d\sigma}; s\right). \qquad (1.50)$$

Тогда для $\psi \in W_2^1$ с учетом $\|\Phi_n\| = 1$, $\Phi_n \,:\, L_2 \longrightarrow L_2$, находим [1)]

$$\|\Phi_n\psi\|_{1;2} = \|\Phi_n\psi\|_2 + \|\frac{d}{ds}\Phi_n\psi\|_2 \leqslant \|\psi\|_2 + \|\psi'\|_2 = \|\psi\|_{1;2},$$

т.е. $\|\Phi_n\| \leqslant 1$, $\Phi_n \,:\, W_2^1 \longrightarrow W_2^1$. А так как $\Phi_n^2 = \Phi_n$, то и

$$\|\Phi_n\| = 1, \quad \Phi_n \,:\, W_2^1 \longrightarrow W_2^1, \quad n + 1 \in \mathbb{N}. \qquad (1.51)$$

[1)] Напомним, что везде $\|\cdot\|_{1;2}$ означает норму в $W_2^1[0,2\pi]$.

Кроме того, для любой $\psi \in W_2^1$ аналогично находим

$$\|\psi - \Phi_n \psi\|_{1;2} = \|\psi - \Phi_n \psi\|_2 + \|\psi' - (\Phi_n \psi)'\|_2 = E_n^T(\psi)_2 + E_n^T(\psi')_2. \quad (1.52)$$

Так как

$$E_n^T(\psi)_2 \leqslant E_n^T(\psi')_2/(n+1), \quad \psi \in W_2^1, \quad n+1 \in \mathbb{N}, \quad (1.53)$$

то из (1.52) для любой $\psi \in W_2^1$ получаем соотношения

$$E_n^T(\psi')_2 \sim \|\psi - \Phi_n \psi\|_{1;2} \leqslant 2\, E_n^T(\psi')_2 \to 0,\ n \to \infty. \quad (1.54)$$

Поскольку оператор $R\,:\,L_2 \longrightarrow W_2^1$ вполне непрерывен, то множество $R\text{Ш}(0,1)$ компактно в пространстве W_2^1. Поэтому из (1.54) в силу одного результата И.М. Гельфанда относительно равномерной и сильной сходимости последовательности линейных операторов в B–пространствах (см., напр., [55], с. 274 – 276) следует, что

$$\varepsilon'_n \equiv \sup\{\|\varphi - \Phi_n \varphi\|_{1;2}\,:\, \varphi \in R\text{Ш}(0,1)\} \to 0,\ n \to \infty. \quad (1.55)$$

Отсюда и из (1.49) получаем оценку

$$\varepsilon_n \equiv \|A - A_n\|_{X_n \to Y} \leqslant \|R - \Phi_n R\|_{X \to Y} \leqslant \varepsilon'_n \to 0,\ n \to \infty, \quad (1.56)$$

где $\varepsilon'_n = 0$ при $R = 0$ (напр., при $h(s,\sigma) \equiv 0$ или $h(s,\sigma) = h(s-\sigma)$).

В силу (1.54) для правых частей уравнений (1.18) и (1.48) справедлива оценка

$$\delta_n \equiv \|y - \Phi_n y\|_{1;2} \leqslant 2\, E_n^T(y')_2 \to 0,\ n \to \infty. \quad (1.57)$$

В условиях теоремы в силу сделанного выше предположения о разрешимости с.и.у. (0.1) оператор $A\,:\,L_2 \longrightarrow W_2^1$ непрерывно обратим. Таким образом, в силу (1.55) – (1.57) для уравнений (1.18) и (1.48) выполнены все условия теорем 1.1 и 1.2. Другими словами, сходимость м.Г. (0.1), (1.21), (1.42) доказана. Первая часть оценки (1.43) следует из неравенства (1.37) при $\widetilde{x}_n = \Phi_n x^*$. Вторую часть оценки (1.43) получаем из (1.38) с учетом (1.7), (1.35), (1.51) и (1.52):

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O\left(\|Sx^* - \Phi_n S x^*\|_{1;2}\right) = O\left\{E_n^T\Big(\frac{d}{ds}Sx^*\Big)_2\right\}.$$

Отсюда и из тождества $Sx^* \equiv y - Rx^*$ находим оценку (1.44). Оценка (1.44$'$) выводится из (1.44) и легко доказываемого неравенства

$$E_n^T\Big(\frac{dRx^*}{ds}\Big)_2 \leqslant E_n^{Ts}\Big(\frac{\partial h(s,\sigma)}{\partial s}\Big)_2 \cdot \|x^*\|_2, \quad x^* = A^{-1}y.$$

Неравенство (1.46) выводится из (1.38$'$) и следующих интересных формул

$$S^{-1}\Phi_n S = E \quad \textit{в} \quad L_2, \quad S\Phi_n S^{-1} = E \quad \textit{в} \quad W_2^1.$$

Наконец, оценка (1.45) следует из (1.40) и (1.54) при $\psi = Sx^*$ с учетом того факта, что $E_n^T(Ix)_2 = E_n^T(x)_2$, $x \in L_2$.

Теорема 1.3 и ее следствие полностью доказаны.

Замечание 1.1. Для полной непрерывности оператора $R : L_2 \longrightarrow W_2^1$ достаточно, напр., чтобы $h(s,\sigma)$ имела производную по s, удовлетворяющую при $\sigma - s \to 0$ условию

$$\frac{\partial h(s,\sigma)}{\partial s} = O\left(\frac{\ln^m |s-\sigma|}{|\sigma - s|^\alpha}\right),\ 0 \leqslant \alpha < 1,\ m+1 \in \mathbb{N},\ m+\alpha > 0.$$

1.4. Метод коллокации. Пользуясь (1.25), сначала приведем две вычислительные схемы метода коллокации (кратко: м.к.). Если приближенное решение ищется в виде полинома (1.21), то соотношения (1.25) и (2.41) приводят к СЛАУ

$$\sum_{k=-n}^{n} \{c_k(g)e^{iks_j} + h_{jk}\}\alpha_k = y(s_j), \quad j = \overline{-n,n}, \tag{1.58}$$

где $\{s_j\}$ – любая система из $2n+1$ попарно неэквивалентных узлов, $c_k(g)$ определены в (1.12), а $h_{jk} = R(e^{ik\sigma}; s_j)$. В дальнейшем в качестве узлов будем использовать

$$s_j = 2j\pi/(2n+1), \qquad j = \overline{-n,n}; \tag{1.59}$$

это связано, с одной стороны, с получением наиболее простых вычислительных схем, а с другой – с получением наиболее точных результатов для рассматриваемых методов.

Для вывода второй вычислительной схемы м.к. воспользуемся формулами (1.21), (1.23), (1.30):

$$x_n(s) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k\, e^{iks} = \frac{2}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n} x_n(s_k)\, D_n(s-s_k). \tag{1.60}$$

Тогда соотношения (1.25) приводят к СЛАУ

$$\frac{2}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n} x_n(s_k)\Big\{S(D_n(\sigma - s_k); s_j) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(s_j,\sigma)D_n(\sigma - s_k)\,d\sigma\Big\} =$$
$$= y(s_j), \qquad j = \overline{-n,n}. \tag{1.61}$$

Интегралы $S(D_n(\sigma - s_k); s_j)$ вычисляются точно, т.к. в силу (1.1), (1.30), (1.11) и (1.12) имеем (см. также с.45 [69])

$$S(D_n(\sigma - s_k); s_j) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\sin\frac{\sigma}{2}\right| \cdot D_n(s_j - s_k - \sigma)\,d\sigma =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\ln 2 + \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}\cos m(s_j - s_k)\right\}, \quad j = \overline{-n, n}. \qquad (1.61')$$

Поэтому СЛАУ (1.61) принимает вид

$$\frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n} x_n(s_k)\left\{\ln 2 + \sum_{m=1}^{n}\cos m(s_j - s_k) + 2\widetilde{h}_{jk}\right\} =$$

$$= y(s_j), \quad j = \overline{-n, n}, \qquad (1.62)$$

$$\widetilde{h}_{jk} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(s_j, \sigma) D_n(\sigma - s_k)\, d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(s_j, s_k - \sigma) D_n(\sigma)\, d\sigma.$$

Введем важные для дальнейшего изложения обозначения:

$E_n^T(x)_\infty = E_n^T(x)_{C_{2\pi}} = E_n^T(x)_{\widetilde{C}}$ – наилучшее равномерное приближение функции $x \in C_{2\pi}$ тригонометрическими полиномами порядка не выше n;

аналогично, $E_n^{Ts}(\varphi)_\infty$ и $E_n^{T\sigma}(\varphi)_\infty$ – частные наилучшие равномерные приближения функции $\varphi(s, \sigma) \in C[0, 2\pi]^2$ по переменным s и σ соответственно;

$\mathcal{L}_n$ – оператор Лагранжа, определяемый по формуле

$$\mathcal{L}_n(\psi; s) = \frac{2}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n}\psi(s_k) D_n(s - s_k), \quad \psi \in C_{2\pi} \equiv \widetilde{C}. \qquad (1.63)$$

Сходимость и оценку погрешности м.к. устанавливает

Теорема 1.4. *Пусть существует $y'(s) \in C_{2\pi}$, а ядро $h(s, \sigma)$ таково, что оператор $R : L_2 \longrightarrow C_{2\pi}^1$ вполне непрерывен. Тогда при всех $n \geqslant n_0$(n_0 определяется свойствами $h(s, \sigma)$) системы* (1.58) *и* (1.62) *имеют единственные решения соответственно α_k^* и $x_n^*(s_k)$, $k = \overline{-n, n}$. Приближенные решения $x_n^*(s)$ (т.е.* (1.60) *при $\alpha_k = \alpha_k^*$, $x_n(s_k) = x_n^*(s_k)$) сходятся в среднем к точному решению $x^*(s)$ со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O\left\{E_n^T\left(\frac{d}{ds}Sx^*\right)_\infty\right\} = O\left\{E_n^T(x^*)_\infty\right\}, \qquad (1.64)$$

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O\left\{E_n^T\left(\frac{dy}{ds}\right)_\infty + E_n^T\left(\frac{d}{ds}Rx^*\right)_\infty\right\}. \qquad (1.65)$$

Следствие. *В условиях теоремы справедлива оценка*

$$\|x^* - x_n^*\|_2 \leqslant (1+\pi)E_n^T(x^*)_\infty \cdot \|(S + \mathcal{L}_n R)^{-1}\|, \; S + \mathcal{L}_n R : L_2 \longrightarrow W_2^1. \qquad (1.66)$$

Если, кроме того, существует $h'_s(s,\sigma) \in C[0,2\pi]^2$, *то*

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O\,\left\{E_n^T(y')_\infty + E_n^{Ts}({h'}_s)_\infty\right\}. \tag{1.67}$$

Доказательство. Для оператора Лагранжа (1.63) справедливы (см., напр., в гл.3 [25]) соотношения:

$$\|\psi - \mathcal{L}_n\psi\|_2 \leqslant 2\,E_n^T(\psi)_\infty, \quad \psi \in C_{2\pi}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.68}$$

$$\|\mathcal{L}_n\|_2 = \infty, \qquad \|\mathcal{L}_n\|_{\infty\to 2} = 1,\ n \in \mathbb{N}, \tag{1.69}$$

$$\|\mathcal{L}_n\|_\infty = \frac{2}{\pi}\ln n + O\,(1) \leqslant \frac{4}{\pi} + \frac{2}{\pi}\ln\frac{2(2n+1)}{\pi}, \tag{1.70}$$

где здесь (и далее) $\|A\|_{p\to q}$ ($\|A\|_{p\to p} \equiv \|A\|_p$) означает норму оператора $A\,:\,L_p \longrightarrow L_q$ при всех $1 \leqslant p,\, q \leqslant \infty$, причем формально полагается, что $C = L_\infty$.

Теперь рассмотрим $\mathcal{L}_n$ как оператор из W_2^1 в W_2^1. Тогда в силу (1.69) имеем $\|\mathcal{L}_n\| \leqslant \infty$. Однако покажем, что для любой $\psi \in C_{2\pi}^1$ справедлива оценка

$$\|\psi - \mathcal{L}_n\psi\|_{1;2} \leqslant (1+\pi)\,E_n^T(\psi')_\infty, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.71}$$

а тогда $\|\mathcal{L}_n\| \leqslant 2+\pi, \quad \mathcal{L}_n\,:\,C_{2\pi}^1 \longrightarrow W_2^1$.

Действительно, для любой $\psi \in C_{2\pi}^1$ с помощью (1.68), (1.50) и указанных выше свойств оператора Фурье (1.47) и Лагранжа (1.63) последовательно находим

$$\|\psi - \mathcal{L}_n\psi\|_{1;2} = \|\psi - \mathcal{L}_n\psi\|_2 + \|(\psi - \mathcal{L}_n\psi)'\|_2 \leqslant 2E_n^T(\psi)_\infty +$$
$$+\|(\psi - \Phi_n\psi)'\|_2 + \|(\Phi_n\psi - \mathcal{L}_n\psi)'\|_2 \leqslant 2E_n^T(\psi)_\infty + \|\psi' - \Phi_n(\psi')\|_2 +$$
$$+n\|\Phi_n(\psi - \mathcal{L}_n\psi)\|_2 \leqslant 2E_n^T(\psi)_\infty + E_n^T(\psi')_2 + 2nE_n^T(\psi)_\infty \leqslant$$
$$\leqslant \pi E_n^T(\psi')_\infty + E_n^T(\psi')_2 \leqslant (1+\pi)E_n^T(\psi')_\infty.$$

Заметим, что здесь использованы также известные неравенства (см., напр., [48], с.54, 56; [75], с.230)

$$E_n^T(\psi)_\infty \leqslant \frac{\pi}{2(n+1)}\,E_n^T(\psi')_\infty, \quad \psi \in C_{2\pi}^1; \tag{1.72}$$

$$\|{Q'}_n\|_2 \leqslant n\,\|Q_n\|_2, \qquad Q_n \in \mathbb{H}_n^T. \tag{1.73}$$

Далее, в силу соотношений (1.41), (1.63) и $\mathcal{L}_n^2 = \mathcal{L}_n$ каждая из СЛАУ (1.58), (1.62) эквивалентна операторному уравнению

$$A_n x_n \equiv \mathcal{L}_n A x_n = S x_n + \mathcal{L}_n R x_n = \mathcal{L}_n y \quad (x_n \in X_n,\, \mathcal{L}_n y \in Y_n), \tag{1.74}$$

где $X_n = \mathbb{H}_n^T \subset X = L_2$, $Y_n = \mathbb{H}_n^T \subset Y = W_2^1$. Теперь из (1.18), (1.74) и (1.71) для любого $x_n \in X_n$ находим

$$\|Ax_n - A_n x_n\|_{Y} = \|Rx_n - \mathcal{L}_n R x_n\|_{Y} \leqslant \|x_n\|_{X} \cdot \|Rz_n - \mathcal{L}_n R z_n\|_{Y} \leqslant$$

$$\leqslant \|x_n\|_{X} \cdot (1+\pi)\, E_n^T(\frac{d}{ds} R z_n)_{\widetilde{C}}, \qquad z_n = \frac{x_n}{\|x_n\|}.$$

Отсюда, используя первую теорему Джексона в тригонометрическом случае (см., напр., [75], с.305):

$$E_n^T(\psi)_\infty < 3\,\omega\left(\psi; \frac{1}{n}\right)_\infty, \quad \psi \in C_{2\pi},$$

для любого $x_n \in X_n$ получаем

$$\|Ax_n - A_n x_n\|_{Y} \leqslant 3(1+\pi)\,\|x_n\|_{X} \cdot \sup_{\varphi \in \mathcal{R}Ш(0,1)} \omega\left(\varphi'; \frac{1}{n}\right)_\infty \equiv \varepsilon'_n \cdot \|x_n\|_{X}.$$

Поскольку оператор $R : L_2 \longrightarrow C_{2\pi}^1$ вполне непрерывен, то множество функций $\{\varphi'(s)\} \subset C_{2\pi}$, где $\varphi \in RШ(0,1)$, компактно в $C_{2\pi}$. Поэтому в силу теоремы 3.1 книги [75] имеем

$$\varepsilon_n \equiv \|A - A_n\|_{X_n \to Y} \leqslant \|R - \mathcal{L}_n R\|_{X \to Y} \leqslant \varepsilon'_n \to 0,\ n \to \infty.$$

С другой стороны, в силу (1.71) для правых частей уравнений (1.18) и (1.74) имеем

$$\delta_n \equiv \|y - \mathcal{L}_n y\|_{1;2} \leqslant (1+\pi)\, E_n^T(y')_\infty, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, для уравнений (1.18) и (1.74) выполнены все условия теорем 1.1 и 1.2, откуда и следует сходимость в среднем м.к. Покажем справедливость оценок (1.64) - (1.67). Из (1.38), (1.40), (1.35) и (1.70) при $P_n = \mathcal{L}_n$ находим

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O\,\left\{\|Sx^* - \mathcal{L}_n S x^*\|_{1;2}\right\} = O\,\left\{E_n^T(\frac{d}{ds} S x^*)_\infty\right\} =$$

$$= O\,\left\{E_n^T(Ix^*)_\infty\right\} = O\,\left\{E_n^T(x^*)_\infty\right\},$$

т.е. оценки (1.64) доказаны. Здесь необходимо отметить, что в условиях теоремы решение с.и.у. (0.1) удовлетворяет условиям: $x^*(s) \in C_{2\pi}$, $I(x^*; s) \in C_{2\pi}$. Из первой части оценки (1.64) с учетом тождества $(Sx^*)'_s \equiv y'(s) - (R(x^*; s))'_s \in C_{2\pi}$ следует оценка (1.65), а из нее обычным способом выводится оценка (1.67). Оценка (1.66) следует из (1.40) и (1.71) при $\psi = Sx^*$.

Теорема 1.4 и ее следствие полностью доказаны.

Замечание 1.2. Для полной непрерывности регулярного оператора $R : L_2 \longrightarrow C^1_{2\pi}$ достаточно, если, напр., производная $h'_s(s,\sigma) \in C[0,2\pi]^2$ или, более общо, допускает представление

$$\frac{\partial h(s,\sigma)}{\partial s} = h_0(s,\sigma)\ln^m\left|\sin\frac{\sigma-s}{2}\right| \cdot \left|\mathrm{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\right|^{\gamma},$$

где $m+1 \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \gamma < \frac{1}{2}$, $m+\gamma > 0$, $h_0 \in C[0,2\pi]^2$.

Это утверждение следует из [38, 40] и известного критерия компактности в пространстве непрерывных функций.

1.5. Метод механических квадратур. В этом и следующем пунктах рассматривается приближенное решение слабо с.и.у. (0.1) методом механических квадратур (кратко: м.м.к.).

Возьмем две системы равноотстоящих узлов

$$s_l = s_{l0} = \frac{2l\pi}{2n+1}, \qquad l = \overline{0,2n}, \tag{1.75}$$

$$s_{k\omega} = s_k + \frac{\omega}{2n+1}, \quad k = \overline{0,2n}, \quad 0 \leqslant \omega = \, const \, \leqslant \pi. \tag{1.76}$$

Приближенное решение с.и.у. (0.1) будем искать в виде полинома

$$x^*_n(s) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha^*_k e^{iks} = \frac{2}{2n+1}\sum_{l=0}^{2n} x^*_n(s_l) D_n(s-s_l), \tag{1.77}$$

Неизвестные коэффициенты $\alpha^*_k, k = \overline{-n,n}$, и $x^*_n(s_l)$, $l = \overline{0,2n}$, будем определять как решения СЛАУ соответственно

$$\sum_{k=-n}^{n} \alpha_k \left\{ c_k(g) e^{iks_{j\omega}} + \frac{1}{2n+1}\sum_{l=-n}^{n} h(s_{j\omega}, s_l) e^{iks_l} \right\} = y(s_{j\omega}),\ j = \overline{0,2n}, \tag{1.78}$$

$$\frac{1}{2n+1}\sum_{l=0}^{2n} x_n(s_l) \left\{ \ln 2 + \sum_{m=1}^{n} \frac{\cos m(s_{j\omega}-s_l)}{m} + h(s_{j\omega}, s_l) \right\} = \\ = y(s_{j\omega}),\ j = \overline{0,2n}. \tag{1.79}$$

Отметим, что для получения СЛАУ (1.78) и (1.79) обе части с.и.у. (0.1) приравниваем в узлах (1.76), вместо $x(\sigma)$ подставляем $x_n(\sigma)$ из (1.60), после чего интегралы $S(x_n; s_{j\omega})$ вычисляем точно по формулам соответственно (1.41) и (1.61′), а интегралы $R(x_n; s_{j\omega})$ вычисляем приближенно по квадратурной формуле левых прямоугольников с узлами (1.75). Отметим также, что с помощью легко доказываемой формулы

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x_n(\sigma) e^{-ik\sigma}\,d\sigma = \frac{1}{2n+1}\sum_{m=0}^{2n} x_n(s_m) e^{-iks_m}, k = \overline{-n,n}, \tag{1.80}$$

СЛАУ (1.78) выводится из СЛАУ (1.79) и наоборот.

Ясно, что при $\omega = 0$ обе системы несколько упрощаются, в частности, из (1.79) можно получить СЛАУ (I.126) из книги [69]. В то же время при $\omega = \pi$ из (1.79), (1.75) – (1.77) получим одну из вычислительных схем метода дискретных вихрей (пользуемся терминологией [6, 59]); этот метод рассматривается в следующем пункте.

Сходимость м.м.к. в L_2 и оценку погрешности устанавливает

Теорема 1.5. *Пусть функции* $y(s)$ *и* $h(s,\sigma)$ *таковы, что* $y' \in C[0,2\pi]$, $h'_s \in C[0,2\pi]^2$. *Тогда при всех* $n \geqslant n_0$ *(число* n_0 *определяется свойствами ядра* $h(s,\sigma)$*) каждая из СЛАУ* (1.78) *и* (1.79) *имеет единственное решение соответственно* α_k^*, $k = \overline{-n,n}$, *и* $x_n^*(s_l)$, $l = \overline{0,2n}$. *Приближенные решения* (1.77) *сходятся к точному решению* $x^*(s)$ *в среднем со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O\left\{E_n^T(y')_\infty + E_n^{Ts}({h_s}')_\infty + E_n^{T\sigma}(h)_\infty + E_n^{T\sigma}(h'_s)_\infty\right\}. \tag{1.81}$$

Если, кроме того, существует ${h_\sigma}' \in C[0,2\pi]^2$, *то справедлива оценка*

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O\left\{E_n^T(y')_\infty + E_n^{Ts}(h'_s)_\infty + E_n^{T\sigma}(h'_\sigma)_\infty\right\}. \tag{1.82}$$

Доказательство. Будем пользоваться результатами и обозначениями раздела 1.4. Кроме того, обозначим через $\mathcal{L}_{n,\omega}$ тригонометрический оператор Лагранжа

$$\mathcal{L}_{n,\omega}(\varphi; s) = \frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}\varphi(s_{k\omega})D_n(s - s_{k\omega}), \quad \varphi \in C_{2\pi}, \quad {\mathcal{L}_{n,\omega}}^2 = \mathcal{L}_{n,\omega},$$

где $D_n(t)$ – ядро Дирихле n–го порядка. Тогда каждая из СЛАУ (1.78), (1.79) эквивалентна операторному уравнению

$$A_n x_n \equiv S_n x_n + R_n x_n = y_n \qquad (x_n \in X_n,\, y_n \in Y_n), \tag{1.83}$$

где

$$S_n x_n = \mathcal{L}_{n,\omega} S x_n = S x_n, \quad y_n = \mathcal{L}_{n,\omega} y,$$
$$R_n x_n = \mathcal{L}_{n,\omega}\{\rho\mathcal{L}_n^\sigma(hx_n)\}, \quad \rho\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\sigma)\,d\sigma, \tag{1.84}$$

а $\mathcal{L}_n^\sigma$ означает, что оператор $\mathcal{L}_n = \mathcal{L}_{n,0}$ применен по переменной σ. Поскольку квадратурная формула прямоугольников с узлами (1.75) имеет наивысшую тригонометрическую степень точности, равную $2n$, то

$$R_n x_n = \mathcal{L}_{n,\omega}\rho\mathcal{L}_n^\sigma(hx_n) = \mathcal{L}_{n,\omega}\rho(\mathcal{L}_n^\sigma h)x_n, \quad x_n \in X_n. \tag{1.84'}$$

Поэтому уравнение (1.83) с учетом $(\mathcal{L}_{n,\omega})^2 = \mathcal{L}_{n,\omega}$ сводится к

$$A_n x_n \equiv Sx_n + \mathcal{L}_{n,\omega}\rho(\mathcal{L}_n^\sigma h)x_n = \mathcal{L}_{n\omega}y \quad (x_n \in X_n,\, \mathcal{L}_{n\omega}y \in Y_n). \tag{1.85}$$

Аналогично, с учетом (1.84) с.и.у. (0.1) запишем в виде

$$Ax \equiv Sx + \rho hx = y \qquad (x \in X,\, y \in Y), \tag{1.86}$$

где $X = L_2$, $Y = W_2^1$. Дальше существенную роль играет следующая известная (см., напр., гл. III [25], а также оценку (1.71))

Лемма 1.5. *Для любых $n \in \mathbb{N}$ справедливы соотношения*

(а) $\|\mathcal{L}_{n,\omega}\|_2 = \infty, \quad \|\mathcal{L}_{n,\omega}\|_{\infty\to 2} = 1, \quad \|\mathcal{L}_{n,\omega}\|_\infty = O\,(\ln n)\,;$

(б) $\|\varphi - \mathcal{L}_{n,\omega}\varphi\|_2 \leqslant 2E_n^T(\varphi)_\infty, \quad \varphi \in C_{2\pi};$

(в) $\|\varphi - \mathcal{L}_{n,\omega}\varphi\|_\infty \leqslant 2\,\|\mathcal{L}_{n,\omega}\|_\infty \cdot E_n^T(\varphi)_\infty = O\,\left(E_n^T(\varphi)_\infty \ln n\right),\ \varphi \in C_{2\pi},$

(г) $\|\varphi - \mathcal{L}_{n,\omega}\varphi\|_{1;2} \leqslant (1+\pi)E_n^T(\varphi')_\infty, \quad \varphi \in C_{2\pi}^1.$

Оценки (а) – (г) *справедливы также в случае узлов*

$$\tilde{s}_{k\omega} = \frac{k\pi}{n} + \frac{\omega}{2n}, \quad k = \overline{0, 2n-1}, \quad 0 \leqslant \omega = \mathit{const} \leqslant \pi, \tag{1.76'}$$

при этом в оценках (б), (в) *и* (г) *величины* $E_n^T(\varphi)_\infty$ *и* $E_n^T(\varphi')_\infty$ *следует заменить на* $E_{n-1}^T(\varphi)_\infty$ *и* $E_{n-1}^T(\varphi')_\infty$ *соответственно.*

Теперь для уравнений (1.85), (1.86) в силу леммы 1.5 для любого $x_n \in X_n$ находим

$$\|Ax_n - A_n x_n\|_{1;2} = \|Rx_n - R_n x_n\|_{1;2} \leqslant \|Rx_n - \mathcal{L}_{n,\omega}Rx_n\|_{1;2} +$$

$$+\|\mathcal{L}_{n,\omega}\rho hx_n - \mathcal{L}_{n,\omega}\rho(\mathcal{L}_n^\sigma h)x_n\|_{1;2} \leqslant (1+\pi)E_n^T(\rho h_s' x_n)_\infty +$$

$$+\|\mathcal{L}_{n,\omega}\rho(h - \mathcal{L}_n^\sigma h)x_n\|_{1;2} \leqslant (1+\pi)E_n^{Ts}(h_s')_\infty \cdot \|x_n\|_2 +$$

$$+\|\psi - \mathcal{L}_{n,\omega}\psi\|_{1;2}, \qquad \psi \equiv \rho(h - \mathcal{L}_n^\sigma h)x_n. \tag{1.87}$$

С помощью неравенства Гёльдера и леммы 1.5 находим оценки:

$$\|\psi\|_{1;2} = \|\psi\|_2 + \|\psi'\|_2 = \|\rho(h - \mathcal{L}_n\sigma h)x_n\|_2 + \|\rho(h_s' - \mathcal{L}_n^\sigma h_s')x_n\|_2 \leqslant$$

$$\leqslant 2\,\|x_n\|_2\{E_n^{T\sigma}(h)_\infty + E_n^{T\sigma}(h'_s)_\infty\}, \qquad x_n \in X_n; \tag{1.88}$$

$$\|\psi - \mathcal{L}_{n,\omega}\psi\|_{1;2} \leqslant (1+\pi)\,E_n^{T}(\psi')_\infty \leqslant (1+\pi)\,\|\psi'\|_\infty =$$
$$= (1+\pi)\,\|\rho(h'_s - \mathcal{L}_n^\sigma h'_s)x_n\|_\infty \leqslant 2\,(1+\pi)\,E_n^{T\sigma}(h'_s)_\infty\|x_n\|_2.$$

Из неравенств (1.86) – (1.88) находим оценки

$$\|Ax_n - A_nx_n\|_{1;2} \leqslant \{(1+\pi)\,E_n^{Ts}(h'_s)_\infty + 2\,E_n^{T\sigma}(h)_\infty + 2\,E_n^{T\sigma}(h'_s)_\infty +$$
$$+2\,(1+\pi)\,E_n^{T\sigma}(h'_s)_\infty\}\|x_n\|_2 \equiv \varepsilon'_n\|x_n\|_2, \quad x_n \in X_n; \tag{1.89}$$

$$\varepsilon_n \equiv \|A - A_n\| \leqslant \varepsilon'_n = O\,\left\{E_n^{Ts}(h'_s)_\infty + E_n^{T\sigma}(h)_\infty + E_n^{T\sigma}(h'_s)_\infty\right\}, \tag{1.90}$$

где $A - A_n\ :\ X_n \longrightarrow Y$. С другой стороны, в силу леммы 1.5 для правых частей уравнений (1.85) и (1.86) имеем

$$\delta_n \equiv \|y - \mathcal{L}_{n,\omega}y\|_{1;2} = O\,\left\{E_n^{T}(y')_\infty\right\}. \tag{1.91}$$

Таким образом, все условия теоремы 1.1 выполнены, откуда с учетом неравенств (1.90) и (1.91) следует утверждение доказываемой теоремы, в том числе оценка (1.81).

Докажем оценку (1.82). С этой целью вместо (1.87) рассмотрим неравенства

$$\|Ax_n - A_nx_n\|_{1;2} \leqslant \|Rx_n - \mathcal{L}_{n,\omega}Rx_n\|_{1;2} + \|\mathcal{L}_{n,\omega}\rho(h - \mathcal{L}_n^\sigma h)x_n\|_{1;2} \leqslant$$
$$\leqslant (1+\pi)\,E_n^{Ts}(h'_s)_\infty\|x_n\|_2 + \|\mathcal{L}_{n,\omega}\rho(h - \mathcal{L}_n^\sigma h)x_n\|_2 +$$
$$+\|[\mathcal{L}_{n,\omega}\rho(h - \mathcal{L}_n^\sigma h)x_n]'\|_2, \qquad x_n \in X_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.92}$$

С помощью леммы 1.5, неравенства Гёльдера и неравенства Бернштейна (1.73) последовательно находим оценки

$$\|\mathcal{L}_{n,\omega}\rho(h - \mathcal{L}_n^\sigma h)x_n\|_2 \leqslant \|\rho(h - \mathcal{L}_n^\sigma h)x_n\|_\infty \leqslant 2E_n^{T\sigma}(h)_\infty\|x_n\|_2;$$
$$\left\|\frac{d}{ds}[\mathcal{L}_{n,\omega}\rho(h - \mathcal{L}_n^\sigma h)x_n]\right\|_2 \leqslant 2\,E_n^{T\sigma}(h)_\infty\|x_n\|_2. \tag{1.93}$$

Из (1.72) и (1.93) для любого $x_n \in X_n$ получаем

$$\|\mathcal{L}_{n,\omega}\rho(h - \mathcal{L}_n^\sigma h)x_n\|_{1;2} \leqslant (2+2n)E_n^{T\sigma}(h)_\infty\|x_n\|_2 \leqslant \pi E_n^{T\sigma}(h'_\sigma)_\infty\|x_n\|_2. \tag{1.94}$$

Из неравенств (1.92) и (1.94) следует оценка

$$\varepsilon_n \equiv \|A - A_n\|_{X_n \to Y} \leqslant (1+\pi)\,E_n^{Ts}(h'_s)_\infty + \pi\,E_n^{T\sigma}(h'_\sigma)_\infty \equiv$$
$$\equiv \varepsilon''_n = O\,\left\{E_n^{Ts}(h'_s)_\infty + E_n^{T\sigma}(h'_\sigma)_\infty\right\}. \tag{1.95}$$

Теперь с учетом неравенств (1.91) и (1.95) из теоремы 1.1 следует оценка (1.82).

Теорема 1.5 доказана полностью.

Из сравнения доказательств теорем 1.4 и 1.5 следует

Теорема 1.6. *В условиях теоремы* 1.5 *погрешность приближенного решения* (1.77), *построенного методом механических квадратур, может быть оценена любым из неравенств*

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O\left\{E_n^T(x^*)_\infty + E_n^{T\sigma}(h)_\infty + E_n^{T\sigma}(h'_s)_\infty\right\}, \tag{1.96}$$

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O\left\{E_n^T(y')_\infty + E_n^T((Rx^*)')_\infty + E_n^{T\sigma}(h)_\infty + E_n^{T\sigma}(h'_s)_\infty\right\}; \tag{1.97}$$

если, кроме того, $h'_\sigma(s,\sigma) \in C[0,2\pi]^2$, *то и неравенствами*

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O\left\{E_n^T(x^*)_\infty + E_n^{Ts}(h'_s)_\infty + E_n^{T\sigma}(h'_\sigma)_\infty\right\}. \tag{1.98}$$

Замечание 1.3. Выше при исследовании м.м.к. было использовано нечетное число узлов. Совершенно аналогично может быть исследован м.м.к., основанный на сетке из четного числа узлов (необходимые для этого сведения см., напр., в [14, 25], а также в лемме 1.5). Здесь приближенное решение уместно представить в виде

$$x_n(s) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cos ks + b_k \sin ks + \frac{a_n}{2}\cos ns \tag{1.99}$$

и удобно пользоваться простой формулой

$$S(x_n; s) = \frac{a_0 \ln 2}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k \cos ks + b_k \sin ks}{2k} + \frac{a_n \cos ns}{4n} \tag{1.99$'$}$$

и приведенными в лемме 1.5 сведениями.

Далее, аналогично приведенному выше может быть исследована также следующая вычислительная схема метода квадратур.

Возьмем сетку из N равноотстоящих узлов

$$s_k = \frac{2k\pi}{N}, \qquad k = \overline{1, N}, \quad N \in \mathbb{N}, \tag{1.100}$$

и с.и.у. (0.1) представим в виде

$$x(s)\ln 2 - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\sin\frac{\sigma - s}{2}\right| \cdot [x(\sigma) - x(s)]\, d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(s,\sigma)x(\sigma)\, d\sigma = y(s); \tag{1.101}$$

тогда, применив к интегралам в (1.101) квадратурную формулу левых прямоугольников с узлами (1.100), приходим к СЛАУ

$$\beta_j \ln 2 - \frac{1}{N}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N} \ln\left|\sin\frac{s_k - s_j}{2}\right| \cdot (\beta_k - \beta_j) + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} h(s_j, s_k)\beta_k =$$

$$= y(s_j),\ j = \overline{1, N}, \tag{1.102}$$

где $\beta_j \approx x(s_j)$. Пусть $\beta_1^*, \beta_2^*, \ldots, \beta_N^*$ – решение СЛАУ (1.102). Тогда за приближенное решение с.и.у. (0.1) будем принимать полином

$$x_n^*(s) = \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N} \Delta_n(s - s_k)\beta_k, \quad n = \left[\!\left[\frac{N}{2}\right]\!\right], \tag{1.103}$$

где $[\![\, t \,]\!]$ – целая часть числа $t \geqslant 0$, а

$$\Delta_n(\varphi) = \frac{1}{2}\sin(n + \frac{1}{2})\varphi \cdot cosec\frac{\varphi}{2}, \quad N = 2n + 1, \tag{1.103$'$}$$

– обычное ядро Дирихле n-го порядка,

$$\Delta_n(\varphi) = \frac{1}{2}\sin n\varphi \cdot \operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2}, \qquad N = 2n, \tag{1.103$''$}$$

– т.н. модифицированное ядро Дирихле того же порядка.

Совершенно аналогично, но путем исключения малой окрестности особой точки $\sigma = s$ в с.и.у. (0.1) может быть получена и исследована следующая СЛАУ м.м.к.:

$$-\frac{1}{N}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N} \ln\left|\sin\frac{s_j - s_k}{2}\right| \cdot \beta_k + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} h(s_j, s_k)\beta_k =$$

$$= y(s_j), \quad j = \overline{1, N}. \tag{1.104}$$

1.6. Метод дискретных вихрей. Теперь рассмотрим некоторую модификацию м.м.к., часто используемую в ряде приложений. Возьмем две сетки из $N \in \mathbb{N}$ равноотстоящих узлов

$$\sigma_k = \frac{2(k-1)\pi}{N}, \quad k = \overline{1, N}, \tag{1.105}$$

$$s_j = \frac{(2j-1)\pi}{N}, \quad j = \overline{1, N}, \tag{1.106}$$

и приближенные значения γ_k, $k = \overline{1, N}$, искомой функции $x(\sigma)$ в узлах (1.105) будем определять из следующей СЛАУ:

$$-\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \ln\left|\sin\frac{s_j - \sigma_k}{2}\right| \gamma_k + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} h(s_j, \sigma_k)\gamma_k = y(s_j), j = \overline{1, N}. \tag{1.107}$$

Пользуясь известной терминологией (см. монографии [6, 59]), эту систему будем называть СЛАУ метода дискретных вихрей (м.д.в.).

Если γ_k^*, $\quad k = \overline{1, N}$, – решение СЛАУ (1.107), то решение с.и.у. (0.1) приближенно может быть восстановлено по формуле

$$x^*(s) \approx x_{_N}^*(s) = \sum_{k=1}^{N} \gamma_k^* \varphi_k(s), \quad n = \left[\!\left[\frac{N}{2} \right]\!\right], \tag{1.108}$$

где $\{\varphi_k(s)\}$ – система фундаментальных полиномов степени $n = [\![\frac{N}{2}]\!]$ или сплайнов степени $m \,(m+1 \in \mathbb{N})$ на сетке узлов (1.105); в частности, можно принять $\varphi_k(s) = \varphi_{k,n}(s) = 2\,\Delta_n(s - \sigma_k)/N$, где $\Delta_n(\varphi)$ определено в (1.103$'$) или (1.103$''$).

Пусть теперь

$$\mathcal{L}_n^{\sigma}(\varphi; \sigma) = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{N} \Delta_n(\sigma - \sigma_k)\varphi(\sigma_k), \;\; \mathcal{L}_n^{s}(\psi; s) = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N} \Delta_n(s - s_j)\psi(s_j),$$

где узлы σ_k и s_j определены соответственно в (1.105) и (1.106), а $\Delta_n(\varphi)$ – в (1.103$'$), (1.103$''$). Далее, пусть $X_n \subset X = L_2$ и $Y_n \subset Y = W_2^1$ при $N = 2n+1$ те же, что и выше, а при $N = 2n$ X_n и Y_n суть множества элементов вида (1.99) с нормами соответственно пространств X и Y. Тогда СЛАУ (1.107) эквивалентна операторному уравнению

$$A_n x_n \equiv \mathcal{L}_n^s S x_n + \mathcal{L}_n^s \rho \mathcal{L}_n^{\sigma}(h x_n) = \mathcal{L}_n^s y \quad (x_n \in X_n, \quad \mathcal{L}_n^s y \in Y_n). \tag{1.109}$$

В силу этого для вычислительной схемы м.д.в. (0.1), (1.105) – (1.107), (2.108), $\varphi_k(s) = 2\,\Delta_n(s - \sigma_k)/N$, справедливы утверждения, *аналогичные* теоремам 1.5 и 1.6. При доказательстве этого факта существенным образом использованы результаты глав 1 и 3 монографии [25], а также вышеприведенные теоремы 1.1, 1.2 и лемма 1.5.

1.7. Метод вырожденных ядер. Ядро $h(s,\sigma)$ с.и.у. (0.1) заменим вырожденным аппроксимирующим ядром

$$h_N(s, \sigma) = \sum_{k=1}^{N} a_k(s) b_k(\sigma), \qquad N \in \mathbb{N}, \tag{1.110}$$

где $\{a_k\}_1^N \subset W_2^1$ и $\{b_k\}_1^N \subset L_2$ – некоторые системы 2π–периодических функций, хотя бы одна из которых линейно независима. Тогда получим уравнение метода вырожденных ядер (м.в.я.)

$$A_N x \equiv Sx + R_N x = y, \quad R_N x \equiv r h_N x \qquad (x \in X, \quad y \in Y). \tag{1.111}$$

Решение этого уравнения, в случае его существования, будем определять по формуле

$$x_N^*(s) = S^{-1}(y;s) - \sum_{k=1}^{N} \alpha_k^* \, S^{-1}(a_k;s), \tag{1.112}$$

где $\{\alpha_k^*\}$ – решение СЛАУ

$$\alpha_j + \sum_{k=1}^{N} a_{jk}\,\alpha_k = y_j, \quad j = \overline{1,N}, \tag{1.113}$$

оператор $S^{-1} : W_2^1 \longrightarrow L_2$ определен в лемме 1.2, а

$$y_j = \int_0^{2\pi} y(s) b_j(s)\,ds, \quad a_{jk} = \int_0^{2\pi} S^{-1}(a_k;s) b_j(s)\,ds.$$

Сходимость этой схемы устанавливает следующая простая

Теорема 1.7. *Пусть выполнены условия:*

а) $y'(s) \in L_2[0,2\pi]$, $h_s'(s,\sigma) \in L_2[0,2\pi]^2$, $a_k'(s) \in L_2[0,2\pi]$, $\quad k = \overline{1,N}$;

б) $$\varepsilon_N \equiv \|h - h_N\|_{L_2[0,2\pi]^2} + \|h_s' - {h_N}_s'\|_{L_2[0,2\pi]^2} \to 0, \quad N \to \infty. \tag{1.114}$$

Тогда при всех N, хотя бы достаточно больших, СЛАУ (1.113) *имеет единственное решение* $\{\alpha_k^*\}$ *и приближенные решения* (1.112) *сходятся к точному решению* $x^*(s)$ *в среднем со скоростью*

$$\|x^* - x_N^*\|_2 = O\left(\varepsilon_N\right). \tag{1.115}$$

Доказательство. Следуя разделу 1.1, уравнения (0.1) и (1.111) будем рассматривать как операторные уравнения, приводящиеся к уравнениям второго рода, где $A : X \longrightarrow Y$ и $A_N : X \longrightarrow Y$, а $X = L_2$, $Y = W_2^1$. Тогда для любого $x \in X$с помощью неравенства Гёльдера и условий теоремы находим

$$\|Ax - A_N x\|_{1;2} = \|Rx - R_N x\|_{1;2} = \|r(h - h_N)x\|_{1;2} \leqslant \varepsilon_N \|x\|_2,$$

где ε_N определено в (1.114). Таким образом, имеем

$$\|A - A_N\| \leqslant \varepsilon_N, \quad A - A_N : X \longrightarrow Y. \tag{1.116}$$

В силу (1.114) и (1.116) остальное следует из леммы 1.4 при $X = L_2$, $Y = W_2^1$.

1.8. Метод наименьших квадратов (м.н.к.). Введем в пространстве $Y = W_2^1$ скалярное произведение

$$(\varphi, \psi)_{1;2} = (\varphi, \psi)_2 + (\varphi', \psi')_2 \quad (\varphi, \psi \in W_2^1). \tag{1.117}$$

Тогда условия (1.23) при $U = Y$ приводят к СЛАУ

$$\sum_{k=-n}^{n} \alpha_k (Ae^{ik\sigma}, Ae^{ij\sigma})_{1;2} = (y, Ae^{ij\sigma})_{1;2}, \quad j = \overline{-n, n}. \tag{1.118}$$

Теорема 1.8. *Пусть $y(s) \in W_2^1$, а ядро $h(s,\sigma)$ таково, что оператор $R : L_2 \longrightarrow W_2^1$ вполне непрерывен. Если с.и.у.* (0.1) *однозначно разрешимо в L_2 при любой правой части из W_2^1, то при всех натуральных n СЛАУ* (1.118) *имеет единственное решение α_k^*, $k = \overline{-n, n}$. Приближенные решения $x_n^*(s)$ сходятся к точному решению $x^*(s)$ в среднем со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_2 \leqslant \eta(A)\, E_n^T(x^*)_2, \tag{1.119}$$

где $\eta(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ — число обусловленности оператора $A : L_2 \longrightarrow W_2^1$.

Доказательство.Система функций $\{e^{iks}\}$, $k = 0, \pm 1, \dots$, полна как в L_2 , так и в W_2^1. В условиях теоремы из результатов раздела 1.1 следует, что операторы $A : L_2 \longrightarrow W_2^1$ и $A^{-1} : W_2^1 \longrightarrow L_2$ являются ограниченными. Поэтому система функций $\{e^{iks}\}$ является также A-полной [62]. Тогда из результатов С.Г.Михлина [62] по м.н.к. получаем требуемое утверждение.

Следует отметить, что если м.н.к. применить к с.и.у. (0.1) лишь в пространстве L_2 , то придем к СЛАУ

$$\sum_{k=-n}^{n} \alpha_k (Ae^{ik\sigma}, Ae^{ij\sigma})_2 = (y, Ae^{ij\sigma})_2, \quad j = \overline{-n, n}. \tag{1.120}$$

Теорема 1.9. *Пусть выполнены условия:* а) $y \in L_2[0, 2\pi]$, $h \in L_2[0, 2\pi]^2$; б) *с.и.у.* (0.1) *имеет решение $x^* \in L_2$ при данной правой части $y \in L_2$;* в) *уравнение $Ax = 0$ имеет в L_2 лишь тривиальное решение. Тогда при любых $n \in \mathbb{N}$ СЛАУ* (1.120) *имеет единственное решение $\widetilde{\alpha}_k$, $k = \overline{-n, n}$. Приближенные решения*

$$\widetilde{x}_n(s) = \sum_{k=-n}^{n} \widetilde{\alpha}_k\, e^{iks} \tag{1.121}$$

сходятся в том смысле, что невязка $r_n \equiv y - A\widetilde{x}_n \to 0, n \to \infty$, *и*

$$\|r_n\|_2 \leqslant E_n(y)_2 \leqslant \|A\|_2 \cdot E_n^T(x^*)_2, \tag{1.122}$$

$$E_n(y)_2 = \|y - y_n^0\|_2, \quad y_n^0 = \sum_{j=-n}^{n} \widetilde{\alpha}_j \, Ae^{ijs}. \tag{1.123}$$

Доказательство. В силу условия а) теоремы и леммы 1.1 оператор $A : L_2 \longrightarrow L_2$ является вполне непрерывным. Поэтому система $\{e^{ijs}\}_{-\infty}^{\infty}$ является также A-полной в L_2. С другой стороны, в силу условия в) теоремы система функций $\varphi_j(s) = A(e^{ij\sigma}; s)$, $j = \overline{-\infty, \infty}$, является линейно независимой. Тогда определитель СЛАУ (1.120) совпадает с определителем Грамма системы функций $\{\varphi_j(s)\}$, а, следовательно, отличен от нуля при любых $n \in \mathbb{N}$. Поэтому СЛАУ (1.120) имеет единственное решение $\widetilde{\alpha}_k$, $k = \, = \overline{-n, n}$, при любых $n \in \mathbb{N}$ и в силу (1.23) при $U = L_2$ и (1.121) справедлива оценка

$$\|r_n\|_2 = \|y - A\widetilde{x}_n\|_2 \leqslant \|y - Ax_n\|_2 \tag{1.124}$$

для любого $x_n \in \mathbb{H}_n^T$. Полагая $x_n = \Phi_n x^*$, из (1.124) в силу условия б) теоремы находим требуемую оценку:

$$\|r_n\|_2 = \|y - A\widetilde{x}_n\|_2 \leqslant \|y - A\Phi_n x^*\|_2 = \|A(x^* - \Phi_n x^*)\|_2 \leqslant$$
$$\leqslant \|A\|_2 \cdot \|x^* - \Phi_n x^*\|_2 = \|A\|_2 \cdot E_n^T(x^*)_2.$$

Следует отметить, что если оператор $A : L_2 \longrightarrow L_2$ обратим, то в условиях теоремы 1.9 справедливо соотношение $\|x^* - x_n^*\|_2 = \infty$ для любых $n \in \mathbb{N}$, т.е. некорректность задачи в рассматриваемом случае самым неприятным образом отражается на оценке погрешности м.н.к. В этом и состоит преимущество теоремы 1.8 перед теоремой 1.9.

1.9. Метод подобластей (м.п.). Условия (2.26) в случае равноотстоящих узлов приводят к следующей СЛАУ относительно коэффициентов полинома (1.21):

$$\sum_{k=-n}^{n} \alpha_k \{c_k(g) e^{iks_j} a_k + b_{jk}\} = y_j, \quad s_j = \frac{2j\pi}{2n+1}, \quad j = \overline{0, 2n}, \tag{1.125}$$

где $c_k(g)$ определены в (1.12), а

$$a_k = \{(e^{iks_1} - 1)/ik \quad \textit{при } k \neq 0; \quad 2\pi/(2n+1) \quad \textit{при } k = 0\};$$

$$b_{jk} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{s_j}^{s_{j+1}} ds \int\limits_{0}^{2\pi} h(s,\sigma) e^{ik\sigma} \, d\sigma, \quad y_j = \int\limits_{s_j}^{s_{j+1}} y(s) \, ds.$$

Сходимость м.п. и оценку погрешности устанавливает

Теорема 1.10. *Пусть $y(s) \in W_2^1$, а ядро $h(s,\sigma)$ таково, что регулярный оператор $R : L_2 \longrightarrow W_2^1$ вполне непрерывен. Тогда при всех $n \geqslant n_0$ (n_0 определяется свойствами функции $h(s,\sigma)$) СЛАУ (1.125) имеет единственное решение α_k^*, $k = \overline{-n,n}$. Приближенные решения $x_n^*(s)$ сходятся к точному решению $x^*(s)$ в среднем со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O\left\{E_n^T(x^*)_2\right\} = O\left\{E_n^T((Sx^*)')_2\right\} = \\ = O\left\{E_n^T(y')_2 + E_n^T((Rx^*)')_2\right\}. \tag{1.126}$$

Если, кроме того, $h'_s(s,\sigma) \in L_2[0,2\pi]^2$, то справедлива оценка

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O\left\{E_n^T(y')_2 + E_n^{Ts}(h'_s)_2\right\}. \tag{1.127}$$

Доказательство ведем методом работы [41] и §8 гл.2 [51]. Обозначим через $\Pi_n : L_2 \to \mathbb{H}_n^T \subset L_2$ линейный проекционный оператор, однозначно определяющийся (см., напр., [41]) из условий

$$\int\limits_{s_j}^{s_{j+1}} \Pi_n(\varphi;s)\,ds = \int\limits_{s_j}^{s_{j+1}} \varphi(s)\,ds, \quad s_j = \frac{2j\pi}{2n+1}, \quad j = \overline{0,2n}. \tag{1.128}$$

Известно [41, 51], что

$$\|\varphi - \Pi_n\varphi\|_2 \leqslant \frac{\pi}{2}\,E_n^T(\varphi)_2, \quad \varphi \in L_2,\ n \in \mathbb{N}. \tag{1.129}$$

Теперь рассмотрим Π_n как оператор из W_2^1 в W_2^1. Тогда для любой $\varphi \in W_2^1$ справедлива оценка

$$\|\varphi - \Pi_n\varphi\|_{1;2} \leqslant (1+\pi/2)\ E_n^T(\varphi')_2, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.130}$$

Действительно, с помощью (1.129), (1.50), (1.73), (1.53) и свойств оператора Фурье (1.47) для любой $\varphi \in W_2^1$ находим

$$\|\varphi - \Pi_n\varphi\|_{1;2} = \|\varphi - \Pi_n\varphi\|_2 + \|(\varphi - \Pi_n\varphi)'\|_2 \leqslant \\ \leqslant \frac{\pi}{2}\,E_n^T(\varphi)_2 + \|(\varphi - \Phi_n\varphi)'\|_2 + \|\,[\Phi_n(\varphi - \Pi_n\varphi)]'\|_2 \leqslant \\ \leqslant \frac{\pi}{2}\,E_n^T(\varphi)_2 + E_n^T(\varphi')_2 + n\,\|\varphi - \Pi_n\varphi\|_2 \leqslant \\ \leqslant \frac{\pi(1+n)}{2}\,E_n^T(\varphi)_2 + E_n^T(\varphi')_2 \leqslant (\frac{\pi}{2}+1)\,E_n^T(\varphi')_2.$$

Пусть $X_n = \mathbb{H}_n^T \subset X = L_2$, $Y_n = \mathbb{H}_n^T \subset Y = W_2^1$. Тогда в силу (1.26), (1.128), (1.41) и свойства $\Pi_n^2 = \Pi_n$ СЛАУ (1.125) эквивалентна линейному операторному уравнению

$$A_n x_n \equiv \Pi_n A x_n = S x_n + \Pi_n R x_n = \Pi_n y \quad (x_n \in X_n, \Pi_n y \in Y_n). \tag{1.131}$$

Теперь из (1.131) и (1.18) с учетом (1.130) находим

$$\|Ax_n - A_n x_n\|_{1;2} = \|Rx_n - \Pi_n R x_n\|_{1;2} \leqslant \varepsilon_n' \|x_n\|_2, \quad x_n \in X_n,$$

$$\varepsilon_n' \equiv \sup\{\|\psi - \Pi_n \psi\|_{1;2} \,:\, \psi \in R\text{Ш}(0,1)\}.$$

В силу (1.130) операторы $\Pi_n \to E$ сильно в W_2^1, а в условиях теоремы множество $R\text{Ш}(0,1)$ компактно в W_2^1. Тогда из использованной выше (см. раздел 1.1) теоремы И.М.Гельфанда следует, что $\varepsilon_n' \to 0$ при $n \to \infty$. Другими словами, имеем

$$\varepsilon_n \equiv \|A - A_n\|_{X_n \to Y} \leqslant \|R - \Pi_n R\|_{X \to Y} \leqslant \varepsilon_n' \to 0,\, n \to \infty. \qquad (1.132)$$

Кроме того, в силу (1.130) и теоремы Джексона в L_2 для правых частей уравнений (1.18) и (1.131) имеем

$$\delta_n \equiv \|y - \Pi_n y\|_{1;2} = O\left\{E_n^T (y')_2\right\} \to 0, \quad n \to \infty. \qquad (1.133)$$

Таким образом, в силу (1.132) и (1.133) для уравнений (1.18) и (1.131) выполнены все условия теорем 1.1 и 1.2, из которых с учетом оценки (1.130) следует требуемое утверждение.

1.10.Скорость сходимости приближенных методов. Равномерная сходимость как следствие сходимости в среднем. Выше установлены среднеквадратические оценки погрешности приближенных методов решения с.и.у. (0.1), причем это сделано в терминах наилучших среднеквадратических или же наилучших равномерных приближений элементов этого уравнения тригонометрическими полиномами. Поэтому известные теоремы Джексона (см., напр., [48, 57, 75]) в пространствах L_2 и $C_{2\pi}$ позволяют установить скорость сходимости указанных методов через структурные свойства элементов с.и.у. (0.1). Для иллюстрации приведем следующие результаты. При этом будем использовать известные классы функций

$$W^r H^\alpha = \{\, x \in C_{2\pi} \,:\, x^{(r)}(s) \in H^\alpha \,\}, \quad r + 1 \in \mathbb{N}, \quad 0 < \alpha \leqslant 1;$$

$$W^r H_2^\alpha = \{\, x \in L_2 \,:\, \|x^{(r)}(s+\delta) - x^{(r)}(s)\|_2 = O\,(\delta^\alpha)\,\}, \quad r \geqslant 0, 0 < \alpha \leqslant 1.$$

Теорема 1.11. *Пусть с.и.у.* (0.1) *таково, что его точное решение* $x^*(s) \in W^r H_2^\alpha$ $(r \geqslant 0, \quad 0 < \alpha \leqslant 1)$ [1)]. *Тогда м.Г. в условиях теоремы* 1.3, *м.н.к. в условиях теоремы* 1.8, *м.п. в условиях теоремы* 1.10 *сходятся в среднем и равномерно (при* $r + \alpha > \frac{1}{2}$*) со скоростями соответственно*

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O\left(n^{-r-\alpha}\right), \qquad (1.134)$$

[1)] Для этого достаточно, если, напр., $y(s) \in W^{r+1} H_2^\alpha$, $h(s,\sigma) \in W^{r+1} H_2^\alpha$ по s равномерно относительно σ, а $h(s,\sigma) \in L_2[0, 2\pi]^2$.

$$\|x^* - x_n^*\|_\infty = O\left(n^{-r-\alpha+\frac{1}{2}}\right). \tag{1.135}$$

Доказательство. В ходе доказательства теорем 1.3, 1.8 и 1.10 установлено, что

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O\left\{E_n^T(x^*)_2\right\}. \tag{1.136}$$

Поскольку здесь $x^* \in W^r H_2^\alpha$, то в силу теоремы Джексона в L_2 (см., напр., [48, 57, 75]) имеем

$$E_n^T(x^*)_2 = O\left(n^{-r-\alpha}\right), \quad r + \alpha > 0. \tag{1.137}$$

Из (1.136) и (1.137) следует оценка (1.134).

Для доказательства (1.135) воспользуемся приемом, предложенным в гл.14 [55]:

$$x^*(s) - x_n^*(s) = \sum_{k=1}^{\infty} x_{2^k n}^*(s) - x_{2^{k-1}n}^*(s), \tag{1.138}$$

где ряд сходится в среднем. Ясно, что в силу (1.134)

$$\|x_{2^k n}^* - x_{2^{k-1}n}^*\|_2 \leqslant \|x^* - x_{2^k n}^*\|_2 + \|x^* - x_{2^{k-1}n}^*\|_2 = O\left\{(2^{k-1}n)^{-r-\alpha}\right\}. \tag{1.139}$$

Поскольку (см., напр., [75], с.244)

$$\|T_n\|_\infty \leqslant \sqrt{2n+1}\,\|T_n\|_2, \quad T_n \in \mathbb{H}_n^T, \tag{1.140}$$

то из (1.138) и (1.139) с учетом $x_m^* \in \mathbb{H}_m^T$ находим (1.135).

Теорема 1.12. *Пусть $y(s) \in W^{r+1}H^\alpha$ и $h(s,\sigma) \in W^{r+1}H^\alpha$ по переменной s равномерно относительно σ, где $r \geqslant 0$, $0 < \alpha \leqslant 1$. Тогда в условиях теоремы* 1.4 *м.к. сходится в среднем и равномерно со скоростями соответственно* (1.134) *и* (1.135). *Если, кроме того, $h(s,\sigma) \in W^{r+1}H^\alpha$ по σ равномерно относительно s, то в условиях теоремы* 1.6 *м.м.к. сходится в среднем и равномерно со скоростями соответственно* (1.134) *и* (1.135).

Доказательство. С помощью теоремы Джексона в $C_{2\pi}$ (см., напр., [48, 57, 75]) имеем

$$E_n^T(y')_\infty = O\left(n^{-r-\alpha}\right), \quad E_n^{Ts}(h_s')_\infty = O\left(n^{-r-\alpha}\right). \tag{1.141}$$

Отсюда и из (1.67) для метода коллокации следует оценка (1.134), а из нее, как показано выше, следует равномерная оценка (1.135).

Пусть теперь $h \in W^{r+1}H^\alpha$ (по σ). Тогда

$$E_n^{T\sigma}(h_\sigma')_\infty = O\left(n^{-r-\alpha}\right). \tag{1.142}$$

Из неравенств (1.141), (1.142) и (1.99) для метода механических квадратур следует оценка (1.134), а из нее – (1.135).

Результаты, аналогичные теоремам 1.11 и 1.12, справедливы также для м.в.я. при конкретном выборе аппроксимирующих ядер (1.110). Например, справедлива следующая

Теорема 1.13. *Пусть* $y(s) \in W^{r+1}H^{\alpha}$ *и* $h(s,\sigma) \in W^{r+1}H^{\alpha}$ *по переменной* s *равномерно относительно* σ, *а*

$$h_N(s,\sigma) = \frac{2}{N}\sum_{k=1}^{N} h(s_k,\sigma)\Delta_n(s-s_k) = \mathcal{L}_n^s h(s,\sigma),\ s_k = \frac{2k\pi}{N}, \quad (1.143)$$

где ядра $\Delta_n(\varphi)$, $\quad n = [\![N/2]\!]$, *определены в* (1.103′) *и* (1.103″). *Тогда м.в.я.* (1.111)– (1.113) *решения с.и.у.* (0.1) *сходится в среднем и равномерно (при* $r+\alpha > \frac{1}{2}$*) со скоростями соответственно*

$$\|x^* - x_N^*\|_2 = O\left(N^{-r-\alpha}\right), \quad (1.144)$$

$$\|x^* - x_N^*\|_\infty = O\left(N^{-r-\alpha+\frac{1}{2}}\right). \quad (1.145)$$

Доказательство. В рассматриваемом случае в силу леммы 1.5 и теоремы Джексона в $C_{2\pi}$ имеем

$$\|h - h_N\|_{L_2[0,2\pi]^2} \leqslant 2\, E_m^{Ts}(h)_\infty = O\,(N^{-r-\alpha-1}),$$

$$\|h'_s - h'_{Ns}\|_{L_2[0,2\pi]^2} = O\,(N^{-r-\alpha}), \quad m = [\![(N-1)/2]\!].$$

Отсюда и из теоремы 1.7 следует оценка (1.144). Для доказательства оценки (1.145) в уравнениях (1.18) и (1.111) вводим замены соответственно

$$Sx^* = y + z^*; \qquad Sx_N^* = y + z_N^*, \quad (1.146)$$

где z^* и z_N^* – решения уравнений соответственно

$$z + RS^{-1}z = -RS^{-1}y, \quad (1.147)$$

$$z_N + R_N S^{-1} z_N = -R_N S^{-1} y. \quad (1.148)$$

Ясно, что $z_N^* \in \mathbb{H}_n^T$, где $n = [\![\frac{N}{2}]\!]$, и

$$x^* - x_N^* = S^{-1}(z^* - z_N^*) = S^{-1}z^* - S^{-1}z_N^*. \quad (1.149)$$

Из (1.144) и (1.149) следует оценка

$$\|x^* - x_N^*\|_2 = \|S^{-1}z^* - S^{-1}z_N^*\|_2 = O\left(N^{-r-\alpha}\right). \quad (1.149')$$

Здесь элемент $S^{-1}(z_N^*; s)$, в отличие от элемента $x_N^*(s)$, является тригонометрическим полиномом порядка не выше $n = [\![\frac{N}{2}]\!]$ (этот факт доказывается с помощью леммы 1.2 и соотношений (1.14)). Теперь, применяя к элементам $S^{-1}z^*$ и $S^{-1}z_N^*$ метод доказательства оценки (1.135), из соотношений (1.149′) выводим (1.145).

В теоремах 1.10 – 1.12 равномерная сходимость приближенных методов решения с.и.у. (0.1) установлена как следствие сходимости в среднем. Следует отметить, что полученные при этом равномерные оценки погрешности (1.135) и (1.145) являются несколько грубыми; это связано, как увидим ниже, с использованным выше методом их доказательства. Суть дела продемонстрируем для наиболее употребительного в приложениях, но в то же время для наиболее трудного для обоснования метода, а именно, для метода механических квадратур. Имеет место следующая

Теорема 1.14. *Пусть выполнены условия:* а) *функции* $y(s) \in W^{r+1}H^\alpha$ *и* $h(s,\sigma) \in W^{r+1}H^\alpha$ *(по каждой из переменных равномерно относительно другой из них), где* $r \in \mathbb{R}^+$, $0 < \alpha \leqslant 1$; б) *с.и.у.* (0.1) *однозначно разрешимо в* L_2 *при любой правой части из* W_2^1. *Тогда при всех* n *таких, что*

$$q_n = e_0 n^{-r-\alpha} < 1, \tag{1.150}$$

СЛАУ (1.78) *и* (1.79) *однозначно разрешимы и приближенные решения* (1.77) *сходятся к точному решению* $x^*(s)$ *с.и.у.* (0.1) *в среднем и равномерно со скоростями соответственно*

$$\text{а)}\ \|x^* - x_n^*\|_2 \leqslant e_1 n^{-r-\alpha}; \quad \text{б)}\ \|x^* - x_n^*\|_\infty \leqslant e_2 n^{-r-\alpha} \ln n, \tag{1.151}$$

где e_i *– положительные постоянные, не зависящие от* n.

Следствие. *В условиях теоремы для любых* $k \in \mathbb{N}$ *таких, что* $1 \leqslant k < r + \alpha$, *справедливы оценки*

$$\begin{aligned} &\text{а)}\ \|(x^* - x_n^*)^{(k)}\|_2 = O\,(n^{-r-\alpha+k}); \\ &\text{б)}\ \|(x^* - x_n^*)^{(k)}\|_\infty = O\,(n^{-r-\alpha+k} \ln n). \end{aligned} \tag{1.152}$$

Доказательство. Из теоремы 1.1 и хода доказательства теорем 1.5 и 1.12 следует, что

$$\varepsilon_n \equiv \|A - A_n\|_{X_n \to Y} \leqslant (1 + \pi)\,\{E_n^{Ts}(h'_s)_\infty + E_n^{T\sigma}(h'_\sigma)_\infty\}, \tag{1.153}$$

где операторы A_n определены в (1.83), (1.84). Отсюда и из теоремы 1.1 и теоремы Джексона в $C_{2\pi}$ (см., напр., [75], с.305) находим (при $n \geqslant n_0$)

$$q_n \equiv 3\,(1 + \pi)\,\|A^{-1}\| \left\{ H_s\left(\frac{\partial^{r+1} h}{\partial s^{r+1}}; \alpha\right) + H_\sigma\left(\frac{\partial^{r+1} h}{\partial \sigma^{r+1}}; \alpha\right) \right\} \frac{1}{n^{r+\alpha}} < 1,$$

где $A^{-1} : W_2^1 \longrightarrow L_2$, а $H_s(\varphi;\alpha)$ и $H_\sigma(\varphi;\alpha)$ означают, что оператор $H(\cdot;\alpha)$ применен к функции $\varphi(s,\sigma)$ по переменным s и σ соответственно. Поэтому чем лучше функция $h(s,\sigma)$, тем меньше $n_0 \in \mathbb{N}$, начиная с которого СЛАУ (1.78), (1.79) м.м.к. однозначно разрешимы. С другой стороны, из леммы 1.5 и снова из теоремы Джексона получаем

$$\delta_n \equiv \|y - \mathcal{L}_{n;\omega}\|_{W_2^1} \leqslant (1+\pi)\, E_n^T(y')_\infty \leqslant \frac{3(1+\pi)\, H(y^{r+1};\alpha)}{n^{r+\alpha}}. \quad (1.154)$$

Тогда из теоремы 1.1 с учетом неравенств (1.153) и (1.154) находим

$$\|x^* - x_n^*\|_{L_2} \leqslant \frac{\|A^{-1}\|}{1-q_n} \left\{ \frac{e_0}{n^{r+\alpha}} \|y\|_{W_2^1} + \frac{3(1+\pi)\, H(y^{(r+1)};\alpha)}{n^{r+\alpha}} \right\},$$

т.е. неравенства (1.150) и (1.151а) установлены с постоянными

$$e_0 = 3(1+\pi)\, \|A^{-1}\|_{W_2^1 \to L_2} \cdot \left\{ H_s\left(\frac{\partial^{r+1} h}{\partial s^{r+1}};\alpha\right) + H_\sigma\left(\frac{\partial^{r+1} h}{\partial \sigma^{r+1}};\alpha\right) \right\},$$

$$e_1 = \frac{\|A^{-1}\|}{1 - e_0 n^{-r-\alpha}} \left\{ e_0 \|y\|_{W_2^1} + 3(1+\pi)\, H(y^{(r+1)};\alpha) \right\},\ A^{-1} : W_2^1 \longrightarrow L_2.$$

Докажем оценку (1.151б), при этом ввиду излишней громоздкости выкладок подсчетом постоянной e_2 заниматься не будем.

В силу (0.1) и (1.83), (1.84) имеем тождества

$$S(x^*;s) \equiv y(s) - (\rho h x^*)(s), \quad (1.155)$$

$$S(x_n^*;s) \equiv \mathcal{L}_{n,\omega}(y;s) - \mathcal{L}_{n,\omega}(\rho(\mathcal{L}_n^\sigma h)x_n^*;s), \quad (1.156)$$

откуда получаем

$$S(x^* - x_n^*) = (y - \mathcal{L}_{n;\omega} y) - (\rho h x^* - \mathcal{L}_{n,\omega} \rho h x_n^*) -$$
$$(1.157)$$
$$-\rho h(x^* - x_n^*) - \mathcal{L}_{n,\omega}\{\rho(h - \mathcal{L}_n^\sigma h)x_n^*\} \equiv \theta_n(s).$$

Решим уравнение $S(x^* - x_n^*) = \theta_n(s)$ относительно $x^* - x_n^*$, считая временно $\theta_n(s)$ известной функцией. Тогда в силу леммы 1.2 имеем

$$x^*(s) - x_n^*(s) = -2I(\theta_n';s) + \rho(\theta_n)/\ln 2, \quad (1.158)$$

где операторы I и ρ определены в (1.4) и (1.84) соответственно.

Из соотношений (1.157) и (1.158) находим

$$\frac{1}{2}\|x^* - x_n^*\|_\infty \leqslant \|I(y - \mathcal{L}_{n,\omega} y)_\sigma'\|_\infty + \|I(\psi - \mathcal{L}_{n,\omega}\psi)_\sigma'\|_\infty +$$

$$+\|I[\rho h(x^* - x_n^*)]_\sigma'\|_\infty + \|I[\mathcal{L}_{n,\omega}\rho(h - \mathcal{L}_n^\sigma h)x_n^*]_\sigma'\|_\infty + \quad (1.159)$$

$$+\frac{1}{2\ln 2}\left|\rho S(x^* - x_n^*)\right| \equiv M_1 + M_2 + M_3 + M_4 + M_5, \quad \psi \equiv \rho h x_n^*.$$

Дальше доказательство существенным образом опирается на следующую лемму (доказательство приводится ниже):

Лемма 1.6. *Для любой функции $\varphi \in W^m H^\alpha$ справедливы оценки*

$$\|I(\varphi - \mathcal{L}_{n,\omega}\varphi)\|_\infty \leqslant d_0 n^{-m-\alpha} \ln n \quad \text{при } m+\alpha > 0; \tag{1.160}$$

$$\|I(\varphi - \mathcal{L}_{n,\omega}\varphi)'_\sigma\|_\infty \leqslant d_1 n^{-m-\alpha+1} \ln n \quad \text{при } m+\alpha > 1, \tag{1.161}$$

где d_i – положительные постоянные, не зависящие от n.

Оценим каждое из слагаемых M_k из (1.159) в отдельности.

Пользуясь (1.161), для слагаемого M_1 находим

$$M_1 \equiv \|I(y - \mathcal{L}_{n,\omega}y)'_\sigma\|_\infty = O\left(n^{-r-\alpha}\ln n\right). \tag{1.162}$$

Поскольку $\|x_n^*\|_2 = O(1), n \to \infty$, и $h \in W^{r+1}H^\alpha$ (по s), то функция $\psi(s) \equiv (\rho h x_n^*)(s) \in W^{r+1}H^\alpha$ равномерно относительно n. Поэтому снова по оценке (1.161) получаем

$$M_2 \equiv \|I(\psi - \mathcal{L}_{n,\omega}\psi)'_\sigma\|_\infty = O\left(n^{-r-\alpha}\ln n\right). \tag{1.163}$$

Для M_3 из (1.159) имеем

$$M_3 = \|I[\rho h(x^* - x_n^*)]'_\sigma\|_\infty = \|\rho h_1(x^* - x_n^*)\|_\infty,$$

где $h_1(s,\sigma) = I_\eta[h'_\eta(\eta,\sigma); s]$, а сингулярный оператор $I = I_\eta$ применен по переменной η. В силу условия а) теоремы и свойств сингулярных интегральных операторов (см., напр., главы 1 и 2 монографии [66]) функция $h_1(s,\sigma)$ удовлетворяет хотя бы условию Гёльдера с некоторым положительным показателем. Тогда из неравенства Гёльдера и оценки (1.151а) находим

$$M_3 \leqslant \max_{s,\sigma}|h_1(s,\sigma)| \cdot \|x^* - x_n^*\|_2 = O\left(n^{-r-\alpha}\right). \tag{1.164}$$

В силу известных результатов (см., напр., [4, 45, 61])

$$\frac{d}{ds}I(x;s) = I\left(\frac{dx(\sigma)}{d\sigma}; s\right), \quad x \in W_2^1. \tag{1.165}$$

Известно (см., напр., [75], с.223), что

$$\left\|\frac{d}{ds}I(T_n;s)\right\|_\infty \leqslant n\,\|T_n(s)\|_\infty, \quad T_n \in \mathbb{H}_n^T. \tag{1.166}$$

Теперь с помощью леммы 1.5 и соотношений (1.165), (1.166) для слагаемого M_4 из (1.159) находим

$$M_4 = \|I(\mathcal{L}_{n,\omega}\varphi)'_\sigma\|_\infty = \|(I\mathcal{L}_{n,\omega}\varphi)'_s\|_\infty \leqslant n\,\|\mathcal{L}_{n,\omega}\varphi\|_\infty =$$

$$= O\,(n \ln n)\, \|\varphi\|_\infty, \quad \varphi(s) \equiv \left(\rho(h - \mathcal{L}_n^\sigma h) x_n^*\right)(s).$$

Отсюда с помощью оценок (1.68), (1.151а) находим

$$|\varphi(s)| \leqslant \|x_n^*\|_2 \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |h(s,\sigma) - \mathcal{L}_n^\sigma h(s,\sigma)|^2\, d\sigma \right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant 2\, E_n^{T\sigma}(h)_\infty \|x_n^*\|_2 = O\,\left\{ E_n^{T\sigma}(h)_\infty \right\}.$$

Тогда с учетом теоремы Джексона в $C_{2\pi}$ для M_4 имеем

$$M_4 = O\,(n \ln n) \cdot O\,\left(n^{-r-1-\alpha}\right) = O\,\left(n^{-r-\alpha} \cdot \ln n\right). \tag{1.167}$$

Наконец, для слагаемого M_5 из (1.159) с помощью леммы 1.3 и неравенства (1.151а) находим

$$M_5 \leqslant \frac{1}{2\ln 2} \|S(x^* - x_n^*)\|_2 \leqslant \frac{1}{2} \|x^* - x_n^*\|_2 = O\,\left(n^{-r-\alpha}\right). \tag{1.168}$$

Теперь из неравенств (1.159), (1.162) – (1.164), (1.167), (1.168) следует требуемая оценка (1.151б).

Для завершения доказательства теоремы 1.14 остается показать справедливость формул (1.160) и (1.161). Формула (1.160) известна (см., напр., теорему 9 гл.3 [25]). Докажем формулу (1.161).

Из леммы 1.5 и теоремы Джексона в $C_{2\pi}$ следует, что

$$\|\varphi - \mathcal{L}_{n,\omega}\varphi\|_\infty \leqslant d_2 n^{-m-\alpha} \ln n, \quad \varphi \in W^m H^\alpha, \tag{1.169}$$

где d_2 – положительная постоянная, не зависящая от n. Тогда

$$\|\mathcal{L}_{2^k n,\omega}\varphi - \mathcal{L}_{2^{k-1} n,\omega}\varphi\|_\infty \leqslant 2\, d_2 \left(2^{k-1} n\right)^{-m-\alpha} \ln(2^k n). \tag{1.170}$$

Теперь из (1.170), (1.165), (1.166) с учетом $\mathcal{L}_{2^k n,\omega}\varphi \in \mathbb{H}_{2^k n}^T$ последовательно находим оценку (1.161):

$$\|I(\varphi - \mathcal{L}_{n,\omega}\varphi)'_\sigma\|_\infty = \| \sum_{k=1}^\infty \left[I(\mathcal{L}_{2^k n,\omega}\varphi - \mathcal{L}_{2^{k-1} n,\omega}\varphi) \right]'_s \|_\infty \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^\infty 2^k n \cdot \|\mathcal{L}_{2^k n,\omega}\varphi - \mathcal{L}_{2^{k-1} n,\omega}\varphi\|_\infty \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^\infty \left(2^k n \cdot 2\, d_2 \cdot (2^{k-1} n)^{-m-\alpha} \ln(2^k n) \right) =$$

$$= \frac{4\, d_2}{n^{m+\alpha-1}} \sum_{k=1}^\infty \frac{\ln(2^k n)}{2^{(k-1)(m+\alpha-1)}} \leqslant \frac{d_1 \ln n}{n^{m+\alpha-1}} \quad (m + \alpha > 1).$$

Для доказательства следствия воспользуемся рядом

$$D^k(x^* - x_n^*) = \sum_{j=1}^{\infty} D^k(x_{2^j n}^* - x_{2^{j-1}n}^*), \quad D^k \equiv \frac{d^k}{ds^k},$$

сходящимся как в L_2, так и в $C_{2\pi}$. Отсюда, применяя неравенства С.Н.Бернштейна (и их следствия) для тригонометрических полиномов в пространствах $U = L_2[0, 2\pi]$ и $U = C_{2\pi}$, находим

$$\|D^k(x^* - x_n^*)\|_U \leqslant \sum_{j=1}^{\infty}(2^j n)^k \|x_{2^j n}^* - x_{2^{j-1}n}^*\|_U.$$

Отсюда при $U = L_2[0, 2\pi]$ $(U = C_{2\pi})$ и из (1.151а) (соответственно (1.151б)) находим оценку (1.152а) (соответственно (1.152б)).

Теорема 1.14 и ее следствие доказаны полностью. В силу сказанного выше, утверждение, аналогичное только что доказанной теореме и ее следствию, справедливо также для других приближенных методов решения с.и.у. (0.1), рассмотренных в этом параграфе.

Замечание 1.4. В силу добавления к лемме 1.2, равномерные оценки погрешности (1.135), (1.145), (1.151б) и (1.152б) не могут быть получены непосредственно, т.е.при выборе $X = C_{2\pi}$, если даже пространство Y выбрано в виде $Y = X^1 = C_{2\pi}^1$. Это утверждение относится также к другим приближенным методам.

1.11. Об устойчивости, обусловленности и оптимальности приближенных методов. При практической численной реализации приближенных методов большое значение имеет доказательство их устойчивости и обусловленности. Пользуясь приведенными в §5 гл.1 [25] определениями и результатами, докажем следующее утверждение:

Теорема 1.15. а) *В условиях теоремы* 1.3 *м.Г., теоремы* 1.4 *м.к., теоремы* 1.5 *м.м.к., теоремы* 1.7 *м.в.я., теоремы* 1.8 *м.н.к., теоремы* 1.10 *м.п. устойчивы относительно малых возмущений элементов соответствующих аппроксимирующих СЛАУ.* б) *В каждой из указанных теорем из хорошей обусловленности точного с.и.у.* (0.1) *следует хорошая обусловленность соответствующих аппроксимирующих уравнений* $A_n x_n = y_n$ $(x_n \in X_n, \quad y_n \in Y_n, \quad A_n : X_n \longrightarrow Y_n)$ *исследованных методов.*

Доказательство проведем лишь для метода квадратур; другие методы рассматриваются совершенно аналогично.

В ходе доказательства теоремы 1.5 показано, что

$$\varepsilon_n \equiv \|A - A_n\|_{X_n \to Y} \leqslant \varepsilon_n' = O\left\{E_n^{Ts}(h_s')_\infty + E_n^{T\sigma}(h_s')_\infty + E_n^{T\sigma}(h)_\infty\right\},$$

$$\varepsilon_n \equiv \|A - A_n\|_{X_n \to Y} \leqslant \varepsilon_n'' = O\left\{E_n^{Ts}(h_s')_\infty + E_n^{T\sigma}(h_\sigma')_\infty\right\},$$
$$\|A_n^{-1}\| \leqslant 2\,\|A^{-1}\|, \quad A_n : X_n \longrightarrow Y_n, \quad A : X \longrightarrow Y, \quad n \geqslant n_1,$$

где $n = n_1$ определяется из неравенства $q_n = \varepsilon_n\|A^{-1}\| < 1/2$. В силу этих неравенств из результатов п.1 §5 гл.1 [25] следует утверждение а) теоремы 1.15 в случае метода квадратур.

Пусть теперь с.и.у. (0.1) хорошо обусловлено, т.е. число обусловленности $\eta(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ оператора $A = S + R : L_2 \longrightarrow W_2^1$ не велико. Тогда из только что указанных неравенств следует, что при всех $n \geqslant n_0$, удовлетворяющих неравенству $q_n \equiv \|A^{-1}\|\varepsilon_n < 1$, $A^{-1} : W_2^1 \longrightarrow L_2$, числа обусловленности операторов $A_n : X_n \longrightarrow Y_n$, определяемых соотношениями (1.83), (1.84), существуют, причем

$$\eta(A_n) = \|A_n\|_{X_n \to Y_n} \cdot \|A_n^{-1}\|_{Y_n \to X_n} \leqslant \frac{\eta(A) + q_n}{1 - q_n} \equiv \gamma_n.$$

Поскольку $\gamma_n \to \eta(A)$ при $n \to \infty$, то из результатов п.2 §5 гл.1 [25] следует утверждение б) теоремы 1.15.

Замечание 1.5.Доказанные выше теоремы 1.1 – 1.15 позволяют проводить весьма интересные исследования по устойчивости рассмотренных приближенных методов, что́ может быть сделано с помощью соответствующих результатов монографии С.Г.Михлина [64]. Однако ограниченность обьема работы не позволяет нам остановиться на этом более подробно.

Далее, многие из полученных выше оценок погрешности, как следует из работ автора [25, 31, 32], являются в определенном смысле неулучшаемыми. В частности, справедлива следующая

Теорема 1.16. а) *Оценки* (1.43), (1.45), (1.115), (1.118), (1.116), *полученные соответственно для методов Галеркина, вырожденных ядер, наименьших квадратов и подобластей, неулучшаемы по порядку.* б) *Оценки* (1.64), (1.66) *из теоремы* 1.4, (1.134) *из теоремы* 1.12 *и* (1.151), (1.152) *из теоремы* 1.14 *по методам коллокации и квадратур неулучшаемы по порядку для класса уравнений* (0.1), *множество решений* $X^* = \{x^* \in X : Ax^* \equiv y\}$ *которого в пространстве* $C_{2\pi}$ *удовлетворяет условию* $\omega(x^*;\delta)\ln\delta \to 0$, $\delta \to +0$, *равномерно относительно* $x^* \in X^*$.

Доказательство утверждения а) почти очевидно. Действительно, для м.Г., м.н.к. и м.п. выше показано, что

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O\left\{E_n^T(x^*)_2\right\}. \tag{1.171}$$

Для этих методов приближенные решения (1.21*) построены так, что $x_n^*(s) \in \mathbb{H}_n^T$. Отсюда и из определения наилучших среднеквадратических приближений следует, что

$$\|x^* - x_n^*\|_2 \geqslant E_n^T(x^*)_2 = \rho(x^*, \mathbb{H}_n^T)_2, \tag{1.172}$$

где $\rho(x^*, F)_2$ – расстояние от элемента $x^* \in X$ до множества $F \subset X = L_2$. Из неравенств (1.171) и (1.172) следует утверждение а) для м.Г., м.н.к. и м.п. Для м.в.я. доказательство ведется аналогичным образом.

Утверждение б) доказывается с помощью результатов глав II – IV монографии автора [25] и частично следует из работ [31, 32]. Однако ввиду излишней громоздкости выкладок доказательство здесь не приводится.

Отметим, что как теорема 1.16, так и аналогичные им более общие результаты следуют также из соответствующих результатов работ автора [25, 29]. Более того, на основе полученных результатов и с помощью результатов и методов работ [25, 29, 37] может быть решена довольно трудная, но в то же время весьма важная задача оптимизации прямых и проекционных методов решения с.и.у. (0.1), когда оптимальная оценка погрешности определяется по минимаксному принципу [5, 25]. Некоторое представление о полученных при этом результатах дают работы автора [21 - 32], а также [1, 36, 39, 43, 87].

1.12. Об итерационных методах. До сих пор речь шла о прямых и проекционных методах решения с.и.у. (0.1). Это уравнение можно решать также различными итерационными методами. В частности, можно использовать метод простой итерации в следующем виде:

$$Sx^{k+1} + Rx^k = y \quad (\, S, R \,:\, X \longrightarrow Y,\ k = 0, 1, \ldots), \tag{1.173}$$

где x° – произвольный элемент из пространства X, в частности, $x^\circ = S^{-1}y$. Тогда леммы 1.2 и 1.3 позволяют доказать сходимость последовательных приближений $x^k(s) \to x^*(s)$, $k \to \infty$, в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ с определенной скоростью, если S, R (и $A \equiv S+R$) рассматривать как линейные операторы из пространства $X = L_2$ в пространство $Y = W_2^1$; возможен и другой способ выбора пространств, напр., можно положить $X = H^\beta$, $Y = H^{1+\beta} \equiv H_\beta^1$ ($0 < \beta < 1$). К уравнению (0.1) могут быть применены также другие, в частности, т.н. универсальные итерационные методы (см., напр., [60]).

Теперь в итерационном процессе (1.173) начальное приближение выберем специальным образом, а именно, положим $x^\circ = x_n^*$, где x_n^* –

приближенное решение с.и.у. (0.1), построенное одним из рассмотренных выше прямых методов. Следуя нашей работе [16] (п.2 §2), первое приближение x_n^1 определим по формуле

$$Sx_n^1 + Rx_n^* = y \qquad (x_n^* = x^\circ; \quad S, R \,:\, L_2 \longrightarrow W_2^1). \tag{1.173$'$}$$

Отсюда и из точного уравнения находим $S(x^* - x_n^1) = -R(x^* - x_n^*)$, а тогда в силу леммы 1.2 имеем

$$x^* - x_n^1 = -S^{-1}R(x^* - x_n^*), \quad x_n^* = x^\circ. \tag{1.173$''$}$$

Как показано в работе [16], погрешность первого приближения x_n^1 не больше (а в случае метода квадратур и меньше) погрешности нулевого приближения $x^\circ = x_n^*$, т.е. погрешности прямого метода. Например, пусть ядро $h(s, \sigma)$ таково, что оператор $S^{-1}R$ является ограниченным из L_2 в $C_{2\pi}$. Тогда из (1.173$''$) получаем

$$\|x^* - x_n^1\|_\infty \leqslant \|S^{-1}R\|_{2\to\infty} \cdot \|x^* - x_n^*\|_2. \tag{1.173$'''$}$$

В этом случае прямой метод равномерно может и не сходиться, хоть и сходится в среднем, а первое приближение x_n^1 сходится равномерно к точному решению с.и.у. (0.1). Более того, x_n^1 может сходиться к x^* и в пространствах гладких функций, если оператор $S^{-1}R$ обладает определенным сглаживающим свойством.

Далее, уравнения, соответствующие рассмотренным выше приближенным методам, запишем в абстрактном виде

$$A_n x_n \equiv Sx_n + R_n x_n = y_n \quad (x_n \in X_n \subset X, y_n \in Y_n \subset Y). \tag{1.174}$$

Как уже указывалось выше, уравнение (1.174) эквивалентно СЛАУ относительно коэффициентов разложения элемента x_n по элементам базиса подпространства $X_n \subset X$. Это уравнение, а следовательно, и соответствующая ему СЛАУ, как было доказано выше, однозначно разрешимы при всех $n \geqslant n_0$, где номер n_0 определяется свойствами функции $h(s, \sigma)$; в частности, имеем: а) $n_0 = 0$ для м.н.к. в общем случае; б) $n_0 = 0$ для всех методов, если $h(s, \sigma) \equiv 0$; в) $n_0 = 0$ для всех проекционных методов, если $h(s, \sigma)$ не зависит от переменной s; г) $n_0 = 0$ для всех проекционных методов, если $P_n^2 = P_n$ и $h(s, \sigma) = h(s - \sigma)$ (см. также §2).

Из доказанных выше теорем в общем случае прослеживается следующая интересная закономерность: чем лучше структурные свойства функции $h(s, \sigma)$, то тем меньше номер n_0. Однако в общем случае, кроме м.н.к., номер n_0 в ряде случаев может оказаться достаточно большим, а тогда решение с.и.у. (0.1) прямыми и проекционными методами может представить значительные практические трудности. В этом случае уравнение (1.174) можно решать итерационным методом по схеме

$$Sx_n^{k+1} + R_n x_n^k = y_n, \quad x_n^\circ = S^{-1} y_n, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{1.175}$$

Тогда, следуя §7 гл. II [25], легко доказывается, что последовательность элементов $x_n^k(s)$, определяемых из (1.175), сходится в среднем к точному решению $x^*(s)$ с.и.у. (0.1) в смысле

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} x_n^k = \lim_{n\to\infty} x_n^* = x^*,$$

причем с определенной скоростью сходимости. Ясно, что (1.175) есть простейшая схема аппроксимативно-итерационного метода решения с.и.у. (0.1). Пользуясь результатами §7 гл. II [25] и [60] и вышеприведенными результатами, с.и.у. (0.1) можно решать также более общими методами (в частности, методом уточняющих итераций), основанными на сочетании как прямых и проекционных, так и универсальных итерационных методов.

1.13. Сходимость в пространстве гёльдеровых функций. Выше везде речь шла о сходимости в L_2, а в ряде случаев и в $C_{2\pi}$. Следует отметить, что результаты, аналогичные приведенным выше, можно получить также в пространстве L_p $(1 < p < \infty, \quad p \neq 2)$ и пространстве гёльдеровых функций $H^\beta (0 < \beta < 1)$. Для иллюстрации приведем лишь один результат для м.м.к.:

Теорема 1.17. *Пусть выполнены условия:* а) $y(s) \in W^{r+1}H^\alpha$ *и* $h(s,\sigma) \in W^{r+1}H^\alpha$ *(по каждой из переменных равномерно относительно другой из них), где* $r \in \mathbb{R}^+$, $0 < \alpha \leqslant 1$; б) *с.и.у.* (0.1) *однозначно разрешимо в пространстве* $X = H^\beta$ *при любой правой части из* $Y = X^1 = H^{1+\beta}$, *где* $0 < \beta < 1$. *Тогда при всех* $n \geqslant n_0$ *(* $n_0 = 0$ *при* $h(s,\sigma) \equiv 0$ *или* $h(s,\sigma) = h(s-\sigma)$*) таких, что*

$$q_n = d_{_0}' \, \|A^{-1}\| \, n^{-r-\alpha+\beta} \ln n < 1, \, r + \alpha > \beta, \quad A^{-1} \, : \, X^1 \longrightarrow X, \tag{1.176}$$

СЛАУ (1.78) *и* (1.79) *м.м.к. однозначно разрешимы. Приближенные решения* (1.77) *сходятся к точному решению* $x^*(s)$ *с.и.у.* (0.1) *в пространстве* H^β *со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_{_\beta} \leqslant d_{_1}' n^{-r-\alpha+\beta} \ln n, \quad r + \alpha > \beta, \tag{1.177}$$

где d_i' *– положительные постоянные, не зависящие от* n.

Следствие. *В условиях теоремы для любых k таких, что $0 \leqslant k < r + \alpha - \delta$ $(k+1 \in \mathbb{N})$, в пространстве $H^\delta (0 \leqslant \delta \leqslant 1)$ справедливы оценки*

$$\left\| \frac{d^k(x^* - x_n^*)}{ds^k} \right\|_\delta = O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha-k-\delta}}\right), \; r + \alpha > k + \delta, \; 0 \leqslant \delta \leqslant 1, \quad (1.178)$$

где через H° формально обозначено пространство $C_{2\pi}$.

Эта теорема доказывается с помощью теорем 1.1, 1.14 и соответствующих результатов автора по аппроксимации тригонометрическими полиномами в пространствах Гёльдера (см., напр., [12, 13, 15, 18, 20, 25, 26]). Аналогичные теоремы справедливы также для других рассмотренных выше прямых и проекционных методов.

1.14. Система слабосингулярных уравнений. В приложениях (см., напр., в [82, 84, 86]) нередко встречается система слабо с.и.у. вида

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\sin\frac{s-\sigma}{2}\right| x(\sigma)\,d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(s,\sigma)x(\sigma)\,d\sigma = y(s) + F, \quad \text{(а)}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\sigma)\,d\sigma = D, \quad \text{(б)}$$

где $h(s,\sigma), y(s)$ – известные функции, $x(\sigma)$ – искомая функция, F – искомый, а D – данный параметры. Эта система практически может быть решена теми же методами, что и с.и.у. (1.1). Для иллюстрации приведем следующий результат.

Приближенное решение системы (а) – (б) будем искать в виде вектор-функции $\vec{x}_n(s) = \{x_n(s); F_n\}$ с неизвестными компонентами $F_n \in \mathbb{R}$ и

$$x_n(s) = \frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} \gamma_k D_n(s - s_k) \in \mathbb{H}_n^T, \quad s_k = \frac{2k\pi}{2n+1}, \quad \text{(в)}$$

где γ_k – подлежащие определению параметры. Неизвестные коэффициенты $F_n, \gamma_0, \ldots, \gamma_{2n}$ будем определять из СЛАУ

$$\sum_{k=0}^{2n} a_k(s_j)\,\gamma_k + \frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} h(s_j, s_k)\,\gamma_k = y(s_j) + F_n, \quad \text{(г)}$$

$$\frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} \gamma_k = D, \qquad s_j = \frac{2j\pi}{2n+1}, \quad j = \overline{0, 2n}, \quad \text{(д)}$$

где функции $a_k(s)$ определяются из различных условий, напр., из условия, чтобы квадратурная формула

$$S(x;s) \approx \sum_{k=0}^{2n} a_k(s) x(s_k), \quad x \in C_{2\pi}, \tag{е}$$

имела наивысшую тригонометрическую степень точности (таким свойством обладают, напр., формулы, построенные в гл. 1 [69]).

Для вычислительной схемы (а) – (е) справедливы результаты, аналогичные полученным выше по м.м.к. для с.и.у. (0.1). В частности, справедлива следующая

Теорема 1.18. *Пусть выполнены условия:* 1) *функция* h *(по каждой из переменных в отдельности и равномерно относительно другой из них) и* $y \in W^{r+1}H^{\alpha}$ $(r \geqslant 0, 0 < \alpha \leqslant 1)$*;* 2) *точная система* (а) – (б) *имеет единственное решение* $\vec{x}^*(s) = \{x^*(s); F^*\} \in L_2 \otimes \mathbb{R}$ *при любой правой части* $\vec{y}(s) = \{y(s); D\} \in W_2^1 \otimes \mathbb{R}$*;* 3) *функции* $a_k(s)$ *определены по формуле* (1.79) *при* $\omega = 0$.

Тогда при всех $n \geqslant n_0$ ($n_0 = 0$ *при* $h(s,\sigma) = const$ *или при* $h(s,\sigma) = = h(s-\sigma)$) *СЛАУ* (г) – (е) *имеет единственное решение* $F_n^*, \gamma_0^*, \ldots, \gamma_{2n}^*$. *Приближенные решения* $\vec{x}_n{}^*(s) = \{x_n^*(s); F_n^*\}$, *где* $x_n^*(s) = x_n(s)$ *при* $\gamma_k = \gamma_k^*$, $k = \overline{0, 2n}$, *сходятся к точному решению системы* (а) – (б) *со скоростями*

$$\|\vec{x}^* - \vec{x}_n{}^*\| = \|x^* - x_n^*\|_2 + |F^* - F_n^*| = O\left(n^{-r-\alpha}\right), \tag{ж}$$

$$\|x^* - x_n^*\|_\infty = O\left(n^{-r-\alpha}\ln n\right), \quad r+\alpha > 0. \tag{з}$$

Доказательство. Сначала точную систему (а) – (б) запишем в виде одного операторного уравнения

$$\vec{K}\vec{x} \equiv \vec{S}\vec{x} + \vec{R}\vec{x} = \vec{y} \quad (\vec{x} \in \vec{X}, \vec{y} \in \vec{Y}), \tag{и}$$

где $\vec{X} = \{\vec{x}\}$ – пространство вектор-функций $\vec{x}(s) = \{x(s); F\}$ с компонентами $x(s) \in L_2$, $F \in \mathbb{R}$ и нормой $\|\vec{x}\| = \|x\|_2 + |F|$ $(\vec{x} \in \vec{X})$, а $\vec{Y} = \{\vec{y}\}$ – пространство вектор-функций $\vec{y}(s) = \{y(s); D\}$ с компонентами $y \in W_2^1$, $D \in \mathbb{R}$ и с нормой $\|\vec{y}\| = \|y\|_{1;2} + |D|\,(\vec{y} \in \vec{Y})$; смысл операторов $\vec{S}$ и $\vec{R}$ очевиден. Ясно, что в условиях теоремы $\vec{K}$ – ограниченный оператор из $\vec{X}$ на $\vec{Y}$, причем существует непрерывный обратный $\overline{K}^{-1} : \vec{Y} \longrightarrow \vec{X}$.

Обозначим через $\vec{X}_n = \{\vec{x_n}\} \subset \vec{X}$ подпространство вектор-функций $\vec{x}_n(s) = \{x_n(s); F_n\}$ с компонентами $x_n \in \mathbb{H}_n^T \subset L_2$, $F_n \in \mathbb{R}$ и с нормой пространства $\vec{X}$; через $\vec{Y}_n = \{\vec{y}_n\} \subset \vec{Y}$ обозначим подпространство вектор-функций $\vec{y}_n(s) = \{y_n(s); D\}$ с компонентами $y_n \in \mathbb{H}_n^T \subset W_2^1$, $D \in \mathbb{R}$ и с нормой пространства $\vec{Y}$. Тогда СЛАУ (в) – (е) эквивалентна одному операторному уравнению вида

$$\vec{K}_n \vec{x}_n \equiv \vec{S}\vec{x}_n + \vec{R}_n \vec{x}_n = \vec{y}_n \quad (\vec{x}_n \in \vec{X}_n, \vec{y}_n \in \vec{Y}_n), \tag{к}$$

где $\vec{K}_n$ – ограниченный оператор из $\vec{X}_n$ в $\vec{Y}_n$ при каждом n $(2n+1 \in \mathbb{N})$, а смысл операторов $\vec{R}_n$ очевиден.

Теперь для любого $\vec{x}_n \in \vec{X}_n$, как и при доказательстве теоремы 1.6, с помощью уравнений (и), (к) находим

$$\|\vec{K} - \vec{K}_n\|_{\vec{X}_n \to \vec{Y}} = O\left\{E_n^{Ts}(h'_s)_\infty + E_n^{T\sigma}(h'_\sigma)_\infty\right\},$$

$$\|\vec{y} - \vec{y}_n\|_{\vec{Y}} = \|y - y_n\|_Y = O\left\{E_n^T(y')_\infty\right\}.$$

В силу условия 1) теоремы из двух последних неравенств получаем

$$\|\vec{K} - \vec{K}_n\|_{\vec{X}_n \to \vec{Y}} = O\left(n^{-r-\alpha}\right), \; \|\vec{y} - \vec{y}_n\|_{\vec{Y}} = O\left(n^{-r-\alpha}\right), \; r + \alpha > 0.$$

Дальше доказательство завершается по аналогии с доказательством теорем 1.5 и 1.14.

§2. Уравнения с периодическими ядрами. Продолжение

В этом параграфе рассматривается приближенное решение частного случая с.и.у. (0.1), а именно, слабо с.и.у. вида

$$Bx \equiv -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\sin\frac{s-\sigma}{2}\right| x(\sigma)\,d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(s-\sigma)x(\sigma)\,d\sigma = y(s), \tag{2.1}$$

где искомая функция $x(s)$ ищется в пространстве $L_p[0, 2\pi]$, $1 < p < \infty$, а $h(s) \in W_1^1[0, 2\pi]$ и $y(s) \in W_p^1[0, 2\pi]$ – известные 2π-периодические функции, причем $h(s)$ является четной. В этих условиях B является ограниченным оператором из L_p в W_p^1, $1 < p < \infty$. Поэтому для с.и.у. (2.1) результаты §1 сохраняют силу. Однако в этом случае можно получить и другие результаты, которые для общего с.и.у. (0.1) не имеют места.

2.1. Структура обратного оператора. Наличие регулярного разностного ядра $h(s-\sigma)$ в (2.1) и лемма 1.2 позволяют определить явный вид обратного оператора $B^{-1} : W_p^1 \longrightarrow L_p \, (1 < p < \infty)$.

Лемма 2.1. *Если ядро $h(s)$ таково, что*

$$c_0(h) \neq -\ln 2, \quad 2\,|k|\,c_k(h) \neq -1, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{2.2}$$

то оператор $B : W_p^1 \longrightarrow L_p$ $(1 < p < \infty)$ *имеет обратный и*

$$B^{-1}(y;s) = \frac{c_0(y)}{c_0(h)+\ln 2} - 2\,i\sum_{|k|=1}^{\infty}\frac{c_k(y')\,\mathrm{sgn}\;k}{1+2\,|k|\,c_k(h)}\,e^{iks},\;\; y\in W_p^1. \quad (2.3)$$

Если существует постоянная $\lambda > 0$ *такая, что* [1)]

$$|c_0(h)+\ln 2| \geqslant 1/\lambda,\; |1+2|k|c_k(h)| \geqslant 2/\lambda, \quad k\neq 0, \qquad (2.4)$$

то при $p = 2$ *справедлива оценка*

$$\|B^{-1}\| \leqslant \lambda < \infty, \quad B^{-1} : W_2^1 \longrightarrow L_2. \qquad (2.5)$$

Доказательство. Разложим функции $x(s), y(s), h(s)$ и $g(s)$ в ряды Фурье:

$$x(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(x)e^{iks}, \quad y(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(y)e^{iks},$$
$$h(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(h)e^{iks},\; g(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(g)e^{iks}, \qquad (2.6)$$

где коэффициенты $c_k(g)$ определены в (1.12). Поскольку

$$Bx \equiv -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|\sin\frac{\sigma}{2}\right|\cdot x(s-\sigma)\,d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h(\sigma)\,x(s-\sigma)\,d\sigma\; = y(s), \qquad (2.7)$$

то, подставив (2.6) в (2.7), находим

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(x)c_k(g)e^{iks} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(x)c_k(h)e^{iks} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(y)e^{iks}. \qquad (2.8)$$

Отсюда с учетом (2.2) получаем $c_k(x) = c_k(y)/\{c_k(g)+c_k(h)\} \equiv c_k(x^*)$, $k = 0, \pm 1, \ldots$ Поскольку $c_k(g) = O\,(1/k)$, а $h(s) \in W_1^1$, то $c_k(g)+$ $+c_k(h) \sim c_k(g)$ и $|k|\,c_k(h) = o\,(1)$, $k\to\infty$; поэтому в силу соотношений (2.2) и (2.6) последовательно находим (2.3):

$$x(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(x)\,e^{iks} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{c_k(y)}{c_k(g)+c_k(h)}\,e^{iks} =$$

[1)]При $h(\sigma)\in W_1^1$ вторые из условий (2.2) и (2.4) эквивалентны условиям соответственно $b_k(h') \neq 1$ и $|1-b_k(h')| \geqslant 2/\lambda$, $k\in\mathbb{N}$, где $b_k(h')$ – синус-коэффициенты Фурье функции $h'(\sigma)$.

$$= \frac{c_0(y)}{c_0(g)+c_0(h)} + \sum_{|k|=1}^{\infty} \frac{c_k(y)\, e^{iks}}{c_k(g)+c_k(h)} =$$

$$= \frac{c_0(y)}{c_0(g)+\ln 2} - 2\, i \sum_{|k|=1}^{\infty} \frac{c_k(y')\,\mathrm{sgn}\ k}{1+2\,|k|\,c_k(h)}\, e^{iks} \equiv x^*(s).$$

Легко показать, что только что построенная функция $x^*(s)$ является решением с.и.у. (2.1); единственность решения доказывается методом от противного.

Из формулы (2.3) с помощью равенства Парсеваля и условий (2.4) для любого $y \in W_2^1$ находим

$$\|B^{-1}y\|_2^2 = \frac{|c_0(y)|^2}{|c_0(h)+\ln 2|^2} + 4 \sum_{|k|=1}^{\infty} \frac{|c_k(y')|^2}{|1+2\,|k|\,c_k(h)|^2} \leqslant$$

$$\leqslant \lambda^2 \{|c_0(y)|^2 + \sum_{|k|=1}^{\infty} |c_k(y')|^2\} \leqslant \lambda^2 \left\{\|y\|_2^2 + \|y'\|_2^2\right\} \leqslant \lambda^2 \|y\|_{1;2}^2.$$

Отсюда, в свою очередь, следует оценка (2.5).

Замечание 2.1. В условиях (2.4) формула (2.3) остается в силе и в случае $B : H^\beta \longrightarrow H_\beta^1$ $(0 < \beta < 1)$. Отметим также, что в частном случае лемма 2.1 доказана в §8 гл.2 [51].

Лемма 2.2. *Если $h(s) \in L_2$, то оператор $B : L_2 \longrightarrow L_2$ является симметричным и вполне непрерывным. Если $c_k(g)+c_k(h) > 0$ $(k = 0, \pm 1, \ldots)$, то оператор B положителен, а однородное уравнение $Bx = 0$ имеет в L_2 лишь тривиальное решение.*

Следствие. *В условиях леммы оператор B на конечномерном подпространстве $X_n \subset L_2[0, 2\pi]$ положительно определен.*

Доказательство. Симметричность и полная непрерывность оператора B очевидны.Из (2.6) и (2.8) для любого $x \in L_2$ находим

$$(Bx, x)_2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{c_k(g)+c_k(h)\}|c_k(x)|^2, \quad x \in L_2. \tag{2.9}$$

Из (2.9) следует положительность оператора B в зависимости от свойств функций $g(s)$ и $h(s)$. В силу (2.9) уравнение $Bx = 0$ имеет в L_2 лишь тривиальное решение.

Докажем следствие. Оператор B из (2.1) на конечномерном подпространстве $X_n \subset L_2$ определяется квадратной симметричной матрицей порядка $N = \dim X_n$. При $X_n = \mathbb{H}_n^T$ эта матрица является особенно простой. Действительно, в этом случае в силу (2.7) и (2.8) имеем

$$x_n(s) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{iks} \in \mathbb{H}_n^T, \quad Bx_n = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k \{c_k(g) + c_k(h)\} e^{iks} \in \mathbb{H}_n^T, \tag{2.10}$$

и указанная матрица является диагональной с элементами $c_k(g) + c_k(h)$, $-n \leqslant k \leqslant n$, где $c_k(g)$ определены в (2.12), а $c_k(h)$ – вещественные числа. Поскольку симметричная и положительная матрица является положительно определенной, то из сказанного следует утверждение следствия. В частности, если $h(s) \in W_1^1$, то из формул (2.9) и (2.10) следует, что

$$\|B^{-1}\|_2 = O\,(n)\,, \quad B^{-1} : X_n \longrightarrow X_n, \quad X_n = \mathbb{H}_n^T \subset L_2.$$

2.2. Полиномиальные проекционные методы. Приближенное решение с.и.у. (2.1) будем искать в виде полинома

$$x_n(s) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k \, e^{iks}, \quad \alpha_{-k} = \overline{\alpha}_k, \tag{2.11}$$

который определим как решение операторного уравнения

$$B_n x_n \equiv P_n B x_n = P_n y \quad (x_n \in X_n,\, P_n y \in Y_n), \tag{2.12}$$

где $X_n = \mathbb{H}_n^T \subset L_2$ и $Y_n = \mathbb{H}_n^T \subset L_2$, а $P_n : L_2 \longrightarrow \mathbb{H}_n^T$ – аддитивный и однородный проекционный оператор.

Отметим, что уравнение (2.12) эквивалентно СЛАУ порядка $2n{+}1$ относительно коэффициентов полинома (2.11). В силу соотношений (2.10) – (2.12) и $P_n^2 = P_n$ имеем $B_n x_n \equiv P_n B x_n = B x_n$ для любого $x_n \in X_n$, и поэтому матрица упомянутой системы является исключительно простой, а именно, является диагональной с элементами $c_k(g) + c_k(h)$, $k = \overline{-n, n}$. Этот факт делает рассматриваемый приближенный метод весьма удобным для практических применений.

Теорема 2.1. *Если $h(s) \in W_2^1$, а с.и.у.* (2.1) *имеет единственное решение $x^* \in L_2$ при любой $y \in W_2^1$ (напр., в условиях леммы* 2.1*), то при любых $n = 0, 1, \ldots$ приближенное уравнение* (2.12) *также имеет единственное решение*

$$x_n^*(s) = \frac{c_0(P_n y)}{c_0(h) + \ln 2} - 2\,i \sum_{|k|=1}^{n} \frac{c_k((P_n y)')\,\mathrm{sgn}\,k}{1 + 2\,|k|\,c_k(h)}\, e^{iks}. \tag{2.13}$$

Если $P_n y \to y$ в W_2^1, то $x_n^* \to x^*$ в L_2 и погрешность приближенного решения может быть оценена неравенством

$$\|x^* - x_n^*\|_2 \leqslant \|B^{-1}\| \cdot \|y - P_n y\|_{1;2}, \quad B : L_2 \longrightarrow W_2^1. \tag{2.14}$$

В частности, в условиях леммы 2.1 *справедлива оценка*

$$\|x^* - x_n^*\|_2 \leqslant \lambda \|y - P_n y\|_{1;2}, \quad B : L_2 \longrightarrow W_2^1, \tag{2.14$'$}$$

где λ *определено в* (2.4).

Следствие. *Если $P_n = \Phi_n$ – оператор Фурье порядка n, то в условиях леммы* 2.1 *для погрешности приближенного решения справедливы соотношения*

$$x^*(s) - x_n^*(s) = -2\,i \sum_{|k|=n+1}^{\infty} \frac{c_k(y')\operatorname{sgn} k}{1 + 2\,|k|\,c_k(h)}\, e^{iks}, \tag{2.15}$$

$$\|x^* - x_n^*\|_2 \leqslant 2\,E_n^T(y')_2 \,/ \min_{k \geqslant n+1} |1 + 2\,k\,c_k(h)|. \tag{2.16}$$

Доказательство. В условиях теоремы интегральный оператор $V : L_2 \longrightarrow W_2^1$, порождаемый разностным ядром $h(s-\sigma)$, вполне непрерывен, а оператор $B : L_2 \longrightarrow W_2^1$ линейно обратим. Как уже отмечалось, здесь приближенное уравнение (2.12) принимает вид

$$B_n x_n \equiv B x_n = P_n y \quad (x_n \in X_n,\ P_n y \in Y_n). \tag{2.12$'$}$$

Другими словами, для с.и.у. (2.1) оператор B_n приближенного уравнения рассматриваемого проекционного метода совпадает с сужением исходного оператора B на $X_n \subset X$. Поэтому для всех $n = 0, 1, \ldots$ существует приближенное решение $x_n^* = B_n^{-1} P_n y = B^{-1} P_n y$ и в силу (2.3) справедливы представления (2.13) и $x^* - x_n^* = B^{-1}(y - P_n y)$. Отсюда и следуют требуемые утверждения, в том числе оценки (2.14) и (2.14$'$).

Если же $P_n = \Phi_n$, то $c_k(P_n \varphi) = c_k(\varphi)$ (при $|k| = \overline{0, n}$) для любой $\varphi \in L_2$ и $c_k((P_n y)') = c_k(P_n(y')) = c_k(y')$ (при $|k| = \overline{1, n}$), $c_k((P_n y)') = 0$ (при $|k| \geqslant n+1$) для любой $y \in W_2^1$. Отсюда и из (2.3) и (2.13) получаем соотношение (2.15), а из него с помощью равенства Парсеваля и свойств наилучших среднеквадратических приближений выводится оценка (2.16).

Теорему 2.1 несколько дополняет следующая

Теорема 2.2. *Пусть с.и.у.* (2.1) *имеет решение $x^* \in L_2$ при данной правой части $y \in L_2$, а ядро $h(s)$ таково, что $c_k(g) + c_k(h) > 0$,*

($k = 0, \pm 1, \ldots$). *Тогда приближенное уравнение* (2.12) *имеет единственное решение* $x_n^* \in \mathbb{H}_n^T$ *при любой правой части* $P_n y \in \mathbb{H}_n^T$. *Если* $P_n y \to y$, $n \to \infty$, *в* L_2, *то невязка* $r_n \equiv y - Bx_n^* \to 0$, $n \to \infty$, *и*

$$\|r_n\|_2 \leqslant \|y - P_n y\|_2. \tag{2.17}$$

Следствие. *Если* y *и* $P_n y$ *таковы, что*

$$\|y - P_n y\|_2 = O\left(n^{-r-\alpha-1}\right), \quad r \geqslant 0,\ 0 < \alpha \leqslant 1, \tag{2.18}$$

то приближенные решения $x_n^*(s)$ *сходятся к точному решению* $x^*(s)$ *в среднем со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O\left(n^{-r-\alpha}\right), \quad r + \alpha > 0. \tag{2.19}$$

Если, кроме того, y *и* $P_n y$ *таковы, что*

$$\|y - P_n y\|_\infty = O\left(n^{-r-\alpha-1}\ln n\right), \quad r \geqslant 0,\ 0 < \alpha \leqslant 1, \tag{2.20}$$

то при $h(s) \in W_2^1$ *приближенные решения сходятся равномерно и*

$$\|x^* - x_n^*\|_\infty = O\left(n^{-r-\alpha}\ln n\right), \quad r + \alpha > 0. \tag{2.21}$$

Доказательство. В силу леммы 2.2 оператор B является симметричным и положительным. Поскольку $B_n = P_n B = B$ на X_n , то в силу следствия леммы 2.2 оператор B_n является положительно определенным. Поэтому приближенное уравнение (2.12) однозначно разрешимо при любой правой части. Тогда для уравнений (2.1) и (2.12) справедливы тождества $r_n \equiv y - Bx_n^* = B(x^* - x_n^*) = y - P_n y$. Отсюда видно, что $r_n \to 0$, $n \to \infty$, в L_2 со скоростью (2.17).

Пусть выполнено условие (2.18). Тогда из обратных теорем (см., напр., в [48, 75]) конструктивной теории функций в L_2 следует, что, по крайней мере, $y \in W_2^1$. Поэтому B можно рассматривать как непрерывно обратимый оператор из L_2 в W_2^1. А тогда

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = \|B^{-1} r_n\|_2 \leqslant \|B^{-1}\| \cdot \|y - P_n y\|_{1;2},\ B^{-1} : W_2^1 \longrightarrow L_2. \tag{2.22}$$

В силу (2.22) и (2.18) для справедливости (2.19) достаточно показать, что

$$\|(y - P_n y)'\|_2 = O\left(n^{-r-\alpha}\right). \tag{2.23}$$

Как и в §2, разность $y - P_n y$ представим в виде

$$y - P_n y = \sum_{k=1}^{\infty} P_{2^k n}\, y - P_{2^{k-1} n}\, y \equiv \sum_{k=1}^{\infty} Q_{kn}(s). \tag{2.24}$$

Ясно, что $Q_{kn} \in \mathbb{H}^T_{2^k n}$ и в силу (2.18)

$$\|Q_{kn}\|_2 \leqslant \|y - P_{2^k n} y\|_2 + \|y - P_{2^{k-1} n} y\|_2 = O\left\{(2^{k-1} n)^{-r-\alpha-1}\right\}. \quad (2.25)$$

Используя неравенство Бернштейна (1.73), из (2.24) и (2.25) последовательно находим требуемую оценку:

$$\|y'(s) - (P_n y)'(s)\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|Q'_{kn}(s)\|_2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} 2^k n \|Q_{kn}\|_2 =$$

$$= O\left\{\sum_{k=1}^{\infty} 2^k n \cdot (2^{k-1} n)^{-r-\alpha-1}\right\} = O\left(n^{-r-\alpha}\right).$$

Пусть теперь выполнено условие (2.20). Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что $\|y - P_n y\|_\infty = O\left(n^{-r-\alpha-1+\varepsilon}\right)$, где $0 < \alpha - \varepsilon < 1$. Отсюда и из обратных теорем теории приближений (см., напр., [48, 75]) в $C_{2\pi}$ следует, что функция $y(s) \in W^{r+1} H^{\alpha-\varepsilon}$. Поскольку

$$Bx^* \equiv Sx^* + Vx^* \equiv y, \quad Bx^*_n \equiv Sx^*_n + Vx^*_n \equiv P_n y,$$

то

$$S(x^* - x^*_n) = (y - P_n y) - V(x^* - x^*_n) \equiv b_n(s). \quad (2.26)$$

Нетрудно показать, что функция $b_n \in W^1_2$ равномерно относительно n. Поэтому, решая уравнение (2.26) относительно $x^* - x^*_n$, с помощью леммы 1.2 находим

$$x^*(s) - x^*_n(s) = -2\, I\left(\frac{db_n(\sigma)}{d\sigma}; s\right) + \frac{1}{2\pi \ln 2} \int_0^{2\pi} b_n(\sigma)\, d\sigma. \quad (2.27)$$

Из (2.19) и (2.26) следует, что

$$\left|\frac{1}{2\pi \ln 2} \int_0^{2\pi} b_n(\sigma)\, d\sigma\right| = O\left\{\|S(x^* - x^*_n)\|_2\right\} = O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right). \quad (2.28)$$

Из (2.26), (2.27) находим

$$\|I(b'_{n\sigma}; s)\|_\infty \leqslant \|I(y - P_n y)'_\sigma\|_\infty +$$

$$+ \|I[V(x^* - x^*_n)]'_\sigma\|_\infty = \|S_1\|_\infty + \|S_2\|_\infty. \quad (2.29)$$

Для $S_1(s)$ с помощью (1.165), (1.166) и (2.18), (2.20), как и при доказательстве леммы 1.6, последовательно находим

$$\|S_1\|_\infty \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|(IP_{2^k n} y - IP_{2^{k-1} n} y)'_s\|_\infty \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} 2^k n \left(\|y - P_{2^k n} y\|_\infty + \|y - P_{2^{k-1} n} y\|_\infty \right) =$$

$$= O\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} 2^k n \cdot \ln(2^k n) \cdot (2^{k-1} n)^{r-\alpha-1} \right\} = O\left(n^{-r-\alpha} \ln n \right). \qquad (2.30)$$

Для $S_2(s)$ с учетом определения операторов I, R, ρ находим

$$S_2(s) = I[V(x^* - x_n^*)]' = I[\rho h(x^* - x_n^*)]' = I[\rho h'(x^* - x_n^*)] =$$

$$= \rho\varphi(x^* - x_n^*), \quad \varphi(s - \sigma) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h'(t - \sigma) \operatorname{ctg} \frac{t - s}{2} \, dt.$$

Поскольку $h'(t) \in L_2[0, 2\pi]$, то в силу известных результатов функция $\varphi(s) \in L_2[0, 2\pi]$. Тогда в силу свойств сверток имеем $S_2(s) \in C_{2\pi}$, откуда и из (2.19) находим

$$\|S_2(s)\|_\infty = \|\rho\varphi(x^* - x_n^*)\|_\infty \leqslant \|\varphi\|_2 \|x^* - x_n^*\|_2 = O\left(n^{-r-\alpha}\right). \qquad (2.31)$$

Из соотношений (2.27) – (2.31) следует требуемая оценка (2.21).

Теорема 2.2 доказана полностью.

Завершая этот параграф, отметим, что теоремы 2.1 и 2.2 являются достаточно общими в том смысле, что принимая в них в качестве P_n различные полиномиальные операторы, мы получаем сходимость различных полиномиальных проекционных методов решения с.и.у. (2.1); в частности, теоремы 2.1 и 2.2 обеспечивают сходимость таких известных проекционных методов, как методы коллокации, Галеркина и подобластей.

§3. Уравнения с логарифмическими ядрами. Непериодический случай

3.1. Постановка задачи и вспомогательные результаты. В этом параграфе рассматриваются вопросы приближенного решения слабо с.и.у. I рода вида

$$\overline{A}\varphi \equiv -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{+1} \ln|\tau - t| \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} g(t,\tau) \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = f(t), \quad |t| \leqslant 1, \qquad (3.1)$$

где $g(t,\tau)$ и $f(t)$ – известные непрерывные функции в областях соответственно $[-1,1]^2$ и $[-1,1]$, а $\varphi(\tau)$ – искомая функция. От правой части $f(t)$ и регулярного ядра $g(t,\tau)$ будем требовать также, чтобы они удовлетворяли условиям

$$\int\limits_{-1}^{+1} |f'(t)|^2 \sqrt{1-t^2}\, dt < \infty, \quad \int\limits_{-1}^{+1}\int\limits_{-1}^{+1} \left|\frac{\partial g(t,\tau)}{\partial t}\right|^2 \sqrt{\frac{1-t^2}{1-\tau^2}}\; dt d\tau < \infty. \quad (3.2)$$

Решение с.и.у. (3.1) будем искать в пространстве $L_{2p}[-1,1]$ квадратично суммируемых на $[-1,1]$ с весом $p(t) = (1-t^2)^{-1/2}$ функций с нормой

$$\|\varphi\|_{L_{2p}} = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{+1} \frac{|\varphi(t)|^2 dt}{\sqrt{1-t^2}}\right)^{1/2} \equiv \|\varphi\|_{2p} \quad (\varphi \in L_{2p}[-1,1]). \qquad (3.3)$$

Обозначим через $W^1_{2q}[-1,1]$ пространство абсолютно непрерывных на $[-1,1]$ функций $f(t)$, у которых производные квадратично суммируемы на $[-1,1]$ с весом $q(t) = 1/p(t) = (1-t^2)^{1/2}$; норму в W^1_{2q} введем соотношением

$$\|f\|_{W^1_{2q}} = \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{+1} \frac{|f(t)|^2 dt}{\sqrt{1-t^2}}\right)^{1/2} + \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{+1} |f'(t)|^2 \sqrt{1-t^2}\, dt\right)^{1/2} \equiv$$

$$\equiv \|f\|_{L_{2p}} + \|f'\|_{L_{2q}} \equiv \|f\|_{1;2q} \quad (f \in W^1_{2q}[-1,1]). \qquad (3.4)$$

Для дальнейшего изложения существенное значение имеют следующие **утверждения I – IV** .

Утверждение I . *Уравнение* (3.1) *сводится к частному случаю исследованного в* §1 *с.и.у.* (0.1) *при*

$$x(\sigma) = \varphi(\cos\sigma),\ y(s) = f(\cos s),\ h(s,\sigma) = g(\cos s, \cos\sigma) - \frac{\ln 2}{2}. \quad (3.5)$$

Действительно, положим в (3.1)

$$t = \cos s,\ \tau = \cos\sigma, \quad -1 \leqslant t,\tau \leqslant 1,\ 0 \leqslant s,\sigma \leqslant \pi. \qquad (3.6)$$

Тогда имеем

$$\int\limits_{-1}^{+1} \ln|\tau - t| \frac{\varphi(\tau)\, d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = \int\limits_{0}^{\pi} \ln|\cos s - \cos\sigma| \cdot \varphi(\cos\sigma)\, d\sigma =$$

$$= \ln 2 \cdot \int\limits_0^\pi x(\sigma)\, d\sigma + \int\limits_0^\pi \ln\left|\sin\frac{s-\sigma}{2}\right| \cdot x(\sigma)\, d\sigma + \int\limits_0^\pi \ln\left|\sin\frac{s+\sigma}{2}\right| \cdot x(\sigma)\, d\sigma.$$

Заменяя в последнем интеграле σ на $-\sigma$ и используя четность функции $x(\sigma)$ и 2π-периодичность подынтегральных функций, находим

$$\overline{S}\varphi \equiv -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{+1} \ln|\tau - t|\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = Sx - \frac{\ln 2}{2}\rho x, \tag{3.7}$$

где операторы S и ρ определены в §1. С другой стороны, в силу (3.5) для регулярного интеграла из (3.1) имеем

$$\overline{R}\varphi \equiv \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{+1} \frac{g(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} g(\cos s, \cos\sigma)x(\sigma)\,d\sigma \equiv \rho(gx). \tag{3.8}$$

Из соотношений (3.6) – (3.8) следует требуемое утверждение.

Утверждение II. *В силу формул* (3.5), (3.6) *имеем*

$$\|\varphi\|_{L_{2p}[-1,1]} = \|x\|_{L_2[0,2\pi]}, \quad \|f\|_{W^1_{2q}[-1,1]} = \|y\|_{W^1_2[0,2\pi]}, \tag{3.9}$$

т.е. пространства $L_{2p}[-1,1]$ *и* $W^1_{2q}[-1,1]$ *с нормами* (3.3), (3.4) *изоморфны и изометричны пространствам четных* 2π *– периодических функций* $L_2[0,2\pi]$ *и* $W^1_2[0,2\pi]$ *соответственно с нормами, введенными в* §1.

Утверждение III. *В силу утверждений* I *и* II *и соответствующих результатов раздела* 1.1 *оператор* $\overline{A} = \overline{S} + \overline{R}$ *можно рассматривать как линейный оператор из пространства* $L_{2p}[-1,1]$ *в пространство* W^1_{2q}*. При этом ясно, что оператор* $\overline{R}$ *является вполне непрерывным как оператор из* L_{2p} *в* W^1_{2q}*, а слабо сингулярный оператор* $\overline{S}$ *является лишь непрерывным из* L_{2p} *в* W^1_{2q}*. Кроме того, легко показать, что оператор* $\overline{S}\ :\ L_{2p} \longrightarrow W^1_{2q}$ *линейно обратим и для обратного оператора* $\overline{S}^{-1}\ :\ W^1_{2q} \longrightarrow L_{2p}$ *справедлива оценка*

$$\|\overline{S}^{-1}\| = 2,\ \overline{S}^{-1}\ :\ W^1_{2q} \longrightarrow L_{2p} \quad (\,p = 1/\sqrt{1-t^2},\ q = \sqrt{1-t^2}\ ). \tag{3.10}$$

Оператор $\overline{S}$ *обладает также многими другими свойствами оператора* S*, введенного и исследованного в* §1.

Таким образом, с.и.у. (3.1) можно рассматривать как операторное уравнение, приводящееся к уравнению второго рода. Поэтому, если уравнение (3.1) однозначно разрешимо в $L_{2p}\,[-1,1]$ при любой правой части из $W^1_{2q}[-1,1]$, то в силу известных результатов по теории операторных уравнений в B-пространствах (см., напр., [55]) существует ограниченный обратный $\overline{A}^{-1}\ :\ W^1_{2q} \longrightarrow L_{2p}$ Отсюда, в частности, следует, что если решение уравнения (3.1) единственно в пространстве $L_{2p}[-1,1]$, то оно обязательно разрешимо в этом пространстве при любой правой части из $W^1_{2q}[-1,1]$.

Утверждение IV. *Ниже приближенное решение с.и.у.* (3.1) *будем искать в виде многочлена*

$$\varphi_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i T_i(t) \equiv \sum_{i=0}^{n} \beta_i t^i, \quad T_i(t) = \cos i \arccos t, \tag{3.11}$$

коэффициенты которого будем определять исходя из минимальности невязки $r_n \equiv f - \overline{A}\varphi_n$ *в том или ином смысле. Ясно, что в силу* (3.5), (3.6) *полином* $\varphi_n(t) = \varphi_n(\cos s) \equiv x_n(s)$, *являющийся частным случаем полинома* (1.21), *будет приближенным решением частного случая с.и.у.* (0.1), *эквивалентного уравнению* (3.1).

Утверждения I – IV позволяют перенести на с.и.у. (3.1) все результаты, полученные в §1 по приближенным методам решения с.и.у. (0.1). Поэтому дальнейшее изложение будем вести с учетом этого факта, ограничиваясь в основном лишь формулировками ряда результатов.

3.2. Метод наименьших квадратов. Приближенное решение с.и.у. (3.1) будем искать в виде многочлена (3.11), коэффициенты которого будем определять по м.н.к. из СЛАУ

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i (\overline{A}T_i, \overline{A}T_j)_F = (f, \overline{A}T_j)_F, \quad j = \overline{0,n}, \tag{3.12}$$

где

$$\overline{A}T_i = \gamma_i T_i(t) + \overline{R}(T_i;t), \tag{3.13}$$

$$\gamma_i = \left\{ \frac{\ln 2}{2} \quad \textit{при} \;\; i=0; \quad \frac{1}{2\,i} \quad \textit{при} \;\; i = 1, 2\ldots \right\}, \tag{3.14}$$

а $(u,v)_F$ – скалярное произведение в пространстве $F = W^1_{2q}$:

$$(u,v)_F = (u,v)_{2p} + (u',v')_{2q} \quad (u,v \in W^1_{2q}[-1,1]). \tag{3.15}$$

Теорема 3.1. *Если с.и.у.* (3.1) *имеет единственное решение* $\varphi \in L_{2p}$ *при любой правой части* $f \in W^1_{2q}$, *то при любых* $n = 0, 1, \ldots$ *СЛАУ* (3.12) – (3.14) *имеет единственное решение* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. *Приближенные решения* (3.1) *сходятся в* L_{2p} *к точному решению* $\varphi(t)$ *с.и.у.* (3.1) *со скоростью*

$$\|\varphi - \varphi_n\|_{2p} \leqslant \eta(\overline{A})\, E_n(\varphi)_{2p}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{3.16}$$

где $\eta(\overline{A})$ – *число обусловленности оператора* $\overline{A}\ :\ L_{2p} \longrightarrow W^1_{2q}$, *а* $E_n(\varphi)_{2p}$ – *наилучшее приближение функции* $\varphi(t)$ *алгебраическими многочленами степени не выше* n *в пространстве* $L_{2p}[-1,1]$.

Теорему 3.1 несколько дополняет следующая

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия:* а) $f(t) \in L_{2p}[-1,1]$ *и* $g(t,\tau) \in L_{2\rho}[-1,1]^2$ *с* $\rho(t,\tau) = p(t)p(\tau)$; б) *с.и.у.* (3.1) *имеет решение* $\varphi(t) \in L_{2p}[-1,1]$ *при данной правой части* $f(t) \in L_{2p}[-1,1]$; в) *уравнение* $\overline{A}\varphi = 0$ *имеет в* $L_{2p}[-1,1]$ *лишь тривиальное решение. Тогда СЛАУ* (3.12) – (3.14) *при* $F = L_{2p}$ *имеет единственное решение* $\widetilde{\alpha}_0,\ \widetilde{\alpha}_1,\ \ldots,\ \widetilde{\alpha}_n$. *Приближенные решения*

$$\widetilde{\varphi}_n(t) = \sum_{i=0}^{n} \widetilde{\alpha}_i\, T_i(t) \tag{3.17}$$

сходятся в том смысле, что невязка $r_n \equiv f - \overline{A}\,\widetilde{\varphi}_n \to 0$ *при* $n \to \infty$ *в пространстве* $L_{2p}[-1,1]$ *со скоростью*

$$\|r_n\|_{2p} \leqslant \|\overline{A}\| \cdot E_n(\varphi)_{2p}, \quad \overline{A}\ :\ L_{2p} \longrightarrow L_{2p}. \tag{3.18}$$

3.3. Метод ортогональных многочленов. Пусть коэффициенты многочлена (3.11) определяются из условий

$$(r_n, T_j)_{2p} = 0, \quad j = \overline{0,n}, \quad r_n \equiv f - \overline{A}\,\varphi_n. \tag{3.19}$$

Тогда в силу (3.13), (3.14) получаем СЛАУ

$$\alpha_j\gamma_j + \sum_{i=0}^{n} a_{ji}\alpha_i = y_j,\ \ j = \overline{0,n}, \tag{3.20}$$

где постоянные γ_i определены в (3.14), а

$$y_j = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{y(t)T_j(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt, \quad a_{ji} = \frac{1}{\pi^2}\int_{-1}^{+1}\!\!\int_{-1}^{+1} \frac{g(t,\tau)T_j(t)T_i(\tau)\,dtd\tau}{\sqrt{(1-t^2)(1-\tau^2)}}. \tag{3.21}$$

Теорема 3.3. *Пусть с.и.у.* (3.1) *однозначно разрешимо в пространстве* L_{2p} *при любой правой части* $f \in W^1_{2q}$. *Тогда при всех* n, *начиная с некоторого, СЛАУ* (3.19) – (3.21) *имеет единственное решение* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *и приближенные решения* (3.11) *сходятся к точному решению* $\varphi(t)$ *в* $L_{2p}[-1,1]$ *со скоростью*

$$\|\varphi - \varphi_n\|_{2p} = O\ \{E_n(\varphi)_{2p}\}. \tag{3.22}$$

Следствие. *Если выполнены условия* [1)]

$$f(t) \in W^{r+1}H^\alpha L_{2q},\ g(t,\tau) \in W^{r+1}H^\alpha L_{2q}\ (r \geqslant 0,\ 0 < \alpha \leqslant 1) \qquad (3.23)$$

по переменной t *равномерно относительно* τ, *то метод* (3.1), (3.11), (3.19) – (3.21) *сходится в пространстве* $L_{2p}[-1,1]$ *со скоростью*

$$\|\varphi - \varphi_n\|_{2p} = O\left(n^{-r-\alpha}\right), \quad r+\alpha > 0. \qquad (3.24)$$

Оценка (3.24) *остается в силе, если*

$$f(t) \in W^{r+1}H^\alpha \quad \text{и} \quad g(t,\tau) \in W^{r+1}H^\alpha \quad (r \geqslant 0, \quad 0 < \alpha \leqslant 1) \quad (3.25)$$

по переменной t *равномерно относительно* τ.

3.4. Метод коллокации. Пусть коэффициенты приближенного решения (3.11) определяются по м.к. из условий

$$r_n(t_j) = 0, \quad j = \overline{0,n},$$

где $\{t_j\}$ – некоторая система из $(n+1)$ – узлов на сегменте $[-1,1]$. Тогда в силу (3.13),(3.14) получаем СЛАУ

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i\{\gamma_i T_i(t_j) + \overline{R}(T_i;t_j)\} = f(t_j), \quad j = \overline{0,n}. \qquad (3.26)$$

Теорема 3.4. *Пусть выполнены условия:* 1) $f'(t) \in C[-1,1]$, *а ядро* $g(t,\tau)$ *таково, что оператор* $\overline{R} : L_{2p} \longrightarrow C^1[-1,1]$ *вполне непрерывен (в частности,* $g'_t(t,\tau) \in C[-1,1]^2$*);* 2) *узлы* t_j *определены по любой из формул*

$$\text{а)}\ t_j = \cos\frac{2j+1}{2n+2}\pi; \quad \text{б)}\ t_j = \cos\frac{j+1}{n+2}\pi; \quad \text{в)}\ t_j = \cos\frac{j}{n}\pi,\ j = \overline{0,n}; \qquad (3.27)$$

3) *с.и.у.* (3.1) *однозначно разрешимо в* $L_{2p}[-1,1]$ *при любой правой части из* $W^1_{2q}[-1,1]$. *Тогда при всех* n, *начиная с некоторого, СЛАУ* (3.26) *имеет единственное решение. Приближенные решения* (3.11) *сходятся в пространстве* $L_{2p}[-1,1]$ *к точному решению* $\varphi(t)$ *с.и.у.* (3.1) *со скоростью*

$$\|\varphi - \varphi_n\|_{2p} = O\left\{E_n(\varphi)_\infty\right\}, \qquad (3.28)$$

где $E_n(\varphi)_\infty$ *– наилучшее равномерное на* $[-1,1]$ *приближение функции* $\varphi(t)$ *алгебраическими многочленами степени не выше* n.

[1)] Заметим, что $W^{r+1}H^\alpha L_{2q} = \{\varphi \in C[-1,1] : \omega(\varphi^{(r+1)};\delta)_{2q} = O(\delta^\alpha),\ 0 < \delta \leqslant 2\}$, где $\omega(\psi;\delta)_{2q}$ – модуль непрерывности $\psi(t)$ в пространстве L_{2q}.

Следствие. *Если выполнены условия* (3.25), *то метод коллокации* (3.1), (3.11), (3.26), (3.27) *сходится со скоростью*

$$\|\varphi - \varphi_n\|_{2p} = O\left(n^{-r-\alpha}\right), \quad r+\alpha > 0. \tag{3.29}$$

Запишем СЛАУ (3.26) в несколько другом, но эквивалентном виде. Введем узлы Чебышева I рода

$$\tau_k = \cos\frac{2k+1}{2n+2}\pi, \ k = \overline{0,n}. \tag{3.30}$$

Тогда коэффициенты α_i многочлена (3.11) можно представить в виде

$$\alpha_i = \frac{2}{\pi}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{\varphi_n(t)T_j(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \frac{2}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n(\tau_k)T_i(\tau_k) =$$

$$= \frac{2}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n(\cos\frac{2k+1}{2n+2}\pi)\cos\frac{(2k+1)i\pi}{2n+2}, \quad i = \overline{0,n}. \tag{3.31}$$

В силу (3.31) соотношения (3.11) и (3.26) принимают вид

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^{n}\varphi_n(\tau_k)l_k(t), \tag{3.11$'$}$$

$$\sum_{k=0}^{n}x_n(\tau_k)\{\overline{S}(l_k;t_j) + \overline{R}(l_k;t_j)\} = f(t_j), \quad j = \overline{0,n}, \tag{3.26$'$}$$

где $l_k(t)$ – фундаментальные многочлены Лагранжа по узлам (3.30). Известно, что

$$l_k(t) = \prod_{\substack{l=0\\ l\neq k}}^{n}\frac{t-\tau_l}{\tau_k-\tau_l} = \frac{T_{n+1}(t)}{(t-\tau_k)T'_{n+1}(\tau_k)} =$$

$$= \frac{(-1)^{k+1}}{n+1}\cdot\frac{T_{n+1}(t)}{t-\tau_k}\cdot\sin\frac{2k+1}{2n+2}\pi =$$

$$= \frac{2}{n+1}\left\{\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n}T_m(t)T_m(\tau_k)\right\}, \quad k = \overline{0,n}, \tag{3.32}$$

Поэтому интегралы $\overline{S}(l_k;t_j)$ вычисляются точно. Действительно, с помощью (3.32) и (3.14) легко находим (см. также с.46 [69])

$$\overline{S}(l_k;t_j) = \frac{2}{n+1}\left\{\frac{1}{2}\cdot\overline{S}(1;t_j) + \sum_{m=1}^{n}T_m(\tau_k)\overline{S}(T_m;t_j)\right\} =$$

$$= \frac{1}{n+1}\left\{\frac{\ln 2}{2} + \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m}T_m(\tau_k)T_m(t_j)\right\}, \qquad (3.33)$$

где узлы τ_k и t_j определены в формулах соответственно (3.30) и (3.27). Ясно, что в силу (3.33) СЛАУ (3.26$'$) несколько конкретизируется.

3.5. Метод механических квадратур. В СЛАУ (3.26$'$) коэффициенты $\overline{R}(l_k; t_j)$ вычислим приближенно по квадратурной формуле Гаусса – Чебышева с узлами (3.30). Тогда в силу соотношений $l_k(\tau_l) = \delta_{kl}$, где δ_{kl} – символ Кронекера, имеем

$$\overline{R}(l_k; t_j) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{g(t_j,\tau)l_k(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}\,d\tau \approx \frac{1}{n+1}g(t_j,\tau_k),\ k=\overline{0,n},\ j=\overline{0,n}. \qquad (3.34)$$

Поэтому вместо (3.26$'$) получаем следующую СЛАУ относительно приближенных значений искомой функции в узлах (3.30):

$$\sum_{k=0}^{n}\varphi_n(\tau_k)\left\{\overline{S}(l_k;t_j) + \frac{1}{n+1}g(t_j,\tau_k)\right\} = f(t_j), \quad j=\overline{0,n}. \qquad (3.35)$$

Тогда в силу (3.33) имеем

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n(\tau_k)\left\{\frac{\ln 2}{2} + \sum_{m=1}^{n}\frac{T_m(\tau_k)T_m(t_j)}{m} + g(t_j,\tau_k)\right\} = f(t_j),\ j=\overline{0,n}, \qquad (3.36)$$

где узлы t_j и τ_k определены в (3.27) и (3.30).

Системы (3.35) и (3.36) представляют собой СЛАУ м.м.к. для с.и.у. (3.1). Для этого уравнения приведем еще одну СЛАУ метода квадратур. С этой целью в (3.26) коэффициенты $\overline{R}(T_i;t_j)$ вычислим по формуле Гаусса – Чебышева с узлами (3.30):

$$\overline{R}(T_i;t_j) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{g(t_j,\tau)T_i(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}\,d\tau \approx \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}g(t_j,\tau_k)T_i(\tau_k). \qquad (3.37)$$

Из (3.26) и (3.37) находим требуемую систему

$$\sum_{i=0}^{n}\alpha_i\left\{\gamma_i T_i(t_j) + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}g(t_j,\tau_k)T_i(\tau_k)\right\} = f(t_j), \quad j=\overline{0,n}, \qquad (3.38)$$

где $\alpha_i, \gamma_i, t_j, \tau_k$ определены в соотношениях соответственно (3.11), (3.14), (3.27), (3.30).

Следует отметить, что системы (3.36) и (3.38) эквивалентны в том смысле, что они разрешимы (или неразрешимы) одновременно. Кроме того, если $\{\varphi_n(\tau_k)\}_0^n$ – решение СЛАУ (3.36), то решение СЛАУ (3.38) можно определить по формуле (3.31); если же $\{\alpha_i\}_0^n$ – решение СЛАУ (3.38), то решение СЛАУ (3.36) можно определить по формуле

$$\varphi_n(\tau_k) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i T_i(\tau_k), \quad k = \overline{0, n}.$$

Такое же замечание справедливо относительно СЛАУ м.к. (3.26) и (3.26′).

Теорема 3.5. *Пусть с.и.у.* (3.1) *однозначно разрешимо в* $L_{2p}[-1,1]$ *при любой правой части из* $W^1_{2q}[-1,1]$. *Если* $f'(t) \in C[-1,1]$, $g'_t(t,\tau) \in C[-1,1]^2$, *то при всех* $n \geqslant n_0$ *(*n_0 *определяется свойствами функции* $g(t,\tau)$ *, в частности,* $n_0 = 0$ *при* $g(t,\tau) \equiv 0$ *) каждая из СЛАУ* (3.38) *и* (3.36) *однозначно разрешима. Приближенные решения, определяемые формулами соответственно* (3.11) *и* (3.11′), *сходятся к точному решению* $\varphi(t)$ *с.и.у.* (3.1) *в пространстве* $L_{2p}[-1,1]$ *со скоростью*

$$\|\varphi - \varphi_n\|_{2p} = O\left\{E_n(f')_\infty + E^t_n(g'_t)_\infty + E^\tau_n(g'_t)_\infty + E^\tau_n(g)_\infty\right\}, \qquad (3.39)$$

где $E^t_n(\psi)_\infty$ *(соответственно* $E^\tau_n(\psi)_\infty$*) – наилучшее равномерное приближение функции* $\psi(t,\tau) \in C[-1,1]^2$ *алгебраическими многочленами степени не выше* n *по переменной* t *(по* τ *) равномерно относительно* τ *(относительно* t *).*

Следствие. *Если* $f(t) \in W^{r+1}H^\alpha[-1,1]$ *и* $g(t,\tau) \in W^{r+1}H^\alpha[-1,1]$ *(по каждой из переменных в отдельности равномерно относительно другой из них), то м.м.к.* (3.1), (3.11), (3.11′), (3.36), (3.38) *сходится в пространстве* $L_{2p}[-1,1]$ *со скоростью*

$$\|\varphi - \varphi_n\|_{2p} = O\left(n^{-r-\alpha}\right), \quad r + \alpha > 0. \qquad (3.40)$$

Теоремы 3.4 и 3.5 могут быт ь доказаны также самостоятельно, т.е. независимо от результатов §1. Это можно осуществить с помощью теорем 7 и 14 гл. 1 [25] и следующих лемм.

Лемма 3.1. *Пусть* $\mathcal{L}_n\varphi = \mathcal{L}_n(\varphi, t)$ *– алгебраический интерполяционный многочлен Лагранжа для функции* $\varphi \in C[-1,1]$ *по любой из систем узлов* (3.27). *Тогда для любых* $n \in \mathbb{N}$ *справедливы соотношения*

$$\|\mathcal{L}_n\|_{L_{2p}\to L_{2p}} = \infty, \quad \|\mathcal{L}_n\|_{C\to L_{2p}} = 1,$$

$$\|\mathcal{L}_n\|_{W^1_{2q}\to W^1_{2q}} < \infty, \quad \|\mathcal{L}_n\|_{C^1\to W^1_{2q}} \leqslant const < \infty,$$

$$\|\varphi - \mathcal{L}_n\varphi\|_{1;2q} = \|\varphi - \mathcal{L}_n\varphi\|_{2p} + \| \frac{d}{dt}(\varphi - \mathcal{L}_n\varphi)\|_{2q} \leqslant$$

$$\leqslant 2\, E_n(\varphi)_\infty + (\pi + 1/\sqrt{2})\, E_{n-1}(\varphi')_\infty, \quad \varphi' \in C = C[-1,1].$$

Лемма 3.2. *Для любого алгебраического многочлена $Q_n(t)$ степени не выше n справедливо неравенство*

$$\|Q_n'(t)\|_{2q} \leqslant n\|Q_n(t)\|_{2p},\ p(t) = (1-t^2)^{-1/2},\ q(t) = (1-t^2)^{1/2}.$$

3.6. Еще три схемы метода квадратур. Для с.и.у. (3.1) приведем еще три СЛАУ м.м.к.:

$$-\frac{1}{2(n+1)}\sum_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}\varphi_n(\tau_k)\ln|\tau_k - \tau_j| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} g(\tau_j,\tau_k)\varphi_n(\tau_k) =$$

$$= f(\tau_j), \quad j = \overline{0,n}, \tag{3.41}$$

где узлы коллокации и квадратур совпадают и определены в (3.30);

$$-\frac{1}{2(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\varphi_n(\tau_k)\ln|\tau_k - t_j| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} g(t_j,\tau_k)\varphi_n(\tau_k) =$$

$$= f(t_j), \quad j = \overline{0,n}, \tag{3.42}$$

где узлы коллокации и квадратур определены соответственно в (3.27) и (3.30).

Системы (3.41) и (3.42) несколько обобщает следующая СЛАУ

$$-\frac{1}{2(n+1)}\sum_{k=0}^{n}{}'\varphi_n(\tau_k)\ln|\tau_k - t_j| + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} g(t_j,\tau_k)\varphi_n(\tau_k) =$$

$$= f(t_j), \quad j = \overline{0,n}, \tag{3.43}$$

где узлы коллокации могут и не совпадать с узлами квадратур τ_j, а штрих у знака суммы означает, что соответствующее слагаемое при $|\tau_k - t_j| < \delta$ опускается; здесь δ – некоторое положительное число, выбираемое в зависимости от точности вычислений.

Замечание 3.1. Системами (3.41) – (3.43) удобно пользоваться в случае, когда функции $f(t)$ и $g(t,\tau)$ обладают небольшой гладкостью.

При этом системы (3.42) и (3.43) при $\tau_k \neq t_j \quad (k, j = \overline{0, n})$ можно рассматривать также как СЛАУ м.д.в. для с.и.у. (3.1).

3.7. Метод подобластей. Пусть коэффициенты многочлена (3.11) определяются из условий

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} r_n(t)\,dt = 0,\ k = \overline{1, n+1}, \quad r_n(t) \equiv f - \overline{A}\varphi_n, \tag{3.44}$$

где t_k – некоторая система узлов из $[-1, 1]$. Эти условия эквивалентны СЛАУ

$$\sum_{i=0}^{n} \alpha_i(\gamma_i a_{ik} + b_{ik}) = f_k, \quad k = \overline{1, n+1}, \tag{3.45}$$

где γ_i определены в (3.14), а

$$a_{ik} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} T_i(t)\,dt,\ b_{ik} = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \overline{R}(T_i; t)\,dt,\ f_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(t)\,dt. \tag{3.46}$$

Теорема 3.6. *Пусть узлы* t_k *определены по любой из формул*

$$\text{(а)}\ t_k = \cos\frac{2k+1}{2n+4}\pi; \quad \text{(б)}\ t_k = \cos\frac{k\pi}{n+1}, \quad k = \overline{0, n+1}. \tag{3.47}$$

Тогда в условиях теоремы 3.4 *м.п.* (3.1), (3.11), (3.44) – (3.47) *сходится в пространстве* $L_{2p}[-1, 1]$ *со скоростью*

$$\|\varphi - \varphi_n\|_{2p} = O\left\{E_n(\varphi)_\infty\right\}. \tag{3.48}$$

Следствие. *Если выполнено условие* (3.25), *то метод подобластей сходится со скоростью*

$$\|\varphi - \varphi_n\|_{2p} = O\left(n^{-r-\alpha}\right),\ r + \alpha > 0. \tag{3.49}$$

Отметим, что здесь при доказательстве существенным образом использована теорема 14 гл.1 [51] об аппроксимативных свойствах операторов м.п. по узлам (3.47).

3.8. Устойчивость решений и метод вырожденных ядер. Наряду с с.и.у. (3.1) рассмотрим уравнение вида

$$\overline{A}_\varepsilon\varphi \equiv \overline{S}\varphi + \overline{R}_\varepsilon\varphi = f_\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon < \infty, \tag{3.50}$$

где

$$\overline{R}_\varepsilon\varphi = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} g_\varepsilon(t,\tau)\,(\varphi(\tau)/\sqrt{1-\tau^2}\,)\,d\tau,$$

а $f_\varepsilon(t)$ и $g_\varepsilon(t,\tau)$ в некотором смысле аппроксимируют функции $f(t)$ и $g(t,\tau)$ соответственно.

Теорема 3.7. *Пусть выполнены условия:*

$$\int\limits_{-1}^{+1} |f(t) - f_\varepsilon(t)|^2 (1-t^2)^{-1/2}\, dt \leqslant \varepsilon^2,$$

$$\int\limits_{-1}^{+1} |f'(t) - f'_\varepsilon(t)|^2 (1-t^2)^{1/2}\, dt \leqslant \varepsilon^2;$$

$$\int\limits_{-1}^{+1}\int\limits_{-1}^{+1} |g(t,\tau) - g_\varepsilon(t,\tau)|^2 (1-t^2)^{-1/2}(1-\tau^2)^{-1/2}\, dt\, d\tau \leqslant \varepsilon^2,$$

$$\int\limits_{-1}^{+1}\int\limits_{-1}^{+1} |g'_t(t,\tau) - g_\varepsilon{}'_t(t,\tau)|^2 (1-t^2)^{1/2}(1-\tau^2)^{-1/2}\, dt\, d\tau \leqslant \varepsilon^2.$$

Если задача (3.1) *поставлена корректно, то существует такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что при всех* $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ *задача решения* (3.50) *поставлена также корректно; в частности, при* $\varepsilon \to +0$ *для решений* $\varphi(t)$ *и* $\varphi_\varepsilon(t)$ *уравнений соответственно* (3.1) *и* (3.50) *справедлива оценка*

$$\left\|\varphi - \varphi_\varepsilon\right\|_{2p} = O\left(\varepsilon\right). \tag{3.51}$$

Пусть теперь

$$g(t,\tau) \approx \sum_{k=1}^{N} A_k(t) B_k(\tau) \equiv g_{_N}(t,\tau),$$

где $g_{_N}(t,\tau)$ – вырожденное аппроксимирующее ядро. Тогда при $f_\varepsilon(t) \equiv f(t)$ и $\varepsilon = \varepsilon_n \to 0, N \to \infty$, из теоремы 3.7 следует сходимость м.в.я. для с.и.у. (3.1).

3.9. Равномерная сходимость приближенных методов как следствие сходимости в среднем. Имеет место следующая

Теорема 3.8. *В условиях* (3.24), (3.29), (3.40), (3.49) *методы соответственно ортогональных многочленов, коллокации, механических квадратур и подобластей при* $r + \alpha > 1/2$ *сходятся равномерно со скоростью*

$$\left\|\varphi - \varphi_n\right\|_\infty = O\left(n^{-r-\alpha+1/2}\right). \tag{3.52}$$

Это утверждение, как и аналогичное утверждение из §1, является следствием сходимости в пространстве $L_{2p}[-1,1]$; самостоятельное (от §1) доказательство (3.52) может быть осуществлено с помощью оценок (3.24), (3.29), (3.40), (3.49) и легко доказываемого неравенства

$$\|Q_n\|_\infty = O\left(\sqrt{n}\right)\|Q_n\|_{2p}, \quad Q_n(t) \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k t^k,\ a_k \in \mathbb{R}. \tag{3.53}$$

Однако в ряде случаев можно получить и более сильные результаты. Приведем лишь один из них:

Теорема 3.9. *Пусть с.и.у.* (3.1) *однозначно разрешимо в* $L_{2p}[-1,1]$ *при любой правой части из* $W^1_{2q}[-1,1]$. *Если выполнено условие* (3.25), *то методы коллокации и подобластей сходятся равномерно со скоростью*

$$\|\varphi - \varphi_n\|_\infty = O\left(n^{-r-\alpha}\ln n\right), \qquad r+\alpha > 0. \tag{3.54}$$

В условиях следствия теоремы 3.5 *с такой же скоростью сходится и м.м.к.; в условиях* (3.24), (3.25) *такое утверждение справедливо также для метода ортогональных многочленов.*

3.10. Дополнения. Завершая этот параграф, отметим, что для с.и.у. (3.1) справедливы утверждения, аналогичные приведенным в пунктах 1.11 – 1.14 для с.и.у. (0.1). В частности, рассмотренные в этом параграфе методы являются устойчивыми и хорошо обусловленными, если корректным и соответственно хорошо обусловленным является точное уравнение (3.1).

В заключение рассмотрим систему с.и.у. вида

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^{+1}\ln\frac{1}{|\tau-t|}\cdot\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} + \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{+1} g(t,\tau)\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} = f(t) + F, \tag{а}$$

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{+1}\varphi(\tau)(1-\tau^2)^{-1/2}\,d\tau = D, \tag{б}$$

где φ – искомая функция, g и f – известные функции, F – неизвестный, а D – известный параметры. Эта система встречается в ряде прикладных задач (см., напр., [82, 84, 86]).

Для системы (а) – (б) справедливы результаты, вполне аналогичные полученным в предыдущих пунктах этого параграфа для с.и.у. (3.1). Для иллюстрации приведем лишь следующий результат.

Приближенное решение системы (а) – (б) будем искать в виде вектор-функции $\vec{\varphi}_n(t) = \{\varphi(t); F_n\}$ с компонентами $F_n \in \mathbb{R}$ и

$$\varphi_n(\tau) = \sum_{k=0}^{n} \delta_k \frac{T_{n+1}(\tau)}{(\tau - \tau_k) T'_{n+1}(\tau_k)}, \quad \tau_k = \cos\frac{2k+1}{2n+2}\pi, \tag{в}$$

где $\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_n$ – неизвестные параметры. Их и приближенное значение F_n параметра F будем определять из СЛАУ

$$\sum_{k=0}^{n} A_k(t_j)\,\delta_k + \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} g(t_j, t_k)\,\delta_k = f(t_j) + F_n, \tag{г}$$

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \delta_k = D, \quad t_j \in [-1,1],\ j = \overline{0,n}, \tag{д }$$

где $A_k(t)$ – функции, определяемые из условия алгебраической степени точности квадратурной формулы

$$\int\limits_{-1}^{+1} \ln|\tau - t| \cdot (1 - t^2)^{-1/2} \varphi(\tau)\,d\tau \approx -2\,\pi \sum_{k=0}^{n} A_k(t)\varphi(t_k). \tag{е }$$

Теорема 3.10. *Пусть выполнены условия:* 1) *функции* g *(по каждой из переменных в отдельности) и* $f \in W^{r+1}H^{\alpha}[-1,1]$, $r \geqslant 0$, $0 < \alpha \leqslant 1$; 2) *система интегральных уравнений* (а), (б) *имеет единственное решение*

$$\vec{\varphi}^*(t) = \{\varphi^*(t); F^*\}, \quad \varphi^*(t) \in L_{2p}[-1,1],\ F^* \in \mathbb{R},$$

при любой правой части $\vec{f} = \{f; D\}$, $f \in W^1_{2q}[-1,1]$, $D \in \mathbb{R}$*;* 3) *коэффициенты* $A_k(t_j) = \overline{S}(l_k; t_j)$ *определены по формуле* (3.33), *а узлы* t_j *определены по любой из формул* а), б), в) *из* (3.27).

Тогда для всех $n \geqslant n_0$ (n_0 *определяется свойствами функции*
$g(t,\tau)$) *СЛАУ* (г) – (д) *имеет единственное решение* $\delta_0^*, \ldots, \delta_n^*, F_n^*$. *Приближенные решения* $\vec{\varphi}_n^*(t) = \{\varphi_n^*(t); F_n^*\}$, *где* $\varphi_n^*(t) = \varphi_n(t)$ *при* $\delta_k = \delta_k^*, k = \overline{0,n}$, *сходятся к точному решению в среднем и равномерно со скоростями соответственно*

$$\|\vec{\varphi}^*(t) - \vec{\varphi}_n^*(t)\| \equiv \|\varphi^*(t) - \varphi_n^*(t)\|_{2p} + |F^* - F_n^*| = O\left(n^{-r-\alpha}\right),$$

$$\max_{-1\leqslant t\leqslant 1} |\varphi^*(t) - \varphi_n^*(t)| = O\left(n^{-r-\alpha}\ln n\right).$$

Доказательство ведется по аналогии с доказательством теоремы 1.18, существенно используя при этом теоремы 3.5 и 3.9, а также лемм 3.1 и 3.2.

§4. Уравнения с полярными ядрами

4.1. Вспомогательные результаты. В этом параграфе рассматриваются вопросы приближенного решения с.и.у. вида

$$\mathbb{C}x \equiv Ux + Vx = y \quad (x \in X, y \in Y), \tag{4.1}$$

где

$$Ux = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\mathrm{ctg}\,\frac{\sigma - s}{2}\right|^{\gamma} x(\sigma)\,d\sigma, \quad Vx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(s,\sigma)x(\sigma)\,d\sigma, \tag{4.2}$$

а $0 < \gamma = const < 1$, $y(s)$ и $h(s,\sigma)$ – известные непрерывные 2π-периодические функции, $x(s)$ – искомая функция.

Положим $X = M[0,2\pi]$ с обычной sup-нормой и $Y = H^{1-\gamma}[0,2\pi]$ с нормой, введенной в §1. Оператор $\mathbb{C}$ будем рассматривать как линейный оператор из X в Y. Тогда с.и.у. (4.1) можно трактовать как операторное уравнение, приводящееся к уравнению II рода.

С.и.у. (4.1) удобно рассматривать также в пространствах $L_p[0,2\pi]$; в этом случае удается получить также ряд интересных результатов. Здесь мы приведем лишь некоторые из них, аналогичные полученным в §2.

Лемма 4.1. *Оператор $U : L_p[0,2\pi] \longrightarrow L_p[0,2\pi]$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty$, $L_\infty \equiv C_{2\pi})$ является вполне непрерывным, а при $p = 2$ оператор U является также симметричным и положительным.*

Следствие. *В условиях леммы на конечномерном подпространстве $X_n \subset L_2$ оператор U положительно определен.*

Доказательство. Полная непрерывность оператора U в L_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, следует из соответствующих результатов С.Г.Михлина о свойствах слабо сингулярных интегральных операторов (см., напр., [63], а также [38]). Далее, при $p = 2$ для любого $x \in X$ имеем

$$x(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(x)e^{iks}, \quad c_{-k} = \overline{c}_k, \tag{4.3}$$

причем ряд (4.3) сходится в среднем. Тогда

$$Ux = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(x)c_k(\rho)e^{iks}, \quad \rho(\sigma) = \left|\mathrm{ctg}\,\frac{\sigma}{2}\right|^{\gamma}, \tag{4.4}$$

$$c_k(\rho) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \rho(\sigma)e^{-ik\sigma}\,d\sigma = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} (\mathrm{ctg}\,\sigma)^{\gamma}\cos 2k\sigma\,d\sigma. \tag{4.5}$$

Из (4.3) – (4.5) и обобщенного равенства Парсеваля находим

$$(Ux, x)_2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\rho)|c_k(x)|^2, \quad \rho(\sigma) = \left|\mathrm{ctg}\,\frac{\sigma}{2}\right|^{\gamma}. \tag{4.6}$$

Так как функция $\rho(\sigma) = \rho(-\sigma) \geqslant 0, \sigma \in \mathbb{R}$, и является монотонной в $[0, \pi]$, то с помощью (4.5) нетрудно показать, что $c_k(\rho) \geqslant 0$ для всех $k = 0, \pm 1, \ldots$ А тогда из (4.6) для любой $x \in L_2[0, 2\pi]$, $x(s) \not\equiv 0$, получаем требуемое неравенство $(Ux, x)_2 > 0$. Отсюда следует, что однородное уравнение $Ux = 0$ имеет в L_2 лишь тривиальное решение.

Утверждение следствия очевидно в силу того, что на X_n оператор U задается положительной симметричной матрицей порядка $N = \dim X_n < \infty$, а такая матрица является положительно определенной. Тогда из (4.6), (4.5) следует, что $\|\mathbb{C}^{-1}\|_2 = O\left(n^{1-\gamma}\right)$, $\mathbb{C} : X_n \longrightarrow X_n = \mathbb{H}_n^T \subset L_2$.

Замечание 4.1. Если $h(s, \sigma) = h(s - \sigma)$, где $h(s)$ – четная функция из $C_{2\pi}$, то лемма 4.1 сохраняется и усиливается; в частности, при $p = 2$ для положительности оператора $\mathbb{C}$ достаточно, чтобы $c_k(\rho) + c_k(h) > 0$, $1 + |k| \in \mathbb{N}$.

4.2. Полиномиальные проекционные методы. Приближенное решение с.и.у. (4.1) будем искать в виде полинома

$$x_n(s) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e^{iks}, \quad \alpha_{-k} = \overline{\alpha}_k, \quad n + 1 \in \mathbb{N}, \tag{4.7}$$

который будем определять как решение операторного уравнения

$$\mathbb{C}_n x_n \equiv P_n \mathbb{C} x_n = P_n y \quad (x_n \in X_n, P_n y \in Y_n); \tag{4.8}$$

здесь X_n, Y_n – подпространства тригонометрических полиномов с соответствующими нормами, а $P_n : L_2 \longrightarrow \mathbb{H}_n^T \subset L_2$ – некоторые аддитивные и однородные проекционные операторы.

Ясно, что уравнение (4.8) эквивалентно СЛАУ порядка $2n+1$ относительно коэффициентов полинома (4.7). Выбирая конкретный полиномиальный оператор P_n, из (4.8) получим конкретную СЛАУ, соответствующую рассматриваемому методу; в частности, из (4.8) можно получить СЛАУ методов Галеркина, коллокации и подобластей.

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия:* а) $y(s) \in W^r H^\alpha$ *и* $h(s, \sigma) \in W^r H^\alpha$ *(по s равномерно относительно σ), где* $r \geqslant 0$, $0 < \alpha \leqslant 1$; б) *с.и.у.* (4.1) *однозначно разрешимо в* M *при любой* $y \in$

$H^{1-\gamma}$; в) P_n *есть либо оператор Фурье* Φ_n, *либо оператор Лагранжа* $\mathcal{L}_n$ *по узлам*

$$s_k = 2k\pi/(2n+1), \quad k = \overline{0, 2n}, \tag{4.9}$$

либо оператор подобластей Π_n *по этим же узлам.*

Если $r + \alpha > 1 - \gamma$, $0 < \gamma < 1$, *то при всех натуральных* $n \geqslant \geqslant n_0$ *уравнение* (4.8) *имеет единственное решение* $x_n^*(s)$. *При* $n \to \infty$ *приближенные решения* $x_n^*(s)$ *равномерно сходятся со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_\infty = O\left(n^{-r-\alpha-\gamma+1} \ln n\right). \tag{4.10}$$

Следствие. *Если* $h(s,\sigma) = h(s-\sigma)$, *то уравнение* (4.8) *однозначно разрешимо при любых* $n = 0, 1, \ldots$ *и справедлива оценка* (4.10).

Доказательство. В силу (4.4) для любого $x_n \in \mathbb{H}_n^T$ имеем

$$Ux_n = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k c_k(\rho) e^{iks} \in \mathbb{H}_n^T, \quad \rho(\sigma) = \left|\operatorname{ctg} \frac{\sigma}{2}\right|^\gamma. \tag{4.11}$$

Положим $X = M$, $X_n = \mathbb{H}_n^T \subset X$, $Y = H^{1-\gamma}[0, 2\pi]$, $Y_n = \mathbb{H}_n^T \subset Y$. Тогда в силу (4.11), (4.1), (4.8) для любого $x_n \in X_n$ находим

$$\begin{aligned} \|\mathbb{C}x_n - \mathbb{C}_n x_n\|_\infty &= \|Vx_n - P_n V x_n\|_\infty \leqslant 2\|P_n\|_\infty \cdot E_n^T(Vx_n)_\infty \leqslant \\ &\leqslant 2\|P_n\|_\infty \cdot E_n^{Ts}(h)_\infty \|x_n\|_\infty = O\left(n^{-r-\alpha} \ln n\right) \|x_n\|_\infty; \end{aligned} \tag{4.12}$$

здесь использованы такие известные факты, как теорема Джексона в $C_{2\pi}$ и неравенства (см., напр., [41, 51, 75])

$$\|\Phi_n\|_\infty = O(\ln n), \quad \|\mathcal{L}_n\|_\infty = O(\ln n), \quad \|\Pi_n\|_\infty = O(\ln n). \tag{4.13}$$

Из (4.13), (4.12) с помощью результатов по аппроксимации в гёльдеровых пространствах (см., напр., [12, 13, 18, 25]) находим

$$\|\mathbb{C}x_n - \mathbb{C}_n x_n\|_{1-\gamma} = O(n^{-r-\alpha+1-\gamma} \ln n) \|x_n\|_\infty, \quad x_n \in X_n. \tag{4.14}$$

Из (4.12) и (4.14) следует оценка

$$\varepsilon_n \equiv \|\mathbb{C} - \mathbb{C}_n\| = O(n^{-r-\alpha+1-\gamma} \ln n), \quad \mathbb{C} - \mathbb{C}_n : X_n \longrightarrow Y. \tag{4.15}$$

По аналогии с (4.12), (4.14) для правых частей уравнений (4.1) и (4.8) с помощью (4.13) находим [12, 18]

$$\|y - P_n y\|_{1-\gamma} = O(n^{-r-\alpha+1-\gamma} \ln n). \tag{4.16}$$

Теперь с учетом (4.16) и (4.15) из теоремы 7 гл.I монографии [25] следует утверждение доказываемой теоремы, в частности, оценка погрешности (4.11). При этом номер n_0 определяется из неравенства

$$q_n \equiv \|\mathbb{C}^{-1}\| \varepsilon_n < 1, \quad \mathbb{C}^{-1} : Y \longrightarrow X,$$

где ε_n определены в (4.16). Отсюда следует, что чем лучше ядро $h(s,\sigma)$, то тем меньше номер n_0 при каждом фиксированном γ.

Докажем следствие. Если $h(s,\sigma)=h(s-\sigma)$, то в силу соотношений (4.1), (4.11) приближенное уравнение (4.8) принимает вид

$$\mathbb{C}_n x_n \equiv U x_n + V x_n = \mathbb{C} x_n = P_n y \quad (x_n \in X_n,\ P_n y \in Y_n). \qquad (4.8')$$

Ясно, что в силу условия б) теоремы уравнение (4.8′) однозначно разрешимо при любых $n=0,1,\ldots$, а в силу (4.16) для решений уравнений (4.1) и (4.8′) справедливы оценки

$$\|x^* - x_n^*\|_\infty \leqslant \|\mathbb{C}^{-1}\| \cdot \|y - P_n y\|_{1-\gamma} = O\,(n^{-r-\alpha+1-\gamma} \ln n). \qquad (4.17)$$

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия:* а) $h(s,\sigma)=h(s-\sigma)$, *где* $h(s)$ – *четная функция из* $C_{2\pi}$; б) *положительный оператор (в частности, выполнено условие* $c_k(\rho)+c_k(h) > 0, \quad 1+|k| \in \mathbb{N}$); в) *с.и.у.* (4.1) *имеет решение* $x^*(s) \in L_2$ *при данной правой части* $y(s) \in L_2$. *Тогда приближенное уравнение* (4.8) *имеет единственное решение* $x_n^*(s)$ *при любой правой части* $P_n y \in \mathbb{H}_n^T$ *и любых* $n=0,1,\ldots,$ *а невязка* $r_n \equiv y - \mathbb{C}x_n^*$ *сходится к нулю со скоростью*

$$\|r_n\|_2 = \begin{cases} O\,\left\{E_n^T(y)_2\right\} & \text{при} \quad P_n = \Phi_n \text{ и } \Pi_n; \\ O\,\left\{E_n^T(y)_\infty\right\} & \text{при} \quad P_n = \mathcal{L}_n. \end{cases} \qquad (4.18)$$

Доказательство. Из условия а) следует, что $\mathbb{C}: L_2 \longrightarrow L_2$ является симметричным оператором. Если же $c_k(\rho)+c_k(h) > 0$, $1+|k| \in \mathbb{N}$, то, как и при доказательстве леммы 4.1, находим

$$(\mathbb{C}x, x)_2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} [c_k(\rho)+c_k(h)]|c_k(x)|^2 > 0,\ x \in L_2,\ x(s) \not\equiv 0, \qquad (4.19)$$

т.е. оператор $\mathbb{C}$ положителен или по предположению, или по условию на ядра $\rho(s)$ и $h(s)$. С другой стороны, в силу (4.1), (4.11), (4.8) имеем $\mathbb{C}_n = \mathbb{C}$ на X_n. Так как $\mathbb{C}_n$ – симметричный положительный оператор на $X=L_2$, то на $X_n \subset L_2$ имеем

$$(\mathbb{C}_n x_n, x_n)_2 \geqslant \gamma_n^2 (x_n, x_n)_2, \quad x_n \in X_n, \qquad (4.20)$$

где γ_n^2 – положительное число, не зависящее от $x_n \in X_n$, но зависящее, вообще говоря, от n (в частности,при $h(\sigma)=\alpha \ln|\sin(\sigma/2)|$, $\forall\,\alpha \in \mathbb{R}$, имеем $\gamma_n^2 \asymp n^{-1+\gamma}$, $0<\gamma<1$). Из (4.20) следует, что однородное уравнение $\mathbb{C}_n x_n = 0$ имеет лишь тривиальное решение. А тогда уравнение (4.8), в силу его эквивалентности СЛАУ конечного порядка, будет иметь единственное решение при любой правой части.

Для завершения доказательства остается заметить, что в рассматриваемом случае для невязки справедливы формулы $r_n = y - \mathbb{C}x_n^* = y - P_n y$, и воспользоваться известными результатами по аппроксимативным свойствам операторов Фурье Φ_n, Лагранжа $\mathcal{L}_n$ и подобластей Π_n в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ (см., напр., [75, 41, 51]).

Пусть теперь коэффициенты α_k приближенного решения (4.7) определяются по м.н.к. из СЛАУ

$$\sum_{k=-n}^{n} \alpha_k (\mathbb{C}e^{ik\sigma}, \mathbb{C}e^{ij\sigma})_2 = (y, \mathbb{C}e^{ij\sigma})_2, \; j = \overline{-n, n}. \tag{4.21}$$

Теорема 4.3. *Пусть выполнены условия:* а) $y \in L_2[0, 2\pi]$, $h \in L_2[0, 2\pi]^2$; б) *с.и.у.* (4.1) *имеет решение* $x^* \in L_2$ *при данной правой части* $y \in L_2$; в) *однородное уравнение* $\mathbb{C}x = 0$ *имеет в* L_2 *лишь тривиальное решение. Тогда при любых* $n \in \mathbb{N}$ *СЛАУ* (4.21) *имеет единственное решение* α_k^*, $k = \overline{-n, n}$. *Приближенные решения* $x_n^*(s)$ *(т.е.* (4.7) *при* $\alpha_k = \alpha_k^*$*) сходятся в том смысле, что невязка* $r_n \equiv \equiv y - \mathbb{C}x_n^* \to 0$ *при* $n \to \infty$ *и*

$$\|r_n\|_2 \leqslant \|\mathbb{C}\|_2 \cdot E_n^T(x^*)_2, \; n \in \mathbb{N}. \tag{4.22}$$

Доказательство. В условиях теоремы оператор $\mathbb{C} : L_2 \longrightarrow L_2$, определяемый левой частью уравнения (4.1), является вполне непрерывным. Отсюда, в частности, следует, что система функций $\{e^{iks}\}_{-\infty}^{\infty}$ является $\mathbb{C}$-полной. С другой стороны, в силу условия в) теоремы система функций $\varphi_j(s) = \mathbb{N}(e^{ij\sigma}; s)$ является линейно независимой. Поэтому дальше доказательство завершается как и в теореме 1.9.

Отметим, что в приложениях встречаются также слабо с.и.у. первого рода вида (см., напр., [78, 80])

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|\sin\frac{s-\sigma}{2}\right|^{-\gamma} x(\sigma)\, d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(s,\sigma)x(\sigma)\, d\sigma = y(s), \tag{4.23}$$

где $0 < \gamma < 1$, а $h(s, \sigma)$ – регулярное ядро. Для с.и.у. (4.23) справедливы многие из полученных выше результатов. Это утверждение следует из формулы $|\mathrm{ctg}\ \theta|^{\gamma} = |\sin\theta|^{-\gamma} - h_0(\theta)$, где $h_0(\theta)$ есть четная непрерывная 2π-периодическая функция. Кроме того, результаты, аналогичные приведенным в этом параграфе, можно получить также для с.и.у. [79, 80]

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{|\tau-t|^{\gamma}}+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{+1}g(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau=f(t),\ -1\leqslant t\leqslant 1,\ 0<\gamma<1,\quad(4.24)$$

где $f(t)$ и $g(t,\tau)$ – известные непрерывные функции в областях соответственно $[-1,1]$ и $[-1,1]^2$, а $\varphi(t)$ – искомая функция.

§5. Некоторые обобщения и дополнения

5.1. Общий проекционный метод для общего уравнения. В §§1, 2 и 4 были рассмотрены общие проекционные методы решения конкретных слабо с.и.у. I -рода и доказана их сходимость. Полученные при этом результаты допускают существенное обобщение.

Рассмотрим с.и.у. I -рода вида

$$Ax\equiv Gx+Rx=y\quad(x\in X,\ y\in Y\,),\tag{5.1}$$

$$Gx\equiv\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}g(|s-\sigma|)x(\sigma)\,d\sigma,\ Rx\equiv\frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi}h(s,\sigma)x(\sigma)\,d\sigma\ \equiv\rho hx.$$

Здесь $g(s)\in L_1[0,2\pi]$, $h(s,\sigma)\in C[0,2\pi]^2$, $y(s)\in Y$ – данные 2π-периодические функции, а $x(s)$ – искомая функция, которая разыскивается в некотором нормированном пространстве 2π-периодических функций X. Предположим, что оператор $A\,:\,X\longrightarrow Y$ непрерывно обратим, где Y – некоторое нормированное пространство, в частности, $Y\equiv G(X)$.

Приближенное решение с.и.у. (5.1) будем искать в виде

$$x_n(s)=\sum_{k=-n}^{n}\alpha_k e^{iks},\quad\overline{\alpha}_k=\alpha_{-k}.\tag{5.2}$$

Этот полином будем определять как точное решение операторного уравнения (см., напр., [19, 22, 23, 25])

$$A_nx_n\equiv P_nAx_n=P_ny\quad(x_n\in\mathbb{H}_n^T\subset X,\ P_ny\in\mathbb{H}_n^T\subset Y),\tag{5.3}$$

где $P_n\in\mathcal{P}_n\subset\mathcal{L}(L_2,\mathbb{H}_n^T)$. Очевидно, что уравнение (5.3) эквивалентно СЛАУ порядка $2n+1$ относительно коэффициентов полинома (5.2) или относительно значений этого полинома в $(2n+1)$– попарно неэквивалентных точках.

Легко видеть, что для $x_n(s)$ из (5.2)

$$G(x_n; s) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(x_n) c_k(g) e^{iks}, \quad c_k(g) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} g(\sigma) \cos k\sigma \, d\sigma. \qquad (5.4)$$

Другими словами, $Gx_n \in \mathbb{H}_n^T$ для любого $x_n \in \mathbb{H}_n^T$. Поэтому, если $P_n^2 = P_n$, то уравнение (5.3) принимает вид

$$A_n x_n \equiv G x_n + P_n R x_n = P_n y \quad (x_n \in X_n, P_n y \in Y_n, P_n \in \mathcal{P}_n), \qquad (5.5)$$

где подпространства $X_n = \mathbb{H}_n^T$ и $Y_n = \mathbb{H}_n^T$ наделены нормами пространств соответственно X и Y.

Соотношения (5.2), (5.3), (5.5) представляют собой схему общего проекционного метода решения с.и.у. (5.1). В силу сказанного в разделе 1.2 (см. также гл.I [25]), для обоснования рассматриваемого метода большое значение имеют величины

$$\varepsilon_n \equiv \|A - A_n\|_{X_n \to Y} = \|R - P_n R\|_{X_n \to Y}, \ \delta_n \equiv \|y - P_n y\|_Y. \qquad (5.6)$$

Если при $n \to \infty$ имеем $\varepsilon_n \to 0$ и $\delta_n \to 0$, то сходимость метода следует из теоремы 7 гл. I [25]. Ясно, что последние условия существенным образом зависят от выбора операторов проектирования P_n, порождающих проекционный метод, и от выбора пространств X и Y; последнее, очевидно, зависит от исходных данных, в первую очередь, от слабо сингулярного ядра $g(s)$. В частности, при $g(s) = \ln|\sin(s/2)|$ полагаем $Y = X^1$ (если пространство X дано) или $X = Y^{-1}$ (если пространство Y дано), где Y^{-1} означает пространство 2π–периодических первообразных функций $y(s) \in Y$. При этом необходимо заботиться о том, чтобы оператор $A^{-1} : Y \longrightarrow X$ был ограниченным.

Сначала отметим следующий простой частный случай: если $h(s,\sigma) = h(s-\sigma)$, то для любого $x_n \in \mathbb{H}_n^T$ имеем

$$A_n x_n \equiv P_n(Gx_n + Rx_n) = Gx_n + Rx_n = Ax_n = P_n y.$$

Поэтому в рассматриваемом случае из однозначной разрешимости с.и.у. (5.1) следует однозначная разрешимость приближенного уравнения (5.3) при любых $n = 0, 1, \ldots$, причем для невязки $r_n \equiv y - Ax_n^*$ и погрешности $\theta_n \equiv x^* - x_n^*$ метода справедливы формулы $r_n = y - P_n y$, $\theta_n = A^{-1} r_n$. Тогда доказательство сходимости метода и оценка погрешности не представляют никаких принципиальных трудностей. Положение еще более упрощается, если проекционные операторы P_n являются инвариантными относительно сдвига, ибо тогда

$$\theta_n \equiv x^* - x_n^* = A^{-1} r_n = x^* - P_n A^{-1} y = x^* - P_n x^*. \qquad (5.7)$$

Однако вернемся к общему случаю с наиболее часто встречаемым на практике слабо сингулярным ядром.

5.2. Теоремы о сходимости общего проекционного метода. Итак, пусть (здесь и в следующем разделе) $g(\sigma) = -\ln|\sin\frac{\sigma}{2}|$, а $X = L_2 = L_2[0, 2\pi]$, $Y = W_2^1 = W_2^1[0, 2\pi]$. Обозначим через $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n^{(1)}(L_2, \mathbb{H}_n^T) \subset \mathcal{L}(L_2, L_2)$ множество всех линейных проекционных (т.е. $P_n^2 = P_n$) операторов, отображающих L_2 в $\mathbb{H}_n^T \subset L_2$ и ограниченных по норме в совокупности.

Теорема 5.1. *Пусть $P_n \in \mathcal{P}_n^{(1)}$ и $y \in W_2^1$, а регулярное ядро $h(s,\sigma)$ таково, что оператор $R : L_2 \to W_2^1$ вполне непрерывен. Если с.и.у.* (5.1) *имеет единственное решение $x^* \in L_2$ при любой $y \in W_2^1$, то при всех $n \geqslant n_0$ (номер n_0 зависит от свойств ядра $h(s,\sigma)$, в частности, $n_0 = 0$ при $h(s,\sigma) \equiv 0$ или же $h(s,\sigma) = h(s-\sigma)$), приближенное уравнение* (5.5) *также имеет единственное решение $x_n^* \in \mathbb{H}_n^T \subset L_2$ при любых $P_n y \in \mathbb{H}_n^T \subset W_2^1$, $P_n \in \mathcal{P}_n^{(1)}$. Приближенные решения сходятся в среднем со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O\left\{E_n^T\Big(\frac{d}{ds}Gx^*\Big)_2\right\} = O\left\{E_n^T(x^*)_2\right\}. \tag{5.8}$$

Следствие 1. *В условиях теоремы операторы $A_n^{-1} = (P_n A)^{-1}$ $(n \geqslant n_0,\ P_n \in \mathcal{P}_n^{(1)})$ ограничены по норме в совокупности:*

$$\|A_n^{-1}\| = O(1), \quad A_n^{-1} : Y_n \to X_n, \quad Y_n \subset W_2^1, \quad X_n \subset L_2. \tag{5.9}$$

Следствие 2. *Если функции $y(s)$ и $R(x^*; s) \in W^{r+1}H_2^\alpha$, то приближенные решения сходятся в среднем и равномерно (при $r + \alpha > 1/2$) со скоростями соответственно:*

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O(n^{-r-\alpha}); \quad \|x^* - x_n^*\|_\infty = O(n^{-r-\alpha+1/2}). \tag{5.10}$$

Доказательство. Поскольку $P_n^2 = P_n$ и $\|P_n\|_2 = O(1)$, то операторы P_n сходятся сильно в L_2 и для любых $\varphi \in L_2$, $P_n \in \mathcal{P}_n^{(1)}$

$$\|\varphi - P_n\varphi\|_2 \leqslant \|E - P_n\|_2\, E_n^T(\varphi)_2 \leqslant 2\,\|P_n\|_2\, E_n^T(\varphi)_2 = O\left\{E_n^T(\varphi)_2\right\}. \tag{5.11}$$

Покажем, что операторы P_n сходятся сильно также в пространстве W_2^1, причем

$$\|\varphi - P_n\varphi\|_{W_2^1} \leqslant \left(1 + \frac{n\|P_n\|_2 + \|E - P_n\|_2}{n+1}\right) E_n^T(\varphi')_2 \leqslant$$

$$\leqslant 3\,\|P_n\|_2\, E_n^T(\varphi')_2 = O\{E_n^T(\varphi')_2\}, \quad \varphi \in W_2^1,\ P_n \in \mathcal{P}_n^{(1)}. \tag{5.12}$$

Действительно, с помощью результатов разделов 1.3 и 1.9 для любых $\varphi \in W_2^1$, $P_n \in \mathcal{P}_n^{(1)}$ последовательно находим

$$\|\varphi - P_n\varphi\|_{1;2} = \|\varphi - P_n\varphi\|_2 + \|\frac{d}{ds}(E - P_n)(\varphi - \Phi_n\varphi\|_2 \leqslant$$
$$\leqslant \|E - P_n\|_2 E_n^T(\varphi)_2 + E_n^T(\varphi')_2 + n\,\|P_n\|_2\|\varphi - \Phi_n\varphi\|_2 \leqslant$$
$$\leqslant \|P_n\|_2\,[\,(2+n)/(n+1)\,]\,E_n^T(\varphi')_2 + E_n^T(\varphi')_2 \leqslant$$
$$\leqslant 3\,\|P_n\|_2\,E_n^T(\varphi')_2 = O\,\left\{E_n^T(\varphi')_2\right\}, \quad \varphi \in W_2^1,\, P_n \in \mathcal{P}_n^{(1)}. \qquad (5.12')$$

Из (5.12′), в частности, следует, что операторы $P_n : W_2^1 \longrightarrow W_2^1$ ограничены по норме в совокупности, точнее,

$$\|P_n\|_{W_2^1 \to W_2^1} \leqslant 1 + 3\,\|P_n\|_{L_2 \to L_2} \leqslant 4\,\|P_n\|_2 = O\,(1). \qquad (5.13)$$

Поскольку $P_n \to E$ сильно в W_2^1, а $R : L_2 \longrightarrow W_2^1$ – вполне непрерывный оператор, то операторы $P_nR \to R$ равномерно, т.е.

$$\varepsilon_n \leqslant \varepsilon_n' \equiv \|R - P_nR\| \to 0, n \to \infty; \quad R - P_nR : L_2 \longrightarrow W_2^1,\; P_n \in \mathcal{P}_n^{(1)}. \qquad (5.14)$$

Кроме того, в силу (5.12) для правых частей (5.1) и (5.5)

$$\delta_n \equiv \|y - P_ny\|_{1;2} = O\,\{E_n^T(y')_2\} \to 0,\; n \to \infty, \quad P_n \in \mathcal{P}_n^{(1)}. \qquad (5.15)$$

В силу соотношений (5.6), (5.14), (5.15) требуемое утверждение следует из теорем 7, 6 и 14 гл.I [25] или же из вышеприведенных теорем 1.1, 1.2 и 1.11.

Замечание 5.1. Из теоремы 5.1 и ее следствия 1 следуют сходимость, устойчивость и оптимальность по порядку [25] как общего проекционного метода (5.1) – (5.5) при $P_n \in \mathcal{P}_n^{(1)}$, так и м.Г., м.п. и м.н.к., обоснованных в §1.

Пусть теперь $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n^{(2)}(L_2, \mathbb{H}_n^T)$ есть множество линейных проекционных операторов из $L_2[0, 2\pi]$ в $\mathbb{H}_n^T \subset L_2[0, 2\pi]$, причем $P_n : L_2 \longrightarrow L_2$ неограничены, а $P_n : C_{2\pi} \longrightarrow L_2$ ограничены по норме в совокупности.

Теорема 5.2. *Пусть $P_n \in \mathcal{P}_n^{(2)}$ и $y \in C_{2\pi}^1$, а регулярное ядро $h(s, \sigma)$ таково, что оператор $R : L_2 \longrightarrow C_{2\pi}^1$ вполне непрерывен. Если уравнение* (5.1) *имеет единственное решение $x^* \in L_2$ при любой $y \in W_2^1$, то при всех n, начиная с некоторого, уравнение* (5.3) *также имеет единственное решение $x_n^* \in \mathbb{H}_n^T \subset L_2$ при любых $P_ny \in \mathbb{H}_n^T \subset W_2^1$, $P_n \in \mathcal{P}_n^{(2)}$. Приближенные решения сходятся в среднем со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O\,\left\{E_n^T\Big(\frac{d}{ds}Gx^*\Big)_\infty\right\} = O\,\left\{E_n^T(x^*)_\infty\right\}. \qquad (5.16)$$

Следствие 1. *В условиях теоремы операторы* $A_n^{-1} = (P_n A)^{-1}$ $(n \geqslant n_0,\ P_n \in \mathcal{P}_n^{(2)})$ *ограничены по норме в совокупности:*

$$\|A_n^{-1}\| = O\,(1), \quad A_n^{-1} : Y_n \longrightarrow X_n, \quad Y_n \subset W_2^1,\ X_n \subset L_2.$$

Следствие 2. *Если функции* $y(s)$ *и* $R(x^*; s) \in W^{r+1}H^{\alpha}$, *то приближенные решения сходятся в среднем (при* $r + \alpha > 0$ *) и равномерно (при* $r + \alpha > 1/2$*) со скоростями соответственно*

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O\,(n^{-r-\alpha}); \quad \|x^* - x_n^*\|_\infty = O\,(n^{-r-\alpha+\frac{1}{2}}).$$

Доказательство. Поскольку $\|P_n\| = O\,(1), \quad P_n : C_{2\pi} \longrightarrow L_2$, то $P_n \to \widetilde{E}$ сильно, где $\widetilde{E}$ – оператор вложения $C_{2\pi}$ в L_2, причем

$$\|\psi - P_n\psi\|_2 \leqslant \|\widetilde{E} - P_n\|_{\infty\to 2} \cdot E_n^T(\psi)_\infty \leqslant$$
$$\leqslant 2\,\|P_n\|_{\infty\to 2} \cdot E_n^T(\psi)_\infty = O\,\left\{E_n^T(\psi)_\infty\right\}, \quad P_n \in \mathcal{P}_n^{(2)},\ \psi \in C_{2\pi}. \quad (5.17)$$

Покажем, что при $n \to \infty$ операторы $P_n \to \overline{E}$ сильно, где $\overline{E}$ – оператор вложения пространства $C_{2\pi}^1$ в W_2^1, причем

$$\|\psi - P_n\psi\|_{1;2} \leqslant (1 + \pi\,\|P_n\|_{\infty\to 2})\,E_n^T(\psi')_\infty = O\,\left\{E_n^T(\psi')_\infty\right\}, \quad (5.18)$$

где $\psi \in C_{2\pi}^1,\ P_n \in \mathcal{P}_n^{(2)}$.

Действительно, с помощью результатов (и обозначений) раздела 1.4 для любых $\psi \in C_{2\pi}^1$ и $P_n \in \mathcal{P}_n^{(2)}$ последовательно находим

$$\|\psi - P_n\psi\|_{1;2} = \|\psi - P_n\psi\|_2 + \left\|\frac{d}{ds}[(\psi - \Phi_n\psi) + \Phi_n(\psi - P_n\psi)]\right\|_2 \leqslant$$
$$\leqslant \|\psi - P_n\psi\|_2 + E_n^T(\psi')_2 + n\|\psi - P_n\psi\|_2 \leqslant (1+n)\,\|\widetilde{E} - P_n\|_{\infty\to 2} \cdot E_n^T(\psi)_\infty +$$
$$+ E_n^T(\psi')_2 \leqslant \frac{\pi}{2}\,\|\widetilde{E} - P_n\|_{\infty\to 2} \cdot E_n^T(\psi')_\infty + E_n^T(\psi')_\infty \leqslant$$
$$\leqslant (1 + \pi\,\|P_n\|_{\infty\to 2})\,E_n^T(\psi')_\infty = O\,\{E_n^T(\psi')_\infty\}. \quad (5.18')$$

Из (5.18) следует, что операторы $P_n : C_{2\pi}^1 \longrightarrow W_2^1$ ограничены по норме в совокупности, точнее

$$\|P_n\|_{C_{2\pi}^1 \to W_2^1} \leqslant 2 + \pi\,\|P_n\|_{C_{2\pi}\to L_2} \leqslant (2+\pi)\,\|P_n\|_{C_{2\pi}\to L_2} = O\,(1). \quad (5.19)$$

Поскольку $P_n \to \overline{E}$ сильно, а $R : L_2 \longrightarrow C_{2\pi}^1$ – вполне непрерывный оператор, то операторы $P_n R \to R$ равномерно, т.е.

$$\varepsilon_n \leqslant \varepsilon_n'' \equiv \|R - P_n R\| \to 0,\ n \to \infty; \quad R - P_n R : L_2 \longrightarrow W_2^1,\ P_n \in \mathcal{P}_n^{(2)}. \quad (5.20)$$

Кроме того, в силу (5.18′) для правых частей (5.1) и (5.3) имеем

$$\delta_n \equiv \|y - P_n y\|_{1;2} = O\left\{E_n^T(y')_\infty\right\} \to 0,\, n \to \infty, \quad P_n \in \mathcal{P}_n^{(2)}. \quad (5.21)$$

В силу (5.6), (5.20), (5.21) требуемое утверждение следует из теорем 6, 7 и 14 гл.I [25] или же из вышеприведенных теорем 1.1, 1.2 и 1.11.

Замечание 5.2. Из теоремы 5.1 и ее следствия 1 следует сходимость и устойчивость как общего проекционного метода (5.1) – (5.3) при $P_n \in \mathcal{P}_n^{(2)}$, так и метода коллокации, обоснованного в разделе 1.4.

5.3. Возмущенный проекционный метод. Теперь в качестве приближенного уравнения для с.и.у. (5.1) возьмем уравнение вида

$$\overline{A}_n x_n \equiv G x_n + P_n \rho P_n^\sigma(h x_n) = P_n y\,(x_n \in X_n,\, P_n y \in Y_n,\, P_n \in \mathcal{P}_n), \quad (5.22)$$

где $Rx \equiv \rho h x$, а P_n^σ означает оператор P_n , примененный по переменной σ. Ясно, что уравнение (5.22) эквивалентно СЛАУ порядка $2n+1$ относительно коэффициентов полинома (5.2) или же относительно $x_n(s_k)$, $k = \overline{-n, n}$, где s_k – любая система из $2n+1$ попарно неэквивалентных узлов.

Рассматриваемый метод естественно называть "возмущенным проекционным методом"ввиду того, что, во-первых, он совпадает с проекционным методом решения "возмущенного"с.и.у. вида

$$\overline{A} x \equiv G x + \rho P_n^\sigma(h x) = y \quad (x \in X,\, y \in Y); \quad (5.1')$$

во-вторых, он получается из проекционного метода (5.5) путем возмущения регулярного ядра $h(s,\sigma)$ по переменной σ.

Пусть оператор P_n таков, что

$$\rho[P_n^\sigma(h x_n)] = \rho[(P_n^\sigma h) x_n], \quad x_n \in X_n,\, P_n \in \mathcal{P}_n \quad (5.23)$$

(как показано в разделе 1.5, для ряда конкретных операторов это условие выполняется). Тогда в силу (5.5) и (5.22) имеем

$$\|A_n x_n - \overline{A}_n x_n\|_Y = \|P_n \rho[(h - P_n^\sigma h) x_n]\|_Y,\; x_n \in X_n,\, P_n \in \mathcal{P}_n. \quad (5.24)$$

А тогда при выполнении дополнительного условия $h'_s(s,\sigma) \in$ $\in L_2[0,2\pi]^2$ с помощью теоремы 5.1 находим при $P_n \in \mathcal{P}_n^{(1)}$:

$$\|A_n x_n - \overline{A}_n x_n\|_Y \leqslant \|P_n\|_{W_2^1 \to W_2^1} \cdot \|\rho(h - P_n^\sigma h) x_n\|_{W_2^1} =$$

$$= O\left\{\|h - P_n^\sigma h\|_{L_2[0,2\pi]^2} + \|h'_s - P_n^\sigma h'_s\|_{L_2[0,2\pi]^2}\right\} \cdot \|x_n\|_{L_2} =$$

$$= \|x_n\|_2 \cdot O\left\{E_N^{T\sigma}(h)_2 + E_N^{T\sigma}(h'_s)_2\right\}, \quad x_n \in X_n;$$

поэтому справедлива оценка

$$\|A_n - \overline{A}_n\|_{X_n \to Y_n} = O\,\left\{E_n^{T\sigma}(h)_2 + \, E_n^{T\sigma}(h'_s)_2\right\}, \quad P_n \in \mathcal{P}_n^{(1)}. \qquad (5.25)$$

Если же $h'_s(s,\sigma) \in C[0,2\pi]^2$, то в силу (5.24) с помощью теоремы 5.2 находим аналогичную оценку при $P_n \in \mathcal{P}_n^{(2)}$:

$$\|A_n - \overline{A}_n\|_{X_n \to Y_n} = O\,\left\{E_n^{T\sigma}(h)_\infty + \, E_n^{T\sigma}(h'_s)_\infty\right\}, \quad P_n \in \mathcal{P}_n^{(2)}. \qquad (5.26)$$

С помощью (5.24) – (5.26) из теорем 5.1 и 5.2 выводится

Теорема 5.3. *Пусть в условиях теоремы* 5.1 *(соответственно теоремы* 5.2*) существует производная* $h'_s(s,\sigma) \in L_2[0,2\pi]^2$ *(соответственно* $\exists\, h'_s(s,\sigma) \in C[0,2\pi]^2$*) и выполнено условие* (5.23) [1]. *Если с.и.у.* (5.1) *однозначно разрешимо в* L_2 *при любой* $y \in W_2^1$, *то при всех* n, *начиная с некоторого, уравнение* (5.22) *также имеет единственное решение* $\bar{x}_n^* = \overline{A}_n^{-1} P_n y$, *где* $P_n \in \mathcal{P}_n^{(1)}$ *(соответственно* $P_n \in \mathcal{P}_n^{(2)}$*). Приближенные решения сходятся к точному решению* $x^* \in L_2$ *в среднем со скоростью*

$$\|x^* - \bar{x}_n^*\|_2 = O\,\left\{E_n^{T}(x^*)_2 + E_n^{T\sigma}(h)_2 + E_n^{T\sigma}(h'_s)_2\right\} \qquad (5.27)$$

в условиях теоремы 5.1, *а в условиях теоремы* 5.2 *– со скоростью*

$$\|x^* - \bar{x}_n^*\|_2 = O\,\left\{E_n^{T}(x^*)_\infty + E_n^{T\sigma}(h)_\infty + E_n^{T\sigma}(h'_s)_\infty\right\}. \qquad (5.28)$$

Следствие. *В условиях теоремы* 5.3 *обратные операторы* $\overline{A}_n^{-1}$ $(n \geqslant n_1 \geqslant n_0)$ *ограничены по норме в совокупности:*

$\|\overline{A}_n^{-1}\| = O\,(1)$, $\overline{A}_n^{-1} : Y_n \longrightarrow X_n$, $Y_n \subset W_2^1$, $X_n \subset L_2$, $P_n \in \mathcal{P}_n^{(i)}\,(i=1,2)$.

Замечание 5.3. Из теоремы 5.3 следует сходимость и устойчивость как метода (5.1), (5.2), (5.22) при $P_n \in \mathcal{P}_n^{(i)}$ $(i=1,2)$, так и метода механических квадратур, обоснованного в разделе 1.5.

Замечание 5.4. Утверждения, аналогичные теоремам 5.1 – 5.3, справедливы также для системы слабо с.и.у. I -рода, исследованной в разделе 1.14.

5.4. О равномерной сходимости и насыщаемости методов. В этой главе, в том числе в теоремах 5.1 – 5.3, погрешность исследуемых методов установлена в терминах теории приближения

[1] При его невыполнении утверждение о сходимости метода сохраняется, однако вместо оценок (5.27) и (5.28) будут другие оценки; здесь доказательство можно вести с помощью принципа компактной аппроксимации Г.М.Вайникко (см., напр., [7]).

функций полиномами. Такая характеристика погрешности носит универсальный характер в том смысле, что она автоматически прослеживает структурные свойства исходных данных; другими словами, рассмотренные методы являются, по терминологии К.И. Бабенко [3], не насыщаемыми. Очевидно, что этот факт может иметь большое значение при численной реализации исследованных выше прямых и проекционных методов. Однако при численной реализации равномерные оценки погрешности являются более предпочтительными, чем среднеквадратические оценки. Способом, указанным в разделе 1.10, из среднеквадратических оценок могут быть выведены равномерные оценки погрешности, которые также автоматически учитывают структурные свойства исходных данных. В частности, в условиях теорем 5.1 – 5.3 большое значение имеют аппроксимационные характеристики проекционных операторов P_n в пространстве $C_{2\pi}$, в том числе характер роста их норм в $C_{2\pi}$. Если

$$\|P_n\| = O\,(\ln n), \quad P_n : C_{2\pi} \longrightarrow C_{2\pi}, \tag{5.29}$$

то для равномерной оценки погрешности методов (5.5) и (5.22) решения с.и.у. (5.1) справедливы такие же результаты, что и для методов Галеркина, коллокации, подобластей и механических квадратур. Здесь уместно отметить, что в силу теоремы Бермана–Зигмунда–Марцинкевича (см., напр., в гл.7 [55]) для полиномиальных проекционных операторов оценка (5.29) не может быть улучшена по порядку. Поэтому, если мы хотим иметь прямые методы с более хорошей равномерной оценкой погрешности, чем методы Галеркина, коллокации, подобластей и квадратур, то необходимо отказаться от проекционности операторов P_n. Известно (см., напр., гл.IV [25]), что порождаемые такими операторами некоторые из полиномиальных прямых методов в пространствах непрерывных функций обладают более хорошими аппроксимативными свойствами, чем полиномиальные прямые методы даже с самыми "хорошими"проекционными операторами. Однако с сожалением приходится констатировать, что являющиеся более предпочтительными при таком сравнении прямые методы с непроекционными операторами обладают большим недостатком, а именно, в пространствах непрерывных функций они являются насыщаемыми.

5.5. Общий проекционный метод решения непериодических уравнений. Результаты, аналогичные приведенным в разделах 5.1 – 5.4, справедливы также для непериодических слабо с.и.у. I рода.

Проиллюстрируем сказанное на примере уравнения

$$B\varphi \equiv H\varphi + T\varphi = f \quad (\varphi \in L_{2p}, f \in W^1_{2q}), \tag{5.30}$$

$$H\varphi \equiv \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{+1} \ln\frac{1}{|\tau - t|}\cdot\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}}, \quad T\varphi \equiv \frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{h(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} \equiv \theta(h\varphi);$$

здесь $f(t)$ и $h(t,\tau)$ – известные непрерывные функции, а $\varphi(t)$ – искомая функция, которая разыскивается в пространстве $L_{2p}[-1,1]$ с весом $p(t) = (1-t^2)^{-1/2}$, причем $q(t) = (1-t^2)^{1/2}$.

Приближенное решение с.и.у. (5.30) будем искать в виде

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k\, t^k = \sum_{k=0}^{n} \beta_k\, T_k(t), \tag{5.31}$$

где $\alpha_k,\ \beta_k$ – неизвестные постоянные. Многочлен (5.31) будем определять как точное решение уравнения

$$B_n\varphi_n \equiv P_nB\varphi_n = P_nf \quad (\varphi_n \in X_n,\ P_nf \in Y_n,\ P_n \in \mathcal{P}_n), \tag{5.32}$$

где X_n и Y_n – подпространства $\mathbb{H}_n$ алгебраических многочленов степени не выше n , наделенные нормами пространств соответственно $X = L_{2p}[-1,1]$ и $Y = W^1_{2q}[-1,1]$, а $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{L}(L_{2q}, \mathbb{H}_n)$.

Легко видеть, что уравнение (5.32) эквивалентно СЛАУ порядка $n+1$ относительно коэффициентов многочлена (5.31).

Как уже отмечено в §3,$H\psi_n \in \mathbb{H}_n$ для любого $\psi_n \in \mathbb{H}_n$ [1)]. Поэтому, если оператор $P_n \in \mathcal{P}_n$ является проекционным (т.е. $P_n^2 = P_n$), то приближенное уравнение (5.32) принимает вид

$$B_n\varphi_n \equiv H\varphi_n + P_nT\varphi_n = P_nf \quad (\varphi_n \in X_n,\ P_nf \in Y_n,\ P_n \in \mathcal{P}_n). \tag{5.33}$$

Для рассматриваемого проекционного метода справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1. *Пусть* $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n^{(1)} = \{P_n\}$ *– множество всех линейных проекционных операторов из* L_{2q} *в* $\mathbb{H}_n \subset L_{2q}$*, ограниченных по норме в совокупности. Тогда для схемы* (5.30), (5.31), (5.33) *справедлив результат, аналогичный теореме* 5.1.

Утверждение 2. *Пусть* $\mathcal{P}_n = \mathcal{P}_n^{(2)} = \{P_n\}$ *– множество проекционных операторов из* L_{2q} *в* $\mathbb{H}_n$*, таких, что* $P_n : L_{2q} \longrightarrow L_{2q}$ *неограничены, а* $P_n : C[-1,1] \longrightarrow L_{2q}$ *ограничены по норме в совокупности.*

[1)] Таким свойством обладает большое число интегральных операторов, в том числе операторы с т.н. π–ядрами (см. [71]). Поэтому излагаемый общий проекционный метод применим также к более общим уравнениям, чем слабо с.и.у. (5.30).

Тогда для схемы (5.30), (5.31), (5.33) *имеет место результат, аналогичный теореме* 5.2.

Утверждение 3. *Уравнение* (5.33) *заменим возмущенным уравнением*

$$\overline{B}_n\varphi_n \equiv H\varphi_n + P_n\theta P_n^\tau(h\varphi_n) = P_n f \, (\varphi_n \in X_n, \, P_n f \in Y_n, \, P_n \in \mathcal{P}_n), \tag{5.34}$$

где P_n^τ *означает, что оператор* P_n *применен по переменной* τ. *Для схемы* (5.30), (5.31), (5.34) *справедлив результат, аналогичный теореме* 5.3.

Заметим, что указанные утверждения могут быть доказаны как самостоятельно, так и (что еще проще) путем сведения (см. §3) уравнений (5.30), (5.33) и (5.34) к частным случаям уравнений соответственно (5.1), (5.5) и (5.22).

5.6. Общий проекционный метод решения слабосингулярных уравнений II -рода. Результаты, полученные выше для слабо с.и.у. I -рода (0.1) – (0.3) и их обобщений, легко переносятся на слабо с.и.у.II -рода и существенно упрощаются и усиливаются. В обозначениях разделов 5.1 – 5.3 этот вопрос рассмотрим, хотя бы вкратце, применительно к слабо с.и.у. II -рода вида

$$Kx \equiv x(s) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} h(s-\sigma)x(\sigma)\,d\sigma = y(s) \quad (x, y \in L_2); \tag{5.35}$$

здесь $h(s) \in L_1[0, 2\pi]$ и $y(s) \in L_2[0, 2\pi]$ – известные 2π-периодические функции, а $x(s)$ – искомая функция. Заметим, что в приложениях нередко встречается ядро вида $h(2\theta) = |\mathrm{ctg}\;\theta|^\gamma \ln^m|\sin\theta|$, где $\theta = (s-\sigma)/2$, $0 \leqslant \gamma < 1, \; m+1 \in \mathbb{N}, \; m+\gamma > 0$.

Приближенное решение уравнения (5.35) снова ищем в виде полинома (5.2), который будем определять как решение уравнения

$$K_n x_n \equiv x_n + P_n H x_n = P_n y \quad (x_n, P_n y \in \mathbb{H}_n^T, \, P_n \in \mathcal{P}_n), \tag{5.36}$$

$$Hx \equiv H(x; s) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(s-\sigma)x(\sigma)\,d\sigma, \tag{5.37}$$

где $\mathcal{P}_n = \{P_n\} \subset \mathcal{L}(L_2, \mathbb{H}_n^T)$ – некоторое множество линейных проекционных ($P_n^2 = P_n$) операторов из $L_2[0, 2\pi]$ в $\mathbb{H}_n^T$ с L_2-нормой. Ясно, что уравнение (6.36) эквивалентно СЛАУ порядка $2n+1$ относительно коэффициентов полинома (5.2).

Для метода (5.35), (5.2), (5.36) справедливы следующие теоремы.

Теорема 5.4. *Пусть* $P_n \in \mathcal{P}_n^{(1)}$, $y \in L_2$ *и* $c_k(h) \neq -1, k = 0, \pm 1, \ldots$ *Тогда как точное уравнение* (5.35), *так и приближенные уравнения* (5.36) *при любых* $n = 0, 1, \ldots$ *однозначно разрешимы в пространствах соответственно* L_2 *и* $\mathbb{H}_n^T \subset L_2$. *Приближенные решения* $x_n^* = = K_n^{-1} P_n y$ *сходятся к точному решению* $x^* = K^{-1} y$ *в среднем, причем*

$$\min_{k=0,\pm 1,\ldots} |1 + c_k(h)|^{-1} \leqslant \|x^* - x_n^*\|_2 / \|y - P_n y\|_2 \leqslant \max_{k=0,\pm 1,\ldots} |1 + c_k(h)|^{-1}, \tag{5.38}$$

$$\|x^* - x_n^*\|_2 \leqslant E_n^T(y)_2 \|E - P_n\|_2 / \min_{k=0,\pm 1,\ldots} |1 + c_k(h)|. \tag{5.39}$$

Доказательство. Представляя функции $x(s)$ и $y(s) \in L_2[0, 2\pi]$ через их ряды Фурье и подставляя их в уравнение (5.35), с учетом полноты тригонометрической системы функций находим

$$c_k(x) = c_k(y)/[1 + c_k(h)],\ k = 0, \pm 1, \ldots, \tag{5.40}$$

где $c_k(\varphi)$ – комплексные коэффициенты Фурье функции $\varphi(\sigma) \in L_1[0, 2\pi]$. Очевидно, что функция

$$x^*(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{c_k(y)}{1 + c_k(h)}\, e^{iks} \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(x^*)\, e^{iks} \tag{5.41}$$

является единственным решением уравнения (5.35).

Из (5.41) находим неравенства

$$\|x^*\|_2 = \|K^{-1} y\|_2 = \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \frac{c_k(y)}{1 + c_k(h)} \right|^2 \right\}^{1/2} \leqslant \left\{ \frac{\|y\|_2}{\min_{k=0,\pm 1,\ldots} |1 + c_k(h)|} \right\},$$

$$\|x^*\|_2 = \|K^{-1} y\|_2 \geqslant \|y\|_2 / \max_{k=0,\pm 1,\ldots} |1 + c_k(h)|.$$

Отсюда, в свою очередь, следуют неравенства

$$\|K^{-1}\|_2 \leqslant \max_{k=0,\pm 1,\ldots} |1 + c_k(h)|^{-1}, \quad \|K\|_2 \leqslant \max_{k=0,\pm 1,\ldots} |1 + c_k(h)|. \tag{5.42}$$

Заметим, что последнее неравенство легко выводится также из очевидной формулы

$$\|Kx\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(x)|^2 \cdot |1 + c_k(h)|^2, \quad x \in L_2.$$

Поскольку $P_n^2 = P_n$, то для любого $x_n \in \mathbb{H}_n^T$ имеем $P_n H x_n = H x_n$. Тогда приближенное уравнение (5.36) принимает очень простой вид

$$K_n x_n \equiv x_n + H x_n = P_n y \quad (x_n,\ P_n y \in \mathbb{H}_n^T,\ P_n \in \mathcal{P}_n^{(1)}). \tag{5.43}$$

Ясно, что в (5.43) оператор K_n является сужением оператора K на $\mathbb{H}_n^T \subset L_2$. Поэтому приближенное уравнение (6.36) однозначно разрешимо в $\mathbb{H}_n^T$ при любых $n = 0, 1, \ldots$, а $x_n^* = K_n^{-1} P_n y = K^{-1} P_n y$. В силу этого для невязки и погрешности рассматриваемого приближенного метода справедливы соотношения

$$r_n \equiv y - K x_n^* = y - P_n y, \quad x^* - x_n^* = K^{-1} r_n. \tag{5.44}$$

Из (5.44) легко находим неравенства

$$\|K\|_2^{-1} \, \|y - P_n y\|_2 \leqslant \|x^* - x_n^*\|_2 \leqslant \|K^{-1}\|_2 \, \|y - P_n y\|_2, \tag{5.45}$$

$$\|x^* - x_n^*\|_2 \leqslant \|K^{-1}\|_2 \cdot \|E - P_n\|_2 \, E_n^T(y)_2 = O\left\{E_n^T(y)_2\right\}. \tag{5.46}$$

Из (5.45) и (5.46) с учетом неравенств (5.42) следуют требуемые оценки (5.38) и (5.39), а из них, в свою очередь, следует требуемое утверждение.

По аналогии с теоремой 5.4 доказывается следующая

Теорема 5.5. *Пусть* $P_n \in \mathcal{P}_n^{(2)}$, $y \in C_{2\pi}$ *и* $c_k(h) \neq -1$, $k = 0, \pm 1, \ldots$ *Тогда как точное уравнение* (5.35), *так и приближенные уравнения* (5.36) *при любых* $n = 0, 1, \ldots$ *однозначно разрешимы в пространствах соответственно* L_2 *и* $\mathbb{H}_n^T \subset L_2$. *Приближенные решения сходятся в среднем, причем справедливы оценки* (5.38) *и*

$$\|x^* - x_n^*\|_2 \leqslant 2 \, \|P_n\|_{\infty \to 2} \cdot E_n^T(y)_\infty \cdot \max_k |1 + c_k(h)|^{-1}. \tag{5.47}$$

Равномерную сходимость метода устанавливает следующая

Теорема 5.6. *Пусть правая часть* $y \in C_{2\pi}$ *и операторы* $P_n \in \mathcal{P}_n^{(j)}$ $(j = 1, 2)$ *таковы, что* $\|y - P_n y\|_\infty \to 0$ *при* $n \to \infty$. *Тогда в условиях каждой из теорем* 5.4 *и* 5.5 *приближенные решения сходятся к точному решению равномерно, причем справедливы оценки*

$$|1 + c_0(|h|)|^{-1} \leqslant \{\|x^* - x_n^*\|_\infty / \|y - P_n y\|_\infty\} \leqslant \|K^{-1}\|_\infty, \tag{5.48}$$

$$\|x^* - x_n^*\|_\infty \leqslant 2 \, \|P_n\|_\infty \|K^{-1}\|_\infty \, E_n^T(y)_\infty. \tag{5.49}$$

Если, кроме того, слабо сингулярное ядро $h(s)$ *таково, что оператор* $H : L_2 \longrightarrow C_{2\pi}$ *ограничен, то справедлива равномерная оценка*

$$\|x^* - x_n^*\|_\infty \leqslant \left(1 + \|K^{-1}\|_2 \|H\|_{2 \to \infty}\right) \cdot \|y - P_n y\|_\infty. \tag{5.50}$$

Доказательство проводится по схеме доказательства теоремы 5.4. С учетом очевидных соотношений

$$\|K\|_\infty \leqslant 1 + \|H\|_\infty \leqslant 1 + c_0(|h|)$$

из (5.44) по аналогии с (5.38) выводим неравенства (5.48). Из (55.48), в свою очередь, легко выводится оценка (5.49). Пусть теперь H – ограниченный оператор из L_2 в $C_{2\pi}$. Тогда из тождества $x^* - x_n^* \equiv \equiv y - P_n y - H(x^* - x_n^*)$ находим

$$\|x^* - x_n^*\|_\infty \leqslant \|y - P_n y\|_\infty + \|H\|_{2\to\infty} \cdot \|x^* - x_n^*\|_2.$$

Отсюда и из правой части неравенств (5.45) получаем оценку

$$\|x^* - x_n^*\|_\infty \leqslant \|y - P_n y\|_\infty + \|H\|_{2\to\infty} \cdot \|K^{-1}\|_2 \cdot \|y - P_n y\|_2,$$

откуда, в свою очередь, следует оценка (5.50).

5.7. О невязках приближенных методов. Более сильные оценки, чем приведенные выше, имеют место для невязок исследованных выше приближенных методов. Для иллюстрации приведем лишь два результата.

Теорема 5.7. *В условиях теоремы* 1.12 *методы коллокации и механических квадратур и в условиях следствия* 2 *теоремы* 5.1 *общий проекционный метод решения слабо с.и.у.* (1.1) *сходятся в том смысле, что для невязок* $r_n(s) = y(s) - K(x_n^*; s)$ *этих методов справедливы оценки*

$$\|r_n^{(k)}(s)\|_2 = O\,(n^{-r-\alpha-1+k}), \quad r + \alpha + 1 > k,\ k + 1 \in \mathbb{N}. \tag{5.51}$$

Доказательство приведем лишь в условиях следствия 2 теоремы 5.1, где для общего проекционного метода при $P_n \in \mathcal{P}_n^{(1)}$ доказано, что $\|x^* - x_n^*\|_2 = O\,(n^{-r-\alpha})$. Тогда можно показать, что функция

$$\varphi_n(s) \equiv S(x_n^*; s) \equiv y(s) - R(x_n^*; s) \in W^{r+1}H^\alpha \tag{5.52}$$

равномерно относительно $n \in \mathbb{N}$. Тогда, как известно, существует полином $Q_n(x) \in \mathbb{H}_n^T$ такой, что для $k + 1 \in \mathbb{N}$ справедливы оценки

$$\|\varphi_n^{(k)}(s) - Q_n^{(k)}(s)\|_2 \leqslant a\ n^{-r-1-\alpha+k}, \quad r + 1 + \alpha > k, \tag{5.53}$$

где a – положительная постоянная, не зависящая от $n \in \mathbb{N}$.

Для невязки проекционного метода решения с.и.у. (0.1) при $P_n \in \mathcal{P}_n$ справедливы тождества

$$r_n = y - Kx_n^* = Sx_n^* - P_n S x_n^* = (\,E - P_n\,)\,(\,\varphi_n - Q_n\,). \tag{5.54}$$

Поэтому

$$\frac{d^k\, r_n(s)}{ds^k} = \frac{d^k\,[\,\varphi_n(s) - Q_n(s)\,]}{ds^k} - \frac{d^k}{ds^k}\, P_n[\,(\varphi_n - Q_n\,); s]. \tag{5.55}$$

Используя неравенство Бернштейна в L_2 и оценку (5.53) при $k = 0$, последовательно находим

$$\left\| \frac{d^k}{ds^k} P_n \{(\varphi_n - Q_n); s\} \right\|_2 \leqslant n^k \|P_n(\varphi_n - Q_n)\|_2 \leqslant$$

$$\leqslant n^k \|P_n\|_2 \|\varphi_n - Q_n\|_2 = O(n^k) \cdot O(n^{-r-1-\alpha}) = O(n^{-r-1-\alpha+k}). \quad (5.56)$$

Из соотношений (5.53) – (5.56) следует требуемая оценка (5.51) для общего проекционного метода (5.2) – (5.5) при $P_n \in \mathcal{P}_n^{(1)}$.

Аналогично теореме 5.7, но используя элементы теории приближений в пространствах $C_{2\pi}$ и H^β (см., напр., [48, 51, 75], а также [12, 13, 18, 25]), доказывается следующая

Теорема 5.8. *В условиях теоремы* 1.14 *м.м.к. решения слабо с.и.у.* (0.1) *сходится в том смысле, что для его невязки* $r_n(s)$ *справедливы оценки*

$$\|r_n^{(k)}(s)\|_\beta = O(n^{-r-1-\alpha+k+\beta} \ln n), \quad (5.57)$$

где $r + 1 + \alpha > k + \beta$, $k + 1 \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant \beta \leqslant 1$, $H^0 \equiv C_{2\pi}$.

5.8. Заключительные замечания.

Замечание 5.5. Условия теорем о м.к. и м.м.к могут быть несколько ослаблены за счет соответствующих результатов глав 1 и 2 книги [35] об апппроксимативных свойствах интерполяционных операторов Лаграгжа.

Замечание 5.6. Завершая эту главу, отметим, что в ней, как правило, была использована пара пространств L_2, W_2^1 (с весами или без них – в зависимости от ситуации). Однако аналогичные результаты (без существенных изменений как в доказательствах, так и в формулировках) могут быть получены и для пары пространств $L_{r,p}$, $W_{r,q}^1$ (при любых $r \in (1, \infty)$) с весами $p(s) \equiv q(s) \equiv 1$, $-\infty < s < +\infty$, для периодических уравнений и $p(t) = (1-t^2)^{-1/2}$, $q(t) = (1-t^2)^{1/2}$, $-1 < t < 1$, для непериодических уравнений. Кроме того, в случае проекционных методов решения слабо с.и.у. первого рода вместо интегральных операторов Фредгольма везде можно брать произвольные линейные операторы T , вполне непрерывные из L_2 в W_2^1 (из $L_{2p}[-1,1]$ в $W_{2q}^1[-1,1]$) при $P_n \in \mathcal{P}_n^{(1)}$ и вполне непрерывные из L_2 в $C_{2\pi}^1$ (из $L_{2p}[-1,1]$ в $C^1[-1,1]$) при $P_n \in \mathcal{P}_n^{(2)}$.

ГЛАВА II

СПЛАЙНОВЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СЛАБОСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ I-РОДА

Данная глава посвящена сплайн–методам решения слабосингулярных интегральных уравнений (с.и.у. [1]) первого рода вида

$$F\varphi \equiv \int\limits_{-1}^{+1} h(t-\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = f(t), \quad -1 \leqslant t \leqslant 1, \tag{0.1}$$

$$Gx \equiv \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} g(s-\sigma)x(\sigma)\,d\sigma = y(s), \quad -\infty < s < \infty, \tag{0.2}$$

и некоторых их обобщений; здесь $\varphi(t)$ и $x(s)$ – искомые функции, $f(t) \in C[-1,1]$, $h(t) \in L_1[0,2]$ и $y(s) \in C_{2\pi}$, $g(s) \in L_1[0,2\pi]$ – данные функции, причем $h(t)$ и $g(s)$ являются четными, а $y(s)$, $g(s)$ и $x(s)$ предполагаются 2π-периодическими. Основное внимание будет уделено теоретическому обоснованию сплайн–методов в смысле гл. 14 [55] и гл. 1 [25].

Следует отметить, что метод сплайн–коллокации в частных случаях задания ядер уравнений (0.1) и (0.2), а именно, при

$$h(t) = -\ln|t|, \quad h(t) = |t|^{-\gamma}, \ 0 < \gamma < 1, \tag{0.3}$$

и

$$g(s) = -\ln\left|\sin\frac{s}{2}\right|, \quad g(s) = \left|\sin\frac{s}{2}\right|^{-\gamma}, \ 0 < \gamma < 1, \tag{0.4}$$

рассматривался ранее в ряде работ (обзор соответствующих результатов имеется в гл. 4 [34]); ниже нам понадобится также ядро

$$g(s) = \left|\operatorname{ctg}\frac{s}{2}\right|^{\gamma}, \quad 0 < \gamma < 1. \tag{0.5}$$

§1. Непериодические уравнения

1.1. Схема метода сплайн–коллокации нулевого порядка. В этом параграфе рассматриваются сплайновые методы решения уравнения (0.1). Сначала приведем вычислительную схему метода сплайн–коллокации нулевого порядка.

[1] В этой главе используются введенные выше обозначения и сокращения.

На сегменте $[-1,1]$ введем две системы узлов

$$t_k = t_{k,n} = -1 + \frac{2k}{n}, \quad k = \overline{0,n}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.1}$$

$$\bar{t}_k = \bar{t}_{k,n} = -1 + \frac{2k-1}{n}, \quad k = \overline{1,n}, \tag{1.2}$$

и обозначим через $\psi_k = \psi_{k,n}(t) \in M[-1,1]$ характеристические функции интервалов $(t_{k-1}, t_k]$, $k = \overline{1,n}$, непрерывные справа, а функцию $\psi_1(t)$ будем считать также непрерывной слева; здесь и далее $M[-1,1]$ – пространство определенных на $[-1,1]$ ограниченных функций с обычной sup–нормой.

Приближенное решение уравнения (0.1) будем искать в виде сплайна нулевого порядка

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \, \psi_k(t), \tag{1.3}$$

неизвестные коэффициенты α_k которого будем определять из условий

$$F(\varphi_n; \bar{t}_j) = f(\bar{t}_j), \quad j = \overline{1,n}. \tag{1.4}$$

Эти условия эквивалентны СЛАУ вида

$$\sum_{k=1}^{n} a_{j-k} \, \alpha_k = f_j, \;\; j = \overline{1,n}, \quad f_j = f(\bar{t}_j), \;\; a_{j-k} = F(\psi_k; \bar{t}_j). \tag{1.5}$$

Легко видеть, что

$$a_{j-k} = \int\limits_{t_{k-1}}^{t_k} h(\bar{t}_j - \tau)\, d\tau = \int\limits_{\frac{k-j}{n} - \frac{1}{2n}}^{\frac{k-j}{n} + \frac{1}{2n}} h(\tau)\, d\tau =$$

$$= \int\limits_{\bar{t}_{k-j}}^{\bar{t}_{k-j+1}} h(\tau)\, d\tau = \int\limits_{\bar{t}_{j-k}}^{\bar{t}_{j-k+1}} h(\tau)\, d\tau = a_{k-j}. \tag{1.6}$$

Поэтому матрица $\mathcal{A}_n \equiv [a_{j-k}]_{j=\overline{1,n}}^{k=\overline{1,n}}$ системы (1.5) является симметричной и теплицевой, что́ значительно облегчает исследование рассматриваемого метода. Однако следует отметить, что только что приведенная вычислительная схема в общем случае, по–видимому, не обоснована; в ряде частных случаев в работе [79] предложены интересные результаты о свойствах матрицы $\mathcal{A}_n$ (см. также [83, 85]).

1.2. Некоторые общие результаты. В общем случае уравнения (0.1) предполагаем (в конкретных случаях выполнение этого предположения должно быть доказано), что матрица $\mathcal{A}_n$ является невырожденной хотя бы при $n \geqslant n_0$. Тогда, очевидно, имеем

$$0 < \|\mathcal{A}_n^{-1}\|_i \equiv \theta_{n,i} < \infty \quad (\, i = 1,\, 2,\, 3\,), \tag{1.7}$$

где $\theta_{n,i}$ означает i–ю норму матрицы $\mathcal{A}_n^{-1}$, согласованную с i–й нормой n–мерного вектора. Здесь и далее будем пользоваться следующими нормами векторов:

$$\|\sigma\|_1 = \max_{1 \leqslant k \leqslant n} |\sigma_k|, \quad \|\sigma\|_2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |\sigma_k|,$$

$$\|\sigma\|_3 = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |\sigma_k|^2 \right)^{1/2}, \quad \sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n),$$

$$\|\sigma\|_2 \leqslant \|\sigma\|_3 \leqslant \|\sigma\|_1.$$

Из условия (1.7) следует, что хотя бы при $n \geqslant n_0$ определяется приближенное решение

$$\varphi_n^*(t) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^* \psi_k(t), \quad -1 \leqslant t \leqslant 1, \tag{1.3*}$$

где $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*$ – решение СЛАУ (1.5). Докажем теоремы о его сходимости к точному решению $\varphi^*(t)$ и установим оценки погрешности в зависимости от свойств элементов уравнения (0.1).

Введем вектор погрешности $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n)$ с компонентами $\varepsilon_k = \varphi^*(\bar{t}_k) - \varphi_n^*(\bar{t}_k)$, и через $\omega(\varphi; \delta) = \omega(\varphi; \delta)_C = \omega(\varphi; \delta)_\infty$ будем обозначать, как и выше, модуль непрерывности функции $\varphi \in C[-1, 1]$ с шагом $\delta \in (0, 2]$.

Теорема 1.1. *Пусть выполнены условия:* а) $\int\limits_0^2 |h(\tau)|\, d\tau \equiv a < \infty$*;* б) *хотя бы при* $n \geqslant n_0$ *матрица* $\mathcal{A}_n$ *невырожденная;* в) *уравнение* (0.1) *имеет такое решение* $\varphi^* \in C[-1, 1]$, *что при* $n \to \infty$

$$\theta_{n,i}\, \omega(\varphi^*; 1/n)_C = o\,(1), \quad i = \overline{1, 3}. \tag{1.8}$$

Тогда приближенные решения (1.3*) *сходятся в следующем смысле:*

$$\|\varepsilon\|_i \leqslant a\, \theta_{n,i}\, \omega(\varphi^*; 1/n)_C = o\,(1), \quad i = \overline{1, 3}. \tag{1.9}$$

Доказательство. Введем оператор $S_n = S_n^0 : C[-1,1] \longrightarrow M[-1,1]$ по формуле

$$S_n\varphi = S_n^0(\varphi;t) = \sum_{k=1}^{n} \varphi(\bar t_k)\,\psi_k(t), \quad \varphi \in C[-1,1]. \tag{1.10}$$

Поскольку $F(\varphi^*;\bar t_j) = f(\bar t_j) = F(\varphi_n^*;\bar t_j)$, $j = \overline{1,n}$, то справедливо тождество

$$F(\varphi_n^* - S_n\varphi^*;\bar t_j) = F(\varphi^* - S_n\varphi^*;\bar t_j), \quad j = \overline{1,n}. \tag{1.11}$$

В силу (1.4) – (1.6) это тождество можно представить в виде

$$\sum_{k=1}^{n} a_{j-k}\,[\varphi_n^*(\bar t_k) - \varphi^*(\bar t_k)] = F(\varphi^* - S_n\varphi^*;\bar t_j), \quad j = \overline{1,n}. \tag{1.12}$$

Запишем (1.12) в векторном виде

$$\mathcal{A}_n\,\varepsilon = r, \tag{1.12$'$}$$

где ε и r суть n–мерные вектора с координатами соответственно ε_k и $r_k = -F(\varphi^* - S_n\varphi^*;\bar t_k)$, $k = \overline{1,n}$. Тогда с учетом условия б) теоремы имеем

$$\varepsilon = \mathcal{A}_n^{-1}\,r, \quad \|\varepsilon\|_i \leqslant \theta_{n,i}\,\|r\|_i, \ \ i = \overline{1,3}. \tag{1.13}$$

Ясно, что для вектора $r = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ справедливы неравенства

$$\|r\|_i \leqslant \|r\|_1 = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |F(\varphi^* - S_n\varphi^*;\bar t_k)| \leqslant \|F(\varphi^* - S_n\varphi^*)\|_C \leqslant$$

$$\leqslant \|F\|_{M\to C} \cdot \|\varphi^* - S_n\varphi^*\|_M, \quad i = 2,\,3. \tag{1.14}$$

Легко показать, что в силу условия а) теоремы имеем

$$\|F\|_{M\to C} = \|F\|_{C\to C} = \max_{-1\leqslant t\leqslant 1} \int_{-1}^{+1} |h(\tau - t)|\,d\tau = \int_0^2 |h(\tau)|\,d\tau \equiv a < \infty. \tag{1.15}$$

Из (1.13) – (1.15) находим оценки

$$\|\varepsilon\|_i \leqslant a\,\theta_{n,i}\,\|\varphi^* - S_n\varphi^*\|_M, \quad i = \overline{1,3}. \tag{1.16}$$

Очевидно, что для любой $\varphi \in C[-1,1]$

$$\|\varphi - S_n\varphi\|_M = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\ \max_{t_{i-1}\leqslant t\leqslant t_i} |\varphi(t) - \varphi(\bar t_i)| \leqslant \omega(\varphi; 1/n)_C. \tag{1.17}$$

Из (1.16), (1.17) получаем оценку (1.9), а из нее с учетом условия (1.8) следует утверждение теоремы.

Положим здесь $X(1) = M[-1,1]$, $X(2) = L_1[-1,1]$, $X(3) = L_2[-1,1]$ с нормами соответственно

$$\|\varphi\|_{M} = \sup_{-1\leqslant t\leqslant 1} |\varphi(t)| \equiv \|\varphi\|_{\infty}, \quad \varphi \in X(1),$$

$$\|\varphi\|_{L_1} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} |\varphi(t)|\,dt \equiv \|\varphi\|_{1}, \quad \varphi \in X(2),$$

$$\|\varphi\|_{L_2} = \left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} |\varphi(t)|^2\,dt\right)^{1/2} \equiv \|\varphi\|_{2}, \quad \varphi \in X(3).$$

Теорема 1.2. *В условиях теоремы* 1.1 *приближенные решения* (1.3^*) *сходятся соответственно равномерно (при* $i=1$ *) в среднем (при* $i=2$ *) и в среднем квадратичном (при* $i=3$ *) со скоростями соответственно*

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_{X(i)} = O\left\{\theta_{n,i}\,\omega\left(\varphi^*;1/n\right)_C\right\} = o(1), \quad i = \overline{1,3}. \tag{1.18}$$

Доказательство. В силу (1.10), (1.1), (1.2), (1.17) справедливы неравенства

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_{X(i)} \leqslant \|\varphi^* - S_n\varphi^*\|_{X(i)} + \|S_n[\varphi^* - \varphi_n^*]\|_{X(i)}, \tag{1.19}$$

$$\|\varphi^* - S_n\varphi^*\|_{X(i)} \leqslant \|\varphi^* - S_n\varphi^*\|_{X(1)} \leqslant \omega(\varphi^*;1/n)_C, \quad i = 2,\,3. \tag{1.20}$$

Функции $\varphi \in C[-1,1]$ поставим в соответствие n–мерный вектор $\vec{\varphi} = (\varphi(\bar{t}_1,\ldots,\varphi(\bar{t}_n)\,)$. Поскольку $S_n(\varphi;t) = \varphi(\bar{t}_k) \equiv \varphi_k$ для любой точки $t \in (t_{k-1},t_k]$, $k = \overline{1,n}$, то для любой функции $\varphi \in C[-1,1]$ легко находим

$$\|S_n(\varphi;t)\|_{X(1)} = \max_{1\leqslant k\leqslant n} |\varphi_k| = \|\,\vec{\varphi}\|_{1} \leqslant \|\varphi\|_{\infty}; \tag{1.21}$$

$$\|S_n(\varphi;t)\|_{X(2)} = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} |S_n(\varphi;t)|\,dt \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} |\varphi_k| \int_{-1}^{+1} \psi_k(t)\,dt =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |\varphi_k| = \|\vec{\varphi}\|_{2} \leqslant \|\vec{\varphi}\|_{3} \leqslant \|\vec{\varphi}\|_{1} \leqslant \|\varphi\|_{\infty}; \tag{1.22}$$

$$\|S_n(\varphi;t)\|_{X(3)} = \left(\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} |S_n(\varphi;t)|^2\,dt\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \varphi_k\,\varphi_j \int_{-1}^{+1} \psi_k(t)\,\psi_j(t)\,dt\right)^{1/2} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} |\varphi_k|^2 \int_{t_{k-1}}^{t_k} \psi_k^2(t)\,dt \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |\varphi_k|^2 \right)^{1/2} =$$

$$= \|\vec{\varphi}\|_3 \leqslant \|\vec{\varphi}\|_1 \leqslant \|\varphi\|_\infty. \tag{1.23}$$

Из соотношений (1.19) – (1.23) с учетом аппроксимативных свойств сплайна $S_n\varphi^*$ находим

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_{X(i)} \leqslant \|\varphi^* - S_n\varphi^*\|_{X(i)} + \|\vec{\varphi}^* - \vec{\varphi}_n{}^*\|_i \leqslant$$

$$\leqslant \omega(\varphi^*; 1/n)_\infty + \|\varepsilon\|_i, \quad i = \overline{1,3}, \tag{1.24}$$

где вектор $\varepsilon = \vec{\varphi}^* - \vec{\varphi}_n^*$ определен выше. Очевидно, что из формул (1.24) и (1.9) следует требуемое утверждение.

Теорему 1.2 несколько дополняет следующая

Теорема 1.3. *Пусть выполнены условия:* а) $F : L_2[-1,1] \longrightarrow C[-1,1]$ *– ограниченный оператор;* б) *существует* $\mathcal{A}_n^{-1}$ $(n \geqslant n_0)$ *и* $\|\mathcal{A}_n^{-1}\|_3 = \theta_{n,3} < \infty$ *;* в) *уравнение* (1.1) *разрешимо в* L_2 *хотя бы при данной правой части* $f(t) \in C[-1,1]$ *и его решение* $\varphi^*(t) \in L_2[-1,1]$ *удовлетворяет условию*

$$\theta_{n,3}\, \omega(\varphi^*; 1/n)_2 = o\,(1), \quad n \to \infty. \tag{1.25}$$

Тогда приближенные решения $\varphi_n^*(t)$ *сходятся в* $L_2[-1,1]$ *со скоростью*

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_2 = O\,\{\theta_{n,3}\, \omega(\varphi^*; 1/n)_2\}, \tag{1.26}$$

где $\omega(\varphi^*; \delta)_2$ *– модуль непрерывности функции* $\varphi^*(t)$ *с шагом* $\delta \in (0, 2]$ *в пространстве* $L_2[-1,1]$ *.*

Доказательство. Пусть $L_{2,n}$ – линейная оболочка, натянутая на элементы $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$. Ясно, что $L_{2,n} \subset L_2$ и уравнения (1.1) и (1.5) эквивалентны операторным уравнениям соответственно

$$F\varphi = f\,(\,\varphi,\, f \in L_2),\;\; F_n\varphi_n \equiv S_nF\varphi_n = S_nf\,(\varphi_n,\, S_nf \in L_{2,n}). \tag{1.27}$$

Для этих уравнений в силу теоремы 6 гл. I [25] и условия б) теоремы справедливо тождество

$$\varphi^* - \varphi_n^* = (E - F_n^{-1}S_nF)\,(\varphi^* - \varphi_n^0), \quad n \geqslant n_0, \tag{1.28}$$

где φ_n^0 – произвольный элемент из $L_{2,n}$. Положим

$$\varphi_n^0(t) = \frac{n}{2} \sum_{k=1}^{n} \psi_k(t) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi^*(t)\,dt. \tag{1.29}$$

Тогда, как известно (см., напр., [57]),

$$\|\varphi^* - \varphi_n^0\|_2 \leqslant \omega(\varphi^*; 2/n)_2 \leqslant 2\,\omega(\varphi^*; 1/n)_2. \qquad (1.30)$$

Из (1.28) – (1.30) следует оценка

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_2 \leqslant 2\,\omega(\varphi^*; 1/n)_2 \cdot (1 + \|F_n^{-1}\|_2 \cdot \|S_n F\|_2), \qquad (1.31)$$

где $F_n^{-1} : L_{2,n} \longrightarrow L_{2,n} \subset L_2$, $S_n F : L_2 \longrightarrow L_{2,n} \subset L_2$.

В силу (1.23) и условия а) теоремы для любого $\varphi \in L_2$ имеем

$$\|S_n F\varphi\|_{L_2} \leqslant \|F\varphi\|_C \leqslant \|F\|_{L_2 \to C} \cdot \|\varphi\|_{L_2} \equiv a' \, \|\varphi\|_{L_2}. \qquad (1.32)$$

Возьмем сплайн $\varphi_n(t) = \sum_{k=1}^n a_k \, \psi_k(t) \in L_{2,n}$ и образуем вектор $\vec{\varphi}_n = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ с компонентами $a_k = \varphi_n(\bar{t}_k)$, $k = \overline{1,n}$; наоборот, вектору $\vec{\varphi}_n = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ поставим в соответствие сплайн $\varphi_n(t) = \sum_{k=1}^n a_k \, \psi_k(t) \in L_{2,n}$. Тогда в силу (1.23) имеем

$$\|\varphi_n\|_{L_2} = \left\{ \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} |\varphi_n(t)|^2 \, dt \right\}^{1/2} = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right)^{1/2} = \|\vec{\varphi}_n\|_3, \quad (1.33)$$

и поэтому пространства $L_{2,n}$ и $\mathbb{R}^n$ являются изоморфными и изометричными. Отсюда и из (1.3) – (1.6), (1.27) находим

$$\|F_n \varphi_n\|_2 = \|\mathcal{A}_n \vec{\varphi}_n\|_3 \quad (\, \varphi_n \in L_{2,n}, \ \vec{\varphi}_n \in \mathbb{R}^n \,). \qquad (1.34)$$

Из (1.34), (1.33) следует, что операторы $F_n : L_{2,n} \longrightarrow L_{2,n}$ и матрицы $\mathcal{A}_n : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ обратимы (или нет) одновременно и

$$\|F_n\|_2 = \|\mathcal{A}_n\|_3; \qquad \|F_n^{-1}\|_2 = \|\mathcal{A}_n^{-1}\|_3 \equiv \theta_{n,3} < \infty. \qquad (1.35)$$

Теперь из (1.31), (1.32), (1.35) следует требуемое утверждение:

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_2 \leqslant 2\,(1 + a' \, \theta_{n,3}) \, \omega(\varphi^*; 1/n)_2. \qquad (1.26')$$

Замечание 1.1. Если F – ограниченный оператор в C или из L в C, то результат, аналогичный теореме 1.3, можно получить также в пространствах $C[-1,1]$ и $L[-1,1]$; при этом существенную роль играют аналоги соотношений (1.34), (1.35) для пар пространств $M[-1,1]$ и m_n; $L_1[-1,1]$ и l_1^n. А тогда теорема 1.1 может быть получена также только что указанным способом, т.е. с помощью общей теории приближенных методов анализа.

1.3. Приложения к конкретным уравнениям. Ясно, что для применимости теорем 1.1 – 1.3 необходимо знать некоторые структурные свойства решения $\varphi^*(t)$ уравнения (0.1) и свойства матрицы $\mathcal{A}_n$.

Отметим, что свойства $\varphi^*(t)$ для конкретных слабосингулярных разностных ядер $h(t-\tau)$ можно установить с помощью соответствующих результатов работ [9, 45, 66, 72]. А нужные нам свойства матрицы $\mathcal{A}_n$ с учетом ее симметричности и теплицевости в ряде случаев легко вывести из известных результатов В.А. Цецохо (см., напр., [78-81]). Приведем два из таких результатов в следующей лемме.

Лемма 1.1. а) *Если* $h(t,\tau) = |t-\tau|^{-\gamma}$, *где* $0 < \gamma = \text{const} < 1$, *то*

$$\theta_{n,3} = \|\mathcal{A}_n^{-1}\|_{_3} = O\,(n^{1-\gamma}); \tag{1.36}$$

б) *если же* $h(t-\tau) = \ln|t-\tau|$, *то*

$$\theta_{n,3} = \|\mathcal{A}_n^{-1}\|_{_3} = O\,(n). \tag{1.37}$$

Из теорем 1.1 – 1.3 и леммы 1.1 в случае ядер (0.3) следует

Теорема 1.4. *В случае ядер* (0.3) *СЛАУ* (1.5) *имеет единственное решение* $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_n^*$. *При этом справедливы утверждения:*

а) *Если решение уравнения* (0.1) *с ядром* $h(\tau) = |\tau|^{-\gamma}$, $0 < \gamma < 1$, *удовлетворяет условию* $\varphi^* \in H^\alpha[-1,1]$, $0 < \alpha \leqslant 1$, *то при* $\alpha + \gamma > 1$ *приближенное решение* (1.3^*) *сходится к точному решению* $\varphi^*(t)$ *со скоростью*

$$\max(\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_{_2}, \quad \|\vec{\varphi}^* - \vec{\varphi}_n^*\|_{_3}) = H(\varphi^*;\alpha)\cdot O\,(n^{1-\alpha-\gamma}); \tag{1.38}$$

если же $\varphi^* \in H_2^\alpha$, *а* $\gamma < 1/2$, *то и со скоростью*

$$\max(\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_{_2}, \quad \|\vec{\varphi}^* - \vec{\varphi}_n^*\|_{_3}) = H(\varphi^*;\alpha)_2\cdot O\,(n^{1-\alpha-\gamma}). \tag{1.39}$$

б) *Если решение уравнения* (0.1) *с ядром* $h(\tau) = \ln|\tau|$ *удовлетворяет условию* $\varphi^* \in H_2^\alpha[-1,1]$, $0 < \alpha \leqslant 1$, *то справедлива оценка* [1)]

$$\max(\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_{_2}, \quad \|\vec{\varphi}^* - \vec{\varphi}_n^*\|_{_3}) = H(\varphi^*;\alpha)_2\cdot O\,(n^{1-\alpha}), \tag{1.40}$$

где $H(\varphi;\alpha)$ *и* $H(\psi;\alpha)_2$ – *наименьшие постоянные условий Гёльдера функций* $\varphi \in H^\alpha$ *и* $\psi \in F_2^\alpha$ *в пространствах соответственно* $H^\alpha = \text{Lip}\ \alpha$ *и* $H_2^\alpha = \text{Lip}\ (\alpha, 2)$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$.

Замечание 1.2. Приведенные выше результаты справедливы лишь в случае, если точное решение с.и.у. (0.1) удовлетворяет условию $\varphi^* \in L_2[-1,1]$. Если же решение $\varphi^* \notin L_2[-1,1]$, то согласно теории с.и.у. (0.1) его, как правило, можно представить в виде

$$\varphi^*(t) = \psi^*(t)\,(1-t^2)^{-1/2}, \tag{1.41}$$

[1)] Здесь, как и выше, $\vec{\varphi}^* - \vec{\varphi}_n^*$ есть n–мерный вектор с координатами $\varphi^*(\bar{t}_k) - \varphi_n^*(\bar{t}_k) = \varphi^*(\bar{t}_k) - \alpha_k^*$, $\quad k = \overline{1,n}$..

где $\psi^* \in L_2[-1,1]$ – новая искомая функция, не обращающаяся в нуль в точках $t = \pm 1$. В этом случае аналоги приведенных выше результатов можно получить, выбирая в качестве основного пространства X пространство $L_p[-1,1]$ с показателем $p \in (1,2)$; однако в этом случае проще всего свести с.и.у. (0.1), как это указано в §3 гл. I, к частному случаю с.и.у. (0.2) относительно новой искомой функции $x(\sigma) = \psi(\cos\sigma)$ и пользоваться результатами следующих параграфов.

§2. Периодические уравнения

2.1. Сплайн–методы коллокации и подобластей нулевого порядка. Рассмотрим слабо с.и.у. I-рода (0.2), записанное в виде

$$Gx \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(|s-\sigma|)x(\sigma)\,d\sigma = y(s), \quad -\infty < s < +\infty, \tag{2.1}$$

где $y(s) \in C_{2\pi}$, $g(s) \in L_1[0,2\pi]$ – известные функции, а $x(s)$ – искомая функция, которая разыскивается в пространстве 2π–периодических функций $L_2[0,2\pi]$ с обычной нормой $\|x\| = \|x\|_2$.

Сразу отметим, что для уравнения (2.1) справедливы результаты, вполне аналогичные теоремам 1.1 – 1.4. В частности, для ядер (0.4), (0.5) имеет место утверждение, аналогичное лемме 1.1 и теореме 1.4. Здесь узлы сплайна и узлы коллокации определяются формулами соответственно

$$s_k = \frac{2k\pi}{n},\ k = \overline{0,n}; \quad \bar{s}_j = \frac{2j-1}{n}\,\pi, \quad j = \overline{1,n}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.2}$$

а функции $\psi_k(s)$ вводятся как и выше. Однако наличие дополнительной информации, т.е. периодичность функций $g(\sigma)$ и $y(s)$, позволяет получить и дополнительные результаты. Например, для ядра $g(\sigma) = -\ln|\sin(\sigma/2)|$ элементы матрицы $\mathcal{A}_n = [a_{j-k}]_{j=\overline{1,n}}^{k=\overline{1,n}}$ в рассматриваемом случае можно представить в виде

$$a_{j-k} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(j-k-\frac{1}{2})\delta}^{(j-k+\frac{1}{2})\delta} g(|\sigma|)\,d\sigma = \int\limits_{(k-j-\frac{1}{2})\delta}^{(k-j+\frac{1}{2})\delta} g(|\sigma|)\,d\sigma = a_{k-j} =$$

$$= \frac{\ln 2}{n} + \frac{1}{2\pi}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{\sin l(j-k+\frac{1}{2})\delta + \sin l(k-j+\frac{1}{2})\delta}{l^2}\,, \tag{2.3}$$

где $\delta = 2\pi/n$. Эта формула позволяет легко доказать, что матрица $\mathcal{A}_n$ является невырожденной при всех $n \geqslant 2$ и для третьей нормы обратной к ней матрицы справедлива оценка

$$\|\mathcal{A}_n^{-1}\|_{з} = O\,(n); \tag{2.4}$$

для остальных ядер из (0.4), (0.5) аналогично доказывается, что

$$\|\mathcal{A}_n^{-1}\|_{з} = O\,(n^{1-\gamma}), \quad 0 < \gamma < 1\,. \tag{2.5}$$

Заметим, что неравенства (2.4) и (2.5) хорошо согласуются с оценками соответственно (1.37) и (1.36) для непериодического случая. Поэтому для уравнения (2.1) метод сплайн–коллокации нулевого порядка приводит к результатам, вполне аналогичным теоремам 1.1 – 1.4. Однако здесь на подробных формулировках останавливаться не будем, а рассмотрим, хотя бы вкратце, метод сплайн–подобластей нулевого порядка.

Приближенное решение уравнения (2.1) будем искать в виде сплайна

$$x_n(s) = \sum_{k=1}^{n} \beta_k\, \psi_k(s), \quad -\infty < s < \infty, \tag{2.6}$$

где $\psi_k(s)$ суть 2π–периодические характеристические функции интервалов $(s_{k-1}, s_k]$. Неизвестные коэффициенты будем определять из условий

$$\int_{\Delta_j} G(x_n; s)\, ds = \int_{\Delta_j} y(s)\, ds\,, \quad j = \overline{1,n}, \;\; \Delta_j = [s_{j-1}, s_j]\,, \tag{2.7}$$

где узлы s_j определены в (2.2). Эти условия эквивалентны СЛАУ

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_{j-k}\, \beta_k = y_j, \quad j = \overline{1,n}, \tag{2.8}$$

где

$$y_j = \int_{\Delta_j} y(s)\, ds, \quad \alpha_{j-k} = \int_{\Delta_j} G(\psi_k; s)\, ds, \;\; \Delta_j = [s_{j-1}, s_j]. \tag{2.9}$$

С учетом свойств функции $g(\sigma)$ легко показать, что

$$\alpha_{j-k} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_j} ds \int_{\Delta_k} g(|s-\sigma|)\, d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{\Delta_{k-j}} ds \int_{s}^{s+\delta} g(|\sigma|)\, d\sigma = \alpha_{k-j}. \tag{2.10}$$

Таким образом, матрица СЛАУ (2.8) является симметричной и теплицевой, а это значительно облегчает исследование метода сплайн–подобластей. Для иллюстрации приведем следующие результаты.

Теорема 2.1. *Пусть ядро* $g(\sigma) \in L_1[0, 2\pi]$ *таково, что его косинус–коэффициенты Фурье неотрицательны и уравнение* (2.1) *имеет решение* $x^*(s) \in L_2[0, 2\pi]$ *хотя бы при данной правой части* $y(s) \in L_2[0, 2\pi]$. *Тогда решение уравнения* (2.1) *единственно и для любых* $n \in \mathbb{N}$ *СЛАУ* (2.8), (2.9) *имеет единственное решение* $\beta_1^*, \ldots, \beta_n^*$ *при любых правых частях.*

Доказательство. Уравнение (2.1) будем рассматривать как операторное уравнение вида

$$Gx = y \quad (\, x,\, y \in L_2[0, 2\pi]\,), \tag{2.1$'$}$$

где G – симметричный оператор. Для любой $x \in L_2$, как и в разделе 1.1 гл. I, имеем

$$(Gx, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(x)|^2 \, c_k(g),$$

где $c_k(x)$ и $c_k(g)$ – комплексные коэффициенты Фурье функций $x(s)$ и $g(s)$. В условиях теоремы легко видеть, что

$$c_k(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\sigma)\, e^{-ik\sigma}\, d\sigma = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} g(\sigma) \cos k\, \sigma \, d\sigma \geqslant 0 \tag{2.11}$$

для любых $k = 0, \pm 1, \ldots$ Поэтому оператор $G : L_2 \longrightarrow L_2$ является положительным. Отсюда заключаем, что уравнение (2.1) имеет единственное решение при данной правой части $y \in L_2$. Пусть $X_n \subset L_2[0, 2\pi]$ есть подпространство всех 2π–периодических сплайнов нулевого порядка с узлами $s_k,\ k = \overline{0, n}$, из (2.2). Поскольку $\dim\, X_n = n < \infty$, то в силу сказанного оператор G на X_n будет положительно определенным:

$$(Gx_n, x_n) \geqslant \gamma_n^2 \, (x_n, x_n), \quad x_n \in X_n, \tag{2.12}$$

где $\gamma_n^2 = \text{const} > 0$ и не зависит от $x_n \in X_n$, но, вообще говоря, зависит от n.

Обозначим через $\overline{S}_n : L_2 \longrightarrow X_n$ оператор, определяемый по формуле

$$\overline{S}_n(x; s) = \frac{n}{2\pi} \sum_{k=1}^{n} \psi_k(s) \int_{s_{k-1}}^{s_k} x(\sigma)\, d\sigma, \quad s_k = \frac{2k\pi}{n},\ x \in L_2. \tag{2.13}$$

Тогда СЛАУ (2.8), (2.9) эквивалентна операторному уравнению

$$G_n x_n \equiv \overline{S}_n G x_n = \overline{S}_n y \quad (\, x_n,\, \overline{S}_n y \in X_n\,). \tag{2.8$'$}$$

Легко показать, что $\overline{S}_n$ является оператором ортогонального проектирования на подпространство $X_n \subset L_2$. Поэтому для любого $x_n \in X_n$

с учетом (2.12), (2.13) последовательно находим

$$(G_n x_n, x_n) = (\overline{S}_n G x_n, x_n) = (G x_n, \overline{S}_n{}^* x_n) =$$
$$= (G x_n, \overline{S}_n x_n) = (G x_n, x_n) \geqslant \gamma_n^2 \, \|x_n\|_2^2, \tag{2.14}$$

где $\overline{S}_n{}^*$ – сопряженный с $\overline{S}_n$ оператор. Отсюда для любого $x_n \in X_n$ получаем неравенство

$$\|G_n x_n\|_2 \geqslant \gamma_n^2 \, \|x_n\|_2. \tag{2.15}$$

Из (2.15) следует, что оператор $G_n : X_n \longrightarrow X_n \subset L_2$ имеет левый линейный обратный G_{nl}^{-1} и $\|G_{nl}^{-1}\| \leqslant \gamma_n^{-2}$ $(n \in \mathbb{N})$. Так как $G_n : X_n \longrightarrow X_n$ с $\dim X_n = n < \infty$, то существует также правый линейный обратный G_{nr}^{-1} и $G_{nl}^{-1} = G_{nr}^{-1} = G_n^{-1}$, причем

$$\|G_n^{-1}\|_2 \leqslant \gamma_n^{-2} \quad (\, n \in \mathbb{N}\,). \tag{2.16}$$

Эти соотношения приводят к справедливости теоремы 2.1.

Замечание 2.1. Следует отметить, что $\gamma_n^2 \to 0$ при $n \to \infty$, чтó хорошо согласуется с неограниченностью оператора G^{-1} в L_2 и тем легко доказываемым фактом, что $G_n = \overline{S}_n G : L_2 \longrightarrow L_2$ сходится (по крайней мере, сильно) к оператору $G : L_2 \longrightarrow L_2$; более того, поскольку $\overline{S}_n \to E$ сильно в L_2, а оператор G во многих случаях (напр., для ядер (0.4), (0.5)) является вполне непрерывным, то в указанных случаях $G_n \to G$ равномерно в L_2, т.е. $\|G_n - G\|_2 \to 0$ при $n \to \infty$.

Теорема 2.2. *Если в условиях теоремы* 2.1 *решение* $x^* \in L_2[0, 2\pi]$ *уравнения* (2.1) *таково, что*

$$\omega(x^*; 1/n)_2 = o(\gamma_n^2), \tag{2.17}$$

то приближенные решения $x_n^*(s) = G_n^{-1} \overline{S}_n y = \sum_{k=1}^n \beta_k^* \, \psi_k(s)$ *сходятся в среднем со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O\,\{\gamma_n^{-2}\, \omega(x^*; 1/n)_2\,\}. \tag{2.18}$$

Доказательство. В силу (2.16) для уравнений $(2.1')$ и $(2.8')$ из теоремы 6 гл. I [25] следует оценка

$$\|x^* - x_n^*\|_2 \leqslant (1 + \|G_n^{-1} \overline{S}_n G\|_2)\, \|x^* - \overline{S}_n x^*\|_2. \tag{2.19}$$

Поскольку

$$\|G_n^{-1} \overline{S}_n G\|_{L_2 \to L_2} \leqslant \|G_n^{-1}\|_{X_n \to X_n} \cdot \|\overline{S}_n\|_{L_2 \to L_2} \cdot \|G\|_{L_2 \to L_2}, \quad n \in \mathbb{N},$$

то в силу (2.19) имеем

$$\|x^* - x_n^*\|_2 \leqslant (1 + \gamma_n^{-2}\,\|G\|_2)\,\|x^* - \overline{S}_n x^*\|_2.$$

Отсюда и из аналога неравенств (1.30) в периодическом случае находим

$$\|x^* - x_n^*\|_2 \leqslant (1 + \gamma_n^{-2}\,\|G\|_2)\,\omega(x^*; 2\pi/n)_2. \tag{2.20}$$

Из (2.20) и (2.17) следует требуемое утверждение:

$$\|x^* - x_n^*\|_2 \leqslant (1 + 2\,\pi)\,(1 + \gamma_n^{-2}\,\|G\|_2)\,\omega(x^*; 1/n)_2 =$$

$$= O\,\{\gamma_n^{-2}\,\omega(x^*; 1/n)_2\} = o(1). \tag{2.18$'$}$$

Теперь применим метод сплайн–подобластей к полному уравнению вида

$$Ax \equiv Gx + Tx = y \quad (\, x,\, y \in L_2\,), \tag{2.21}$$

где оператор G определен в (2.1), а

$$Tx \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(s,\sigma)x(\sigma)\,d\sigma, \quad h(s,\sigma) \in L_2[0,2\pi]^2. \tag{2.22}$$

Приближенное решение уравнения (2.21) ищем в виде сплайна (2.6), коэффициенты $\beta_1,\,\beta_2,\ldots,\beta_n$ которого определяем из условий

$$\int_{\Delta_j} A(x_n; s)\,ds = \int_{\Delta_j} y(s)\,ds, \quad j = \overline{1,n},\;\; \Delta_j = [s_{j-1}, s_j], \tag{2.23}$$

где узлы определены в (2.2). Ясно, что условия (2.23) эквивалентны, с одной стороны, СЛАУ порядка n относительно $\beta_1, \beta_2, \ldots,\; \beta_n$, с другой стороны, они эквивалентны операторному уравнению вида

$$A_n x_n \equiv \overline{S}_n G x_n + \overline{S}_n T x_n = \overline{S}_n y \quad (\, x_n,\, \overline{S}_n y \in X_n\,), \tag{2.24}$$

заданному в подпространстве $X_n = \mathcal{L}(\{\psi_k(s)\}_1^n\,) \subset L_2$, где оператор $\overline{S}_n$ определен в (2.13).

Для схемы (2.21) – (2.24) справедлива следующая

Теорема 2.3. *Пусть функции* $g(s) \in L_1[0,2\pi],\, y(s) \in L_2[0,2\pi]$, $h(s,\sigma) \in L_2[0,2\pi]^2$ *таковы, что выполнены условия теоремы 2.1 и*

$$\text{а)}\;\; G^{-1}y \in L_2, \quad \sigma_n \equiv \omega(G^{-1}y; 1/n)_2 = o(\gamma_n^2),$$

$$\text{б)}\;\; \rho_n \equiv \sup\{\omega(G^{-1}Tu; 1/n)_2 :\, u \in L_2,\; \|u\|_2 \leqslant 1\} = o(\gamma_n^2),$$

где γ_n^2 *определено в теореме* 2.1. *Если уравнение* (2.21) *при* $y = 0$ *имеет в* L_2 *лишь тривиальное решение, то при всех* n, *начиная с* *некоторого, операторы* $A_n : X_n \longrightarrow X_n$ *линейно обратимы. Приближенные решения* $x_n^* = A_n^{-1}\overline{S}_n y$ *сходятся к точному решению* x^* *уравнения* (2.21) *со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O\,\{\,(\rho_n + \sigma_n)\,\gamma_n^{-2}\,\} = o(1). \tag{2.25}$$

Доказательство. Уравнения (2.21) и (2.24) эквивалентны операторным уравнениям соответственно

$$Kx \equiv x + G^{-1}Tx = G^{-1}y \quad (\,x,\, G^{-1}y \in L_2\,), \tag{2.21$'$}$$

$$K_n x_n \equiv x_n + G_n^{-1}\overline{S}_n T x_n = G_n^{-1}\overline{S}_n y \quad (\,x_n,\, G_n^{-1}\overline{S}_n y \in X_n\,). \tag{2.24$'$}$$

В силу условия б) оператор $G^{-1}T : L_2 \longrightarrow L_2$ является вполне непрерывным. Поэтому существует непрерывный обратный $K^{-1} : L_2 \longrightarrow L_2$. В силу теоремы 2.2 и условия а) имеем

$$\|G^{-1}y - G_n^{-1}\overline{S}_n y\| = O\,(\gamma_n^{-2}\,\omega(G^{-1}y; 1/n)_2) = O\,(\gamma_n^{-2}\,\sigma_n) = o(1). \tag{2.26}$$

Для любого $x_n \in X_n$ $(x_n \neq 0)$ благодаря теореме 2.2 и условию б) находим

$$\|Kx_n - K_n x_n\|_2 = \|G^{-1}Tx_n - G_n^{-1}\overline{S}_n T x_n\|_2 \leqslant$$
$$\leqslant \|x_n\|_2\,\|G^{-1}Tu - G_n^{-1}\overline{S}_n Tu\|_2 \leqslant \|x_n\|_2 \cdot O\,\{\gamma_n^{-2}\,\omega(G^{-1}Tu; 1/n)_2\} \leqslant$$
$$\leqslant \|x_n\|_2 \cdot O\,(\rho_n/\gamma_n^2\,), \quad u = x_n/\|x_n\|_2.$$

Поэтому

$$\|K - K_n\|_{X_n \to X} = O\,(\rho_n/\gamma_n^2) = o(1). \tag{2.27}$$

Применив к уравнениям (2.21$'$) и (2.24$'$) теорему 7 гл. I [25], в силу (2.26) и (2.27) получим требуемое утверждение.

Для применения теорем 2.2 и 2.3 необходимо знать хотя бы оценку величины γ_n^2. Такие оценки могут быть установлены либо самостоятельно, либо с помощью аналогичных оценок для метода сплайн–коллокации. Например, справедлива

Лемма 2.1. *Если* $g(\sigma) = \ln|\sin(\sigma/2)|$, *то* $\gamma_n^{-2} = O\,(n)$; *если же* $g(\sigma) = |\sin(\sigma/2)|^{-\gamma}$ *или* $g(\sigma) = |\mathrm{ctg}\,(\sigma/2)|^{\gamma}$, $0 < \gamma < 1$, *то* $\gamma_n^{-2} = O\,(n^{1-\gamma})$, *причем в обоих случаях СЛАУ* (2.8), (2.9) *имеет единственное решение при любых* $n \in \mathbb{N}$.

Замечание 2.2. а) Лемма 2.1 позволяет конкретизировать теоремы 2.1 – 2.3 в случае конкретных ядер; б) результаты по методу сплайн–подобластей нулевого порядка, аналогичные теоремам 2.1 – 2.3 и лемме 2.1, можно получить также для уравнения (0.1).

2.2. Схема метода сплайн–коллокации первого порядка. Для простоты выкладок этот метод будем рассматривать для нечетного числа узлов

$$s_k = \frac{2k\pi}{2n+1} = k\delta, \quad \delta = \frac{2\pi}{2n+1}, \ \ k = \overline{-n, n}. \tag{2.28}$$

Обозначим через $\{\varphi_k(s)\}_{-n}^{n}$ систему 2π–периодических фундаментальных сплайнов первого порядка по системе узлов (2.28). Известно, что

$$\varphi_k(s) = \varphi_0(s - s_k), \ \ \varphi_k(-s) = \varphi_k(s), \ \ \varphi_k(s + 2\pi j) = \varphi_k(s), \ k = \overline{-n, n},$$

$$j = \pm 1, \pm 2, \ldots, \ \ \varphi_0(s) = \{1 - |s/\delta| \text{ при } \ s \in [-\delta, \delta]\,; \ 0 \text{ при } \ s \notin [-\delta, \delta]\,\}.$$

Приближенное решение уравнения (0.2) будем искать в виде сплайна

$$x_n(s) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k \, \varphi_k(s), \quad -\infty < s < \infty, \tag{2.29}$$

коэффициенты которого определяются из условий $G(x_n; s_j) = y(s_j)$, $j = \overline{-n, n}$. Эти условия эквивалентны СЛАУ

$$\sum_{k=-n}^{n} b_{j-k} \, \alpha_k = y_j, \ \ j = \overline{-n, n}, \ \ y_j = y(s_j), \, b_{j-k} = G(\varphi_k; s_j). \tag{2.30}$$

С учетом четности и периодичности функций $g(\sigma)$ и $\varphi_k(s)$ последовательно находим

$$b_{j-k} = G(\varphi_k; s_j) = \frac{1}{2\pi} \int_{s_{k-1}}^{s_{k+1}} g(|s_j - \sigma|) \, \varphi_0(\sigma - s_k) \, d\sigma =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} g(|s_j - s_k - \sigma|) \varphi_0(\sigma) \, d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} g(|s_j - s_k - \sigma|) \, (1 - |\sigma/\delta|) \, d\sigma =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\delta} \{ g(|(j-k)\delta + \sigma|) + g(|(k-j)\delta + \sigma|) \, \} \, (1 - \sigma/\delta) \, d\sigma = b_{k-j}. \tag{2.31}$$

Поэтому матрица $\mathcal{B}_n = [b_{j-k}\,]_{j=\overline{-n,n}}^{k=\overline{-n,n}}$ СЛАУ (2.30) является симметричной и теплицевой. Предположим, что она является невырожденной хотя бы при $n \geqslant n_0$. Тогда в любой норме, согласованной с нормой $(2n+1)$–мерного пространства векторов, имеем

$$0 < \|\mathcal{B}_n^{-1}\|_i \equiv \tau_{n,i} < \infty \quad (\, n \geqslant n_0; \ i = 1, 2, 3\,). \tag{2.32}$$

А тогда СЛАУ (2.30) имеет единственное решение $\{\alpha_k^*\}_{-n}^{n}$ и приближенные решения $x_n^*(s)$ (т.е. (2.29) при $\alpha_k = \alpha_k^*$) существуют при всех $n \geqslant n_0$. В следующем пункте устанавливаются условия его сходимости и оценки погрешности в общем случае.

2.3. Некоторые общие результаты. Здесь нам понадобятся оператор сплайн–интерполяции первого порядка

$$S_n f = S_n^1(f;s) = \sum_{k=-n}^{n} f(s_k)\,\varphi_k(s), \quad f \in C_{2\pi}, \tag{2.33}$$

и вектор погрешности $\varepsilon = \vec{x}^* - \vec{x}_n^*$ с компонентами $\varepsilon_k = x^*(s_k) - -x_n^*(s_k) = x^*(s_k) - \alpha_k^*,\ k = \overline{-n,n}$.

Теорема 2.4. *Пусть* $b = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi |g(\sigma)|\,d\sigma < \infty$ *и выполнены условия* (2.32). *Если уравнение* (2.1) *имеет такое решение* $x^* \in C_{2\pi}$, *что при* $n \to \infty$

$$\tau_{n,i}\,\|x^* - S_n x^*\|_\infty = o(1), \quad i = \overline{1,3}, \tag{2.34}$$

то приближенные решения $x_n^*(s)$ *сходятся к точному решению* $x^*(s)$ *со скоростью*

$$\|\varepsilon\|_i = O\left\{\tau_{n,i}\,\|x^* - S_n x^*\|_\infty\right\}, \quad i = \overline{1,3}. \tag{2.35}$$

Доказательство. Поскольку $G(x^*;s_j) = G(x_n^*;s_j),\ j = \overline{-n,n}$, то справедливы соотношения

$$G(x_n^* - S_n x^*;s_j) = G(x^* - S_n x^*;s_j), \quad j = \overline{-n,n}. \tag{2.36}$$

Ясно, что

$$G(x_n^* - S_n x^*;s_j) = \sum_{k=-n}^{n} [\alpha_k^* - x^*(s_k)]\,G(\varphi_k;s_j)\,, \quad j = \overline{-n,n}.$$

Отсюда и из (2.31) следует, что (2.36) можно представить в виде

$$\sum_{k=-n}^{n} b_{j-k}\,\varepsilon_k = r_j, \quad j = \overline{-n,n}, \tag{2.37}$$

где $r_j = -G(x^* - S_n x^*;s_j)$, или же в векторном виде

$$\mathcal{B}_n\varepsilon = r, \quad \varepsilon = \{\varepsilon_k\}_{-n}^n,\ \ r = \{r_j\}_{-n}^n. \tag{2.37$'$}$$

Тогда в силу (2.32) имеем

$$\|\varepsilon\|_i \leqslant \|\mathcal{B}_n^{-1}\|_i\,\|r\|_i = \tau_{n,i}\,\|r\|_i, \quad i = \overline{1,3}. \tag{2.38}$$

С учетом периодичности функции $g(\sigma) \in L_1[0,2\pi]$ легко показать, что для нормы оператора G в $C_{2\pi}$ имеем $\|G\|_\infty = b < \infty$. Поэтому для вектора r в любой из трех используемых здесь норм имеем

$$\|r\|_1 = \max_{-n\leqslant j\leqslant n} |r_j| = \max_{-n\leqslant j\leqslant n} |G(x^* - S_n x^*;s_j)| \leqslant$$

$$\leqslant \|G(x^* - S_n x^*)\|_\infty \leqslant b\,\|x^* - S_n x^*\|_\infty; \tag{2.39}$$

$$\|r\|_2 = \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} |r_j| \leqslant \|r\|_1 \leqslant b\,\|x^* - S_n x^*\|_\infty; \tag{2.40}$$

$$\|r\|_3 = \left\{ \frac{1}{2n+1} \sum_{j=-n}^{n} |r_j|^2 \right\}^{1/2} \leqslant \|r\|_1 \leqslant b\,\|x^* - S_n x^*\|_\infty. \tag{2.41}$$

Из неравенств (2.38) – (2.41) находим оценку

$$\|\varepsilon\|_i \leqslant b\,\tau_{n,i}\,\|x^* - S_n x^*\|_\infty, \quad i = \overline{1,3}, \tag{2.42}$$

откуда и следует требуемое утверждение.

Теорема 2.5. *Если уравнения* (2.1) *и* (2.30) *имеют решения* $x^*(s) \in C_{2\pi}$ *и* $\vec{x}_n{}^* = \{\alpha_k^*\}_{-n}^n \in \mathbb{R}^{2n+1}$, *то для погрешности приближенного решения* $x_n^*(s)$ *в пространствах* $C_{2\pi}$ *и* $L_2[-\pi,\pi]$ *справедливы оценки соответственно*

$$\|x^* - x_n^*\|_\infty \leqslant \|x^* - S_n x^*\|_\infty + \|\varepsilon\|_1, \tag{2.43}$$

$$\|x^* - x_n^*\|_2 \leqslant \|x^* - S_n x^*\|_2 + \|\varepsilon\|_3, \tag{2.44}$$

где $\varepsilon = \vec{x}^* - \vec{x}_n^*$ *– вектор погрешности.*

Следствие 1. *Если выполнено условие* (2.34) *при* $i = 1$, *то приближенные решения* $x_n^*(s)$ *сходятся равномерно со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_\infty = O\{\tau_{n,1}\,\|x^* - S_n x^*\|_\infty\}. \tag{2.45}$$

Следствие 2. *Если* G *– ограниченный оператор из* L_2 *в* $C_{2\pi}$ *и выполнено условие* (2.34) *при* $i = 3$, *то приближенные решения сходятся в среднем со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O\{\tau_{n,3}\,\|x^* - S_n x^*\|_2\}. \tag{2.46}$$

Доказательство. В условиях теоремы справедливы неравенства

$$\|x^* - x_n^*\|_X \leqslant \|x^* - S_n x^*\|_X + \|S_n[x^* - x_n^*]\|_X, \tag{2.47}$$

где $X = C_{2\pi}$ или L_2, а оператор $S_n = S_n^1$ определен в (2.33). Известно (см., напр., в [11]), что

$$\|S_n(f;s)\|_C \leqslant \max_{-n\leqslant k\leqslant n} |f(s_k)|, \quad f \in C_{2\pi}. \tag{2.48}$$

Очевидно, что из (2.47) при $X = C_{2\pi}$ и (2.48) при $f(s) = x^*(s) - x_n^*(s)$ следует оценка (2.43). Оценка (2.44) следует из (2.47) при $X = L_2$ и из следующей леммы (снова при $f(s) = x^*(s) - x^*_n(s)$), имеющей также определенный самостоятельный интерес:

Лемма 2.2. *Для любой функции $f(s) \in C_{2\pi}$ справедливы неравенства*

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\|\vec{f}\,\|_{_3} \leqslant \|S_n f\|_{_2} \leqslant \|\vec{f}\,\|_{_3}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.49}$$

где $\vec{f} = (f(s_{-n}), \ldots, f(s_0), \ldots, f(s_n))$ *, а*

$$\|\vec{f}\,\|_{_3} = \left\{ \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} |f(s_k)|^2 \right\}^{1/2}, \quad \|f\|_{_2} = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(s)|^2 \, ds \right\}^{1/2}.$$

Для доказательства (2.49) заметим, что в силу формулы (2.33) для любой $f \in C_{2\pi}$ имеем

$$2\pi \, \|S_n(f;s)\|^2_{_2} = \sum_{k=-n}^{n} \sum_{j=-n}^{n} f_k \, f_j \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k(s)\varphi_j(s) \, ds =$$

$$= \sum_{k=-n}^{n} f_k^2 \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k^2(s) \, ds + \sum_{k \neq j} f_k \, f_j \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k(s)\varphi_j(s) \, ds, \tag{2.50}$$

где $f_l = f(s_l)$, $l = \overline{-n, n}$. Используя периодичность и финитность функций $\varphi_l(s)$, последовательно находим

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k^2(s) \, ds = \int_{s_{k-1}}^{s_k} (\frac{s - s_{k-1}}{\delta})^2 \, ds + \int_{s_k}^{s_{k+1}} (\frac{s_{k+1} - s}{\delta})^2 \, ds = \frac{2}{3}\delta;$$

$$\sum_{k \neq j} f_k f_j \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k(s)\varphi_j(s) \, ds = \sum_{k=-n}^{n} [f_{k-1} f_k \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_{k-1}(s)\varphi_k(s) \, ds +$$

$$+ f_k f_{k+1} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_k(s)\varphi_{k+1}(s) \, ds \,] = \sum_{k=-n}^{n} [f_{k-1} f_k \int_{s_{k-1}}^{s_k} \varphi_{k-1}(s)\varphi_k(s) \, ds +$$

$$+ f_k f_{k+1} \int_{s_k}^{s_{k+1}} \varphi_k(s)\varphi_{k+1}(s) \, ds \,] = \frac{\delta}{2} \sum_{k=-n}^{n} (f_{k-1} f_k + f_k f_{k+1}). \tag{2.51}$$

Из (2.50) – (2.51) следует формула

$$\|S_n(f;s)\|^2_{_2} = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} f_k \cdot \frac{f_{k-1} + 4f_k + f_{k+1}}{6} \equiv \sigma. \tag{2.52}$$

Для вектора $\vec{f} = \{f_k\}_{-n}^{n}$, $f_k = f(s_k)$, в силу (2.52) и неравенства Буняковского с учетом соотношений $f_{k+N} = f_k$, $N = 2n+1$, находим оценки сверху

$$\sigma = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n} f_k^2 + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n} f_k\,(f_{k-1}+f_{k+1}\,) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n} f_k^2 + \frac{1}{6}\left\{\frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n} f_k^2\right\}^{1/2} \times$$

$$\times\left\{\frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n}(f_{k-1}+f_{k+1})^2\right\}^{1/2} \leqslant \frac{2}{3}\|\vec{f}\|_{3}^2 + \frac{1}{6}\|\vec{f}\|_{3}\cdot 2\,\|\vec{f}\|_{3} = \|\vec{f}\|_{3}^2. \tag{2.53}$$

С другой стороны, из (2.52) аналогично находим оценки снизу

$$\sigma \geqslant \frac{2}{3}\|\vec{f}\|_{3}^2 - \frac{1}{6}\Big|\frac{1}{2n+1}\sum_{k=-n}^{n} f_k(f_{k-1}+f_{k+1})\Big| \geqslant$$

$$\geqslant \frac{2}{3}\|\vec{f}\|_{3}{}^2 - \frac{1}{3}\|\vec{f}\|_{3}{}^2 = \frac{1}{3}\|\vec{f}\|_{3}{}^2. \tag{2.53$'$}$$

Из (2.52), (2.53) и (3.53′) следуют неравенства (3.49).

Из (2.44) и (2.34), (2.35) при $i = 1$ получаем утверждение следствия 1. Докажем следствие 2. В силу (2.37) и (2.38) последовательно находим

$$\|\varepsilon\|_{3} \leqslant \|\mathcal{B}_n^{-1}\|_{3}\,\|r\|_{3} \leqslant \tau_{n,3}\max_{-n\leqslant j\leqslant n}|G(x^*-S_nx^*;s_j)| \leqslant$$

$$\leqslant \tau_{n,3}\,\|G(x^*-S_nx^*)\|_{\infty} \leqslant \tau_{n,3}\,\|G\|_{2\to\infty}\cdot\|x^*-S_nx^*\|_{2} =$$

$$= O\,\{\tau_{n,3}\,\|x^*-S_nx^*\|_{2}\}. \tag{2.54}$$

Поэтому из (2.47) при $X = L_2$ и (2.49) следует оценка (2.46), откуда с учетом (2.34) при $i = 3$ следует утверждение следствия 2.

Теорема 2.5 и ее следствия доказаны полностью.

2.4. Приложения к конкретным уравнениям. Сначала рассмотрим два частных случая:

$$Gx \equiv \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sin\frac{s-\sigma}{2}\right|^{-\gamma} x(\sigma)\,d\sigma = y(s), \quad 0<\gamma<1,\;\; y\in C_{2\pi}, \tag{2.55}$$

$$Gx \equiv -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln\left|\sin\frac{s-\sigma}{2}\right|\cdot x(\sigma)\,d\sigma = y(s), \quad y\in C_{2\pi}. \tag{2.56}$$

Для этих уравнений весьма содержательные результаты по методу сплайн–коллокации первого порядка получены в работах В.А. Цецохо и В.В. Воронина (см., напр., [10, 78]). Из их результатов для уравнений (2.55) и (2.56) можно вывести следующие полезные неравенства соответственно

$$\|\mathcal{B}_n^{-1}\|_3 \leqslant d_1\, n^{1-\gamma}, \quad 0<\gamma<1, \tag{2.55$'$}$$

$$\|\mathcal{B}_n^{-1}\|_3 \leqslant d_2\, n, \tag{2.56$'$}$$

где d_i $(i=\overline{1,7})$ – положительные постоянные, не зависящие от n. Отсюда и из полученных выше результатов следует

Теорема 2.6. *Справедливы утверждения:*

а) *Если решение уравнения* (2.55) *таково, что* $\|x^*-S_nx^*\|_\infty = o(n^{\gamma-1})$, *то приближенные решения сходятся со скоростью*

$$\max\{\|x^*-x_n^*\|_2,\, \|\vec{x}^*-\vec{x}_n^*\|_3\} = O\,\{n^{1-\gamma}\,\|x^*-S_nx^*\|_\infty\}; \tag{2.57}$$

если же $x^*(s)\in W^rH^\alpha$ $(r=0$ *или* $1;\ 0<\alpha\leqslant 1)$, *то при* $r+\alpha+\gamma > 1$

$$\max\{\|x^*-x_n^*\|_2,\, \|\vec{x}^*-\vec{x}_n^*\|_3\} = H(x^{*(r)};\alpha)\cdot O\,(n^{1-r-\alpha-\gamma}). \tag{2.57$'$}$$

б) *Если решение уравнения* (2.56) *таково, что* $\|x^*-S_nx^*\|_\infty = o(n^{-1})$, *то приближенные решения сходятся со скоростью*

$$\max\{\|x^*-x_n^*\|_2,\, \|\vec{x}^*-\vec{x}_n^*\|_3\} = O\,\{n\,\|x^*-S_nx^*\|_\infty\}; \tag{2.58}$$

если же $x^*(s)\in W^1H^\alpha$ $(0<\alpha\leqslant 1)$, *то*

$$\max\{\|x^*-x_n^*\|_2,\, \|\vec{x}^*-\vec{x}_n^*\|_3\} = H(x^{*\prime};\alpha)\cdot O\,(n^{-\alpha}), \tag{2.58$'$}$$

где $\vec{x}^*-\vec{x}_n^* = \{x^*(s_k)-x_n^*(s_k)\}_{-n}^n$.

Теперь рассмотрим применение метода сплайн–коллокации первого порядка к полному уравнению вида

$$Ax \equiv -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left|\sin\frac{s-\sigma}{2}\right|\cdot x(\sigma)\,d\sigma + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(s,\sigma)x(\sigma)\,d\sigma = y(s), \tag{2.59}$$

где y и h – известные непрерывные 2π–периодические функции по каждой из переменных. Его приближенное решение будем искать в виде сплайна (2.29), который будем определять из условий $A(x_n^*;s_j) = y(s_j)$, $j=\overline{-n,n}$. Эти условия эквивалентны, очевидно, СЛАУ порядка $2n+1$ относительно коэффициентов α_k, $k=\overline{-n,n}$:

$$\sum_{k=-n}^{n} b_{j-k}\,\alpha_k + \sum_{k=-n}^{n} h_{jk}\,\alpha_k = y_j, \quad j=\overline{-n,n}; \tag{2.60}$$

здесь

$$y_j = y(s_j), \quad h_{jk} = \frac{1}{2\pi} \int_{s_{k-1}}^{s_{k+1}} h(s_j, \sigma)\varphi_k(\sigma)\, d\sigma = \frac{h(s_j, \xi_k)}{2n+1}\,, \qquad (2.61)$$

где коэффициенты b_{j-k} определены в (3.30) и (3.31) при $g(\sigma) = -\ln|\sin(\sigma/2)|$, узлы $s_j,\ s_k$ — в (3.28), а $\xi_k \in [s_{k-1}, s_{k+1}]$.

Теорема 2.7. *Пусть* $y(s) \in W^2H^\alpha$ *и* $h(s,\sigma) \in W^2H^\alpha (0 < \alpha \leqslant 1)$ *по переменной* s *равномерно относительно* σ. *Если уравнение* (2.59) *однозначно разрешимо в* L_2 *при любой правой части из* W_2^1, *то при всех* n, *начиная с некоторого, СЛАУ* (2.60), (2.61) *имеет единственное решение* $\{\alpha_k^*\}_{-n}^n$. *Приближенные решения* $x_n^*(s)$ *(т.е.* (2.29) *при* $\alpha_k = \alpha_k^*$ *) сходятся в среднем к точному решению* $x^*(s)$ *со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O\,(n^{-\alpha}), \quad 0 < \alpha \leqslant 1. \qquad (2.62)$$

Доказательство. В силу результатов §1 гл. I уравнение (2.59) можно записать в пространстве $X = L_2[-\pi, \pi]$ в виде эквивалентного операторного уравнения

$$Kx \equiv x + G^{-1}Tx = G^{-1}y \quad (\,x,\, G^{-1}y \in L_2\,), \qquad (2.63)$$

где операторы $G^{-1} : W_2^1 \longrightarrow L_2$ и $T : L_2 \longrightarrow W_2^1$ определены в §1 гл. I и соответственно в (2.22). Ясно, что в условиях теоремы оператор $K : L_2 \longrightarrow L_2$ непрерывно обратим.

Обозначим через $X_n = \mathcal{L}(\{\varphi_k\}_{-n}^n)$ подпространство 2π–периодических сплайнов первого порядка с узлами (2.28). Очевидно, что $X_n \subset L_2$, а СЛАУ (2.60), (2.61) эквивалентна заданному в X_n операторному уравнению

$$A_n x_n \equiv G_n x_n + S_n T x_n = S_n y \quad (\,x_n,\, S_n y \in X_n\,), \qquad (2.64)$$

где $G_n x_n = S_n G x_n$, причем оператор $S_n = S_n^1$ определен в (2.33). В силу сказанного выше уравнение (2.64) эквивалентно операторному уравнению

$$K_n x_n \equiv x_n + G_n^{-1} S_n T x_n = G_n^{-1} S_n y \quad (\,x_n,\, G_n^{-1} S_n y \in X_n\,). \qquad (2.65)$$

Поскольку $y \in W^2H^\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$, то в силу леммы 1.2 гл. I и известных теорем Привалова и Зигмунда о свойствах сопряженных функций (см., напр., [4, 66]) имеем

$$\frac{d}{ds}G^{-1}(y;s) = -2\frac{d}{ds}I\left(\frac{dy(\sigma)}{d\sigma}; s\right) =$$

$$= -2\, I\left(\frac{d^2 y(\sigma)}{d\sigma^2}; s\right) \in \{H^\alpha \quad \text{при} \quad \alpha < 1\,; \quad Z \quad \text{при} \quad \alpha = 1\}\,,$$

где I и Z – использованные в §1 гл. I оператор Гильберта и соответственно класс функций Зигмунда. Поэтому

$$H\left(\frac{d}{ds}G^{-1}y; \alpha\right) = 2\, H(Iy''; \alpha) \leqslant d_3\, H(y''; \alpha), \quad \alpha < 1;$$

$$Z\left(\frac{d}{ds}G^{-1}y\right) = 2\, Z(Iy'') \leqslant d_4\, Z(y'') \leqslant 2\, d_4\, F(y''; \alpha), \quad \alpha = 1,$$

где

$$Z(\varphi) = \sup_{\delta \neq 0} \frac{|\varphi(s+\sigma) - 2\varphi(s) + \varphi(s-\sigma)|}{\delta}, \quad \varphi \in Z.$$

Тогда с помощью известных аппроксимативных свойств оператора $S_n = S_n^1$ (см., напр., в [57]) имеем

$$\|G^{-1}y - S_n G^{-1}y\|_\infty = H(y''; \alpha) \cdot O\,(n^{-1-\alpha}), \quad 0 < \alpha \leqslant 1. \qquad (2.66)$$

А тогда в силу пункта б) теоремы 2.6 имеем

$$r_n \equiv \|G^{-1}y - G_n^{-1} S_n y\|_2 = O\,(n) \cdot \|G^{-1}y - S_n G^{-1}y\|_\infty =$$
$$= H(y''; \alpha) \cdot O\,(n^{-\alpha}), \quad 0 < \alpha \leqslant 1. \qquad (2.67)$$

В условиях теоремы функция $T(x_n; s)$ удовлетворяет условиям

$$T(x_n; s) \in W^2 H^\alpha, \quad H(d^2 T x_n / ds^2; \alpha) \leqslant d_5\, \|x_n\|_2\,.$$

Поэтому, полагая в (2.67) $y(s) = T(x_n; s)$, для любого $x_n \in X_n$ находим

$$\|G^{-1}Tx_n - G_n^{-1} S_n T x_n\|_2 = H\left(\frac{d^2 T x_n}{ds^2}; \alpha\right) \cdot O\,\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \leqslant \frac{d_6\, \|x_n\|_2}{n^\alpha}\,,$$

где d_5 и d_6 не зависят от $x_n \in X_n$. Отсюда получаем

$$l_n \equiv \|K - K_n\|_{X_n \to X} = \left\|G^{-1}T - G_n^{-1} S_n T\right\|_{X_n \to X} = O\,\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),\ 0 < \alpha \leqslant 1. \qquad (2.68)$$

Тогда на основании теоремы 7 гл. I [25] при всех n таких, что $q_n = \|K^{-1}\|_2\, l_n \leqslant d_7\, n^{-\alpha} < 1$, операторы $K_n : X_n \longrightarrow X_n$ линейно обратимы (а следовательно, СЛАУ (2.60), (2.61) однозначно разрешима) и приближенные решения $x_n^* = K_n^{-1} G_n^{-1} S_n y = A_n^{-1} S_n y$ сходятся со скоростью $\|x^* - x_n^*\|_2 = O\,(r_n + l_n) = O\,(n^{-\alpha}),\ 0 < \alpha \leqslant 1$. Таким образом, теорема 2.7 полностью доказана.

Замечание 2.3. Результаты по методу сплайн–коллокации первого порядка, аналогичные теоремам 2.4 – 2.7 и лемме 2.2, можно получить также для уравнения (0.1).

2.5. Метод сплайн–квадратур. Этот метод рассмотрим применительно к уравнению (2.59). Его приближенное решение будем искать в виде сплайна (2.29), коэффициенты $\alpha_{-n}, \ldots, \alpha_n$ которого будем определять из СЛАУ

$$\sum_{k=-n}^{n} b_{j-k}\, \alpha_k + \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} h(s_j, s_k)\, \alpha_k = y(s_j), \quad j = \overline{-n, n}, \tag{2.69}$$

где b_{j-k} определены в (2.31) при $g(\sigma) = -\ln|\sin(\sigma/2)|$, а узлы – в (2.28).

Для вычислительной схемы метода квадратур (2.59), (2.29), (2.69) справедлива следующая

Теорема 2.8. *Пусть в условиях теоремы* 2.7 $\partial^i h(s,\sigma)/\partial s^i \in H^\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1;\ i = 0, 1, 2)$ *по переменной* σ *равномерно относительно* s. *Тогда СЛАУ* (2.69) *имеет единственное решение* $\alpha^*_{-n}, \ldots, \alpha^*_n$ *хотя бы при достаточно больших* n. *Приближенные решения*

$$\widetilde{x}^*_n(s) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha^*_k\, \varphi_k(s), \quad -\infty < s < \infty, \tag{2.29*}$$

сходятся к точному решению $x^*(s)$ *в среднем со скоростью*

$$\|x^* - \widetilde{x}^*_n\|_2 = O\,(n^{-\alpha}), \quad 0 < \alpha \leqslant 1. \tag{2.70}$$

Доказательство. В обозначениях предыдущей теоремы СЛАУ (2.69) эквивалентна заданному в подпространстве $X_n \subset L_2$ операторному уравнению

$$\widetilde{A}_n x_n \equiv G_n x_n + T_n x_n = S_n y \quad (\, x_n,\, S_n y \in X_n\,), \tag{2.71}$$

где

$$\mu_n = T_n x_n, \quad \mu_n(s) = \frac{S_n}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} S^\sigma_n [h(s,\sigma) x_n(\sigma]\, d\sigma, \tag{2.72}$$

оператор $S_n = S^1_n$ определен в (2.33), а S^σ_n означает, что оператор S_n применяется по переменной σ. Как отмечено выше, при всех $n \geqslant n_0$ оператор $G_n : X_n \longrightarrow X_n$ линейно обратим. Поэтому уравнение (2.71) эквивалентно операторному уравнению

$$\widetilde{K}_n x_n \equiv x_n + G_n^{-1} T_n x_n = G_n^{-1} S_n y \quad (\, x_n,\, G_n^{-1} S_n y \in X_n\,). \tag{2.73}$$

Из (2.73) и (2.65) для любого $x_n \in X_n$ находим

$$K_n x_n - \widetilde{K}_n x_n = G_n^{-1} S_n \nu_n, \quad \nu_n(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [hx_n - S_n^{\sigma}(hx_n)]\, d\sigma. \quad (2.74)$$

Как показано при доказательстве теоремы 2.7, для любой $y \in W^2 H^{\alpha}$, $(0 < \alpha \leqslant 1)$ справедлива оценка (2.67). Полагая в ней $y(s) = \nu_n(s)$, для любого $x_n \in X_n$ находим

$$\|G_n^{-1} S_n \nu_n\|_2 \leqslant \|G^{-1}\nu_n\|_2 + H(\nu_n''; \alpha) \cdot O\,(n^{-\alpha}). \quad (2.75)$$

Положим

$$\nu_n^{(i)}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [h_i x_n - S_n^{\sigma}(h_i x_n)]\, d\sigma\,, \quad h_i(s,\sigma) = \frac{\partial^i h(s,\sigma)}{\partial s^i}\,, \quad (2.76)$$

где $i = 0, 1, 2$, а $h_0 \equiv h$. В силу леммы 1.2 гл. I и (2.76) имеем

$$\|G^{-1}\nu_n\|_2 \leqslant 2\,\|\nu_n\|_{W_2^1} = 2\,(\|\nu_n\|_2 + \|\nu_n{}'\|_2) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{1} \frac{1}{\pi} \| \int_{-\pi}^{\pi} [h_i x_n - S_n^{\sigma}(h_i x_n)]\, d\sigma \|_{\infty}\,. \quad (2.77)$$

Отсюда и из леммы 2.2 с учетом соответствующих результатов [42] находим

$$\|G^{-1}\nu_n\|_2 \leqslant \|x_n\|_2 \cdot O\,\{\omega_\sigma(h; 1/n)_\infty + \omega_\sigma(h_1; 1/n)_\infty\} =$$

$$= \|x_n\|_2 \cdot O\,(n^{-\alpha}), \quad x_n \in X_n,\ \ 0 < \alpha \leqslant 1, \quad (2.78)$$

где $\omega_\sigma(\psi; \delta)_\infty$ – модуль непрерывности с шагом $\delta > 0$ функции $\psi(s,\sigma) \in C[-\pi,\pi]^2$ по переменной σ равномерно относительно s. Для $\nu_n''(s)$ аналогично получаем

$$\|\nu_n''(s)\|_\infty \leqslant \|x_n\|_2 \cdot O\,\{\omega_\sigma(h_2; 1/n)_\infty\} = \|x_n\|_2 \cdot O\,(n^{-\alpha}).$$

Отсюда по аналогии с соответствующим результатом гл. 3 [25] находим

$$H(\nu_n''; \alpha) = \|x_n\|_2 \cdot O(1), \quad x_n \in X_n. \quad (2.79)$$

Из формул (2.74) – (2.79) следует оценка

$$\|K_n x_n - \widetilde{K}_n x_n\|_2 \leqslant \|x_n\|_2 \cdot O(n^{-\alpha}), \quad x_n \in X_n. \quad (2.80)$$

Поэтому в силу (2.68) имеем

$$\widetilde{l}_n \equiv \|\widetilde{K}_n - K\|_{X_n \to X} \leqslant l_n + \|K_n - \widetilde{K}_n\|_{X_n \to X_n} = O\,(n^{-\alpha})\,. \quad (2.81)$$

Теперь с учетом (2.80), (2.81) и (2.67) из теоремы 7 гл. I [25] следует требуемое утверждение.

§3. О характере и скорости сходимости сплайн–методов

3.1. О равномерной сходимости сплайн–методов. Из сходимости в среднем, установленной выше для сплайн–методов, можно вывести также равномерную сходимость с определенной скоростью. Приведем некоторые из таких результатов.

Теорема 3.1. *Если в условиях пункта* а) *теоремы* 1.4 *точное решение* $\varphi^* \in H^\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$, *то при* $\alpha+\gamma > 3/2$ *приближенные решения* $\varphi_n^*(t)$ *метода сплайн–коллокации нулевого порядка сходятся со скоростью*

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_{M} = H(\varphi^*; \alpha) \cdot O\left(n^{-\alpha-\gamma+3/2}\right); \tag{3.1}$$

если же $\varphi^* \in F_2^\alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$, *а* $\gamma < 1/2$, *то и со скоростью*

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_{M} = H(\varphi^*; \alpha)_2 \cdot O\left(n^{-\alpha-\gamma+3/2}\right). \tag{3.2}$$

Доказательство. Сначала докажем оценку (3.2). Как показано в теореме 1.4, при $\alpha + \gamma > 1$ справедлива оценка

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_{2} = H(\varphi^*; \alpha)_2 \cdot O\left(n^{1-\alpha-\gamma}\right). \tag{3.3}$$

Разность $\varphi^*(t) - \varphi_n^*(t)$ представим в виде

$$\varphi^*(t) - \varphi_n^*(t) = \sum_{k=1}^{\infty} [\varphi_{2^k n}^*(t) - \varphi_{2^{k-1}n}^*(t)]. \tag{3.4}$$

Легко видеть, что для любого сплайна $u_n(t) \in X_n = \mathcal{L}(\{\psi_k\}_1^n)$ справедливо неравенство

$$\|u_n\|_{M[-1,1]} \leqslant \sqrt{n}\, \|u_n\|_{L_2[-1,1]}. \tag{3.5}$$

В самом деле, полагая $u_n(t) = \sum_{k=1}^n u_n(t_k)\psi_k(t)$ и учитывая соотношения $\psi_k^2(t) = \psi_k(t)$ и (1.23), для любой $t \in [-1,1]$ имеем

$$|u_n(t)| \leqslant \left\{ \sum_{k=1}^n |u_n(t_k)|^2 \right\}^{1/2} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^n \psi_k(t) \right\}^{1/2} =$$

$$= \sqrt{n} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |u_n(t_k)|^2 \right\}^{1/2} = \sqrt{n}\, \|u_n\|_{L_2[-1,1]}.$$

Поскольку $\varphi_{2^k n}^*(t) - \varphi_{2^{k-1}n}^*(t) \in X_{2^k n}$, то с помощью (3.4), (3.5) получаем неравенства

$$\|\varphi^*(t) - \varphi_n^*(t)\|_{M} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|\varphi_{2^k n}^*(t) - \varphi_{2^{k-1}n}^*(t)\|_{M} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2^k n} \cdot \|\varphi^*_{2^k n} - \varphi^*_{2^{k-1}n}\|_2. \tag{3.6}$$

Так как в силу (3.3)

$$\|\varphi^*_{2^k n} - \varphi^*_{2^{k-1}n}\|_2 \leqslant \|\varphi^* - \varphi^*_{2^k n}\|_2 + \|\varphi^* - \varphi^*_{2^{k-1}n}\|_2 \leqslant$$
$$\leqslant H(\varphi^*;\alpha)_2 \cdot O\left\{(2^k n)^{1-\alpha-\gamma} + (2^{k-1}n)^{1-\alpha-\gamma}\right\} =$$
$$= H(\varphi^*;\alpha)_2 \cdot 2^{(k-1)(1-\alpha-\gamma)} \cdot O\left(n^{1-\alpha-\gamma}\right),$$

то из (3.6) следует оценка (3.2).

Оценка (3.1) может быть доказана совершенно аналогично. Однако здесь укажем другой способ доказательства, который понадобится также ниже. В рассматриваемом случае, как показано в теореме 1.4, справедливо неравенство

$$\|\varphi^* - \varphi^*_n\|_2 = H(\varphi^*;\alpha) \cdot O\left(n^{-\alpha-\gamma+1}\right). \tag{3.7}$$

Здесь разность $\varphi^*(t) - \varphi^*_n(t),\ t \in [-1,1]$, представим в виде

$$\varphi^* - \varphi^*_n = (\varphi^* - S_n\varphi^*) + S_n(\varphi^* - \varphi^*_n), \tag{3.8}$$

где оператор $S_n = S_n^0$ определен в (1.10). Полагая $u_n = S_n(\varphi^* - \varphi^*_n)$, из (3.5) и (1.23) находим

$$\|S_n(\varphi^* - \varphi^*_n)\|_{M[-1,1]} \leqslant \sqrt{n}\,\|S_n(\varphi^* - \varphi^*_n)\|_{L_2[-1,1]} \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{n}\,\|\vec{\varphi}^* - \vec{\varphi}^*_n\|_3 = \sqrt{n}\,\|\varepsilon\|_3. \tag{3.9}$$

Из (3.8), (3.9) и (1.38) последовательно находим требуемую оценку (3.1):

$$\|\varphi^* - \varphi^*_n\|_M \leqslant \|\varphi^* - S_n\varphi^*\|_M + \sqrt{n}\,\|\varepsilon\|_3 \leqslant$$
$$\leqslant H(\varphi^*;\alpha)\, n^{-\alpha} + \sqrt{n}\, H(\varphi^*;\alpha) \cdot O\left(n^{-\alpha-\gamma+1}\right) =$$
$$= H(\varphi^*;\alpha) \cdot O\left(n^{-\alpha} + n^{-\alpha-\gamma+3/2}\right) = H(\varphi^*;\alpha) \cdot O\left(n^{-\alpha-\gamma+3/2}\right).$$

Аналогичным образом может быть доказана также оценка (3.2).

Для метода сплайн–коллокации первого порядка справедливы следующие две теоремы.

Теорема 3.2. а) *Если* $r + \alpha + \gamma > 3/2$, *то в условиях пункта* а) *теоремы* 2.6 *приближенные решения метода сплайн–коллокации первого порядка для уравнения* (2.55) *сходятся равномерно со скоростью*

$$\|x^* - x^*_n\|_\infty = O\left(n^{-r-\alpha-\gamma+3/2}\right) \quad (r = 0,\, 1;\ 0 < \alpha \leqslant 1,\ 0 < \gamma < 1);$$

б) *если* $\alpha > 1/2$, *то в условиях пункта* б) *теоремы* 2.6 *тот же метод для уравнения* (2.56) *сходится равномерно со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_\infty = O\,(n^{-\alpha+1/2}), \quad 1/2 < \alpha \leqslant 1.$$

Теорема 3.3. *Если* $\alpha > 1/2$, *то в условиях теоремы* 2.7 *метод сплайн–коллокации и в условиях теоремы* 2.8 *метод сплайн–квадратур решения уравнения* (2.59) *сходятся равномерно со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_\infty = O\,(n^{-\alpha+1/2}), \quad 1/2 < \alpha \leqslant 1.$$

Теоремы 3.2 и 3.3 доказываются аналогично теореме 3.1.

3.2. О сходимости невязки сплайн–методов. Приведенные в §§1 и 2 результаты позволяют доказать сходимость невязки приближенного решения. Здесь особый интерес представляет тот случай, когда сходимости приближенных решений может и не быть даже в L_2, а невязка сходится не только в среднем, но и равномерно. Приведем один из таких результатов.

Теорема 3.4. *Если* $\alpha > 1/2$, *то в условиях пункта* б) *теоремы* 1.4 *невязка приближенного решения* (1.3*) *метода сплайн–коллокации нулевого порядка сходится равномерно со скоростью*

$$\|f - H\varphi_n^*\|_\infty = O\,\{\omega(f;1/n)_\infty + n^{-\alpha+1/2}\}, \quad 1/2 < \alpha \leqslant 1. \qquad (3.10)$$

Доказательство. В силу (1.40) имеем

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_2 = H(\varphi^*;\alpha)_2 \cdot O\,(n^{1-\alpha}), \quad 0 < \alpha \leqslant 1.$$

Поэтому

$$\|\varphi_n^*\|_2 \leqslant \|\varphi^*\|_2 + H(\varphi^*;\alpha)_2 \cdot O\,(n^{1-\alpha}) = O\,(n^{1-\alpha}). \qquad (3.11)$$

Поскольку $S_n F\varphi_n^* \equiv S_n f$, где $S_n = S_n^0$, то

$$\|f - F\varphi_n^*\|_C \leqslant \|f - S_n f\|_M + \|F\varphi_n^* - S_n F\varphi_n^*\|_M. \qquad (3.12)$$

Нетрудно показать, что функция $F(\varphi_n^*;t)$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $1/2$ и с постоянной $a_0\,\|\varphi_n^*\|_2$, где a_0 – положительная постоянная, не зависящая от n и φ_n^*. Тогда из (3.12), (1.17) и (3.11) последовательно находим

$$\|f - F\varphi_n^*\|_\infty \leqslant \omega(f;1/n)_\infty + a_0\,\|\varphi_n^*\|_2/\sqrt{n} = \omega(f;1/n)_\infty +$$

$$+(a_0/\sqrt{n}) \cdot O\,(n^{1-\alpha}) = O\,\{\omega(f;1/n)_\infty + n^{1/2-\alpha}\}, \quad 1/2 < \alpha \leqslant 1.$$

Теорема 3.5. *Если уравнение* (2.56) *имеет решение* $x^* \in C_{2\pi}$ *при данной правой части* $y \in C_{2\pi}$, *то для погрешности в* L_2 *метода сплайн–коллокации* I*–порядка справедлива оценка*

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O\,(n\,\|x^* - S_n^1 x^*\|_2\,). \tag{3.13}$$

В то же время для невязки справедлива равномерная оценка

$$\|y - Gx_n^*\|_\infty = O\,\{\|y - S_n^1 y\|_\infty + n^{-1/2}\,\|x_n^*\|_2\,\}, \tag{3.14}$$

где $\|x_n^*\|_2 \leqslant \|x^*\|_2 + O\,(n\,\|x^* - S_n^1 x^*\|_2\,)$, *а оператор* S_n^1 *определен в* (2.33).

Следствие. *Если* $x^* \in W_2^1$ *(для этого достаточно, чтобы* $y \in W_2^2$ *), то*

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = O\,(1), \quad \|y - Gx_n^*\|_\infty = O\,(n^{-1/2}). \tag{3.15}$$

Доказательство. Используя способ доказательства теорем 2.5 и 2.4, последовательно находим

$$\begin{gathered}\|x^* - x_n^*\|_2 \leqslant \|x^* - S_n^1 x^*\|_2 + \|S_n^1[x^* - x_n^*]\|_2 \leqslant \|x^* - S_n^1 x^*\|_2 + \\ +\|\varepsilon\|_3 \leqslant \|x^* - S_n^1 x^*\|_2 + \|\mathcal{B}_n^{-1}\|_3\,\|r\|_3 \leqslant \|x^* - S_n^1 x^*\|_2 + \\ +\tau_{n,3}\,\|r\|_1 \leqslant \|x^* - S_n^1 x^*\|_2 + \tau_{n,3}\,\|G(x^* - S_n^1 x^*)\|_\infty \leqslant \\ \leqslant \|x^* - S_n^1 x^*\|_2 \cdot (1 + \tau_{n,3}\,\|G\|_{2\to\infty}),\end{gathered} \tag{3.16}$$

где $\|G\|_{2\to\infty} \equiv \|G\|_{L_2\to C} \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \ln^2|\sin\sigma|\,d\sigma < \infty$. Из (3.16) и (2.56′) следует оценка (3.13).

Для доказательства (3.14) заметим, что функция $Gx_n^* \in W_2^1$, а следовательно, $Gx_n^* \in H^{1/2}(b_0\,\|x_n^*\|_2)$, где b_0 – положительная постоянная, не зависящая от n и x_n^*. Тогда с учетом аппроксимативных свойств оператора S_n^1 имеем

$$\begin{gathered}\|y - Gx_n^*\|_\infty \leqslant \|y - S_n^1 y\|_\infty + \|Gx_n^* - S_n^1 Gx_n^*\|_\infty \leqslant \\ \leqslant \|y - S_n^1 y\|_\infty + b_0\,n^{-1/2}\,\|x_n^*\|_2,\end{gathered}$$

т.е. оценка (3.14) доказана.

Если $x^* \in W_2^1$, то легко показать, что $y \in W_2^2$ (и наоборот), а следовательно, $y \in W^1 H^{1/2}$. Тогда

$$\begin{gathered}\|x^* - S_n^1 x^*\|_2 = O\,(n^{-1}), \quad \|y - S_n^1 y\|_\infty = O\,(n^{-3/2}), \\ \|x_n^*\|_2 \leqslant \|x^*\|_2 + O(1) = O(1).\end{gathered}$$

Отсюда и из (3.13), (3.14) получаем утверждения следствия.

§4. Некоторые обобщения

4.1. Неулучшаемые оценки погрешности метода сплайн–коллокации. Приведенные выше результаты позволяют получить неулучшаемые по порядку оценки погрешности для сплайн–методов решения уравнений (0.1), (0.2) и некоторых их обобщений. Исследования здесь основаны на доказательстве обратимости слева соответствующих аппроксимирующих операторов сплайн–методов для характеристических частей рассматриваемых уравнений и на последующем применении результатов общей теории приближенных методов и теории приближения сплайнами. Проиллюстрируем сказанное применительно к методу сплайн–коллокации первого порядка (2.29), (2.59) – (2.61).

Теорема 4.1. *Пусть выполнены условия:* а) $y(s) \in W_2^1[-\pi, \pi]$, *а ядро* $h(s, \sigma)$ *таково, что оператор* $T : L_2 \longrightarrow W_2^1$ *вполне непрерывен;* б) *уравнение* (4.59) *имеет единственное решение* $x^* \in L_2[-\pi, \pi]$ *при любой правой части* $y \in W_2^1[-\pi, \pi]$. *Тогда при всех* $n \geqslant n_0$ *(*n_0 *определяется свойствами регулярного ядра* $h(s, \sigma)$, *в частности,* $n_0 = 0$, *если ядро* $h(s, \sigma) = 0$ *или же не зависит хотя бы от первой переменной) СЛАУ* (2.60), (2.61) *также имеет единственное решение* α_{k-n}^{*n}. *Приближенные решения* $x_n^*(s)$ *(т.е.* (2.29) *при* $\alpha_k = \alpha_k^*$ *) сходятся к точному решению* $x^*(s)$ *в пространстве* $L_2[-\pi, \pi]$ *со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_2 \asymp E_n^1(x^*)_2 \, , \tag{4.1}$$

где $E_n^1(x^*)_2 = \rho(x^*, X_n)_2$, $X_n = \{x_n\}$, *а знак* $\asymp$ *есть символ слабой эквивалентности.*

Доказательство. Ввиду излишней громоздкости выкладок приведем в основном лишь схему доказательства.

Положим: $X = L_2[-\pi, \pi] \equiv L_2$ с обычной нормой $\| \cdot \|_2$ и $Y = W_2^1[-\pi, \pi] \equiv W_2^1$ с нормой $\|y\|_Y = \|y\|_\infty + \|y'\|_2$, эквивалентной введенной в гл. I, и

$$X_n = \mathcal{L}(\{\varphi_k\}_{-n}^n) \cap L_2, \quad Y_n = \mathcal{L}(\{\varphi_k\}_{-n}^n) \cap W_2^1,$$

где $\{\varphi_k\}_{-n}^n$ – фундаментальные сплайны первой степени для системы узлов (2.28). Тогда уравнение (2.59) и СЛАУ (2.60), (2.61) эквивалентны операторным уравнениям соответственно

$$Ax \equiv Gx + Tx = y \quad (x \in X, \, y \in Y \,), \tag{4.2}$$

$$A_n x_n \equiv G_n x_n + S_n^1 T x_n = S_n^1 y \quad (x_n \in X_n, \, S_n^1 y \in Y_n \,), \tag{4.3}$$

где $G_n = S_n^1 G$, а оператор S_n^1 определен в (2.33).

В силу условий теоремы оператор $A : L_2 \longrightarrow W_2^1$ непрерывно обратим. Докажем, что операторы $A_n : X_n \longrightarrow Y_n$ ($n \geqslant n_0$) также непрерывно обратимы, а обратные операторы ограничены по норме в совокупности [1)] :

$$\|A_n^{-1}\| \leqslant e_1, \quad A_n^{-1} : Y_n \longrightarrow X_n\,. \tag{4.4}$$

С этой целью нам понадобятся следующие леммы.

Лемма 4.1. *Операторы $S_n^1 : Y \longrightarrow Y_n$ ограничены по норме в совокупности, точнее,*

$$\|S_n^1\| = 1\,, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4.5}$$

Следствие. *Для любой функции $y \in W_2^1$ сплайн $S_n^1 y \to y$, $n \to \infty$, в пространстве W_2^1 и*

$$\|y - S_n^1 y\|_Y \leqslant e_2\, \rho(y, Y_n)_Y. \tag{4.6}$$

Лемма 4.2. *Операторы $G_n = S_n^1 G : X_n \longrightarrow Y_n$ непрерывно обратимы при любых $n \in \mathbb{N}$ и*

$$\|G_n^{-1}\| \leqslant e_3, \quad G_n^{-1} : Y_n \longrightarrow X_n. \tag{4.7}$$

Лемма 4.3. *Операторы $G_n^{-1} S_n^1 : Y \longrightarrow X_n$ при $n \to \infty$ сильно сходятся к оператору $G^{-1} : Y \longrightarrow X$, причем для любой $y \in W_2^1$ имеем*

$$\|G^{-1} y - G_n^{-1} S_n^1 y\|_2 \leqslant e_4\, E_n^1(G^{-1} y)_2. \tag{4.8}$$

Лемма 4.4. *Операторы $G_n^{-1} S_n^1 T : X \longrightarrow X$ при $n \to \infty$ сходятся к оператору $G^{-1} T : X \longrightarrow X$ равномерно, причем*

$$\|(G^{-1} - G_n^{-1} S_n^1) T\|_2 \leqslant \nu_n \to 0, \quad n \to \infty, \tag{4.9}$$

где величина ν_n определяется мерой компактности (в частности, сглаживающими свойствами) оператора $T : X \longrightarrow Y$.

Теперь с помощью лемм 4.1 – 4.4 для любого $x_n \in X_n$ последовательно находим (см. также [47, 33])

$$\|A_n x_n\|_Y = \|G_n x_n + S_n^1 T x_n\|_Y \geqslant \|G_n^{-1}\|^{-1} \|G^{-1} A x_n -$$

$$-(G^{-1} - G_n^{-1} S_n^1) T x_n\|_2 \geqslant e_3^{-1} \left[\|G^{-1} A x_n\|_2 - \|(G^{-1} -\right.$$

$$\left. - G_n^{-1} S_n^1) T x_n\|_2\right] \geqslant e_3^{-1}\, \|A^{-1} G\|_2^{-1}\, \|x_n\|_2\, (1 - \nu_n\, \|A^{-1} G\|_2) \geqslant$$

---

1) Здесь $e_k\,(k = \overline{1,8})$ – вполне определенные положительные постоянные, не зависящие от n, об эффективности которых нетрудно судить по их происхождению.

$$\geqslant (e_3 \|A^{-1}\| \cdot \|G\|)^{-1} \, (1 - \nu_n \|A^{-1}\| \cdot \|G\|) \|x_n\|_2; \qquad (4.10)$$

здесь операторы $G, A : X \longrightarrow Y$; $G^{-1}, A^{-1} : Y \longrightarrow X$; $A^{-1}G : X \longrightarrow X$, а величина

$$q_n \equiv \nu_n \|A^{-1}G\|_2 \to 0, \quad n \to \infty. \qquad (4.11)$$

Поэтому существует такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geqslant n_0$ имеем $q_n \leqslant 1/2$. А тогда операторы $A_n : X_n \longrightarrow Y_n$, как известно (см., напр., теорему 1 и ее следствие гл. I [25]), обратимы слева и

$$\|A_{nl}^{-1}\| \leqslant e_3 \|A^{-1}G\|_2 (1 - q_n)^{-1} \leqslant 2\, e_3 \|A^{-1}G\|_2 \,; \qquad (4.4')$$

поскольку $\dim X_n = \dim Y_n < \infty$, то операторы $A_n : X_n \longrightarrow Y_n$ обратимы также справа, а тогда из (4.4′) следует неравенство (5.4) с $e_1 = 2\, e_3 \|A^{-1}G\|_2$.

Теперь, применив к уравнениям (4.2), (4.3) теорему 6 гл. I книги [25], получаем

$$\|x^* - x_n^*\|_2 = \|A^{-1}y - A_n^{-1}S_n^1 y\|_2 \leqslant \|E - A_n^{-1}S_n^1 A\|_2 \cdot \|x^* - x_n\|_2, \quad (4.12)$$

где x_n – произвольный элемент из X_n. Выбирая его так, чтобы $\|x^* - x_n\|_2 = E_n^1(x^*)_2$ и пользуясь неравенствами (4.4′), (4.6), (4.12), последовательно находим

$$E_n^1(x^*)_2 \leqslant \|x^* - x_n^*\|_2 \leqslant E_n^1(x^*)_2 \{1 + \|A_n^{-1}\|_{Y_n \to X_n} \cdot$$

$$\cdot \|S_n^1\|_{Y \to Y_n} \cdot \|A\|_{X \to Y}\} \leqslant E_n^1(x^*)_2 (1 + e_1 e_5), \qquad (4.13)$$

где $e_5 = \|A\|_{X \to Y}$. Отсюда следует требуемое утверждение.

Из теоремы 4.1 легко выводятся следующие теоремы.

Теорема 4.2. *В условиях теоремы* 4.1 *невязка метода сплайн–коллокации* (2.29), (2.59)–(2.61) *сходится в пространствах* W_2^1 *и* H^β $(0 < \beta \leqslant 1/2,\ H^0 \equiv C_{2\pi})$ *со скоростями соответственно*

$$\|y - Ax_n^*\|_{W_2^1} = O\{E_n^1(x^*)_2\}, \quad \|y - Ax_n^*\|_{H^\beta} = O\{E_n^1(x^*)_2\}.$$

Теорема 4.3. *Если* $x^* \in W^r H_2^\alpha \, (r \geqslant 0,\ 0 < \alpha \leqslant 1)$, *то в условиях теоремы* 4.1 *метод сплайн–коллокации первого порядка сходится в том смысле, что*

$$\|y - Ax_n^*\|_{W_2^1} \asymp \|x^* - x_n^*\|_{L_2} = \begin{cases} O\,(n^{-r-\alpha}) & \text{при} \quad 0 < r + \alpha \leqslant 2, \\ O\,(n^{-2}) & \text{при} \quad r + \alpha > 2; \end{cases}$$

если же $x^* \in W^r H^\alpha$ $(r \geqslant 0,\ 0 < \alpha \leqslant 1)$, *то*

$$\|x^* - x_n^*\|_{C} = \begin{cases} O\left(n^{-r-\alpha}\ln n\right) & \text{при} \quad 0 < r+\alpha \leqslant 2, \\ \\ O\left(n^{-2}\ln n\right) & \text{при} \quad r+\alpha > 2. \end{cases}$$

4.2. Метод сплайн–квадратур. Для метода сплайн–квадратур (2.29), (2.59), (2.69) при дополнительных условиях относительно регулярного ядра $h(s,\sigma)$ по переменной σ справедливы утверждения, аналогичные теоремам 4.1 – 4.3. Для иллюстрации приводятся следующие результаты.

Теорема 4.4. *Пусть функции* $y(s) \in W_2^1[-\pi,\pi]$ *и* $h(s,\sigma)$, $h_s'(s,\sigma) \in C[-\pi,\pi]^2$. *Если же уравнение* (2.59) *однозначно разрешимо в* L_2 *при любой правой части из* W_2^1, *то при всех* n, *начиная с некоторого, СЛАУ* (2.69) *также однозначно разрешима. Приближенные решения* $\widetilde{x}_n^*(s)$ *метода сплайн–квадратур сходятся к точному решению* $x^*(s)$ *в среднем со скоростью*

$$\|x^* - \widetilde{x}_n^*\|_2 = O\left\{E_n^1(x^*)_2 + \omega_\sigma(h;1/n)_\infty + \omega_\sigma(h_s';1/n)_\infty\right\}. \qquad (4.14)$$

Доказательство. СЛАУ (2.69) эквивалентна операторному уравнению

$$\widetilde{A}_n x_n \equiv G_n x_n + \widetilde{T}_n x_n = S_n^1 y \quad (\, x_n \in X_n,\ S_n^1 y \in Y_n\,), \qquad (4.15)$$

где

$$\widetilde{T}_n x_n \equiv \frac{S_n^1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} h(s,s_k) x_n(s_k), \quad x_n \in X_n \subset X. \qquad (4.16)$$

Поскольку в силу (2.29), (2.59) и (2.61)

$$S_n^1 T x_n = \frac{S_n^1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} h(s,\xi_k) x_n(s_k), \quad x_n \in X_n, \qquad (4.17)$$

где $s_{k-1} < \xi_k < s_{k+1}$, то из (4.3), (4.17) и (4.15), (4.16) для любого $x_n \in X_n$ находим

$$\|A_n x_n - \widetilde{A}_n x_n\|_{Y} = \|\frac{S_n^1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} \left[h(s,\xi_k) - h(s,s_k)\right] x_n(s_k)\|_{Y}.$$

Отсюда и из леммы 4.1 для любого $x_n \in X_n$ имеем

$$\|A_n x_n - \widetilde{A}_n x_n\|_{Y} \leqslant \|\frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} \left[h(s,\xi_k) - h(s,s_k)\right] x_n(s_k)\|_{Y} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{1} \frac{1}{2n+1} \| \sum_{k=-n}^{n} [h_i(s,\xi_k) - h_i(s,s_k)]\, x_n(s_k) \|_\infty \leqslant$$

$$\leqslant \Big[\sum_{i=0}^{1} \omega_\sigma \left(h_i; \frac{2\pi}{2n+1} \right)_\infty \Big] \cdot \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} |x_n(s_k)| \leqslant$$

$$\leqslant (1+\pi) \sum_{i=0}^{1} \omega_\sigma (h_i; \frac{1}{n})_\infty \cdot \left\{ \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} |x_n(s_k)|^2 \right\}^{1/2}, \qquad (4.18)$$

где $h_i(s,\sigma) = \partial^i h(s,\sigma)/\partial s^i$ $(i = 0,1)$. Из (4.18) и леммы 2.2 следует, что

$$\|A_n - \widetilde{A}_n\|_{X_n \to Y_n} \leqslant (1+\pi)\sqrt{3}\, \{\omega_\sigma(h; 1/n)_\infty + \omega_\sigma(h'_s; 1/n)_\infty \} \equiv \mu_n. \quad (4.19)$$

Поскольку $\mu_n \to 0$ монотонно при $n \to \infty$, а в силу теоремы 4.1 операторы $A_n : X_n \longrightarrow Y_n$ $(n \geqslant n_0)$ линейно обратимы, то из (4.4) и (4.19) следует, что при всех $n \geqslant n_1$ таких, что

$$r_n \equiv \|A_n^{-1}\|\, \mu_n < 1, \qquad (4.20)$$

операторы $\widetilde{A}_n : X_n \longrightarrow Y_n$ также линейно обратимы и

$$\|\widetilde{A}_n^{-1}\| \leqslant \|A_n^{-1}\|\, (1 - r_n)^{-1} \leqslant e_6, \qquad (4.21)$$

$$\|A_n^{-1} - \widetilde{A}_n^{-1}\|_{Y_n \to X_n} \leqslant e_7\, \|A_n - \widetilde{A}_n\|_{X_n \to Y_n} \leqslant e_7\, \mu_n. \qquad (4.22)$$

Поэтому СЛАУ (2.69) при всех $n \geqslant \max(n_0, n_1)$ однозначно разрешима и в силу (4.19) – (4.22) и леммы 4.1 имеем

$$\|x_n^* - \widetilde{x}_n^*\|_2 = \|(A_n^{-1} - \widetilde{A}_n^{-1})\, S_n^1 y\|_2 \leqslant$$

$$\leqslant \|A_n^{-1} - \widetilde{A}_n^{-1}\|_{Y_n \to X_n} \cdot \|S_n^1 y\|_Y \leqslant e_7\, \mu_n\, \|y\|_Y = e_8\, \mu_n. \qquad (4.23)$$

Поскольку

$$\|x^* - \widetilde{x}_n^*\|_2 = \|(A^{-1} - \widetilde{A}_n^{-1} S_n^1) y\|_2 \leqslant \|x_n^* - \widetilde{x}_n^*\|_2 + \|x^* - x_n^*\|_2,$$

где $x_n^*(s)$ – приближенное решение, построенное методом сплайн–коллокации, то из неравенств (4.1), (4.23) и (4.19) следует требуемая оценка (4.14).

Теорема 4.4 доказана. Из нее для метода сплайн–квадратур можно получить утверждения, аналогичные теоремам 4.2 и 4.3 для метода сплайн–коллокации; например, справедлива следующая

Теорема 4.5. *Пусть выполнены условия:* а) $y(s) \in W^{r+1}H_2^\alpha$ *и* $h(s,\sigma) \in W^{r+1}H_2^\alpha$ *по переменной* s, *где* $r \geqslant 0,\ 0 < \alpha \leqslant 1$;

б) *функции* $h_i(s,\sigma) \equiv \partial^i h(s,\sigma)/\partial s^i \in W^r H^\alpha$ *по переменной* σ, *где* $i=0$ *и* $i=1$ *;* в) *с.и.у.* (3.59) *однозначно разрешимо в* L_2 *при любой правой части из* W_2^1. *Тогда приближенные решения* $\widetilde{x}_n^*(s)$ *метода сплайн–квадратур и соответствующие невязки сходятся со скоростью*

$$\|x^* - \widetilde{x}_n^*\|_{L_2} \asymp \|y - A\widetilde{x}_n^*\|_{W_2^1} =$$

$$= \{\, O\,(n^{-r-\alpha}) \text{ при } 0 < r+\alpha \leqslant 2\,;\; O\,(n^{-2}) \text{ при } r+\alpha > 2\,\}. \qquad (4.24)$$

Доказательство. В силу (4.19) и условия б) имеем при $r=0$ и $r=1$ соответственно

$$\mu_n \leqslant (1+\pi)\,\sqrt{3}\,\{H_\sigma(h;\alpha) + H_\sigma(h'_s;\alpha)\,\}\,n^{-\alpha},$$

$$\mu_n \leqslant (1+\pi)\,\sqrt{3}\,\{\|h'_\sigma\|_{C[-\pi,\pi]^2} + \|h''_{s\sigma}\|_{C[-\pi,\pi]^2}\,\}\,n^{-1}. \qquad (4.25)$$

Поэтому из теоремы 4.4 следует, что операторы $\widetilde{A}_n \;:\; X_n \longrightarrow Y_n$ из (4.15) непрерывно обратимы и обратные операторы ограничены по норме в совокупности:

$$\|\widetilde{A}_n^{-1}\| = O\,(1), \quad \widetilde{A}_n^{-1} \,:\, Y_n \longrightarrow X_n\,. \qquad (4.26)$$

Тогда в силу теоремы 6 гл. I [25] имеем

$$\|x^* - \widetilde{x}_n^*\|_2 \leqslant (1 + \|\widetilde{A}_n^{-1} S_n^1 A\|_2\,)\,\|x^* - \widetilde{x}\|_2 + \|\widetilde{A}_n^{-1}\| \cdot \|\widetilde{A}_n\widetilde{x} - A_n\widetilde{x}\|_Y\,, \qquad (4.27)$$

где $\widetilde{x}$ – произвольный элемент из X_n, а операторы $\widetilde{A}_n$ и A_n определены в (4.15) и (2.64). Отсюда и из (4.26), (4.5), (4.15), (2.64) следует оценка

$$\|x^* - \widetilde{x}_n^*\|_2 = O\,\{\|x^* - \widetilde{x}\|_2 + \|\,(\widetilde{T}_n - S_n^1 T)\,\widetilde{x}\|_Y\,\}. \qquad (4.28)$$

Из хода доказательства теоремы 4.4 видно, что

$$\|\widetilde{T}_n - S_n^1 T\| = O\,(1)\,, \quad \widetilde{T}_n - S_n^1 T \,:\, X \longrightarrow Y_n\,.$$

Поэтому в силу (4.28) имеем

$$\|x^* - \widetilde{x}_n^*\|_2 = O\,\{E_n^1(x^*)_2 + \|\,(\widetilde{T}_n - S_n^1 T)\,x^*\|_Y\,\}. \qquad (4.29)$$

Очевидно, что в силу леммы 4.1

$$\|\,(\widetilde{T}_n - S_n^1 T)\,x^*\|_Y \leqslant \sum_{i=0}^{1} \|h_i x^* - S_n^\sigma(h_i x^*)\|_{L_2\otimes L_2}. \qquad (4.30)$$

Из результатов раздела 1.1 гл. I и условий а) – в) теоремы следует, что решение $x^*(s)$ уравнения (2.59) удовлетворяет условиям

$$x^*(s) \in \{\, W^r H_2^\alpha \quad \text{при} \quad 0 < \alpha < 1\,; \quad W^r Z_2 \quad \text{при} \quad \alpha = 1\,\}, \qquad (4.31)$$

где $Z_2 = \{\varphi \in L_2 \,:\, \omega_2(\varphi;\delta)_2 = O\,(\delta),\ 0 < \delta \leqslant \pi\}$. Поэтому функция $h_i(s,\sigma)x^*(\sigma) \in \{W^r H_2^\alpha$ при $0 < \alpha < 1;$ $W^r Z_2$ при $\alpha = 1\}$ по переменной σ равномерно относительно s. Тогда из (4.30) и результатов по теории приближений сплайнами выводим, что

$$\|(\widetilde{T}_n - S_n^1 T)x^*\|_{_Y} = \begin{cases} O\,(n^{-r-\alpha}) & \text{при} \quad 0 < r+\alpha \leqslant 2\,; \\[2ex] \quad O\,(n^{-2}) & \text{при} \quad r+\alpha > 2\,. \end{cases} \qquad (4.32)$$

Из соотношений (4.29) – (4.32) следуют оценки (4.24).

4.3. О сплайн–методах высоких порядков. Рассмотрим интегро–функциональное уравнение вида

$$Dx \equiv -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|\sin\frac{\sigma - s}{2}\right| x(\sigma)\,d\sigma + T(x;s) = y(s), \qquad (4.33)$$

где $y \in W_2^1[0,2\pi]$, а $T \,:\, L_2[0,2\pi] \longrightarrow W_2^1[0,2\pi]$ – некоторый вполне непрерывный оператор. Решение этого уравнения будем аппроксимировать сплайнами высоких порядков. Обозначим через $X_{_N} \subset L_2[0,2\pi]$ подпространство всех 2π–периодических сплайнов степени $2r-1$ $(r \in \mathbb{N})$ с узлами

$$s_k = 2k\pi/N, \quad k = \overline{0,N}\,(N \,\in\, \mathbb{N}\,). \qquad (4.34)$$

Приближенное решение уравнения (4.33) будем искать в виде сплайна $x_{_N}(s) \in X_{_N}$, который будем определять как решение операторного уравнения

$$D_{_N}x_{_N} \equiv S^1_{_N}Gx_{_N} + S^1_{_N}Tx_{_N} = S^1_{_N}y(s) \quad (\,x_{_N} \in X_N,\; S^1_{_N}y \in Y_{_N}\,); \quad (4.35)$$

здесь $Y_{_N} \subset W_2^1[0,2\pi]$ есть подпространство сплайнов первого порядка с указанными узлами, $S^1_{_N} \,:\, W_2^1 \longrightarrow Y_{_N}$ – соответствующий оператор сплайн–интерполяции, а оператор G определен выше. Тогда справедлива следующая

Теорема 4.6. *Пусть уравнение* (4.33) *имеет единственное решение* $x^*(s) \in L_2[0,2\pi]$ *при любой правой части* $y(s) \in W_2^1[0,2\pi]$. *Тогда при всех* $N \in \mathbb{N}$, *начиная с некоторого, уравнение* (4.35) *также имеет единственное решение* $x^*_{_N}(s)$, *которое при* $N \to \infty$ *сходится со скоростью*

$$\|x^* - x^*_{_N}\|_{_2} \asymp \rho(x^*, X_{_N})_2. \qquad (4.36)$$

Следствие. *Пусть оператор* $T : L_2 \longrightarrow W_2^1$ *и правая часть* $y(s)$ *уравнения* (4.33) *таковы, что его решение удовлетворяет условию* $x^*(s) \in W^m H_2^\alpha$ $(m+1 \in \mathbb{N}, 0 < \alpha \leqslant 1)$. *Тогда в условиях теоремы* 4.6 *метод сплайн–коллокации сходится со скоростью*

$$\|x^* - x_N^*\|_2 = \begin{cases} O\,(N^{-m-\alpha}), & \text{если} \quad 0 < m+\alpha \leqslant 2\,r; \\ \\ O\,(N^{-2r}), & \text{если} \quad m+\alpha > 2\,r. \end{cases} \tag{4.36°}$$

4.4. Замечания. Завершая эту главу, уместно привести следующие утверждения.

1°. Результаты, аналогичные приведенным в этом и других параграфах этой главы, справедливы также для систем с.и.у. I -рода со слабыми особенностями вида (а), (б) раздела 1.14 гл. I. Обоснование этого утверждения проводится по схеме, предложенной в гл. I при рассмотрении аналогичного вопроса для полиномиальных методов.

2°. Результаты §4 *по сплайн–методам* могут быть применены при обосновании *полиномиальных методов* коллокации и квадратур. Для иллюстрации приведем следующий результат.

Приближенное решение уравнения (4.33) ищем в виде полинома

$$x_n(s) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k\, e^{iks}, \quad n+1 \in \mathbb{N}, \tag{4.37}$$

коэффициенты которого будем определять по методу коллокации из СЛАУ

$$\sum_{k=-n}^{n} \alpha_k\, D(e^{ik\sigma}; s_j) = y(s_j), \quad j = \overline{-n, n}, \tag{4.38}$$

где узлы определены в (2.28). Для этой схемы справедлива

Теорема 4.7. *Пусть:* а) $T : L_2 \longrightarrow W_2^1$ *есть вполне непрерывный оператор;* б) *с.и.у.* (4.33) *однозначно разрешимо в* $X \equiv L_2$ *при любой правой части из* $Y \equiv W_2^1$. *Тогда при всех* $n \in \mathbb{N}$, *начиная с некоторого, СЛАУ* (4.38) *также однозначно разрешима. Приближенные решения* (4.37) *сходятся в среднем к точному решению* $x^*(s)$ *с.и.у.* (4.33) *со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_2 \asymp E_n^T(x^*)_2\,, \quad E_n^T(x^*)_2 = \rho(x^*, \mathbb{H}_n^T)_{L_2}. \tag{4.39}$$

Следствие. *Пусть решение уравнения* (4.33) *удовлетворяет условию* $x^*(s) \in W^m H_2^\alpha$ $(m \in \mathbb{R}^+,\ 0 < \alpha \leqslant 1)$. *Тогда в условиях теоремы* 4.7 *полиномиальный метод коллокации* (4.33), (4.37), (4.38), (2.28) *сходится в среднем и равномерно (при* $m+\alpha>1/2$ *) со скоростями соответственно*

$$\|x^*-x_n^*\|_2 = O\,(n^{-m-\alpha}); \quad \|x^*-x_n^*\|_\infty = O\,(n^{-m-\alpha+1/2}). \qquad (4.39^\circ)$$

Доказательство. СЛАУ (4.38) запишем в виде эквивалентного ей операторного уравнения

$$D_n x_n \equiv S_n^1 D x_n = S_n^1 y \quad (\,x_n\in X_n,\ S_n^1 y\in Y_n\,), \qquad (4.40)$$

где $X_n = \mathbb{H}_n^T \cap L_2$, а Y_n – подпространство всех сплайнов первой степени по сетке узлов (2.28). Тогда, следуя лемме 4.2, можно показать, что операторы $G_n \equiv S_n^1 G\,:\,X_n \longrightarrow Y_n$ непрерывно обратимы при любых $n\in\mathbb{N}$ и

$$\|G_n^{-1}\| = O\,(1), \quad G_n^{-1}\,:\,Y_n \longrightarrow X_n\,. \qquad (4.41)$$

Поэтому в силу теоремы 6 гл. I [25] для уравнений $Gx=y \quad (x\in X,\ y\in Y)$ и $G_n x_n = S_n^1 y$ $(x_n\in X_n,\ S_n^1 y\in Y_n)$ имеем

$$\|G^{-1}y - G_n^{-1}S_n^1 y\|_2 \leqslant (1+\|G_n^{-1}S_n^1 G\|_2)\,\|G^{-1}y - x_n^0\|_2, \qquad (4.42)$$

где x_n^0 – произвольный элемент из X_n. Полагая $x_n^0 = \Phi_n G^{-1}y$, в силу леммы 4.1 и соотношений (4.41), (4.42) для любой $y\in W_2^1$ находим оценку

$$\|G^{-1}y - G_n^{-1}S_n^1 y\|_2 = O\,\{E_n^T(G^{-1}y)_2\}\,. \qquad (4.43)$$

Поэтому, применив к уравнениям (4.33) и (4.40) схему доказательства теоремы 4.1, находим, что операторы $D_n\,:\,X_n \longrightarrow Y_n$ непрерывно обратимы хотя бы при $n\geqslant n_0\in\mathbb{N}$ и обратные операторы ограничены по норме в совокупности:

$$\|D_n^{-1}\| = O\,(1), \quad D_n^{-1}\,:\,Y_n \longrightarrow X_n\,. \qquad (4.44)$$

Теперь к уравнениям (4.33) и (4.40) применим снова теорему 6 гл. I книги [25]:

$$\|x^*-x_n^*\|_2 = \|D^{-1}y - D_n^{-1}S_n^1 y\|_2 \leqslant \|x^*-\widetilde{x}_n\|_2\cdot(1+\|D_n^{-1}S_n^1 D\|_2\,), \quad (4.45)$$

где $\widetilde{x}_n$ – произвольный элемент из $X_n = \mathbb{H}_n^T$. Полагая $\widetilde{x}_n = \Phi_n x^*$ и пользуясь неравенствами (4.45), (4.44) и (4.5), находим требуемую оценку (4.39). Из нее и прямых теорем теории полиномиальных приближений (см., напр., [48, 57, 75]) следует первая из оценок (4.39°); вторая из оценок (4.39°) доказывается по аналогии с соответствующими неравенствами гл. I.

3°. Оценки теорем 4.1 – 4.3, 4.6, 4.7 являются окончательными по порядку. Однако некоторые из приведенных в §§3 – 4 оценок погрешностей сплайн–методов могут быть несколько улучшены при улучшении структурных свойств исходных данных. Вместе с тем для существенного улучшения как этих оценок, так и оценок теорем 4.1 – 4.3, необходимо использовать сплайн–аппроксимацию более высоких порядков (см., напр., теорему 4.6), а это приводит, к сожалению, к значительному усложнению вычислительных схем. При этом указанный порядок должен быть разумно согласован с гладкостью исходных данных и с желаемым порядком погрешности. В противном случае даже за счет усложнения вычислительных схем сплайн–методов мы не получим желаемой степени их точности. Другими словами, сплайн–методы решения слабосингулярных интегральных уравнений обладают свойством насыщения (по терминологии К.И. Бабенко [3]). Этот факт должен учитываться в реальной вычислительной практике, ибо его игнорирование приводит к неоправданной затрате труда и времени.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И ОБОЗНАЧЕНИЙ

с.и.у. — сингулярное интегральное уравнение;

м.м.к. — метод механических квадратур;

м.к. — метод коллокации;

м.п. — метод подобластей;

м.Г. — метод Галеркина;

м.н.к. — метод наименьших квадратов;

м.в.я. — метод вырожденных ядер;

$\mathbb{N}\,(\mathbb{R})$ – множество натуральных (соответственно действительных) чисел;

$[\![t]\!]$ – целая часть числа $t \geqslant 0$;

$\operatorname{sgn} t = \{+1$ при $t > 0$; 0 при $t = 0$; -1 при $t < 0\}$;

$\|\cdot\|_r = \|\cdot\|_{L_r}$ и $\|\cdot\|_{2p} = \|\cdot\|_{L_{2p}}$ — нормы функций в пространствах соответственно $L_r(D)$ $(1 \leqslant r \leqslant \infty)$ и $L_{2p} = L_{2p}[-1,1]$, где $\|x\|_\infty = \|x\|_C$ для $x \in C$; $D = [0, 2\pi]$ или $[-1,1]$, а $p = p\,(t)$— весовая функция;

$\|x\|_{1;2}$ и $\|\varphi\|_{1;2q}$ — нормы функций в соболевских пространствах соответственно $W_2^1 \equiv W_2^1\,[0,2\pi]$ и $W_{2q}^1 \equiv W_{2q}^1\,[-1,1]$, где $q = q\,(t)$ — весовая функция;

$\mathbb{H}_n\,(\mathbb{H}_n^T)$ – множество всех алгебраических (соответственно тригонометрических) полиномов степени не выше n;

$D_n(\sigma)$ — ядро Дирихле порядка n;

$c_k(\varphi)$ — комплексные коэффициенты Фурье функции $\varphi \in L[0, 2\pi]$, где $k = 0, \pm 1, \ldots$;

$c_n^{T(f)}$ (соответственно $c_n^U(f)$) — коэффициенты Фурье функции $f \in L[-1,1]$ по системе полиномов Чебышева I-го рода $T_n(t) = \cos n \arccos t$ (соответственно II -го рода $U_n(t) = (1-t^2)^{-1/2} \sin{(n+1)} \arccos t$), где $n = 0, 1, \ldots$;

$E_n(\varphi)_r = \inf\{\|\varphi - Q\|_r \; : \; Q \in \mathbb{H}_n\}, \quad \varphi \in L_r\,[-1,1],\; 1 \leqslant r \leqslant \infty$;

$E_n(\varphi)_{2p} = \inf\{\|\varphi - Q\|_{2p} \; : \; Q \in \mathbb{H}_n\}, \quad \varphi \in L_{2p}\,[-1,1],\; p\,(t) \in L[-1,1]$;

$E_n^s\,(h)_r$ и $E_n^\sigma(h)_r$ — частные наилучшие алгебраические приближения функции $h\,(s,\sigma)$ по переменным s и σ соответственно; $E_n^T(\varphi)_r$, $E_n^{Ts}\,(h)_r$, $E_n^{T\sigma}\,(h)_r$ — соответствующие тригонометрические приближения;

I — оператор Гильберта;

E — единичный оператор;

$\Phi_n, \mathcal{L}_n,\; \Pi_n$ — операторы соответственно Фурье, Лагранжа, подобластей порядка n.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Аминов Р.Х., Габдулхаев Б.Г.* Приближенное решение функционального уравнения Амбарцумяна // Доклады АН СССР. – 1989. – Т. 304. – № 2. – С. 322–325.

2. *Аюпова Е.Ф.* Аппроксимативные методы решения слабо сингулярных интегральных уравнений первого рода: Дисс... канд. физ.-матем. наук. – Казань, 2000. – 113 с.

3. *Бабенко К.И.* Основы численного анализа. – М.: Наука, 1986. – 744 с.

4. *Бари Н.К.* Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.

5. *Бахвалов Н.С.* Численные методы. – М.: Наука, 1973. – 631 с.

6. *Белоцерковский С.М., Лифанов И.К.* Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях. – М.: Наука, 1985. – 254 с.

7. *Вайникко Г.М.* Анализ дискретизационных методов. – Тарту: Изд-во Тартусск. ун-та, 1976. – 161 с.

8. *Валеева Р.Т.* Аппроксимативные методы решения слабосингулярных интегральных уравнений первого рода: Дисс... канд. физ.-матем. наук. – Казань, 1994. – 108 с.

9. *Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А.* Неклассические смешанные задачи теории упругости. – М.: Наука, 1974. – 455 с.

10. *Воронин В.В., Цецохо В.А.* Интерполяционный метод решения интегрального уравнения первого рода с логарифмической особенностью // Матем. проблемы геофизики. – Новосибирск: Изд-во СО АН СССР. – 1973. – Вып. 4. – С. 212–228.

11. *Габдулхаев Б.Г.* Об одном прямом методе решения интегральных уравнений // Изв. вузов. Матем. – 1965. – № 3. – С. 51–60.

12. *Габдулхаев Б.Г.* Об аппроксимации тригонометрическими полиномами и погрешности квадратурных формул для сингулярных интегралов // Учен. записки Казанск. ун-та. – 1967. – Т. 127. – № 1. – С. 54–90.

13. *Габдулхаев Б.Г.* Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений методом механических квадратур // Доклады АН СССР. – 1968. – Т. 179. – № 2. – С. 260–263.

14. *Габдулхаев Б.Г.* Об одном общем квадратурном процессе и его применении к приближенному решению сингулярных интегральных уравнений // Доклады АН СССР. – 1968. – Т. 179. – № 3. – С. 515–517.

15. *Габдулхаев Б.Г.* Некоторые вопросы теории приближенных методов, III // Годишн. Софийск. ун-т. Матем. фак-т, 1968/1969 уч. г. – 1970. – Т. 63. – С. 39–51.

16. *Габдулхаев Б.Г.* Прямые методы решения некоторых операторных уравнений, I–IV // Изв. вузов. Матем. – 1971. – № 11. – С. 33–44;
Изв. вузов. Матем. – 1971. – № 12. – С. 28–38;
Изв. вузов. Матем. – 1972. – № 4. – С. 32–43;
Изв. вузов. Матем. – 1974. – № 3. – С. 18–31.

17. *Габдулхаев Б.Г.* Сплайн-методы решения одного класса сингулярных интегродифференциальных уравнений // Изв. вузов. Матем. – 1975. – № 6. – С. 14–24.

18. *Габдулхаев Б.Г.* Аппроксимация в H-пространствах и приложения // Доклады АН СССР. – 1975. – Т. 223. – № 6. – С. 1293–1296.

19. *Габдулхаев Б.Г.* Аппроксимация полиномами и сплайнами решений слабо сингулярных интегральных уравнений // Труды Междун. конф. по теории прибл. функций. Калуга, 1975. – М.: Наука, 1977. – С. 89–93.

20. *Габдулхаев Б.Г.* Квадратурные формулы с кратными узлами для сингулярных интегралов // Доклады АН СССР. – 1976. – Т. 227. – № 3. – С. 531–534.

21. *Габдулхаев Б.Г.* Поперечники и оптимальные квадратурные формулы для сингулярных интегралов // Доклады АН СССР. – 1977. – Т. 234. – № 3. – С. 513–516.

22. *Габдулхаев Б.Г.* Поперечники и оптимизация численных методов решения сингулярных интегральных уравнений // Изв. вузов. Матем. – 1977. – № 8. – С. 95–98.

23. *Габдулхаев Б.Г.* Полиномиальные аппроксимации по В.К. Дзядыку решений сингулярных интегральных и интегродифференциальных уравнений // Изв. вузов. Матем. – 1978. – № 6. – С. 51–62.

24. *Габдулхаев Б.Г.* Оптимизация коллокационных методов // Доклады АН СССР. – 1979. – Т. 247. – № 5. – С. 1033–1037.

25. *Габдулхаев Б.Г.* Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.

26. *Габдулхаев Б.Г.* Конечномерные аппроксимации сингулярных интегралов и прямые методы решения особых интегральных и интегродифференциальных уравнений // Итоги науки и техники. Матем. анализ. – М.: Изд-во АН СССР. – 1980. – Вып. 18. – С. 251–307.

27. *Габдулхаев Б.Г.* Оптимизация квадратурных методов решения интегральных уравнений // Доклады АН СССР. – 1983. – Т. 271. – № 1. – С. 20–25.

28. *Габдулхаев Б.Г.* Оптимальные методы решения сингулярных интегральных уравнений // Докл. науч.-техн. конф. по интегр. уравнениям в прикл. моделировании. – Киев, 1983. – Т. 2. – С. 68–69.

29. *Габдулхаев Б.Г.* Оптимальные аппроксимации решений линейных задач и прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений: Дисс... д-ра физ.-матем. наук в форме науч. докл. – Киев, 1985. – 48 с.

30. *Габдулхаев Б.Г.* Оптимальные методы решения сингулярных интегральных уравнений I-рода // Докл. Всесоюз. симп. по методу дискретных особенностей в задачах матфизики. – Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1985. – С. 28–29.

31. *Габдулхаев Б.Г.* Оптимизация прямых методов решения интегральных уравнений I-рода с логарифмической особенностью // Докл. науч.-техн. конф. по интегр. уравнениям в прикл. моделировании. – Киев, 1986. – Ч. 1. – С. 22–23.

32. *Габдулхаев Б.Г.* Оптимальные проекционные методы решения слабо сингулярных интегральных уравнений I-рода // Докл. Всесоюз. симп. по методу дискретных особенностей в задачах матфизики. – Харьков: Изд-во Харьк. ун-та, 1987. – С. 41–43.

33. *Габдулхаев Б.Г.* К численному решению полных сингулярных интегральных уравнений // Актуальные вопросы теории краевых задач и их приложения. – Чебоксары, 1988. – С. 138–146.

34. *Габдулхаев Б.Г.* Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1994. – 288 с.

35. *Габдулхаев Б.Г.* Численный анализ сингулярных интегральных уравнений. Избранные главы. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1995. – 230 с.

36. *Габдулхаев Б.Г.* Оптимизация прямых и проекционных методов решения операторных уравнений // Изв. вузов. Матем. – 1999. – № 12. – С. 3–18.

37. *Габдулхаев Б.Г., Велев Г.Д.* Оптимальные методы решения операторных уравнений // Труды Междун. конф. по численным методам и приложениям. София, 1988. – София: Изд-во Болг. АН, 1989. – С. 545–552.

38. *Габдулхаев Б.Г., Горлов В.Е.* О сходимости полигонального метода решения слабосингулярных интегральных уравнений // Функц. анализ и его приложения. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1975. – С. 60–72.

39. *Габдулхаев Б.Г., Горлов В.Е.* Об оптимальных алгоритмах решения сингулярных интегральных уравнений // Изв. вузов. Матем. – 1976. – № 11. – С. 13–23.

40. *Габдулхаев Б.Г., Душков П.Н.* О полигональном методе решения интегральных уравнений со слабой особенностью // Приложения функц. анализа к прибл. вычислениям. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та. – 1974. – С. 37–57.

41. *Габдулхаев Б.Г., Ермолаева Л.Б.* Один новый полиномиальный оператор и его приложения // Теория прибл. функций. – М.: Наука. – 1987. – С. 98–100.

42. *Габдулхаев Б.Г., Жечев Й.И.* Полигональный метод решения линейных уравнений // Научни трудове Висш. пед. ин-та, г. Пловдив. – 1971. – № 1. – С. 9–26.

43. *Габдулхаев Б.Г., Шарипов Р.Н.* Оптимизация квадратурных формул для сингулярных интегралов Коши и Адамара // Конструктивная теория функций и функц. анализ. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1987. – С. 3–48.

44. *Галишникова Т.Н., Ильинский А.С.* Численные методы в задачах дифракции. – М.: Изд-во МГУ, 1987. – 208 с.

45. *Гахов Ф.Д.* Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 638 с.

46. *Гребенников А.И.* Сплайн-аппроксимационный метод и его приложения: Дисс... д-ра физ.-матем. наук. – Новосибирск, 1988. – 283 с.

47. *Гохберг И.Ц., Фельдман И.А.* Уравнения в свертках и проекционные методы их решения. – М.: Наука, 1971. – 352 с.

48. *Даугавет И.К.* Введение в теорию приближения функций. – Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1977. – 184 с.

49. *Дмитриев В.И., Захаров Е.В.* Интегральные уравнения в краевых задачах электродинамики. – М.: Изд-во МГУ, 1987. – 167 с.

50. *Еникеева С.Р.* Прямые методы решения слабосингулярных интегральных уравнений: Дисс... канд. физ.-матем. наук. – Казань, 1999. – 107 с.

51. *Ермолаева Л.Б.* Аппроксимативные свойства полиномиальных операторов и решение интегральных и интегродифференциальных уравнений методом подобластей: Дисс... канд. физ.-матем. наук. – Казань, 1987. – 154 с.

52. *Захаров Е.В., Пименов Ю.В.* Численный анализ дифракции радиоволн. – М.: Радио и связь, 1982. – 184 с.

53. *Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.* Теория линейных некорректных задач и ее приложения. – М.: Наука, 1978. – 206 с.

54. *Ильинский А.С., Смирнов Ю.Г.* Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах. – М.: ИПРЖР, 1996. – 176 с.

55. *Канторович Л.В., Акилов Г.П.* Функциональный анализ в нормированных пространствах. – М.: Физматгиз, 1959. – 684 с.

56. *Килбас А.А.* Интегральные уравнения первого рода с логарифмическими ядрами // Науч. труды Юбил. семинара по краевым задачам, посвящ. 75-летию акад. АН БССР Ф.Д. Гахова. – Минск: Изд-во АН БССР, 1985. – С. 54–64.

57. *Корнейчук Н.П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.

58. *Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.* Некорректные задачи математической физики и анализа. – М.: Наука, 1980. – 286 с.

59. *Лифанов И.К.* Методы сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. – М.: ТОО “Янус”, 1995. – 520 с.

60. *Марчук Г.И., Лебедев В.И.* Численные методы в теории переноса нейтронов. – М.: Атомиздат, 1971. – 482 с.

61. *Михлин С.Г.* Сингулярные интегральные уравнения // Успехи матем. наук. – 1948. – Т. 3. – № 3. – С. 29–112.

62. *Михлин С.Г.* Вариационные методы в математической физике. – М.: Наука, 1970. – 512 с.

63. *Михлин С.Г.* Курс математической физики. – М.: Физматгиз, 1969. – 575 с.

64. *Михлин С.Г.* Некоторые вопросы теории погрешностей. – Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1988. – 334 с.

65. *Морозов В.А.* Регулярные методы решения некорректных задач. – М.: Изд-во МГУ, 1987. – 239 с.

66. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 512 с.

67. *Назарчук З.Т.* Численное исследование дифракции волн на цилиндрических структурах. – Киев: Наук. думка, 1989. – 256 с.

68. *Ожегова А.В.* Равномерные приближения решений слабо сингулярных уравнений первого рода: Дисс... канд. физ.-матем. наук. – Казань, 1996. – 92 с.

69. *Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т.* Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции. – Киев: Наук. думка, 1984. – 344 с.

70. *Плещинский Н.Б.* Приложения теории интегральных уравнений с логарифмическими и степенными ядрами. – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1987. – 158 с.

71. *Попов Г.Я.* Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – М.: Наука, 1982. – 344 с.

72. *Самко С.Г.* Интегральные уравнения первого рода с логарифмическим ядром // Методы отображений. – Грозный. – 1976. – С. 41–69.

73. *Самко С.Г.* Одномерные и многомерные интегральные уравнения первого рода со слабой особенностью в ядре // Науч. труды Юбил. семинара по краевым задачам, посвящ. 75-летию акад. АН БССР Ф.Д. Гахова. – Минск: Изд-во АН БССР, 1985. – С. 103–115.

74. *Сурай Л.А.* Прямые методы решения интегральных уравнений первого рода с логарифмической особенностью: Дисс... канд. физ.-матем. наук. – Казань, 1994. – 131 с.

75. *Тиман А.Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.

76. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – М.: Наука, 1979. – 286 с.

77. *Хапаев М.М. (мл.)* Численное решение одномерных интегральных уравнений скин-эффекта и теории потенциала: Дисс... канд. физ.-матем. наук. – Москва, 1983. – 120 с.

78. *Цецохо В.А.* Некоторые вопросы обоснования численных методов решения интегральных уравнений 1-го рода со слабыми особенностями // Актуальные проблемы вычислительной и прикл. математики. – Новосибирск: Наука, 1983. – С. 137–142.

79. *Цецохо В.А.* К обоснованию метода коллокации решения интегральных уравнений первого рода со слабыми особенностями в случае разомкнутых контуров // Некорректные задачи матем. физики и анализа. – Новосибирск: Наука, 1984. – С. 189–198.

80. *Цецохо В.А.* Численное решение задач дифракции методом потенциалов: Дисс... д-ра физ.-матем. наук в форме науч. докл. – Новосибирск, 1987. – 38 с.

81. *Цецохо В.А.* К обоснованию метода коллокации численного решения одного класса интегральных уравнений первого рода по отрезку со слабыми особенностями // Интегр. уравнения и краевые задачи. Теория и прикл. системы. – Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1990. – С. 94–150.

82. *Christiansen S.* Modifications of some first kind integral equations with logarithmic kernel to improve numerical conditioning // Computing. – 1985. – V. 34. – № 3. – P. 221–242.

83. *Hsiao G.C., Kopp P., Wendland W.L.* A Galerkin collocation method for some integral equations of the first kind // Computing. – 1980. – V. 25. – № 2. – P. 89–130.

84. *Hsiao G., McCamy R.C.* Solution of boundary value problems by integral equations of the first kind // SIAM Rev. – 1973. – № 15. – P. 687–705.

85. *Hsiao G.C., Wendland W.L.* A finite element methods for some integral equations of the first kind // J. Math. Anal. and Appl. – 1977. – № 58. – P. 449–481.

86. *McLean W.* A spectral Galerkin method for a boundary integral equations // Math. Comp. – 1986. – V. 47. – № 176. – P. 597–607.

87. *Velev G.D., Gabdulkhaev B.G.* Best approximations of solutions of singular integral equations of the first kind // Proc. Int. Conf. of Constructive Theory of Functions, 1987. – Sofia, 1988. – P. 471–477.

ОГЛАВЛЕНИЕ