КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

МЕТОДИЧЕСКИЕ РАЗРАБОТКИ КУРСА ЛЕКЦИЙ

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

(краевые задачи в пространствах Соболева)

КАЗАНЬ – 2000

Утверждено
на заседании кафедры
дифференциальных
уравнений.
Протокол №4 от 19.11.98.

Составители:
доценты Салехов Л.Г., Бикчантаев И.А.

Данные разработки сложились на основе спецкурсов, прочитанных студентам, специализирующихся по кафедре дифференциальных уравнений, а также слушателям инженерного потока и ФПК. В них рассматриваются элементы пространств Соболева и их приложения к решению некоторых основных задач математической физики.

Сохраняется символика предыдущих изданий 1986, 1987 и 1999 годов.

Разработки могут служить основой курса лекций «Уравнения математической физики», спецкурса или спецсеминара для второй ступени университетского образования (магистры). Они могут быть полезны при работе над курсовыми и дипломными работами, как для студентов, так и для слушателей ФПК.

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

I. Задача Дирихле для модифицированного оператора Лапласа.

1^0) Постановка задачи.

Пусть Ω — некоторое открытое множество. Зададим обобщенную функцию $f \in H^{-1}(\Omega)$ и функцию (класс функций) $a \in H^1(\Omega)$. Рассмотрим дифференциальный оператор $A = I - \Delta$, где $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ — оператор Лапласа, I — тождественный оператор.

Ищется функция $u \in H^1(\Omega)$, удовлетворяющая уравнению $Au = f$ на Ω в смысле обобщенных функций и такая, что $(u - a)$ есть элемент из $H_0^1(\Omega)$.

2^0) Теорема единственности. *Поставленная задача может иметь не более одного решения.*

Доказательство. Пусть u_1 и u_2 — два решения задачи Дирихле. Положим $u = u_1 - u_2$; тогда u есть решение уравнения $\Delta u = 0$. Согласно теореме об ортогональном дополнении для $H_0^k(\Omega)$ в $H^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, u есть элемент, принадлежащий ортогональному дополнению для $H_0^1(\Omega)$. Но, с другой стороны, $u \in H_0^1(\Omega)$. Следовательно, $u = 0$.

3^0) Теорема существования. *Поставленная задача обладает решением.*

Доказательство. Положим $v = u - a$. Тогда задача сводится к отысканию функции $v \in H_0^1(\Omega)$, удовлетворяющей уравнению $Av = f - Aa$. В силу теоремы о структуре элемента из $H^{-k}(\Omega)$, очевидно, $Aa \in H^{-1}(\Omega)$. А тогда и $f - Aa \in H^{-1}(\Omega)$. Но оператор A является изометрическим изоморфизмом $H_0^1(\Omega)$ на $H^{-1}(\Omega)$. Пусть G — обратный изоморфизм. Тогда $v = G(f - Aa)$ и, следовательно, $u = a + Gf - GAa$. Оператор G называется *оператором Грина рассматриваемой задачи.*

N.B. Когда $u - a \in H_0^1(\Omega)$, то говорят, что *u и a равны на границе в обобщенном смысле.*

Эта формальная интерпретация становится строгой, когда, например, Ω есть полупространство. В этом случае известно, что отображение-след γ_0 преобразует $H^1(\Omega)$ на $H^{1/2}(\partial\Omega)$. Следовательно, для всякой функции b из $H^{1/2}(\partial\Omega)$ существует элемент $a \in H^1(\Omega)$ такой, что $\gamma_0 a = b$.

Поэтому можно сформулировать следующую теорему.

Теорема. *Пусть* $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^n | x_n > 0$ *и* $f \in H^{-1}(\Omega)$, $b \in H^{1/2}(\partial\Omega)$. *Тогда существует и притом единственный элемент* $u \in H^1(\Omega)$ *такой, что* $u - \Delta u = f$ *в смысле обобщенных функций на* Ω *и* $\gamma_0 u = b$ *на* $\partial\Omega$.

В дальнейшем при исследовании оператора Грина будет полезна следующая лемма.

Лемма об энергии. *Пусть* $u,\ v \in H_0^1(\Omega)$, *где* $\Delta u,\ \Delta v \in L^2(\Omega)$. *Тогда*

$$(\Delta u|v)_{L^2} = (u|\Delta v)_{L^2} = -\int\limits_{\Omega} (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) \mathrm{d}x, \qquad (I)$$

где $(\cdot,\cdot)$ — *скалярное произведение векторов в* $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Для $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ и $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ имеем:

$$\langle \Delta T, \varphi \rangle = \sum_{i=1}^{n} \left\langle \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2}, \varphi \right\rangle = -\sum_{i=1}^{n} \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle = \langle T, \Delta\varphi \rangle .$$

А тогда для $u,\ v \in \mathcal{D}(\Omega)$ имеем:

$$\langle \Delta u, \overline{v} \rangle = \langle u, \Delta\overline{v} \rangle = -\sum_{i=1}^{n} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial \overline{v}}{\partial x_i} \right\rangle$$

или

$$\int\limits_{\Omega} (\Delta u)\overline{v} \mathrm{d}x = \int\limits_{\Omega} u\Delta\overline{v} \mathrm{d}x = -\int\limits_{\Omega} (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} v) \mathrm{d}x.$$

Далее из плотности $\mathcal{D}(\Omega)$ в $H_0^1(\Omega)$ по принципу непрерывного продолжения получаем формулу (I).

Теперь перейдем к исследованию оператора Грина.

4^0) Исследование оператора Грина.

a) *Оператор Грина является изометрическим изоморфизмом* $H^{-1}(\Omega)$ *на* $H_0^1(\Omega)$, *причем* AG *есть тождественный оператор в* $H^{-1}(\Omega)$.

Доказательство. Известно, что сужение оператора A на $H_0^1(\Omega)$ есть изометрический изоморфизм $H_0^1(\Omega)$ на $H^{-1}(\Omega)$, а G — оператор Грина, обратный для этого сужения, откуда и вытекает сформулированное свойство оператора Грина.

b) *Оператор* GA *есть ортогональный проектор* $H^1(\Omega)$ *на* $H_0^1(\Omega)$.

Доказательство. Прежде всего, GA отображает $H^1(\Omega)$ на $H_0^1(\Omega)$, ибо A отображает $H_0^1(\Omega)$ на $H^{-1}(\Omega)$. Затем, если $u \in H^1(\Omega)$, то $A(u - GAu) = 0$. А это означает, что $(u - GAu)$ принадлежит ортогональному дополнению для $H_0^1(\Omega)$.

c) *Оператор Грина G является положительным из $L^2(\Omega)$ в $L^2(\Omega)$ самосопряженным сжимающим инъективным оператором.*

Доказательство. Покажем, что G является самосопряженным, положительным из $L^2(\Omega)$ в $L^2(\Omega)$, ибо остальные утверждения очевидны. Итак, покажем, что $(Gf|g)_{L^2} = (f|Gg)_{L^2}$ (и положительно, если $f = g$) или, что все равно, полагая $Gf = u \in H_0^1(\Omega)$, $Gg = v \in H_0^1(\Omega)$, $(u|Av)_{L^2} = (Au|v)_{L^2}$ (и положительно, если $u = v$). Но последнее равенство вытекает из леммы об энергии.

d) *Если Ω — ограниченное множество, то оператор Грина является компактным (вполне непрерывным) оператором из $L^2(\Omega)$ в $L^2(\Omega)$.*

Доказательство. Оператор G непрерывно отображает $H^{-1}(\Omega)$ в $H_0^1(\Omega)$. Тем более G непрерывно отображает $L^2(\Omega)$ в $H_0^1(\Omega)$. Но, в силу теоремы Релиха-Кондрашова, вложение $H_0^1(\Omega)$ в $L^2(\Omega)$ является компактным, если Ω — ограниченное множество.

N.B. Свойства c) и d) остаются верными, если заменить $L^2(\Omega)$ на $H_0^1(\Omega)$.

II. Задача Штурма-Лиувилля для оператора Лапласа.

1^0) Постановка задачи.

Пусть Ω — открытое множество из $\mathbb{R}^n$. Найти точечный спектр (то есть множество собственных значений) и собственные функции оператора $(-\Delta)$ в $H^{-1}(\Omega)$, если областью определения оператора $(-\Delta)$ является пространство $H_0^1(\Omega)$.

2^0) Спектральная теорема.

Пусть Ω — открытое, ограниченное множество из $\mathbb{R}^n$. Тогда:

a) *точечный спектр σ_p для $(-\Delta)$ непуст и счетен; собственные значения действительны и строго положительны; единственная возможная точка сгущения для σ_p есть $+\infty$.*

b) *две собственные функции, соответствующие двум различным собственным значениям, ортогональны в $L^2(\Omega)$, в $H_0^1(\Omega)$ и в $H^{-1}(\Omega)$; система собственных функций является полной в $L^2(\Omega)$, в $H_0^1(\Omega)$ и в*

$H^{-1}(\Omega)$; более того, существует ортогональный базис собственных функций в $L^2(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ и $H^{-1}(\Omega)$.

Доказательство. Рассмотрим такую же задачу Штурма-Лиувилля для оператора $A = I - \Delta$ (рассматриваемая выше задача Штурма-Лиувилля для оператора $(-\Delta)$ к ней, очевидно, сводится).

Поэтому рассмотрим уравнение $Au = \lambda u$, где $u \in H_0^1(\Omega)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Согласно теореме единственности для модифицированного уравнения Лапласа, $\lambda = 0$ не является собственным значением оператора A. Пусть G — оператор Грина для оператора A. Тогда, полагая $\rho = 1/\lambda$, все сводится к изучению уравнения $Gw = \rho w$ $(\rho \neq \infty)$ в пространстве $H^{-1}(\Omega)$. Но решения этого уравнения принадлежат $H_0^1(\Omega)$, ибо G отображает $H^{-1}(\Omega)$ в $H_0^1(\Omega)$. Следовательно, достаточно решить это уравнение в пространстве $H_0^1(\Omega)$, или, если желаем, в пространстве $L^2(\Omega)$. В силу изученных свойств, G есть непрерывный оператор из $L^2(\Omega)$ в $L^2(\Omega)$, компактный, положительный, самосопряженный. А тогда из *спектральной теории таких операторов в гильбертовых пространствах известно, что:*

1) Оператор G имеет по крайней мере одно собственное ненулевое значение и самое большее счетное множество собственных значений; эти собственные значения вещественны, строго положительны и мажорированы единицей; единственная возможная их точка сгущения есть 0.

2) Две собственные функции, соответствующие двум различным собственным значениям, ортогональны; существует в $L^2(\Omega)$ полная ортонормированная система собственных функций.

Заметим, что эта система также полна в $H^{-1}(\Omega)$, ибо $L^2(\Omega)$ плотно в $H^{-1}(\Omega)$; последнее вытекает из изометрического изоморфизма $H_0^1(\Omega)$ на $H^{-1}(\Omega)$. А поскольку G есть изометрический изоморфизм из $H^{-1}(\Omega)$ на $H_0^1(\Omega)$, то эта система полна в $H_0^1(\Omega)$.

Теперь из свойств 1) и 2) для G вытекают свойства для A:

I) Оператор A имеет по крайней мере одно ненулевое собственное значение и самое большее счетное множество собственных значений; эти значения действительны и ограничены снизу единицей; единственная возможная их точка сгущения $+\infty$.

II) Существует в $L^2(\Omega)$, в $H_0^1(\Omega)$ и в $H^{-1}(\Omega)$ ортогональный базис собственных функций.

Уже в силу 2) имеем, что этот базис ортогонален в $L^2(\Omega)$. Покажем, что он ортогонален в $H_0^1(\Omega)$ и в $H^{-1}(\Omega)$.

В силу леммы об энергии имеем:

$$(u|v)_{H_0^1(\Omega)} = (Au|v)_{L^2(\Omega)} = \lambda(u|v)_{L^2(\Omega)}.$$

Откуда вытекает ортогональность в $H_0^1(\Omega)$. С другой стороны,

$$(u|v)_{H^{-1}(\Omega)} = (Gu|Gv)_{H_0^1(\Omega)} = (\rho u|\rho v)_{H_0^1(\Omega)} = \rho^2(u|v)_{H_0^1(\Omega)},$$

что влечет ортогональность этого базиса в $H^{-1}(\Omega)$.

Осталось показать, что 1 не является собственным значением для оператора A, то есть, что 0 не является собственным значением для оператора $(-\Delta)$. Это вытекает из следующего предложения, которое представляет и самостоятельный интерес.

Предложение. *Пусть Ω — любое открытое множество из $\mathbb{R}^n$. Тогда не существует другого решения у уравнения Лапласа $\Delta u = 0$, такого, что $u \in H_0^1(\Omega)$, кроме тривиального.*

Доказательство. Пусть $u \in H_0^1(\Omega)$ и такое, что $\Delta u = 0$. Тогда по лемме об энергии

$$\int_\Omega |\operatorname{grad} u|^2 \mathrm{d}x = -(\Delta u|u)_{L^2(\Omega)} = 0.$$

Отсюда $\operatorname{grad} u = 0$ почти всюду на Ω. Пусть

$$\tilde{u} = \begin{cases} u \text{ на } \Omega, \\ 0 \text{ на } \mathbb{R}^n \setminus \Omega. \end{cases} \qquad (*)$$

Тогда $\tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^n)$ и $\operatorname{grad} \tilde{u} = \widetilde{\operatorname{grad} u} = 0$ почти всюду на $\mathbb{R}^n$. Откуда следует, что $\tilde{u}$ есть постоянная почти всюду. А так как $\tilde{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, то эта постоянная должна быть нулем. Следовательно, $u = 0$ на Ω почти всюду.

Неравенство Фридрихса.

Пусть Ω — открытое множество из $\mathbb{R}^n$, ограниченное в определенном направлении. Тогда существует константа K (зависящая от Ω) такая, что для всякой $u \in H_0^1(\Omega)$ имеет место неравенство, называемое неравенством Фридрихса:

$$\int_\Omega |u(x)|^2 \mathrm{d}x \leqslant K \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \right|^2 \mathrm{d}x.$$

Доказательство. Так как $\mathcal{D}(\Omega)$ плотно в $H_0^1(\Omega)$, то достаточно доказать это неравенство для $u \in \mathcal{D}(\Omega)$. Поэтому пусть $u \in \mathcal{D}(\Omega)$. Продолжим u нулем на $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ и обозначим это продолжение через ν. Так как Ω ограничено в определенном направлении, то можно всегда предполагать, что Ω содержится в области $]a, b[\times\mathbb{R}^{n-1}$, где $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Тогда имеем:

$$\nu(x) = \int\limits_a^{x_1} \frac{\partial \nu}{\partial x_1}(t, x_2, \ldots, x_n)\mathrm{d}t.$$

Используя неравенство Шварца, имеем:

$$|\nu(x)|^2 \leqslant (b-a)\int\limits_a^b \left|\frac{\partial \nu}{\partial x_1}(t, x_2, \ldots, x_n)\right|^2 \mathrm{d}t$$

или

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |\nu(x)|^2 \mathrm{d}x_1 = \int\limits_a^b |\nu(x)|^2 \mathrm{d}x_1 \leqslant$$

$$\leqslant (b-a)^2 \int\limits_a^b \left|\frac{\partial \nu}{\partial x_1}(x)\right| \mathrm{d}x_1 \leqslant (b-a)^2 \int\limits_{\mathbb{R}} \left|\frac{\partial \nu}{\partial x_1}(x)\right|^2 \mathrm{d}x_1.$$

Теперь проинтегрируем по $(x_2, \ldots, x_n)$ по всему пространству $\mathbb{R}^{n-1}$:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\nu(x)| \mathrm{d}x \leqslant (b-a)^2 \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{\partial \nu}{\partial x_1}\right| \mathrm{d}x.$$

Откуда

$$\int\limits_{\Omega} |u(x)|^2 \mathrm{d}x \leqslant (b-a)^2 \int\limits_{\Omega} \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right| \mathrm{d}x$$

и тем более

$$\int\limits_{\Omega} |u(x)|^2 \, \mathrm{d}x \leqslant (b-a)^2 \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^m \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 \mathrm{d}x.$$

N.B. Заметим, что неравенство Фридрихса не имеет места для любой $u \in H^1(\Omega)$. Например, возьмем в качестве Ω открытое ограниченное множество, а в качестве u — функцию, характеристическую для

Ω. Тогда u есть элемент из $H^1(\Omega)$, но $\int_\Omega |u(x)|^2 \mathrm{d}x = \operatorname{mes}\Omega$, а

$$\int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 \mathrm{d}x = 0.$$

III. Задача Коши-Адамара для оператора теплопроводности.

Понятия, относящиеся к векторнозначным функциям.

Пусть X — банахово пространство с нормой, обозначаемой через $\|\cdot\|_X$. Через $L^p(0,T;X)$ обозначают пространство (классов) измеримых функций $t \mapsto f(t) \in X$ из $]0,T[$ в X и таких, что

$$\left(\int\limits_0^T \|f(t)\|_X^p \mathrm{d}t\right)^{1/p} = \|f\|_{L^p(0,T;X)} < \infty,\ 1 \leqslant p < \infty.$$

Это пространство Банаха. Известно, что $L^p(0,T;L^p(\Omega)) = L^p(]0,T[\times\Omega)$, где Ω — открытое множество из $\mathbb{R}^n$.

Если X — гильбертово пространство, то $L^2(0,T;X)$ также гильбертово со скалярным произведением:

$$(f|g)_{L^2(0,T;X)} = \int\limits_0^T (f(t)|g(t))_X \mathrm{d}t.$$

1^0) Данные задачи.

Зададим открытое множество Ω из $\mathbb{R}^n$, *ограниченное в определенном направлении*, интервал $I =]0;T[$ из $\mathbb{R}$ (где T — конечное или бесконечное), функцию u^0, определенную на Ω и принадлежащую пространству $H_0^1(\Omega)$, а также функцию f, определенную на $I \times \Omega$ и принадлежащую пространству $L^2(I \times \Omega)$. Будем полагать $\mathcal{I} =]-\infty, T[$ и продолжать f нулем на $]-\infty; 0[$.

Для упрощения обозначений будем полагать $H = L^2(\Omega)$; норму в H будем обозначать через $\|\cdot\|$, а скалярное произведение в H — через $(\cdot|\cdot)$. Положим $V = H_0^1(\Omega)$. Поскольку Ω ограничено в определенном направлении, то скалярное произведение в $H_0^1(\Omega)$ можно взять в следующем виде:

$$(a|b)_V := \int\limits_\Omega \operatorname{grad} a \cdot \operatorname{grad} b \,\mathrm{d}x$$

(см. неравенство Фридрихса). Это скалярное произведение порождает норму в V и V становится гильбертовым пространством.

2^0) Постановка задачи Коши-Адамара.

Ищется функция (класс функций) $u(t,x)$, *обладающая следующими свойствами:*

1) $u \in L^2(\mathcal{I}; V)$, $u(t,x) = 0$, *если* $t < 0$;

2) *Сужение производной* $\partial u/\partial t$ *(в смысле обобщенных функций на* $\mathcal{I} \times \Omega$*) на открытое множество* $I \times \Omega$ *является элементом из* $L^2(I \times \Omega)$;

3) *В смысле обобщенных функций на* $\mathcal{I} \times \Omega$ *функция u удовлетворяет уравнению*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = f + \delta \otimes u^0,$$

где δ *— мера Дирака в точке* $t = 0$.

Прежде чем доказывать единственность и существование решения u, установим некоторые новые свойства функции u.

3^0) Строгая постановка задачи (свойства решения).

I) *Пусть u — решение поставленной задачи; тогда, в смысле обобщенных функций на* $I \times \Omega$, *имеем:*

$$u' - \Delta u = f.$$

Это свойство немедленно вытекает из того, что $\operatorname{supp}(\delta \otimes u^0) = \{0\} \times \Omega$.

II) Δu *является элементом из* $L^2(\mathcal{I} \times \Omega)$, *равным нулю при* $t < 0$.

В самом деле, пусть ν — сужение для u на $I \times \Omega$. Обозначим через $\Delta\nu$ лапласиан от ν в смысле обобщенных функций на открытом множестве $I \times \Omega$. Так как u' и f принадлежат $L^2(I \times \Omega)$, то $\Delta\nu \in L^2(I \times \Omega)$. Очевидно, что Δu есть функция, равная $\Delta\nu$ на $I \times \Omega$ и нулю вне.

III) *Для почти всех* $x \in \Omega$ *функция* $t \mapsto u(t,x)$ *является непрерывной на I после ее естественного подправления на множестве меры нуль из I; функция* $u(t,x)$ *непрерывно отображает I в* $H = L^2(\Omega)$ *после того же ее подправления, то есть u есть элемент из* $C(I; H)$.

Доказательство. Прежде всего напомним *лемму Дю Буа Раймонда*: если f и $g \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, а T_f и T_g – регулярные обобщенные функции, которые связаны равенством $\partial_1(T_f) = T_g$, то, после естественного подправления на множестве меры нуль, функция f становится непрерывной по x_1 и

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - f(x_1', x_2, \ldots, x_n) = \int\limits_{x_1'}^{x_1} g(s, x_2, \ldots, x_n)\mathrm{d}s;$$

и если, кроме того, f и g непрерывны, то f является непрерывно дифференцируемой (в классическом смысле) относительно x_1 и $\partial_1 f = g$.

Согласно этой лемме для почти всех $x \in \Omega$ функция $t \mapsto u(t,x)$, после указанного подправления, является непрерывной на I, и первая часть свойства доказана.

Далее, по той же лемме, имеем:

$$u(t,x) - u(t_0,x) = \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial u}{\partial t}(s,x)\mathrm{d}s,$$

где $t_0, t \in I$. Тогда, в силу неравенства Шварца,

$$|u(t,x) - u(t_0,x)|^2 \leqslant |t - t_0| \int\limits_{t_0}^{t} \left|\frac{\partial u(s,x)}{\partial t}\right|^2 \mathrm{d}s.$$

Откуда

$$\int\limits_{\Omega} |u(t,x) - u(t_0,x)|^2 \mathrm{d}x \leqslant |t - t_0| \int\limits_{I\times\Omega} \left|\frac{\partial u(s,x)}{\partial t}\right|^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}x,$$

а отсюда следует, что функция u непрерывно отображает I в $H = L^2(\Omega)$, то есть $u \in C(I; H)$.

IV) *Для почти всех* $x \in \Omega$ $u(t,x)$ *стремится (поточечно) к* $u^0(x)$, *когда* $t \to 0$*; также* $u(t,x)$ *стремится к* $u^0(x)$ *по топологии* H*, когда* $t \to 0$.

Доказательство. Снова используем соотношение

$$u(t,x) = u(t_0,x) + \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial u(s,x)}{\partial t}\mathrm{d}s,$$

где $t_0, t \in I$. Пусть $t_0 \to 0$; так как для почти всех $x \in \Omega$ функция $s \mapsto \frac{\partial u(s,x)}{\partial t}$ интегрируема на $]0, t[$, то

$$\int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial u(s,x)}{\partial t} \mathrm{d}s$$

стремится к пределу (для почти всех $x \in \Omega$); следовательно, $u(t_0, x)$ стремится (для почти всех $x \in \Omega$) к пределу, который обозначим через $u(0, x)$. Таким образом,

$$u(t,x) = u(0,x) + \int\limits_{0}^{t} \frac{\partial u(s,x)}{\partial t} \mathrm{d}s.$$

Следовательно, $u(t,x) \to u(0,x)$ при $t \to 0$.

Отсюда, как и раньше, имеем:

$$\int\limits_{\Omega} |u(t,x) - u(0,x)|^2 \mathrm{d}x \leqslant |t| \int\limits_{I \times \Omega} \left| \frac{\partial u(s,x)}{\partial t} \right|^2 \mathrm{d}s \mathrm{d}x.$$

Это неравенство показывает, что $u(t,x)$ стремится к $u(0,x)$ по топологии H, когда $t \to 0$.

Далее положим

$$w(t) = \begin{cases} \partial u(t,x)/\partial t, & t > 0 \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

Тогда в смысле обобщенных функций на $\mathcal{I} \times \Omega$ имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = w + \delta(t) \otimes u(0,x).$$

Следовательно, $\Delta u + f + \delta \otimes u^0 = w + \delta \otimes u(0,x)$. Так как Δu, f и w являются функциями из $L^2(\mathcal{I} \otimes \Omega)$, то

$$\Delta u + f = w, \ \delta \otimes u^0 = \delta \otimes u(0,x),$$

откуда $u^0 = u(0,x)$, то есть $u(0,x) = u^0(x)$ для почти всех $x \in \Omega$.

4^0) Теорема единственности. *Поставленная задача Коши-Адамара может иметь не более одного решения.*

Доказательство. Пусть u — решение задачи; тогда имеем:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} - \Delta u(t,x) = f(t,x),$$

для $(t,x) \in I \times \Omega$. Умножая это равенство на $\overline{u(t,x)}$, интегрируя по Ω и учитывая лемму об энергии (заметим, что $u(t,x) \in H_0^1(\Omega)$ для почти всех $t \in I$), имеем:

$$\left(\frac{\partial u(t,\cdot)}{\partial t} \middle| u(t,\cdot) \right) + \|u(t,\cdot)\|_V^2 = (f(t,\cdot)|u(t,\cdot)), \ t \in I.$$

Это соотношение называют *соотношением энергии.*

Возьмем вещественную часть от обеих частей этого соотношения:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t,\cdot)\|_V^2 + \|u(t,\cdot)\|_V^2 = \mathrm{Re}(f(t,\cdot)|u(t,\cdot)), \ t \in I.$$

Интегрируя это равенство от 0 до t и используя *непрерывность* функции: $t \mapsto \|u(t,\cdot)\|_V^2$ на $[0,t]$, имеем:

$$\frac{1}{2}(\|u(t,\cdot)\|_V^2 - \|u^0(x)\|^2) + \int\limits_0^t \|u(s,\cdot)\|_V^2 \mathrm{d}s = \mathrm{Re} \int\limits_0^t (f(s,\cdot)|u(s,\cdot))\mathrm{d}s.$$

Теперь, если $u_1(t,x)$ и $u_2(t,x)$ — два решения поставленной задачи, то $u(t,x) = u_1(t,x) - u_2(t,x)$ есть решение той же задачи, где $f = 0, \ u^0 = 0$. Поэтому будем иметь:

$$\frac{1}{2}\|u(t,\cdot)\|_V^2 + \int\limits_0^t \|u(s,\cdot)\|_V^2 \mathrm{d}s = 0,$$

что влечет $\|u(t,\cdot)\|_V^2 = 0$, то есть $u(t,x) = 0$ почти всюду.

5^0) Существование и структура решения.

Теорема. *Поставленная задача Коши-Адамара имеет по крайней мере одно решение.*

Доказательство. Используя метод Галеркина, сконструируем решение задачи. Пусть $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ — базис пространства $V = H_0^1(\Omega)$, ортонормированный в пространстве $H = L^2(\Omega)$.

a) Приближенные решения.

Пусть $m \in \mathbb{N}$; положим

$$u_m(t,x) = \sum_{i=0}^{m} g_{mi}(t)\psi_i(x),$$

где g_{mi} должны быть подобраны так, чтобы выполнялись условия:

$$\begin{cases} u_m(t,x) = 0, & \text{если } t < 0,\ x \in \Omega, \\ (u'_m(t)|\psi_j) + (\operatorname{grad} u_m(t)|\operatorname{grad}\psi_j) = (f(t)|\psi_j), & \text{если } t > 0, \\ u_m(0) = u^0_m, \end{cases} \tag{I}$$

где u^0_m есть линейная комбинация из $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$.

N.B. Здесь введены обозначения:

$$u_m(t) = u_m(t,x),\ u'_m(t) = \frac{\partial u_m(t,x)}{\partial t},\ f(t) = f(t,x).$$

Эти условия будут выполняться, если

$$\begin{cases} g_{mj}(t) = 0, & \text{если } t < 0, \\ g'_{mj}(t) + \sum_{i=0}^{m} g_{mi}(t)a_{ij} = f_j(t), & j = 0, 1\ldots, m, \\ g_{mj}(0) = g^0_{mj}, \end{cases}$$

где положили

$$a_{ij} = (\psi_i|\psi_j)_{H^1_0(\Omega)} = (\operatorname{grad}\psi_i|\operatorname{grad}\psi_j),\ f_j(t) = (f(t)|\psi_j),\ g^0_{mi} = (u^0_m|\psi_j).$$

Известно, что эта система обладает одним и только одним решением в смысле обобщенных функций и что $g_{mj}(t) \in C(I)$. Для доказательства этого можно использовать или метод элементарных решений, или метод вариации постоянных.

b) Априорная оценка.

Умножая равенство (I) на $g_{mj}(t)$ и суммируя по j от 0 до m, получаем соотношение энергии:

$$(u'_m(t)|u_m(t)) + \|u_m(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)} = (f(t)|u_m(t)).$$

Взяв вещественные части от обеих частей равенства и проинтегрировав по t на $[0,t]$, имеем:

$$\frac{1}{2}(\|u_m(t)\|^2 - \|u_m(0)\|^2) + \int_0^t \|u_m(s)\|^2_{H^1_0(\Omega)}\mathrm{d}s = \int_0^t (f(s)|u_m(s))\mathrm{d}s.$$

Далее,

$$\int\limits_0^t \|u_m(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\mathrm{d}s = \int\limits_0^t (f(t)|u_m(s))\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\|u_m(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|u_m(0)\|^2$$

или

$$\int\limits_0^t \|u_m(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\mathrm{d}s \leqslant \int\limits_0^t (f(s)|u_m(s))\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\|u_m(0)\|^2 \leqslant \int\limits_0^t \|f\|\cdot\|u_m\|\mathrm{d}s +$$

$$+\frac{1}{2}\|u_m(0)\|^2 \leqslant \left(\int\limits_0^t \|f\|^2\mathrm{d}s \int\limits_0^t \|u_m\|^2\mathrm{d}s\right)^{1/2} + \frac{1}{2}\|u_m(0)\|^2.$$

Но, в силу неравенства Фридрихса, имеем: $\|u_m\|^2 \leqslant k^2\|u_m\|^2_{H_0^1(\Omega)}$. Тогда

$$\int\limits_0^t \|u_m(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\mathrm{d}s \leqslant \left(\int\limits_0^t \|f(s)\|^2\mathrm{d}s \int\limits_0^t k^2\|u_m(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\mathrm{d}s\right)^{1/2} + \frac{1}{2}\|u_m(0)\|^2.$$

Теперь используем следующий факт: если a, b, c — три положительных числа, таких, что $a^2 \leqslant ab + c^2/2$, то $a^2 \leqslant b^2 + c^2$. Имеем:

$$\int\limits_0^t \|u_m(s)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\mathrm{d}s \leqslant k^2 \int\limits_0^t \|f(s)\|^2\mathrm{d}s + \|u_m(0)\|^2.$$

Это неравенство показывает, что для каждого $m \in \mathbb{N}$ u_m есть элемент из $L^2(\mathcal{I}; H_0^1(\Omega))$ и что

$$\|u_m\|^2_{L^2(\mathcal{I};H_0^1(\Omega))} \leqslant k^2\|f\|_{L^2(\mathcal{I}\times\Omega)} + \|u_m^0\|^2.$$

c) Сходимость приближенных решений.

Выберем u_m^0 так, чтобы последовательность $(u_m^0)_{m\in\mathbb{N}}$ сходилась к $u^0(x)$ по топологии $H_0^1(\Omega)$. Тогда последовательность $(\|u_m^0\|^2)_{m\in\mathbb{N}}$ сходится.

Напомним, что всякое гильбертово пространство может быть изометрически отождествлено со своим сопряженным пространством (в силу теоремы Рисса). Поэтому на этом гильбертовом пространстве можно ввести топологию сопряженного к нему (дуального) пространства, которая является более слабой топологией, чем естественная (начальная) топология. Эта топология называется *ослабленной топологией гильбертова пространства.* Имеет место

Теорема. *Единичный замкнутый шар в гильбертовом пространстве является секвенциально компактным по ослабленной топологии или, говорят, слабо секвенциально компактным.*

Тогда, используя слабую секвенциальную компактность единичного замкнутого шара из $L^2(\mathcal{I}; H_0^1(\Omega))$, можно из последовательности $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ извлечь подпоследовательность $(u_{m_p})_{p\in\mathbb{N}}$, которую для простоты будем обозначать $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$, такую, что $(u_p)_{p\in\mathbb{N}}$ сходится к элементу u из $L^2(\mathcal{I}; H_0^1(\Omega))$ по ослабленной топологии $L^2(\mathcal{I}; H_0^1(\Omega))$.

Покажем, что u есть решение поставленной задачи. Рассмотрим функцию

$$\Phi(t,x) = \sum_{j=0}^{q} \varphi_j(t) \otimes \psi_j(x), \tag{II}$$

где $\varphi_j(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{I})$. Из соотношения (I) для $p \geqslant q$ получаем:

$$\int_0^T (u_p'(t)|\Phi(t))\mathrm{d}t + \int_0^T (u_p(t)|\Phi(t))_{H_0^1(\Omega)}\mathrm{d}t = \int_0^T (f(t)|\Phi(t))\mathrm{d}t,$$

где введено обозначение: $\Phi(t) = \Phi(t,x)$, или

$$-(u_p(0)|\Phi(0)) - \int_0^T (u_p(t)|\Phi'(t))\mathrm{d}t + \int_0^T (u_p(t)|\Phi(t))_{H_0^1(\Omega)}\mathrm{d}t = \int_0^T (f(t)|\Phi(t))\mathrm{d}t.$$

Устремляя p к $+\infty$ и замечая, что $u(t)$ и $f(t)$ равны нулю при $t < 0$, имеем:

$$-\int_{-\infty}^T (u(t)|\Phi'(t))\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^T (u(t)|\Phi(t))_{H_0^1(\Omega)}\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^T (f(t)|\Phi(t))\mathrm{d}t + (u^0|\Phi(0)).$$

Это соотношение справедливо для любой функции Φ вида (II). Так как $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ — полная система в $H_0^1(\Omega)$, то это соотношение справедливо для всех $\Phi \in \mathcal{D}(\mathcal{I}) \otimes H_0^1(\Omega)$ и тем более для всех $\Phi \in \mathcal{D}(\mathcal{I}) \otimes \mathcal{D}(\Omega)$. А так как $\mathcal{D}(\mathcal{I}) \otimes \mathcal{D}(\Omega)$ плотно в $\mathcal{D}(\mathcal{I} \otimes \Omega)$, то это соотношение верно для всех

$\Phi \in \mathcal{D}(\mathcal{I} \times \Omega)$. Иначе говоря, имеем в смысле обобщенных функций на $\mathcal{I} \times \Omega$:

$$u' - \Delta u = f + \delta \otimes u^0.$$

d) Покажем, что $u' \in L^2(I \times \Omega)$.

Для этого получим еще одну априорную оценку. Заметим прежде всего, что соотношения

$$g'_{mj}(t) + \sum_{i=0}^{m} a_{ij} g_{mi}(t) = f_j(t),\ j = 0, 1, \ldots, m,\ t \in I,$$

показывают, что $g'_{mi}(t) \in L^2(I)$, так как $g_{mi}(t)$ и $f_j(t) \in L^2(I)$. А тогда $u'_m \in L^2(I \times \Omega)$. Умножим теперь обе части равенства (I) на $g'_{mi}(t)$ и, суммируя по j от 0 до m, получим:

$$\|u'_m(t)\|^2 + \mathrm{Re}(u_m(t)|u'_m(t))_V = \mathrm{Re}(f(t)|u'_m(t)).$$

Интегрируя это соотношение от 0 до T, имеем:

$$\int_0^T \|u'_m(t)\|^2 \mathrm{d}t \leqslant \int_0^T \|f(t)\| \cdot \|u'_m(t)\| \mathrm{d}t + \frac{1}{2}(\|u_m(0)\|_V^2 - \|u_m(T)\|_V^2) \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^T \|f(t)\| \cdot \|u'_m(t)\| \mathrm{d}t + \frac{1}{2}(\|u_m\|_V^2 + c),$$

где c — константа, независящая от m. Далее, точно также, как для первой априорной оценки, имеем:

$$\|u'_m\|^2_{L^2(I \times \Omega)} \leqslant \|f\|^2_{L^2(I \times \Omega)} + \|u^0_m\|^2 + c.$$

Также, используя слабую секвенциальную компактность в замкнутом шаре в гильбертовом пространстве, можно извлеч подпоследовательность $(u'_r)_{r \in \mathbb{N}}$, сходящуюся к определенному элементу $w \in L^2(I \times \Omega)$ по ослабленной топологии $L^2(I \times \Omega)$ и тем более по слабой дуальной топологии $\mathcal{D}'(I \times \Omega)$. Но оператор дифференцирования непрерывен в $\mathcal{D}'_\sigma(I \times \Omega)$, откуда $w = u'$. Итак, $u' \in L^2(I \times \Omega)$.

e) Сходимость последовательности $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ к решению.

В силу единственности решения последовательность $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ допускает в качестве предела $u(t, x)$ по ослабленной топологии $L^2(\mathcal{I}; H^1_0(\Omega))$.

Так как единичный шар из $L^2(\mathcal{I}; H_0^1(\Omega))$ является секвенциально компактным по ослабленной топологии, то последовательность $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ сходится к $u(t,x)$ по ослабленной топологии $L^2(\mathcal{I}; H_0^1(\Omega))$, и нет необходимости из нее извлекать подпоследовательность.

$f)$ Сходимость $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ к u по нормированной топологии пространства $L^2(I, H_0^1(\Omega))$.

Выпишем сначала соотношения энергии, установленные ранее, для u_m и u:

$$(u_m'(t)|u_m(t)) + \|u_m(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} = (f(t)|u_m(t)),\ t \in T,$$

$$(u'(t)|u(t)) + \|u(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} = (f(t)|u(t)),\ t \in T.$$

Так как $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ сходится к $u(t,x)$ по ослабленной топологии $L^2(I, H_0^1(\Omega))$, то $\int_0^T (f(t)|u_m(t))\mathrm{d}t$ сходится к $\int_0^T (f(t)|u(t))\mathrm{d}t$. В самом деле, существует $g \in L^2(I, H_0^1(\Omega))$ такое, что $-\Delta g = f(t)$; но тогда

$$\int_0^T (f|u)\mathrm{d}t = -\int_0^T (\Delta g|u)\mathrm{d}t = \int_0^T (g|u)_{H_0^1(\Omega)}\mathrm{d}t.$$

А тогда имеем:

$$\lim_{m\to\infty} \int_0^T \{(u_m'(t)|u_m(t)) + \|u_m(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\}\mathrm{d}t = \int_0^T \{(u'(t)|u(t)) + \|u(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\}\mathrm{d}t,$$

то есть сходимость энергии.

Рассмотрим теперь выражение

$$(u_m'(t) - u'(t)|u_m(t) - u(t)) + \|u_m(t) - u(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} =$$

$$= (u_m'(t)|u_m(t)) - (u_m'(t)|u(t)) - (u'(t)|u_m(t)) + (u'(t)|u(t)) + \|u_m(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} -$$
$$-2\mathrm{Re}(u(t)|u_m(t))_{H_0^1(\Omega)} + \|u(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

Используя сходимость энергии, имеем:

$$\lim_{m\to\infty} \mathrm{Re} \int_0^T \{(u_m'(t) - u'(t)|u_m(t) - u(t)) + \|u_m(t) - u(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\}\mathrm{d}t = 0,$$

но левая часть под знаком предела есть ничто иное, как последовательность

$$\frac{1}{2}\|u_m(T)-u(T)\|^2-\frac{1}{2}\|u_m(0)-u^0\|^2+\int\limits_0^T \|u_m(t)-u(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\mathrm{d}t.$$

Так как $\|u_m(0)-u^0\|\to 0$ по гипотезе, то имеем:

$$\lim_{m\to\infty}\|u_m(T)-u(T)\|^2=0,\ \lim_{m\to\infty}\int\limits_0^T \|u_m(t)-u(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\mathrm{d}t=0.$$

Откуда следует, что $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ сходится к u по норме пространства $L^2(I;H_0^1(\Omega))$, и что $u_m(T)$ сходится к $u(T)$ по топологии $L^2(\Omega)$. Заменяя T на $t\in I$, видим, что $u_m(t)$ *сходится к u по топологии* $L^2(\Omega)$.

6^0) Применение собственных функций (метод разделения переменных).

Предположим, что оператор $(-\Delta)$ обладает базисом собственных функций $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ в $H_0^1(\Omega)$, ортонормированных в $H=L^2(\Omega)$:

$$-\Delta\psi_j=\lambda_j\psi_j,\ \psi_j\in H_0^1(\Omega).$$

Известно, что все λ_j — положительные числа.

N.B. Заметим, что если Ω есть открытое *ограниченное* множество, то оператор $(-\Delta)$ всегда имеет базис, состоящий из ортогональных в $H_0^1(\Omega)$ собственных функций, в силу известной спектральной теоремы.

Возьмем этот базис для построения решения $u(t,x)$ методом Галеркина. Выберем в качестве u_m^0 проекцию u^0 на подпространство, порожденное функциями $\{\psi_1,\psi_2,\dots,\psi_m\}$, то есть

$$u_m^0=\sum_{j=1}^m g_j^0\psi_j(x),$$

где $g_j^0=(u^0|\psi_j)$ — коэффициенты Фурье функции $u^0(x)$; они не зависят от m. Система для определения $g_j(t)$ имеет вид:

$$\begin{cases} g_j'(t)+\lambda_j g_j(t)=f_j(t), & \text{если } t\in I,\\ g_j(0)=g_j^0,\ g_j(t)=0, & \text{если } t<0.\end{cases}$$

Подчеркнем, что применение базиса собственных функций оператора $(-\Delta)$ приводит к $g_{mj}(t)$, независящим от m, то есть $g_{mj}(t) = g_j(t)$.

Используем операционный метод Лапласа для отыскания $g_j(t)$. Имеем:

$$g_j(t) \risingdotseq G_j(p),\ g_j'(t) \risingdotseq pG_j(p) - g_j^0,\ f_j(t) \risingdotseq F_j(p).$$

Тогда $(p+\lambda_j)G_j(p) = F_j(p) + g_j^0$. Откуда

$$G_j(p) = \frac{g_j^0}{p+\lambda_j} + \frac{1}{p+\lambda_j}F_j(p).$$

Следовательно,

$$g_j(t) = g_j^0 \mathrm{e}^{-\lambda_j t} + \int\limits_0^t \mathrm{e}^{-\lambda_j(t-s)} f_j(s)\mathrm{d}s.$$

А тогда для $t \in I$ решение запишется в следующем виде:

$$u(t,x) = \sum_{j\in\mathbb{N}} g_j(t)\psi_j(x) = \sum_{j\in\mathbb{N}} g_j^0 \mathrm{e}^{-\lambda_j t}\psi_j(x) + \sum_{j\in\mathbb{N}} \psi_j(x)\mathrm{e}^{-\lambda_j t}\int\limits_0^t \mathrm{e}^{\lambda_j s} f_j(s)\mathrm{d}s.$$

Этот ряд сходится, по крайней мере, по норме пространства $L^2(I, H_0^1(\Omega))$.

N.B.

1^0) Эффективное вычисление g_j^0 является задачей разложения заданных функций в ряды по собственным функциям.

2^0) Формула

$$u(t,x) = \sum_{j\in\mathbb{N}} g_j(t)\psi_j(x)$$

есть фундамент метода разделения переменных. Рассмотренный метод решения задачи Коши-Адамара тесно связан с задачей о собственных функциях операторов в частных производных, то есть с задачей Штурма-Лиувилля для операторов в частных производных.

Случай, когда правая часть уравнения есть нуль.

Если $f = 0$, то $u = \lim_{m\to\infty} u_m$, где

$$u_m(t,x) = \sum_{j=1}^m g_j^0 \mathrm{e}^{-\lambda_j t}\psi_j(x).$$

1) *Покажем, что $u \in C^\infty(I\times\Omega)$ и ряд сходится к $u(t,x)$ по топологии пространства $\mathcal{E}(I\times\Omega)$.*

Доказательство. Легко проверить, что $\Delta u_m - u'_m = 0$ на $I\times\Omega$. Но, как мы уже видели, последовательность $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ сходится к $u(t,x)$ по норме пространства $L^2(I\times\Omega)$, а следовательно, по сильной дуальной топологии пространства $\mathcal{D}'(I\times\Omega)$. Так как оператор теплопроводности $\left(\frac{\partial}{\partial t}-\Delta\right)$ является гипоэллиптическим, то $u\in C^\infty(I\times\Omega)$, и последовательность $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ сходится к $u(t,x)$ по топологии $\mathcal{E}(I\times\Omega)$.

2) *Покажем, что $u\in CB(I;H_0^1(\Omega))$ и ряд сходится к $u(t,x)$ по норме пространства $CB(I;H_0^1(\Omega))$, где $CB(I;H_0^1(\Omega))$ — пространство функций, ограниченных и непрерывных на I со значениями в $H_0^1(\Omega)$, снабженное топологией равномерной сходимости на I.*

Имеем:

$$\|u_p(t)-u_q(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{j=q+1}^{p} |g_j^0|^2 \mathrm{e}^{-2\lambda_j t}\|\psi_j\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{j=q+1}^{p} |g_j^0|^2 \mathrm{e}^{-2\lambda_j t}\lambda_j,$$

так как

$$\|\psi_j\|^2_{H_0^1(\Omega)} = (-\Delta\psi_j|\psi_j)_{L^2(\Omega)} = \lambda_j\|\psi_j\|^2_{L^2(\Omega)} = \lambda_j.$$

Откуда

$$\sup_{t\in I}\|u_p(t)-u_q(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \sum_{j=q+1}^{p} |g_j^0|^2\lambda_j = \|u_p(0)-u_q(0)\|^2_{H_0^1(\Omega)} \to 0.$$

3) *Покажем, что $u'\in L^2(I\times\Omega)\cap CB(I;V')$ и $(u'_m)_{m\in\mathbb{N}}$ сходится к u' по норме пространства $L^2(I\times\Omega)$ и по норме пространства $CB(I;V')$.*

Напомним, что $V=H_0^1(\Omega)$ и $V'=H^{-1}(\Omega)$, а $H=L^2(\Omega)$. Известно, что Δ есть изометрический изоморфизм $H_0^1(\Omega)$ на $H^{-1}(\Omega)$, $\|\Delta\psi_j\|_{V'} = \|\psi_j\|_V = \sqrt{\lambda_j}$. С другой стороны, $\|\Delta\psi_j\|_{H^{-1}(\Omega)} = \lambda_j\|\psi_j\|_{H^{-1}(\Omega)}$. Откуда $\|\psi_j\|_{H^{-1}(\Omega)} = 1/\sqrt{\lambda_j}$. Тогда

$$\|u'_p(t)-u'_q(t)\|^2_{H^{-1}(\Omega)} = \sum_{j=q+1}^{p} |g_j^0|^2\lambda_j^2\mathrm{e}^{-2\lambda_j t}\|\psi_j\|^2_{H^{-1}(\Omega)} = \sum_{j=q+1}^{p} |g_j^0|^2\lambda_j\mathrm{e}^{-2\lambda_j t},$$

а потому

$$\sup_{t\in I}\|u'_p(t)-u'_q(t)\|^2_{H^{-1}(\Omega)} = \sum_{j=q+1}^{p} |g_j^0|^2\lambda_j \to 0.$$

Отсюда вытекает сходимость $(u'_m)_{m\in\mathbb{N}}$ к u' по норме пространства $CB(I; H^{-1}(\Omega))$.

С другой стороны, имеем:

$$\|u'_p(t) - u'_q(t)\|_H^2 = \sum_{j=q+1}^{p} |g_j^0|^2 \lambda_j^2 \mathrm{e}^{-2\lambda_j t},$$

а так как

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-2\lambda_j t} \mathrm{d}t = 1/(2\lambda_j),$$

то имеем:

$$\|u'_p(t) - u'_q(t)\|^2_{L^2(I\times\Omega)} = \int_0^\infty \|u'_p(t) - u'_q(t)\|_H^2 \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2} \sum_{j=q+1}^{p} |g_j^0|^2 \lambda_j \to 0,$$

то есть сходимость $(u'_m)_{m\in\mathbb{N}}$ к u' по норме пространства $L^2(I \times \Omega)$.

IV. **Задача Коши-Адамара для волнового оператора.**

Некоторые определения и предложения, касающиеся векторных обобщенных функций.

Пусть U — открытое множество из $\mathbb{R}^l$ и X — банахово пространство. *Через $\mathcal{D}'(U; X)$ обозначим множество линейных отображений, непрерывных из $\mathcal{D}(U)$ в X. Элемент из $\mathcal{D}'(U; X)$ называется векторной обобщенной функцией, определенной на U со значениями в X.*

Пусть $T \in \mathcal{D}'(U; X)$ и $\alpha \in \mathbb{N}^l$. Тогда отображение $\varphi \mapsto (-1)^{|\alpha|} T(\mathcal{D}^\alpha \varphi)$ является непрерывным из $\mathcal{D}(U)$ в X и, следовательно, определяет новую векторную обобщенную функцию со значениями в X. *Ее записывают $\mathcal{D}^\alpha T$ и называют производной индекса α, в смысле векторных обобщенных функций, от T.* Таким образом:

$$(\mathcal{D}^\alpha T)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha \varphi), \ \varphi \in \mathcal{D}(U).$$

Пусть $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(U; X)$. Ей соответствует векторная обобщенная функция $T_f \in \mathcal{D}'(U; X)$, определяемая формулой:

$$T_f(\varphi) = \int_U f(t)\varphi(t)\mathrm{d}t, \ \varphi \in \mathcal{D}(U),$$

и отображение $f \mapsto T_f$ является инъективным из $L^1_{\mathrm{loc}}(U; X)$ в $\mathcal{D}'(U; X)$. Можно записать: $L^1_{\mathrm{loc}}(U; X) \subset \mathcal{D}'(U; X)$.

Имеют место следующие теоремы (где $U \subset \mathbb{R}$ и T' — производная от T):

Теорема I. *Линейное отображение $T \mapsto T'$ является сюръективным из $\mathcal{D}'(U; X)$ на $\mathcal{D}'(U; X)$ и его ядро состоит из постоянных обобщенных функций.*

Векторная обобщенная функция называется постоянной на U, если существует $a \in X$ такой, что

$$T(\varphi) = a \int\limits_U \varphi(t) \mathrm{d}t, \ \varphi \in \mathcal{D}(U).$$

Теорема II. *Пусть f и $g \in L^1_{\mathrm{loc}}(U; X)$ такие, что $(T_f)' = T_g$. Тогда, после естественного подправления на множестве меры нуль в U, функция f является непрерывной функцией на U (со значениями в X) и задается формулой:*

$$f(t) - f(s) = \int\limits_s^t g(\xi) \mathrm{d}\xi, \ s, t \in U.$$

Если, кроме того, $g \in L^1(U; X)$, то f является непрерывной на $\overline{U}$.

Заметим, что если $U =]a, b[$ и если $g \in L^1(U; X)$, то можно определить $f(a)$ формулой:

$$f(a) = f(t) - \int\limits_a^t g(\xi) \mathrm{d}\xi,$$

которая позволяет продолжить по непрерывности f на $\overline{U}$.

1^0) Данные задачи Коши-Адамара.

Пусть Ω — открытое множество из $\mathbb{R}^n$, ограниченное в определенном направлении. Пусть $H = L^2(\Omega)$, а $(\cdot|\cdot)$ и $\|\cdot\|$ — соответственно скалярное произведение и норма в H. Через V обозначим $H_0^1(\Omega)$, а через V' — пространство $H^{-1}(\Omega)$. Пространство V снабдим следующим скалярным произведением:

$$(a|b)_V := (\operatorname{grad} a | \operatorname{grad} b) = \sum_{i=1}^n \int\limits_\omega \frac{\partial a}{\partial x_i} \frac{\partial b}{\partial x_i} \mathrm{d}x,$$

а норму, порождаемую этим скалярным произведением, будем обозначать $\|\cdot\|_V$. Пространство V' будет снабжено нормой:

$$\|w\|_{V'} := \sup\{|\langle w, \nu\rangle|; \|\nu\|_V \leqslant 1\}.$$

Тогда Δ есть изометрический изоморфизм V на V'.

Зададим элемент $a \in V$ и элемент $b \in H$.

2^0) Постановка задачи Коши-Адамара.

Ищется функция (класс функций) $u(t,x)$, определенная на $\mathbb{R}\times\Omega$ и обладающая следующими свойствами:

1) $\operatorname{supp} u \subset \mathbb{R}_+ \times \Omega$.

2) Для всякого конечного T

$$u \in L^2(]-\infty, T[; V), \quad u' \in L^2(]0;T[\times\Omega).$$

3) $u(t,x)$ удовлетворяет уравнению

$$u'' - \Delta u = \delta'(t) \otimes a(x) + \delta(t) \otimes b(x)$$

в смысле обобщенных функций на $\mathbb{R}\times\Omega$.

Заметим, что u' и u'' обозначают производные от u по t (в смысле обобщенных функций на $\mathbb{R}\times\Omega$).

3^0) Анализ постановки задачи (свойства решений).

Теорема. *Пусть $u(t,x)$ — решение задачи. Тогда*

1) В смысле обобщенных функций на $]0,\infty[\times\Omega$ имеем:

$$u'' - \Delta u = 0;$$

2) Функция $u(t,x)$, после естественного подправления на множестве меры нуль в $\mathbb{R}_+ := [0,+\infty[$, является элементом из $C(\mathbb{R}_+; H)$;

3) Производная $u'(t,x)$, после того же подправления, является элементом из $C(\mathbb{R}_+; V')$;

4)

$$\begin{cases} u(0,x) = a(x) & \text{как элемент из } H, \\ u'(0,x) = b(x) & \text{как элемент из } V'. \end{cases}$$

N.B. Эту теорему можно было доказать, рассуждая как в пункте III. Однако, удобнее применить здесь понятие векторных обобщенных функций.

Доказательство. 1) Утверждение 1) очевидно, ибо $\operatorname{supp}(\delta' \otimes b)$ и $\operatorname{supp}(\delta \otimes b) \subset \{0\} \times \Omega$.

2) Покажем, что u' есть производная (по t) от u в смысле обобщенных функций на открытом множестве $]0, \infty[$ со значениями в $H = L^2(\Omega)$. Иначе говоря, покажем, что $u(\varphi') = -u'(\varphi)$ в H для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}(]0, \infty[)$.

Для этого достаточно показать, что для любой $\psi \in H$ имеет место равенство:

$$(u(\varphi')|\psi)_H = -(u'(\varphi)|\psi)_H. \qquad (*)$$

Так как $\mathcal{D}(\Omega)$ плотно в H, достаточно показать, что это соотношение имеет место для $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Но

$$(u(\varphi')|\psi)_H = \int_\Omega \overline{\psi}(x) \int_0^\infty u(t,x)\varphi'(t) \mathrm{d}t \mathrm{d}x = \left\langle u, \varphi'(t) \otimes \overline{\psi}(x) \right\rangle;$$

аналогично

$$(u'(\varphi)|\psi)_H = \left\langle u', \varphi \otimes \overline{\psi} \right\rangle,$$

где $\langle \cdot | \cdot \rangle$ означает дуальность между $\mathcal{D}'(]0, \infty[\times \Omega)$ и $\mathcal{D}(]0, \infty[\times \Omega)$.

Так как u' есть производная (по t) от u в смысле обобщенных функций на $]0, \infty[\times \Omega$, то имеем:

$$\left\langle u, \varphi' \otimes \overline{\psi} \right\rangle = -\left\langle u', \varphi \otimes \overline{\psi} \right\rangle.$$

Итак, доказано равенство (*).

Теперь, применяя теорему II, имеем утверждение 2) теоремы.

3) Так как Δ есть изометрический изоморфизм V на V' и $u \in L^2(0,T;V)$, то имеем: $\Delta u \in L^2(0,T;V')$. С другой стороны, $u'' = \Delta u$ на $]0, \infty[\times \Omega$, поэтому $u'' \in L^2(0,T;V')$. Тогда теорема II влечет $u' \in C([0,T];V')$ для каждого $T > 0$. Следовательно, $u' \in C(\mathbb{R}_+, V')$.

4) Положим, в качестве элемента из $H^{-1}(\Omega)$,

$$w(t) = \begin{cases} u''(t), & \text{если } t > 0, \\ 0, & \text{если } t < 0. \end{cases}$$

Тогда, в смысле обобщенных функций на $\mathbb{R}$ со значениями в $H^{-1}(\Omega)$, имеем:

$$u''(t) = w + u(0)\delta'(t) + u'(0)\delta.$$

Отсюда легко получить, используя плотность $\mathcal{D}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{D}(\Omega)$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R}\times\Omega)$, что, в смысле обобщенных функций, имеем:

$$u'' = w + u(0)\otimes\delta'(t) + u'(0)\otimes\delta(t).$$

Но $\Delta u = w$ как элементы из $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R};V')$. Следовательно, в качестве обобщенных функций на $\mathbb{R}$ со значениями в V', а потому в качестве скалярных обобщенных функций на $\mathbb{R}\times\Omega$ используется плотность $\mathcal{D}(\mathbb{R})\otimes\mathcal{D}(\Omega)$ в $\mathcal{D}(\mathbb{R}\times\Omega)$. Следовательно,

$$u(0)\otimes\delta'(t) + u'(0)\otimes\delta(t) = a\otimes\delta' + b\otimes\delta;$$

откуда $u(0) = a$ и $u'(0) = b$ в качестве обобщенных функций на Ω. Следовательно, $u(0) = a$, в качестве элемента из $L^2(\Omega)$, и $u'(0) = b$, в качестве элемента из $H^{-1}(\Omega)$.

4^0) Теорема единственности. *Задача Коши-Адамара имеет, самое большее, одно решение.*

Доказательство. Пусть u — разность двух решений нашей задачи; тогда u удовлетворяет, в смысле обобщенных функций на $\mathbb{R}\times\Omega$, уравнению $u'' - \Delta u = 0$.

Если бы u'' и Δu были функциями, то можно было бы написать:

$$u''(t,x) - \Delta u(t,x) = 0.$$

А тогда, умножая обе части равенства на $u'(t,x)$ и интегрируя по Ω, получаем:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u'(t)\|^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u(t)\|^2_{H^1_0(\Omega)} = 0;$$

откуда $u = 0$. Однако, u' и Δu не являются функциями и это рассуждение не верно.

Поэтому применим регуляризацию. Пусть $(\theta_j)_{j\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{D}(\mathbb{R})$ — регуляризующая последовательность. Положим

$$u_j(t,x) = \int\limits_{\mathbb{R}}\theta_j(s)u(t-s,x)\mathrm{d}s = \int\limits_0^\infty\theta_j(t-s)u(t,x)\mathrm{d}s,\ t\in\mathbb{R},\ x\in\Omega.$$

Обозначая символом * свертку (по t) на $\mathbb{R}$, можем записать:

$$u_j(\cdot,x) = \theta_j * u(\cdot,x),\ x\in\Omega.$$

Покажем теперь, что, в смысле обобщенных функций на $\mathbb{R}\times\Omega$, имеем:

$$u_j'' - \Delta u_j = 0. \qquad (*)$$

Обозначим через U (соответственно U_j) продолжение нулем для u (соответственно u_j) во вне Ω. Покажем, что $U_j = U * (\theta_j \otimes \delta_{\mathbb{R}^n})$. В самом деле, для любой $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и любой $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ имеем:

$$\langle U * (\theta_j \otimes \delta_{\mathbb{R}^n}), \varphi \otimes \psi\rangle = \left\langle U, (\check{\theta}_j \otimes \delta_{\mathbb{R}^n}) * (\varphi \otimes \psi)\right\rangle;$$

но

$$(\check{\theta}_j \otimes \delta_{\mathbb{R}^n}) * (\varphi \otimes \psi) = (\check{\theta}_j * \varphi) \otimes (\delta_{\mathbb{R}^n} * \psi) = (\check{\theta}_j * \varphi) \otimes \psi.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\langle U * (\theta_j \otimes \delta_{\mathbb{R}^n}), \varphi \otimes \psi\rangle &= \left\langle U, \check{\theta}_j * (\varphi \otimes \psi)\right\rangle = \\ &= \langle U * \theta_j, \varphi \otimes \psi\rangle = \langle U_j, \varphi \otimes \psi\rangle.\end{aligned}$$

А тогда, учитывая формулы дифференцирования свертки, имеем:

$$U_j'' - \Delta U_j = (U'' - \Delta U) * (\theta_j \otimes \delta_{\mathbb{R}^n});$$

но $U'' - \Delta U = 0$ на $\mathbb{R} \times \{\mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega\}$; следовательно, $\operatorname{supp}(U'' - \Delta U) \subset \mathbb{R} \times \partial\Omega$. Далее, $\operatorname{supp}(\theta_j \otimes \delta_{\mathbb{R}^n}) \subset \mathbb{R} \times \{0\}$. Поэтому

$$\operatorname{supp}(U_j'' - \Delta U_j) \subset \operatorname{supp}(U'' - \Delta U) + \operatorname{supp}(\theta_j \otimes \delta_{\mathbb{R}^n}) = \mathbb{R} \times \partial\Omega.$$

Это означает, что $(U_j'' - \Delta U_j)$ обращается в нуль на $\mathbb{R} \times \{\mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega\}$ и, в частности, на $\mathbb{R} \times \Omega$.

Возьмем теперь снова уравнение $u_j'' - \Delta u_j = 0$ на $\mathbb{R} \times \Omega$. Так как u_j'' есть функция от (t, x) (непрерывная по t), то можно записать:

$$u_j''(t, x) - \Delta u_j(t, x) = 0.$$

Умножая обе части на $u_j'(t, x)$ и интегрируя по Ω, имеем:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_j'(t)\|^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_j(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} = 0,\ t \in \mathbb{R}.$$

Откуда $\|u_j'(t)\|^2 + \|u_j(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \mathrm{const}$ на $\mathbb{R}$. Но всегда можно предполагать, что $\operatorname{supp}\theta_j \subset [-1; +1]$. Поскольку $\operatorname{supp} u \subset \mathbb{R}_+ \times \Omega$, то имеем:

$$\operatorname{supp} u_j \subset [-1; +\infty[\times \Omega;$$

а это показывает, что $u_j(t,x)=0$ для всех $t<-1$ (и для почти всех $x\in\Omega$). Следовательно, $\|u_j(t)\|_V^2=0,\ t\in\mathbb{R}$. Откуда $u_j(t,x)=0,\ t\in\mathbb{R}$, и почти для всех $x\in\Omega$.

Остается показать, что для любого $T>0$ последовательность $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ сходится к u по топологии $L^2(]-\infty,T[\times\Omega)$. Действительно, положим $\nu=u\chi_{]0,T+1[}$, где $\chi_{]0,T+1[}$ — характеристическая функция множества $]0,T+1[$. Тогда ν есть элемент из $L^2(\mathbb{R}\times\Omega)$. Положим

$$\nu_j(t,x)=\int\limits_{\mathbb{R}}\theta_j(s)\nu(t-s,x)\mathrm{d}s.$$

Напомним, что если $\nu\in L^2(\mathbb{R}\times\Omega)$, а $\theta_j\in L^1(\mathbb{R})$, то $\nu_j\in L^2(\mathbb{R}\times\Omega)$ и $N_2^2(\nu_j)\leqslant N_2^2(\nu)N_1^2(\theta_j)$. А поэтому

$$\int\limits_{\mathbb{R}}|\nu_j(t,x)|^2\mathrm{d}t\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}}|\nu(t,x)|^2\mathrm{d}t\int\limits_{\mathbb{R}}|\theta_j(s)|\mathrm{d}s=\int\limits_{\mathbb{R}}|\nu(t,x)|^2\mathrm{d}t.$$

И, в силу теоремы о регуляризации, имеем:

$$\lim_{j\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}}|\nu_j(t,x)-\nu(t,x)|^2\mathrm{d}x=0$$

для почти всех $x\in\Omega$. Следовательно, согласно теореме Лебега о мажорируемой сходимости, имеем:

$$\lim_{j\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}\times\Omega}|\nu_j(t,x)-\nu(t,x)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0.$$

Но на открытом множестве $]-\infty;T[\times\Omega$ u (соответственно u_j) совпадает с ν (соответственно ν_j). Следовательно,

$$\lim_{j\to\infty}\int\limits_{]-\infty;T[\times\Omega}|u_j(t,x)-u(t,x)|^2\mathrm{d}t\mathrm{d}x=0.$$

5^0) Существование и структура решения

Теорема. *Поставленная задача Коши-Адамара обладает решением.*

Доказательство. С помощью метода Галеркина докажем существование решения и построим его.

Пусть $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ — базис в V, ортонормированный в H. Напомним, что слово «базис» означает полную систему линейно независимых векторов.

a) Приближенное решение.

Пусть $m \in \mathbb{N}$ фиксировано. Пусть a_m и b_m — линейные комбинации из $\psi_0, \ldots, \psi_m$. Покажем, что существует функция u_m, определенная на $\mathbb{R} \times \Omega$ и обладающая следующими свойствами:

$$\begin{cases} u_m(t,x) = 0, & \text{если } t < 0, \\ u_m = \sum_{i=0}^m g_{mi}(t) \otimes \psi_i(t), & \text{где } g_{mi} \in C^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{C}), \\ (u''_m(t)|\psi_j) - (\Delta u|\psi_j) = 0, & \text{где } t > 0, \\ u_m(0,x) = a_m, & \text{для почти всех } x \in \Omega, \\ u'_m(0,x) = b_m, & \text{для почти всех } x \in \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

Положим

$$c_{ij} = -(\Delta\psi_i|\psi_j) = (\psi_i|\psi_j)_V, \ 0 \leqslant i,j \leqslant m,$$

$$\alpha_{mj} = (a_m|\psi_j), \ 0 \leqslant j \leqslant m,$$

$$\beta_{mj} = (b_m|\psi_j), \ 0 \leqslant j \leqslant m.$$

Тогда все сводится к определению функций $g_{mj} \in C^2(\mathbb{R}_+;\mathbb{C})$ таких, что для $0,1,\ldots,m$, имеем:

$$\begin{cases} g_{mj}(t) = 0, & \text{если } t < 0, \\ g''_{mj}(t) + \sum_{i=0}^m g_{mi}(t)c_{ij} = 0, & \text{если } t > 0, \\ g_{mj}(0) = \alpha_{mj}, \\ g'_{mj}(0) = \beta_{mj}. \end{cases}$$

Очевидно, эта задача всегда разрешима и для любого $T > 0$ u_m является элементом из $L^2(]-\infty;T[;H_0^1(\Omega))$ и u'_m есть элемент из $L^2(]0;T[\times\Omega)$.

b) Априорная оценка.

Умножая (1) на g'_{mj} и суммируя по j от 0 до m, получим:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u'_m(t)\|^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_m(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} = 0.$$

Интегрируя по t от 0 до t, получаем *равенство энергии:*

$$\|u'_m(t)\|^2 + \|u_m(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \|a_m\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|b_m\|^2.$$

c) Сходимость к решению.

Выберем a_m и b_m так, чтобы последовательность $(a_m)_{m\in\mathbb{N}^n}$ сходилась к a по топологии $H_0^1(\Omega)$, а последовательность $(b_m)_{m\in\mathbb{N}}$ сходилась к b по топологии H.

Пусть T — положительное число. Тогда существует константа C (зависящая от T, a и b, но независящая от m) такая, что:

$$\int\limits_0^T \|u_m'(t)\|^2 \mathrm{d}t + \int\limits_0^T \|u_m(t)\|_V^2 \mathrm{d}t \leqslant C^2.$$

Используя слабую секвенциальную компактность единичного замкнутого шара в гильбертовом пространстве, можно извлеч подпоследовательность $(u_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ такую, что:

$$u_{m_k} \to u \text{ по ослабленной топологии } L^2(0,T;V)$$

и

$$u_{m_k}' \to w \text{ по ослабленной топологии } L^2(0,T;H).$$

Так как ослабленные топологии $L^2(0,T;V)$ и $L^2(0,T;H)$ более сильные (тонкие) чем слабая дуальная топология $\mathcal{D}'(]0,T[\times\Omega)$, то эти сходимости имеют место по слабой дуальной топологии $\mathcal{D}'(]0,T[\times\Omega)$. А так как оператор дифференцирования является непрерывным в $\mathcal{D}'(]0,T[\times\Omega)$, то имеем: $w = u'$.

Покажем, что u удовлетворяет, в смысле обобщенных функций на открытом множестве $]-\infty;T[\times\Omega$, уравнению

$$u'' - \Delta u = \delta' \otimes a + \delta \otimes b.$$

Для этого рассмотрим функцию Φ вида:

$$\Phi = \sum_{j=0}^{q} \varphi_j \otimes \psi_j, \tag{2}$$

где φ_j есть элемент из $\mathcal{D}(]-\infty;T[)$. Тогда из уравнения (1) выводим при $k \geqslant q$:

$$\int\limits_0^T (u_{m_k}''(t)|\Phi(t))\mathrm{d}t + \int\limits_0^T (u_{m_k}(t)|\Phi(t))_{H_0^1(\Omega)}\mathrm{d}t = 0$$

или, интегрируя еще по частям, получим:

$$\int\limits_0^T (u_{m_k}(t)|\Phi''(t))\mathrm{d}t + \int\limits_0^T (u_{m_k}|\Phi(t))_{H_0^1(\Omega)}\mathrm{d}t = -(a|\Phi'(0)) + (b|\Phi(0)).$$

Это соотношение верно для любой функции Φ вида (2). Так как $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ — полная система в $H_0^1(\Omega)$, то соотношение верно для всякой функции $\Phi \in \mathcal{D}(]-\infty, T[)\otimes H_0^1(\Omega)$ и тем более для всякой $\Phi \in \mathcal{D}(]-\infty, T[)\otimes\mathcal{D}(\Omega)$.

Переходя к пределу при $k \to +\infty$ и замечая, что $u(t,x) = 0$, если $t < 0$, имеем:

$$\int\limits_{-\infty}^{T} (u(t)|\Phi''(t))\mathrm{d}t + \int\limits_{-\infty}^{T} (u(t)|\Phi(t))_V\mathrm{d}t = -(a|\Phi'(t)) + (b|\Phi(0)).$$

Так как $\mathcal{D}(]-\infty, T[)\otimes\mathcal{D}(\Omega)$ плотно в $\mathcal{D}(]-\infty, T[\times\Omega)$, это соотношение верно для всякой $\Phi \in \mathcal{D}(]-\infty, T[\times\Omega)$. Иначе говоря, в смысле обобщенных функций на открытом множестве $]-\infty, T[\times\Omega$, $u(t,x)$ удовлетворяет уравнению:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = \delta'\otimes a + \delta\otimes b.$$

Поскольку имеется единственность решения задачи для каждого $T > 0$, то последовательность $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ сходится по ослабленной топологии $L^2(]-\infty, T[; H_0^1(\Omega))$ к решению u и последовательность $(u'_m)_{m\in\mathbb{N}}$ сходится по ослабленной топологии $L^2(]0, T[\times\Omega)$ к u'. И поэтому не надо из нее извлекать подпоследовательность, то есть использованный процесс является *конструктивным.*

d) Сильная сходимость.

Имеет место соотношение энергии:

$$\|u'_m(t)\|^2 + \|u_m(t)\|_V^2 = \|a_m\|_V^2 + \|b_m\|^2.$$

Сходимость a_m к a в $H_0^1(\Omega)$, b_m к b в H, u_m к u в слабой топологии $L^2(]0, T[; H_0^1(\Omega))$ и u'_m к u' в слабой топологии $L^2(]0, T[\times\Omega)$ показывает, что

$$\int\limits_0^T \|u'(t)\|^2\mathrm{d}t + \int\limits_0^T \|u(t)\|_V^2\mathrm{d}t = T[\|a\|_V^2 + \|b\|^2].$$

Следовательно,

$$\lim_{m\to\infty}\left(\int\limits_0^T \|u_m(t)\|_V^2\mathrm{d}t + \int\limits_0^T \|u'_m(t)\|^2\mathrm{d}t\right) = \int\limits_0^T \|u(t)\|_V^2\mathrm{d}t + \int\limits_0^T \|u'(t)\|^2\mathrm{d}t.$$

Откуда
$$\lim_{m\to\infty}\left(\int_0^T \|u-u_m\|_V^2\mathrm{d}t+\int_0^T \|u'-u'_m\|^2\mathrm{d}t\right)=0.$$
Иначе говоря, $u_m \to u$ по *норме пространства* $L^2(]0,T[;V)$ и $u'_m \to u'$ по *норме пространства* $L^2(]0,T[\times\Omega)$.

6^0) Сохранение энергии.

Теорема. *Пусть u — решение поставленной задачи. Тогда для почти всех $t>0$ имеем:*
$$\|u(t)\|_V^2+\|u'(t)\|^2=\|a\|_V^2+\|b\|^2.$$

N.B. Число $\|u'(t)\|^2$ интерпретируется как кинетическая энергия волны u в момент времени t, а число $\|u(t)\|_V^2$ интерпретируется как ее потенциальная энергия. Таким образом, полная энергия волны сохраняется в течении времени.

Доказательство. Сначала заметим, что если u есть непрерывная функция из $\mathbb{R}_+$ в $H_0^1(\Omega)$, а u' есть функция непрерывная из $\mathbb{R}_+$ в H, и если u'' есть *функция*, то эта теорема доказывается просто: достаточно умножить уравнение $u''-\Delta u=0$ на u' и проинтегрировать по Ω.

Доказательство же в общем случае очень кропотливое.

а) *Начнем с доказательства того, что $\|u'(t)\|^2+\|u(t)\|_V^2$ есть константа для почти всех $t>0$.* Для этого используем регуляризацию (как при доказательстве единственности решения).

Пусть $(\theta_j)_{j\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{D}(\mathbb{R})$ — регуляризующая последовательность. Можно всегда предполагать, что $\operatorname{supp}\theta_j\subset[-1;0]$. Положим
$$u_j(t,x)=\int_{\mathbb{R}}\theta_j(s)u(t-s,x)\mathrm{d}s=\int_0^\infty\theta_j(t-s)u(s,x)\mathrm{d}s,\ (t,x)\in\mathbb{R}\times\Omega,$$
то есть $u_j(\cdot,x)=\theta_j*u(\cdot,x),\ x\in\Omega$.

Покажем, что

1) на открытом множестве $\mathbb{R}\times\Omega$
$$\operatorname{grad}u_j(t,x)=\int_0^\infty\theta_j(t-s)\operatorname{grad}u(s,x)\mathrm{d}s,$$

2) на открытом множестве $]0,+\infty[\times\Omega$

$$u_j'(t,x) = \int\limits_0^\infty \theta_j(t-s)u'(s,x)\mathrm{d}s$$

3) в смысле обобщенных функций на открытом множестве $]0,+\infty[\times\Omega$

$$u_j'' - \Delta u_j = 0.$$

Покажем 1). Имеем:

$$\langle \operatorname{grad} u_j, \varphi\otimes\psi\rangle = -\langle u_j, \varphi\otimes\operatorname{grad}\psi\rangle = -\langle u*\theta_j, \varphi\otimes\operatorname{grad}\psi\rangle =$$
$$= -\left\langle u, \check{\theta}_j * (\varphi\otimes\operatorname{grad}\psi)\right\rangle = \left\langle \operatorname{grad} u, \check{\theta}_j * \varphi\otimes\psi\right\rangle =$$
$$= \langle \operatorname{grad} u * \theta_j, \varphi\otimes\psi\rangle,\ \varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}),\ \psi\in\mathcal{D}(\Omega).$$

Покажем 2). Пусть

$$w = \begin{cases} u', & \text{если } t>0,\\ 0, & \text{если } t\leqslant 0,\end{cases}$$

есть функция, определенная на $\mathbb{R}\times\Omega$. Положим $w_j(\cdot,x) = \theta_j * w(\cdot,x)$, $x\in\Omega$. Тогда $(u_j'-w_j)(\cdot,x) = \theta_j*[(u'-w)(\cdot,x)]$. Так как $\operatorname{supp}\theta_j$ содержится в $\mathbb{R}_-$ и $\operatorname{supp}\{u'-w(\cdot,x)\}$ содержится в $\{0\}$, то $\operatorname{supp}\{(u_j'-w_j)(\cdot,x)\}$ содержится в $\mathbb{R}_-$; это означает, что $u_j'(\cdot,x) = w_j(\cdot,x)$ на дополнении к $\mathbb{R}_-$, то есть

$$w_j(\cdot,x) = u_j'(\cdot,x) = \theta_j * w(\cdot,x) = \int\limits_0^\infty \theta_j(t-s)u'(s,x)\mathrm{d}s.$$

Покажем 3). Обозначим через U (соответственно U_j) продолжение нулем для u (соответственно u_j) во вне Ω. Тогда, как уже было показано,

$$U_j = U * (\theta_j\otimes\delta_{\mathbb{R}^n}).$$

Откуда выводим:

$$U_j'' - \Delta U_j = (U''-\Delta U) * (\theta_j\otimes\delta_{\mathbb{R}}^n).$$

Но $U''-\Delta U = 0$ на множестве $\{\mathbb{R}\setminus\{0\}\}\times\{\mathbb{R}^n\setminus\Omega\}$; следовательно, носитель $U''-\Delta U$ включен в $(\mathbb{R}\times\partial\Omega)\cup(\{0\}\times\mathbb{R}^n)$. Заметим, что

$(A\times F)\cup(E\times B)\cup(\{E\setminus A\}\times\{F\setminus B\}) = E\times F$. Далее, так как $\operatorname{supp}(\theta\otimes\delta_{\mathbb{R}^n})\subset\mathbb{R}_-\times\{0\}$, то получаем:

$$\operatorname{supp}(U_j''-\Delta U_j)\subset(\mathbb{R}\times\partial\Omega)\cup\mathbb{R}_-\times\mathbb{R}^n,$$

а это означает, что $U_j''-\Delta U_j=0$ на множестве $\{\mathbb{R}\setminus\mathbb{R}_-\}\times\{\mathbb{R}^n\setminus\partial\Omega\}$. А затем, точно так же, как при доказательстве теоремы единственности, показывают, что для любого $T>0$ последовательность $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ сходится к u, последовательность $(\partial_i u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ сходится к $\partial_i u$ $(i=1,2\dots,n)$ и последовательность $(u_j')_{j\in\mathbb{N}}$ сходится к u' в гильбертовом пространстве $L^2(]0,T[\times\Omega)$.

Но из уравнения $u_j''(t,x)-\Delta u_j(t,x)=0$ на $]0,\infty[\times\Omega$ выводится уравнение:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_j'(t)\|^2+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|u_j(t)\|_V^2=0$$

на $]0,+\infty[$. Откуда следует, что $\|u_j'(t)\|^2+\|u_j(\|_V^2)$ есть константа на $]0,+\infty[$. Пусть $j\to+\infty$; тогда видим, что $\|u'(t)\|^2+\|u(t)\|^2$ есть константа для почти всех $t\in]0,T[$ и, следовательно, для почти всех $t\in]0,+\infty[$.

b) *Покажем, что для почти всех $t>0$ имеем:*

$$\|u(t)\|_V^2+\|u'(t)\|^2\geqslant\|a\|_V^2+\|b\|^2.$$

Действительно, существует множество N меры нуль, такое, что на $]0,+\infty[\setminus N$ имеем: $\|u(t)\|_V^2+\|u'(t)\|^2=\text{const}$. Пусть $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ последовательность элементов из $]0,+\infty[\setminus N$, сходящаяся к 0. Так как V и H — гильбертовы пространства, то можно извлечь подпоследовательность $(t_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ такую, что $u(t_\nu)$ сходится по ослабленной топологии V к α и $u'(t_\nu)$ сходится по ослабленной топологии H к β. Но уже было показано, что последовательность $u(t_\nu)$ сходится к a по топологии H и последовательность $u'(t_\nu)$ сходится к b по топологии $H^{-1}(\Omega)$.

Так как все эти топологии сильнее, чем слабая дуальная топология $\mathcal{D}'(\Omega)$, то выводим, что $\alpha=a,\ \beta=b$.

Но, как известно, если $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\to x$ слабо в гильбертовом пространстве X и если $\|x_n\|\leqslant c$, то $\|x\|\leqslant c$.

А тогда

$$\|\alpha\|_V^2+\|\beta\|^2\leqslant\|u(t_\nu)\|_V^2+\|u'(t_\nu)\|^2=\text{const}.$$

Следовательно, для почти всех $t \in]0, +\infty[$ имеем:

$$\|u(t)\|_V^2 + \|u'(t)\|^2 \geqslant \|a\|_V^2 + \|b\|^2.$$

Но раньше было установлено неравенство:

$$\int_0^T \|u(t)\|_V^2 \mathrm{d}t + \int_0^T \|u'(t)\|^2 \mathrm{d}t \leqslant T[\|a\|_V^2 + \|b\|^2],$$

а так как $\|u(t)\|_V^2 + \|u'(t)\|^2 = \mathrm{const}$ для почти всех $t > 0$, то имеем:

$$\|u(t)\|_V^2 + \|u'(t)\|^2 \leqslant \|a\|_V^2 + \|b\|^2.$$

И окончательно,

$$\|u(t)\|_V^2 + \|u'(t)\|^2 = \|a\|_V^2 + \|b\|^2$$

для почти всех $t > 0$.

7^0) Применение собственных функций оператора Лапласа.

Теорема. *Пусть Ω — открытое, ограниченное в $\mathbb{R}^n$ множество; тогда решение и обладает следующими свойствами:*

$$u \in CB(\mathbb{R}_+, V) \text{ и } u' \in CB(\mathbb{R}_+, H),$$

где CB означает множество непрерывных ограниченных функций.

Пусть $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ — базис в $H_0^1(\Omega)$, ортонормированный в H, образованный из собственных функций оператора $(-\Delta)$; пусть ω_j^2 — собственное значение, соответствующее собственной функции ψ_j; если положим $\alpha_j = (a|\psi_j)_H$ и $\beta_j = (b|\psi_j)_H$, то

$$u(t,x) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \left(\alpha_j \cos \omega_j t + \frac{\beta_j}{\omega_j} \sin \omega_j t \right) \psi_j(x), \ t \geqslant 0;$$

ряд сходится по нормированной топологии $CB(\mathbb{R}_+; H_0^1(\Omega))$, ряд из производных по t сходится по нормированной топологии $CB(\mathbb{R}_+; H)$.

Доказательство. Пусть $(\psi_j)_{j\in\mathbb{N}}$ — базис в $H_0^1(\Omega)$, ортонормированный в H, образованный из собственных функций оператора $(-\Delta)$:

$$-\Delta\psi_j = \omega_j^2 \psi_j \ (\omega_j > 0).$$

Тогда система $(\psi_j/\omega_j)_{j\in\mathbb{N}}$ образует ортонормированный базис в $H_0^1(\Omega)$. Возьмем его для построения решения методом Галеркина. В данном случае система для $g_{mj}(t)$ записывается в виде:

$$\begin{cases} g_{mj}(t) = 0, & \text{если } t < 0, \\ g''_{mj}(t) + \omega_j^2 g_{mj}(t) = 0, \ j = 0, 1, \ldots, m, & \text{если } t > 0, \\ g_{mj}(0) = \alpha_{mj}, \ g'_{mj}(0) = \beta_{mj} \end{cases}$$

Возьмем в качестве a_m и b_m ортогональные проекции в H для a и b соответственно на подпространство, порожденное $\{\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_m\}$. Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ получим:

$$\alpha_{mj} = (a_m|\psi_j) = (a|\psi_j) \text{ (которое положим равным } \alpha_j),$$
$$\beta_{mj} = (b_m|\psi_j) = (b|\psi_j) \text{ (которое положим равным } \beta_j).$$

Но тогда $g_{mj}(t)$ не зависят от m, так как

$$g_{mj}(t) = \alpha_j \cos\omega_j t + \frac{\beta_j}{\omega_j} \sin\omega_j t \ (\equiv g_j(t)).$$

Следовательно, для $t > 0$ имеем:

$$u(t,x) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \left(\alpha_j \cos\omega_j t + \frac{\beta_j}{\omega_j} \sin\omega_j t \right) \psi_j(x).$$

Ранее, (см. доказательство теоремы единственности) мы доказали, что ряд сходится к решению по топологии $L^2(]0,T[; H_0^1(\Omega))$, и что ряд из производных по t сходится по топологии $L^2(]0,T[\times\Omega)$.

Сейчас покажем, что *ряд сходится к решению по топологии $CB(\mathbb{R}_+; H_0^1(\Omega))$, а ряд из производных по t сходится по топологии $CB(\mathbb{R}_+; H)$.*

Прежде всего заметим, что

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} |\beta_j|^2 = \|b\|^2 < +\infty; \ \sum_{j\in\mathbb{N}} |\omega_j\alpha_j|^2 = \|a\|_V^2 < +\infty.$$

Но для всякого $t > 0$ имеем:

$$\|u_m(t) - u_p(t)\|_V^2 = \sum_{j=p+1}^{m} |\omega_j\alpha_j \cos\omega_j t + \beta_j \sin\omega_j|^2 \leqslant \sum_{j=p+1}^{m} (|\omega_j\alpha_j| + |\beta_j|)^2.$$

Также

$$\|u'_m(t) - u'_p(t)\|_H^2 = \sum_{j=p+1}^{m} |-\omega_j\alpha_j \sin\omega_j t + \beta_j \cos\omega_j t|^2 \leqslant \sum_{j=p+1}^{m} (|\omega_j\alpha_j| + |\beta_j|)^2.$$

Следовательно, последовательность $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ есть последовательность Коши по топологии $CB(\mathbb{R}_+, V)$, а последовательность $(u'_m)_{m\in\mathbb{N}}$ есть последовательность Коши по топологии $CB(\mathbb{R}_+, H)$. Откуда и вытекает результат.

N.B. 1^0) Тот факт, что $g_{mj}(t)$ не зависят от m, оправдывает метод разделения переменных (метод Фурье).

2^0) В случае, когда Ω ограничено, равенство энергии доказывается просто; имеем:

$$\|u(t)\|_V^2 = \sum_{j\in\mathbb{N}} |\alpha_j\omega_j \cos\omega_j t + \beta_j \sin\omega_j t|^2$$

и

$$\|u'(t)\|_H^2 = \sum_{j\in\mathbb{N}} |-\alpha_j\omega_j \sin\omega_j t + \beta_j \cos\omega_j t|^2,$$

откуда

$$\|u'(t)\|^2 + \|u(t)\|^2 = \sum_{j\in\mathbb{N}} (|\alpha_j\omega_j|^2 + |\beta_j|^2) = \|a\|_V^2 + \|b\|^2.$$

3^0) Формула

$$u(t,x) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \left(\alpha_j \cos\omega_j t + \frac{\beta_j}{\omega_j} \sin\omega_j t\right) \psi_j(x)$$

показывает, что $u(t,x)$ есть, для каждого фиксированного x, бесконечная линейная комбинация периодических функций с периодами $2\pi/\omega_j$. Если все ω_j кратны одному и тому же числу (например, в случае колеблющейся струны), то $u(t,x)$ есть периодическая функция по t. Но в общем случае (например, колебания мембраны), ω_j не являются кратными одному и тому же числу, и функция $u(t,x)$ не является периодической (в действительности $u(t,x)$ есть функция, называемая почти периодической). Не имеется фундаментальной частоты. Это объясняет почему звук, издаваемый мембраной, не является «музыкальным».

Литература

[1] Шварц Л. *Комплексные многообразия. Эллиптические уравнения.* М.: Мир, 1964.

[2] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа.* М.: Наука, 1972.

[3] Владимиров В.С. *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 1988.

[4] Салехов Л.Г. *Методические разработки курса „Уравнения математической физики" для инженерного потока.* Часть I. Казань: КГУ, 1986.

[5] Салехов Л.Г. *Методические разработки курса „Уравнения математической физики" для инженерного потока.* Часть II. Казань: КГУ, 1987.