Казанский федеральный УНИВЕРСИТЕТ
ЛИЦЕЙ
им. Н.И. Лобачевского

Тема: «Решение систем линейных уравнений методом сложения»

22.03.2020

Сухарев Владимир Игоревич

План вебинара:

1. Повторение материала предыдущего занятия.
2. Способ решения системы линейных уравнений методом сложения.
3. Практика.

Суть метода

Пусть у нас есть система из двух линейных уравнений с двумя неизвестными. В общем случае, как мы знаем, она выглядит так:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2. \end{cases}$$

Сложив левую часть первого уравнения с левой частью второго уравнения, а правую часть первого уравнения с правой частью второго уравнения, получаем уравнение

$$a_1 x + b_1 y + a_2 x + b_2 y = c_1 + c_2,$$

которое, как мы видим, является линейным уравнением с двумя переменными.

$$(a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2)y = c_1 + c_2.$$

Суть метода

В каком случае полученное таким образом уравнение вида

$$(a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2)y = c_1 + c_2$$

позволит нам найти какую-либо из переменных?

Суть метода

В каком случае полученное таким образом уравнение вида

$$(a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2)y = c_1 + c_2$$

позволит нам найти какую-либо из переменных?
Разумеется, в том случае, когда коэффициент при одной из перемнных равен 0.
То есть, чтобы это уравнение было уравнением с одной переменной, необходимо, чтобы выполнялось либо условие $a_1 + a_2 = 0$, либо условие $b_1 + b_2 = 0$.

Примеры:

Рассмотрим пример такой системы уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 21, \\ 7x - 3y = 6. \end{cases}$$

Видно, что сумма коэффициентов при переменной y из двух этих уравнений равно 0. Значит, если мы сложим, как это называется, почленно имеющиеся уравнения, получившееся уравнение будет линейным с одной перменной x, а значит мы сможем его решить и найти значение x. Складываем:

Примеры:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 21, \\ 7x - 3y = 6. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 7x - 3y &= 21 + 6, \\ 9x &= 27, \\ x &= 3. \end{aligned}$$

Теперь, подставив найденное значение x в одно из исходных уравнений, мы получаем уравнение с одной переменной y, откуда и найдем его значение:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 3 + 3y &= 21, & \qquad 7 \cdot 3 - 3y &= 6, \\ 3y &= 15, & -3y &= -15, \end{aligned}$$

$$y = 5.$$

Что делать, если в уравнениях нет переменных с противоположными коэффициентами?

Разумеется, не во всякой системе из двух уравнений с двумя переменными, какая-либо из этих перменных входит в уравнения с противоположными коэффициентами. Однако, этого всегда можно достичь с помощью определенных преобразований имеющихся уравнений. Мы можем умножать левую и правую части уравнения одновременно на одинаковое отличное от нуля число, а значит можно подобрать два числа так, чтобы после умножения на них уравнений, одна из переменных входила бы в эти уравнения с противоположными коэффициентами (причем такую переменную мы всегда можем выбрать сами). Чтобы показать такую возможность на примере, рассмотрим предыдущую систему, но преобразуем ее так, чтобы после сложения уравнений у нас получилось уравнение с переменной y :

Что делать, если в уравнениях нет переменных с противоположными коэффициентами?

$$\begin{cases} 2x + 3y = 21 & \mid \cdot 7, \\ 7x - 3y = 6 & \mid \cdot (-2). \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14x + 3y = 147, \\ -14x + 6y = -12. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 14x + 21y = 147, \\ -14x + 6y = -12. \end{cases}$$

$$14x - 14x + 21y + 6y = 147 - 12,$$

$$27y = 135,$$

$$y = 5.$$

Что делать, если в уравнениях нет переменных с противоположными коэффициентами?

Теперь найдем x из одного из уравнений нашей системы:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 21, \\ 7x - 3y = 6. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2x + 3 \cdot 5 &= 21, \\ 2x &= 6, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 7x - 3 \cdot 5 &= 6, \\ 7x &= 21, \end{aligned}$$

$$x = 3.$$

Итак, решением нашей системы является пара чисел $(3; 5)$.

Прмеры решения систем уравнений:

$$\begin{cases} 4x - 3y = 32, \\ 0,8x + 2,5y = -6. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 3y = 32, \\ 4x + 12,5y = -30. \end{cases}$$

$$15,5y = -62, y = -4.$$

Теперь найдем x :

$$4x - 3 \cdot (-4) = 32,$$

$$4x + 12 = 32,$$

$$4x = 20,$$

$$x = 5.$$

Таким образом, решением системы является пара чисел (5; -4).

Прмеры решения систем уравнений:

$$\begin{cases} 2,5a + 1,5b = -13, \\ 2a - 5b = 2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10a + 6b = -52, \\ 10a - 25b = 10. \end{cases}$$

$$31b = -62,$$

$$b = -2,$$

$$2a + 10 = 2,$$

$$a = -4.$$

Ответ: (-4; -2).

Практика

1257. Решите систему:

а) $\begin{cases} 5x - 4y = 22, \\ 7x + 4y = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 10x - 3y = 5, \\ -6x - 3y = -27; \end{cases}$

б) $\begin{cases} -6x + y = 21, \\ 6x - 11y = -51; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 5x + 4y = -22, \\ 5x - 2y = -4. \end{cases}$

Практика

1258. Найдите решение системы:

а) $\begin{cases} 5x - 9y = 38, \\ 3x + 2y = 8; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 11x + 4y = -18, \\ 13x - 6y = -32; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 10x + 7y = -1, \\ 15x + 8y = 6; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 21a - 30b = -6, \\ 23a - 40b = -28; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 6u + 5v = 10, \\ 5u - 6v = 49; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 3m - 4n = 3, \\ -8m + 7n = 3. \end{cases}$

Практика

1259. Найдите решение системы:

а) $\begin{cases} 4m - 3n = 32, \\ 0{,}8m + 2{,}5n = -6; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 0{,}5x - 0{,}3y = -1, \\ 1{,}5x + 0{,}4y = 10; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2{,}5p + 1{,}5k = -13, \\ 2p - 5k = 2; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 0{,}2a + 0{,}1b = -1, \\ 1{,}2a + 0{,}3b = 0. \end{cases}$