Вычислимые представления проективных плоскостей

Н.Т. Когабаев

Институт математики СО РАН, Новосибирск

Научно-исследовательский семинар кафедры алгебры и математической логики КФУ
3 ноября 2017 г.

Содержание доклада

Алгебраическая теория проективных плоскостей

А.И. Ширшов, 1977, XIV Всесоюзная алгебраическая конференция: *алгебраический подход к изучению проективных плоскостей.*

Алгебраическая теория проективных плоскостей

А.И. Ширшов, 1977, XIV Всесоюзная алгебраическая конференция: *алгебраический подход к изучению проективных плоскостей.*

А.И. Ширшов, А.А. Никитин, В.В. Вдовин, 1981–1991: *развитие алгебраического подхода, решение традиционных алгебраических задач для различных классов проективных плоскостей*

Алгебраическая теория проективных плоскостей

А.И. Ширшов, 1977, XIV Всесоюзная алгебраическая конференция: *алгебраический подход к изучению проективных плоскостей.*

А.И. Ширшов, А.А. Никитин, В.В. Вдовин, 1981–1991: *развитие алгебраического подхода, решение традиционных алгебраических задач для различных классов проективных плоскостей*

- *вопросы вложимости проективных плоскостей;*
- *гомоморфные образы проективных плоскостей;*
- *простые проективные плоскости;*
- *конечно определённые проективные плоскости;*
- *алгоритмические проблемы равенства, инцидентности и др.*

Алгебраическая теория проективных плоскостей

При этом в основном изучались следующие классы проективных плоскостей:

- свободные проективные плоскости
- свободно порождённые проективные плоскости
- папповы проективные плоскости
- дезарговы проективные плоскости

Алгебраическая теория проективных плоскостей

При этом в основном изучались следующие классы проективных плоскостей:

- свободные проективные плоскости
- свободно порождённые проективные плоскости
- папповы проективные плоскости
- дезарговы проективные плоскости

Проективные плоскости с точки зрения общей теории вычислимых моделей: *результатов очень мало.*

Элементарные теории проективных плоскостей

А. Тарский, 1949: *Теория проективных плоскостей неразрешима.*

Элементарные теории проективных плоскостей

А. Тарский, 1949: *Теория проективных плоскостей неразрешима.*

Следствие. *Теория папповых (дезарговых) проективных плоскостей наследственно неразрешима.*

Элементарные теории проективных плоскостей

А. Тарский, 1949: *Теория проективных плоскостей неразрешима.*

Следствие. *Теория папповых (дезарговых) проективных плоскостей наследственно неразрешима.*

Вопрос: *Разрешима ли теория всех свободно порождённых проективных плоскостей?*

Постановка основных проблем

С.С. Гончаров, 2006: *Необходимо развить теорию вычислимых проективных плоскостей.*

Постановка основных проблем

С.С. Гончаров, 2006: *Необходимо развить теорию вычислимых проективных плоскостей.*

На основе алгебраического подхода А.И. Ширшова в основных классах проективных плоскостей решаются следующие проблемы:

Постановка основных проблем

С.С. Гончаров, 2006: *Необходимо развить теорию вычислимых проективных плоскостей.*

На основе алгебраического подхода А.И. Ширшова в основных классах проективных плоскостей решаются следующие проблемы:

(1) Существование вычислимых представлений структур;

Постановка основных проблем

С.С. Гончаров, 2006: *Необходимо развить теорию вычислимых проективных плоскостей.*

На основе алгебраического подхода А.И. Ширшова в основных классах проективных плоскостей решаются следующие проблемы:

(1) Существование вычислимых представлений структур;

(2) Существование вычислимых нумераций классов структур;

Постановка основных проблем

С.С. Гончаров, 2006: *Необходимо развить теорию вычислимых проективных плоскостей.*

На основе алгебраического подхода А.И. Ширшова в основных классах проективных плоскостей решаются следующие проблемы:

(1) Существование вычислимых представлений структур;

(2) Существование вычислимых нумераций классов структур;

(3) Описание вычислимых размерностей структур;

Постановка основных проблем

С.С. Гончаров, 2006: *Необходимо развить теорию вычислимых проективных плоскостей.*

На основе алгебраического подхода А.И. Ширшова в основных классах проективных плоскостей решаются следующие проблемы:

(1) Существование вычислимых представлений структур;
(2) Существование вычислимых нумераций классов структур;
(3) Описание вычислимых размерностей структур;
(4) Проблема реализуемости различных спектров тьюринговых степеней в структурах;

Постановка основных проблем

С.С. Гончаров, 2006: *Необходимо развить теорию вычислимых проективных плоскостей.*

На основе алгебраического подхода А.И. Ширшова в основных классах проективных плоскостей решаются следующие проблемы:

(1) Существование вычислимых представлений структур;
(2) Существование вычислимых нумераций классов структур;
(3) Описание вычислимых размерностей структур;
(4) Проблема реализуемости различных спектров тьюринговых степеней в структурах;
(5) Точные оценки сложности алгоритмических проблем на классах структур;

Постановка основных проблем

С.С. Гончаров, 2006: *Необходимо развить теорию вычислимых проективных плоскостей.*

На основе алгебраического подхода А.И. Ширшова в основных классах проективных плоскостей решаются следующие проблемы:

(1) Существование вычислимых представлений структур;

(2) Существование вычислимых нумераций классов структур;

(3) Описание вычислимых размерностей структур;

(4) Проблема реализуемости различных спектров тьюринговых степеней в структурах;

(5) Точные оценки сложности алгоритмических проблем на классах структур;

(6) Проблема разрешимости теории свободно порождённых проективных плоскостей.

Вычислимые структуры и представления

Рассматриваются счётные структуры фиксированных вычислимых сигнатур.

Вычислимые структуры и представления

Рассматриваются счётные структуры фиксированных вычислимых сигнатур.

Пусть $\mathfrak{M}$ — счётная структура сигнатуры σ, $\mathbf{d}$ — произвольная тьюрингова степень.

Вычислимые структуры и представления

Рассматриваются счётные структуры фиксированных вычислимых сигнатур.

Пусть $\mathfrak{M}$ — счётная структура сигнатуры σ, $\mathbf{d}$ — произвольная тьюрингова степень.

Структура $\mathfrak{M}$ называется $\mathbf{d}$-*вычислимой*, если её носитель — вычислимое подмножество ω, и её атомная диаграмма $D(\mathfrak{M})$ является $\mathbf{d}$-вычислимой.

Вычислимые структуры и представления

Рассматриваются счётные структуры фиксированных вычислимых сигнатур.

Пусть $\mathfrak{M}$ — счётная структура сигнатуры σ, $\mathbf{d}$ — произвольная тьюрингова степень.

Структура $\mathfrak{M}$ называется $\mathbf{d}$-*вычислимой*, если её носитель — вычислимое подмножество ω, и её атомная диаграмма $D(\mathfrak{M})$ является $\mathbf{d}$-вычислимой.

Изоморфизм структуры $\mathfrak{M}$ на ($\mathbf{d}$-вычислимую) структуру с вычислимым носителем будем называть ($\mathbf{d}$-*вычислимым*) *представлением* $\mathfrak{M}$.

Вычислимые структуры и представления

Рассматриваются счётные структуры фиксированных вычислимых сигнатур.

Пусть $\mathfrak{M}$ — счётная структура сигнатуры σ, $\mathbf{d}$ — произвольная тьюрингова степень.

Структура $\mathfrak{M}$ называется $\mathbf{d}$-*вычислимой*, если её носитель — вычислимое подмножество ω, и её атомная диаграмма $D(\mathfrak{M})$ является $\mathbf{d}$-вычислимой.

Изоморфизм структуры $\mathfrak{M}$ на ($\mathbf{d}$-вычислимую) структуру с вычислимым носителем будем называть ($\mathbf{d}$-*вычислимым*) *представлением* $\mathfrak{M}$.

В случае $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ говорят *вычислимая структура* и *вычислимое представление*.

Вычислимая размерность и вычислимая категоричность

Наименьшая степень $\mathbf{d}$ такая, что структура $\mathfrak{M}$ $\mathbf{d}$-вычислима, называется *степенью структуры* $\mathfrak{M}$ и обозначается $\deg(\mathfrak{M})$.

Вычислимая размерность и вычислимая категоричность

Наименьшая степень $\mathbf{d}$ такая, что структура $\mathfrak{M}$ $\mathbf{d}$-вычислима, называется *степенью структуры* $\mathfrak{M}$ и обозначается $\deg(\mathfrak{M})$.

$\mathbf{d}$-*вычислимой размерностью* структуры $\mathfrak{M}$ называется число $\dim_{\mathbf{d}}(\mathfrak{M})$ вычислимых представлений $\mathfrak{M}$ с точностью до $\mathbf{d}$-вычислимого изоморфизма.

Вычислимая размерность и вычислимая категоричность

Наименьшая степень $\mathbf{d}$ такая, что структура $\mathfrak{M}$ $\mathbf{d}$-вычислима, называется *степенью структуры* $\mathfrak{M}$ и обозначается $\deg(\mathfrak{M})$.

$\mathbf{d}$-*вычислимой размерностью* структуры $\mathfrak{M}$ называется число $\dim_{\mathbf{d}}(\mathfrak{M})$ вычислимых представлений $\mathfrak{M}$ с точностью до $\mathbf{d}$-вычислимого изоморфизма.

Если $\dim_{\mathbf{d}}(\mathfrak{M}) = 1$, то $\mathfrak{M}$ называется $\mathbf{d}$-*вычислимо категоричной*.

Вычислимая размерность и вычислимая категоричность

Наименьшая степень $\mathbf{d}$ такая, что структура $\mathfrak{M}$ $\mathbf{d}$-вычислима, называется *степенью структуры* $\mathfrak{M}$ и обозначается $\deg(\mathfrak{M})$.

$\mathbf{d}$-*вычислимой размерностью* структуры $\mathfrak{M}$ называется число $\dim_{\mathbf{d}}(\mathfrak{M})$ вычислимых представлений $\mathfrak{M}$ с точностью до $\mathbf{d}$-вычислимого изоморфизма.

Если $\dim_{\mathbf{d}}(\mathfrak{M}) = 1$, то $\mathfrak{M}$ называется $\mathbf{d}$-*вычислимо категоричной*.

В случае $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ пишут $\dim(\mathfrak{M})$ и говорят *вычислимая размерность* и *вычислимая категоричность*.

Определение проективной плоскости

Подход А.И. Ширшова: *частичная операция*

Определение проективной плоскости

Подход А.И. Ширшова: *частичная операция*

Проективной плоскостью называется структура $\mathfrak{A}=\langle A, A^0, {}^0A, \cdot\rangle$ с разбиением A на два подмножества $A^0 \cup {}^0A = A$, $A^0 \cap {}^0A = \varnothing$ и коммутативной частичной операцией "$\cdot$", удовлетворяющей следующим условиям:

Определение проективной плоскости

Подход А.И. Ширшова: *частичная операция*

Проективной плоскостью называется структура $\mathfrak{A}=\langle A, A^0, {}^0\!A, \cdot\rangle$ с разбиением A на два подмножества $A^0 \cup {}^0\!A = A$, $A^0 \cap {}^0\!A = \varnothing$ и коммутативной частичной операцией "$\cdot$", удовлетворяющей следующим условиям:

(1) Произведение $a{\cdot}b$ определено тогда и только тогда, когда a, b — различные однотипные элементы из A;

Определение проективной плоскости

Подход А.И. Ширшова: *частичная операция*

Проективной плоскостью называется структура $\mathfrak{A}=\langle A, A^0, {}^0A, \cdot\rangle$ с разбиением A на два подмножества $A^0 \cup {}^0A = A$, $A^0 \cap {}^0A = \varnothing$ и коммутативной частичной операцией "$\cdot$", удовлетворяющей следующим условиям:

(1) Произведение $a{\cdot}b$ определено тогда и только тогда, когда a, b — различные однотипные элементы из A;

(2) Если определено $a{\cdot}b$, то элементы a и $a{\cdot}b$ — неоднотипные;

Определение проективной плоскости

Подход А.И. Ширшова: *частичная операция*

Проективной плоскостью называется структура $\mathfrak{A}=\langle A, A^0, {}^0A, \cdot\rangle$ с разбиением A на два подмножества $A^0 \cup {}^0A = A$, $A^0 \cap {}^0A = \varnothing$ и коммутативной частичной операцией "$\cdot$", удовлетворяющей следующим условиям:

(1) Произведение $a{\cdot}b$ определено тогда и только тогда, когда a, b — различные однотипные элементы из A;

(2) Если определено $a{\cdot}b$, то элементы a и $a{\cdot}b$ — неоднотипные;

(3) Для любых $a, b, c \in A$, если определены произведения $a{\cdot}b$, $a{\cdot}c$ и $(a{\cdot}b){\cdot}(a{\cdot}c)$, то $(a{\cdot}b){\cdot}(a{\cdot}c) = a$;

Определение проективной плоскости

Подход А.И. Ширшова: *частичная операция*

Проективной плоскостью называется структура $\mathfrak{A}=\langle A, A^0, {}^0A, \cdot\rangle$ с разбиением A на два подмножества $A^0 \cup {}^0A = A$, $A^0 \cap {}^0A = \varnothing$ и коммутативной частичной операцией "$\cdot$", удовлетворяющей следующим условиям:

(1) Произведение $a{\cdot}b$ определено тогда и только тогда, когда a, b — различные однотипные элементы из A;

(2) Если определено $a{\cdot}b$, то элементы a и $a{\cdot}b$ — неоднотипные;

(3) Для любых $a, b, c \in A$, если определены произведения $a{\cdot}b$, $a{\cdot}c$ и $(a{\cdot}b){\cdot}(a{\cdot}c)$, то $(a{\cdot}b){\cdot}(a{\cdot}c) = a$;

(4) Существуют попарно различные $a, b, c, d \in A$ такие, что $a{\cdot}b$, $b{\cdot}c$, $c{\cdot}d$, $d{\cdot}a$ определены и попарно различны.

Модели для проективных плоскостей

В каждой проективной плоскости $\mathfrak{A} = \langle A, A^0, {}^0A, \cdot\rangle$ мы заменяем бинарную операцию её графиком

$$P^{\mathfrak{A}} = \{\langle a, b, c\rangle \in A^3 \mid a{\cdot}b \text{ определено и равно } c\},$$

и рассматриваем $\mathfrak{A}$ как модель предикатной сигнатуры

$$\sigma = \langle A^0, {}^0A, P\rangle.$$

Модели для проективных плоскостей

В каждой проективной плоскости $\mathfrak{A} = \langle A, A^0, {}^0A, \cdot\rangle$ мы заменяем бинарную операцию её графиком

$$P^{\mathfrak{A}} = \{\langle a, b, c\rangle \in A^3 \mid a{\cdot}b \text{ определено и равно } c\},$$

и рассматриваем $\mathfrak{A}$ как модель предикатной сигнатуры

$$\sigma = \langle A^0, {}^0A, P\rangle.$$

Таким образом, проективная плоскость $\mathfrak{A}$ вычислима, если 1-местные отношения A, A^0, ${}^0A$ и 3-местное отношение $P^{\mathfrak{A}}$ являются вычислимыми.

Определение конфигурации

Конфигурацией называется структура $\mathfrak{A} = \langle A, A^0, {}^0A, I\rangle$ с разбиением носителя A на два подмножества $A^0 \cup {}^0A = A$, $A^0 \cap {}^0A = \varnothing$ и симметричным бинарным отношением $I \subseteq A^2$ (*отношение инцидентности*), удовлетворяющим следующим условиям:

Определение конфигурации

Конфигурацией называется структура $\mathfrak{A} = \langle A, A^0, {}^0A, I \rangle$ с разбиением носителя A на два подмножества $A^0 \cup {}^0A = A$, $A^0 \cap {}^0A = \varnothing$ и симметричным бинарным отношением $I \subseteq A^2$ (*отношение инцидентности*), удовлетворяющим следующим условиям:

(1) Если $\langle a, b \rangle \in I$, то элементы a и b — неоднотипные;

Определение конфигурации

Конфигурацией называется структура $\mathfrak{A} = \langle A, A^0, {}^0A, I \rangle$ с разбиением носителя A на два подмножества $A^0 \cup {}^0A = A$, $A^0 \cap {}^0A = \varnothing$ и симметричным бинарным отношением $I \subseteq A^2$ (*отношение инцидентности*), удовлетворяющим следующим условиям:

(1) Если $\langle a, b \rangle \in I$, то элементы a и b — неоднотипные;

(2) Если $\langle a, c \rangle \in I$, $\langle b, c \rangle \in I$, $\langle a, d \rangle \in I$, $\langle b, d \rangle \in I$, то $a = b$ или $c = d$.

Определение конфигурации

Конфигурацией называется структура $\mathfrak{A} = \langle A, A^0, {}^0A, I\rangle$ с разбиением носителя A на два подмножества $A^0 \cup {}^0A = A$, $A^0 \cap {}^0A = \varnothing$ и симметричным бинарным отношением $I \subseteq A^2$ (*отношение инцидентности*), удовлетворяющим следующим условиям:

(1) Если $\langle a, b\rangle \in I$, то элементы a и b — неоднотипные;

(2) Если $\langle a, c\rangle \in I$, $\langle b, c\rangle \in I$, $\langle a, d\rangle \in I$, $\langle b, d\rangle \in I$, то $a = b$ или $c = d$.

Свяжем с конфигурацией $\mathfrak{A}$ частичную операцию:

(3) Произведение $a{\cdot}b$ определено и равно c, если и только если $a \neq b$, $\langle a, c\rangle \in I$ и $\langle b, c\rangle \in I$.

Конфигурации и проективные плоскости

Конфигурация $\mathfrak{A}$ называется *замкнутой*, если для любых различных однотипных $a, b \in A$ в $\mathfrak{A}$ определено $a \cdot b$.

Конфигурации и проективные плоскости

Конфигурация $\mathfrak{A}$ называется *замкнутой*, если для любых различных однотипных $a, b \in A$ в $\mathfrak{A}$ определено $a \cdot b$.

Таким образом, замкнутая конфигурация является проективной плоскостью тогда и только тогда, когда она не вырождена.

Конфигурации и проективные плоскости

Конфигурация $\mathfrak{A}$ называется *замкнутой*, если для любых различных однотипных $a, b \in A$ в $\mathfrak{A}$ определено $a{\cdot}b$.

Таким образом, замкнутая конфигурация является проективной плоскостью тогда и только тогда, когда она не вырождена.

Любую проективную плоскость $\mathfrak{A} = \langle A, A^0, {}^0A, \cdot\rangle$ можно рассматривать как конфигурацию относительно инцидентности

$$I = \{\langle a, b\rangle \in A^2 \mid \exists x \in A(a{\cdot}x = b)\}.$$

Определение свободно порождённой плоскости

Говорят, что конфигурация $\mathfrak{B}$ является *свободным замыканием* конфигурации $\mathfrak{A}$ и пишут $\mathfrak{B} = \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$, если существует такая счётная последовательность конфигураций

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{A}_i \subseteq \ldots,$$

что $\mathfrak{B} = \bigcup_{i \in \omega} \mathfrak{A}_i$ и для любого $i \in \omega$ справедливы свойства:

Определение свободно порождённой плоскости

Говорят, что конфигурация $\mathfrak{B}$ является *свободным замыканием* конфигурации $\mathfrak{A}$ и пишут $\mathfrak{B} = \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$, если существует такая счётная последовательность конфигураций

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{A}_i \subseteq \ldots,$$

что $\mathfrak{B} = \bigcup_{i \in \omega} \mathfrak{A}_i$ и для любого $i \in \omega$ справедливы свойства:

(a) для любых различных однотипных $a, b \in \mathfrak{A}_i$ существует $c \in \mathfrak{A}_{i+1}$ такой, что $a \cdot b = c$;

Определение свободно порождённой плоскости

Говорят, что конфигурация $\mathfrak{B}$ является *свободным замыканием* конфигурации $\mathfrak{A}$ и пишут $\mathfrak{B} = \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$, если существует такая счётная последовательность конфигураций

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{A}_i \subseteq \ldots,$$

что $\mathfrak{B} = \bigcup_{i \in \omega} \mathfrak{A}_i$ и для любого $i \in \omega$ справедливы свойства:

(а) для любых различных однотипных $a, b \in \mathfrak{A}_i$ существует $c \in \mathfrak{A}_{i+1}$ такой, что $a \cdot b = c$;

(б) для любого $c \in \mathfrak{A}_{i+1} \setminus \mathfrak{A}_i$ существуют ровно два элемента $a, b \in \mathfrak{A}_i$ такие, что $a \cdot b = c$.

Определение свободно порождённой плоскости

Говорят, что конфигурация $\mathfrak{B}$ является *свободным замыканием* конфигурации $\mathfrak{A}$ и пишут $\mathfrak{B} = \mathfrak{F}(\mathfrak{A})$, если существует такая счётная последовательность конфигураций

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{A}_i \subseteq \ldots,$$

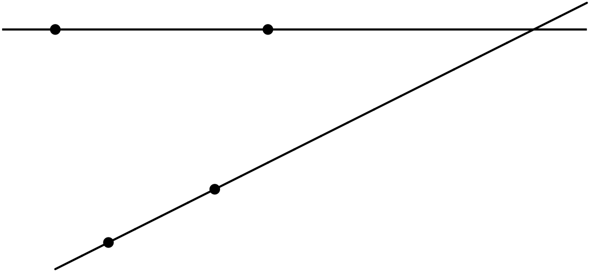
что $\mathfrak{B} = \bigcup_{i \in \omega} \mathfrak{A}_i$ и для любого $i \in \omega$ справедливы свойства:

(а) для любых различных однотипных $a, b \in \mathfrak{A}_i$ существует $c \in \mathfrak{A}_{i+1}$ такой, что $a \cdot b = c$;

(б) для любого $c \in \mathfrak{A}_{i+1} \setminus \mathfrak{A}_i$ существуют ровно два элемента $a, b \in \mathfrak{A}_i$ такие, что $a \cdot b = c$.

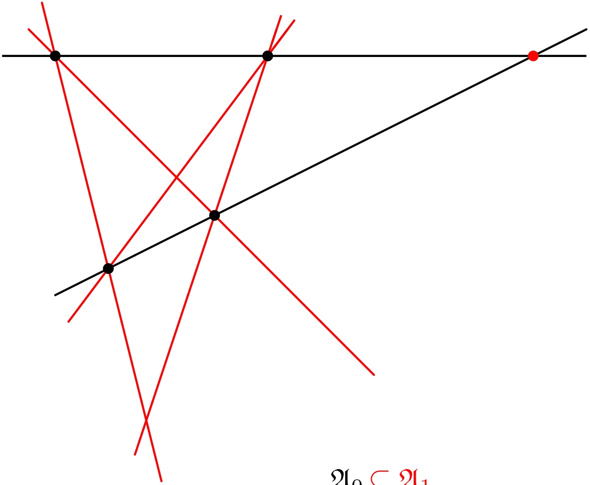
Если $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ является проективной плоскостью, то говорят, что $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ *свободно порождена* конфигурацией $\mathfrak{A}$.

Пример свободно порождённой плоскости



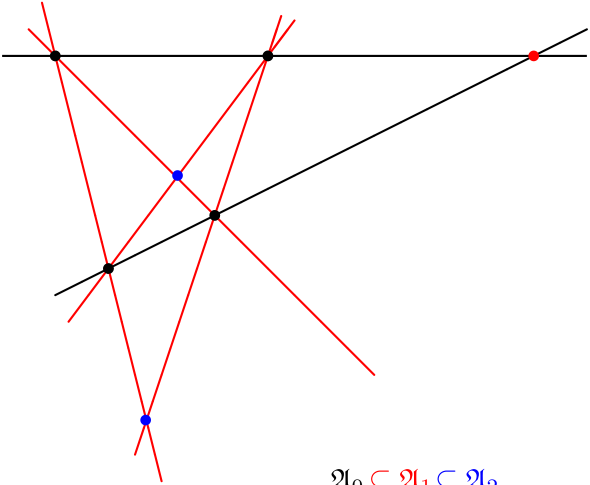
$\mathfrak{A}_0$

Пример свободно порождённой плоскости



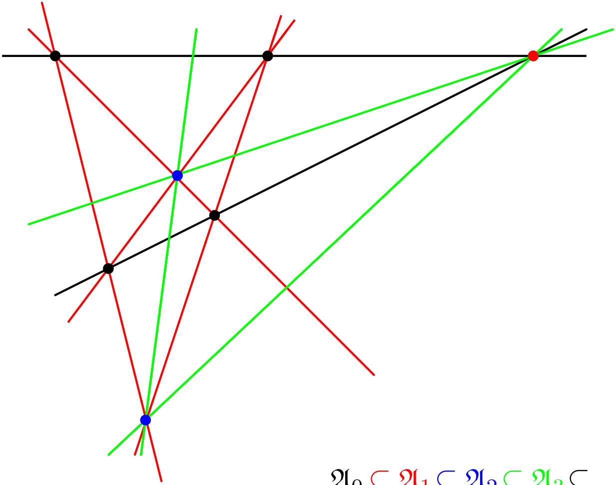
$\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1$

Пример свободно порождённой плоскости



$\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2$

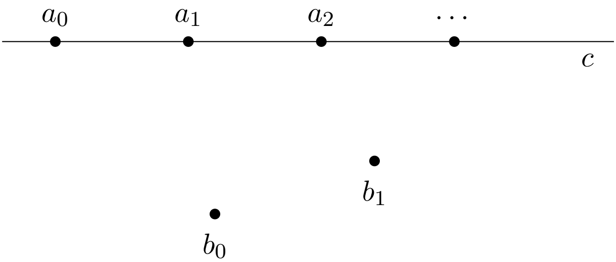
Пример свободно порождённой плоскости



$\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_2 \subseteq \mathfrak{A}_3 \subseteq \ldots$

Определение свободной проективной плоскости

Свободная проективная плоскость $\mathfrak{F}_\alpha$, где $2 \leqslant \alpha \leqslant \omega$, свободно порождается *стандартной* конфигурацией с множеством точек $\{b_0, b_1\} \cup \{a_i \mid i \in \alpha\}$, множеством прямых $\{c\}$ и отношением инцидентности $\{\langle a_i, c\rangle, \langle c, a_i\rangle \mid i \in \alpha\}$.



Определение ранга свободного замыкания

Если конфигурация $\mathfrak{A} = \langle A, A^0, {}^0A, I \rangle$ конечна, то число

$$2{\cdot}|A| - \frac{|I|}{2}$$

будем называть *рангом* $\mathfrak{A}$. Если конфигурация $\mathfrak{A}$ счётна, то по определению считаем, что её *ранг* равен ω.

Определение ранга свободного замыкания

Если конфигурация $\mathfrak{A} = \langle A, A^0, {}^0A, I\rangle$ конечна, то число

$$2\cdot|A| - \frac{|I|}{2}$$

будем называть *рангом* $\mathfrak{A}$. Если конфигурация $\mathfrak{A}$ счётна, то по определению считаем, что её *ранг* равен ω.

Рангом свободного замыкания $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ мы называем ранг исходной конфигурации $\mathfrak{A}$.

Определение ранга свободного замыкания

Если конфигурация $\mathfrak{A} = \langle A, A^0, {}^0\!A, I\rangle$ конечна, то число

$$2{\cdot}|A| - \frac{|I|}{2}$$

будем называть *рангом* $\mathfrak{A}$. Если конфигурация $\mathfrak{A}$ счётна, то по определению считаем, что её *ранг* равен ω.

Рангом свободного замыкания $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ мы называем ранг исходной конфигурации $\mathfrak{A}$.

Таким образом, свободная плоскость $\mathfrak{F}_n$, где $2 \leqslant n < \omega$, имеет ранг $n+6$. Свободная плоскость $\mathfrak{F}_\omega$ имеет ранг ω.

Вычислимые представления свободно порождённых плоскостей

Предложение 1. *Пусть* $\mathbf{d}$ *— тьюрингова степень,* $\mathfrak{A} = \langle A, A^0, {}^0A, I\rangle$ *— невырожденная незамкнутая конфигурация такие, что множества* A*,* A^0*,* ${}^0A$ *вычислимы, а отношение* I *является* $\mathbf{d}$*-вычислимым. Тогда проективная плоскость* $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$*, свободно порождённая конфигурацией* $\mathfrak{A}$*, имеет* $\mathbf{d}$*-вычислимое представление.*

Вычислимые представления свободно порождённых плоскостей

Предложение 1. *Пусть* $\mathbf{d}$ *— тьюрингова степень,* $\mathfrak{A} = \langle A, A^0, {}^0A, I\rangle$ *— невырожденная незамкнутая конфигурация такие, что множества* A*,* A^0*,* ${}^0A$ *вычислимы, а отношение* I *является* $\mathbf{d}$*-вычислимым. Тогда проективная плоскость* $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$*, свободно порождённая конфигурацией* $\mathfrak{A}$*, имеет* $\mathbf{d}$*-вычислимое представление.*

Доказательство: Конструкция А.И. Ширшова (каждый элемент $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ имеет однозначную запись в виде правильного неассоциативного слова над $\mathfrak{A}$).

Вычислимые представления свободно порождённых плоскостей

Предложение 1. *Пусть $\mathbf{d}$ — тьюрингова степень, $\mathfrak{A} = \langle A, A^0, {}^0A, I\rangle$ — невырожденная незамкнутая конфигурация такие, что множества A, A^0, ${}^0A$ вычислимы, а отношение I является $\mathbf{d}$-вычислимым. Тогда проективная плоскость $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$, свободно порождённая конфигурацией $\mathfrak{A}$, имеет $\mathbf{d}$-вычислимое представление.*

Доказательство: Конструкция А.И. Ширшова (каждый элемент $\mathfrak{F}(\mathfrak{A})$ имеет однозначную запись в виде правильного неассоциативного слова над $\mathfrak{A}$).

Следствие 2. *Любая счётная свободная проективная плоскость имеет вычислимое представление.*

Определение дезарговой проективной плоскости

Проективная плоскость называется *дезарговой*, если в ней справедливо

Условие Дезарга: для любых однотипных элементов a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 таких, что определены произведения $a_1{\cdot}a_2$, $b_1{\cdot}b_2$, $c_1{\cdot}c_2$, $(a_1{\cdot}b_1){\cdot}(a_2{\cdot}b_2)$, $(a_1{\cdot}c_1){\cdot}(a_2{\cdot}c_2)$, $(b_1{\cdot}c_1){\cdot}(b_2{\cdot}c_2)$, а тройки $\{a_1, b_1, c_1\}$, $\{a_2, b_2, c_2\}$ образуют невырожденные треугольники, если $a_1{\cdot}a_2$, $b_1{\cdot}b_2$, $c_1{\cdot}c_2$ инцидентны одному и тому же элементу, то $(a_1{\cdot}b_1){\cdot}(a_2{\cdot}b_2)$, $(a_1{\cdot}c_1){\cdot}(a_2{\cdot}c_2)$, $(b_1{\cdot}c_1){\cdot}(b_2{\cdot}c_2)$ тоже инцидентны одному и тому же элементу.

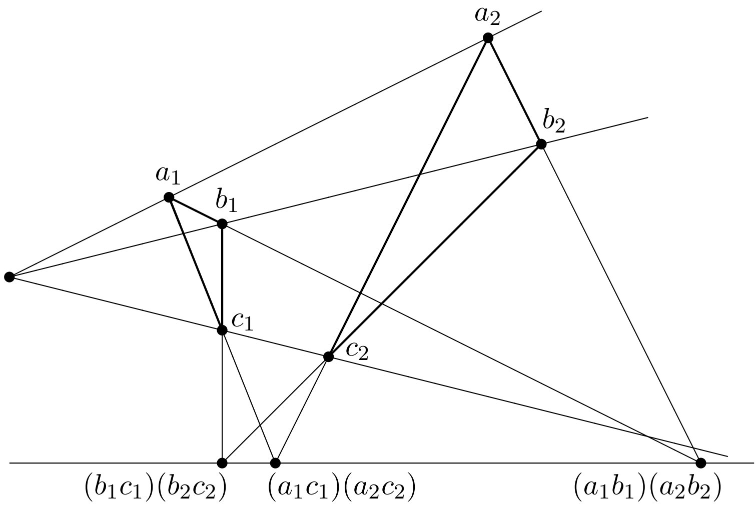
Определение дезарговой проективной плоскости

Проективная плоскость называется *дезарговой*, если в ней справедливо

Условие Дезарга: для любых однотипных элементов a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 таких, что определены произведения $a_1 \cdot a_2$, $b_1 \cdot b_2$, $c_1 \cdot c_2$, $(a_1 \cdot b_1) \cdot (a_2 \cdot b_2)$, $(a_1 \cdot c_1) \cdot (a_2 \cdot c_2)$, $(b_1 \cdot c_1) \cdot (b_2 \cdot c_2)$, а тройки $\{a_1, b_1, c_1\}$, $\{a_2, b_2, c_2\}$ образуют невырожденные треугольники, если $a_1 \cdot a_2$, $b_1 \cdot b_2$, $c_1 \cdot c_2$ инцидентны одному и тому же элементу, то $(a_1 \cdot b_1) \cdot (a_2 \cdot b_2)$, $(a_1 \cdot c_1) \cdot (a_2 \cdot c_2)$, $(b_1 \cdot c_1) \cdot (b_2 \cdot c_2)$ тоже инцидентны одному и тому же элементу.

Никакая дезаргова плоскость не является свободно порождённой.

Условие Дезарга



Определение папповой проективной плоскости

Проективная плоскость называется *папповой*, если в ней справедливо

Условие Паппа: для любых однотипных элементов a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 таких, что $a_1 \cdot b_1 = a_1 \cdot c_1 = b_1 \cdot c_1$, $a_2 \cdot b_2 = a_2 \cdot c_2 = b_2 \cdot c_2$, $a_1 \cdot b_1 \neq a_2 \cdot b_2$, а четвёрка $\{a_1, b_1, a_2, b_2\}$ образует невырожденный четырёхугольник, если определены произведения $a_3 = (b_1 \cdot c_2) \cdot (b_2 \cdot c_1)$, $b_3 = (a_1 \cdot c_2) \cdot (a_2 \cdot c_1)$, $c_3 = (a_1 \cdot b_2) \cdot (a_2 \cdot b_1)$, то a_3, b_3, c_3 инцидентны одному и тому же элементу.

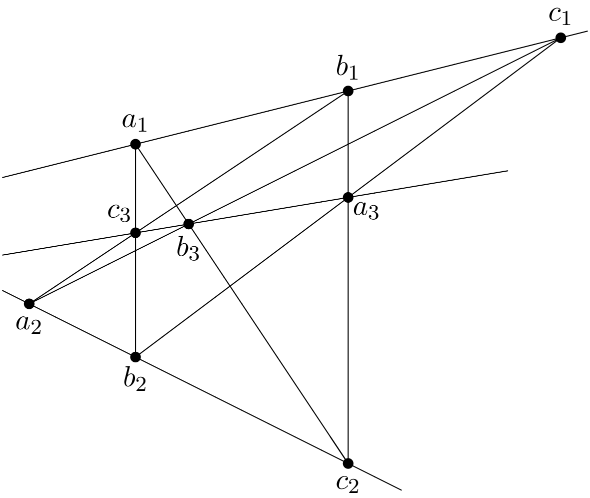
Определение папповой проективной плоскости

Проективная плоскость называется *папповой*, если в ней справедливо

Условие Паппа: для любых однотипных элементов a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 таких, что $a_1{\cdot}b_1 = a_1{\cdot}c_1 = b_1{\cdot}c_1$, $a_2{\cdot}b_2 = a_2{\cdot}c_2 = b_2{\cdot}c_2$, $a_1{\cdot}b_1 \neq a_2{\cdot}b_2$, а четвёрка $\{a_1, b_1, a_2, b_2\}$ образует невырожденный четырёхугольник, если определены произведения $a_3 = (b_1{\cdot}c_2){\cdot}(b_2{\cdot}c_1)$, $b_3 = (a_1{\cdot}c_2){\cdot}(a_2{\cdot}c_1)$, $c_3 = (a_1{\cdot}b_2){\cdot}(a_2{\cdot}b_1)$, то a_3, b_3, c_3 инцидентны одному и тому же элементу.

Любая паппова плоскость является дезарговой.

Условие Паппа



Координатизация дезарговых и папповых плоскостей

Любая дезаргова (паппова) плоскость определеляется с точностью до изоморфизма некоторым ассоциативным телом (полем) $\mathfrak{K}$ следующим образом:

Координатизация дезарговых и папповых плоскостей

Любая дезаргова (паппова) плоскость определеляется с точностью до изоморфизма некоторым ассоциативным телом (полем) $\mathfrak{K}$ следующим образом:

Пусть $V_{\mathfrak{K}}$ — 3-мерное левое векторное пространство над $\mathfrak{K}$.

$$A^0 = \{a \subseteq V \mid a \text{ — 1-мерное подпространство } V_{\mathfrak{K}}\}$$

$$^0A = \{a \subseteq V \mid a \text{ — 2-мерное подпространство } V_{\mathfrak{K}}\}$$

Координатизация дезарговых и папповых плоскостей

Любая дезаргова (паппова) плоскость определеляется с точностью до изоморфизма некоторым ассоциативным телом (полем) $\mathfrak{K}$ следующим образом:

Пусть $V_{\mathfrak{K}}$ — 3-мерное левое векторное пространство над $\mathfrak{K}$.

$$A^0 = \{a \subseteq V \mid a \text{ — 1-мерное подпространство } V_{\mathfrak{K}}\}$$

$$^0A = \{a \subseteq V \mid a \text{ — 2-мерное подпространство } V_{\mathfrak{K}}\}$$

Для различных $a, b \in A^0$, $a{\cdot}b$ — единственное $c \in {}^0A$ такое, что $c \supseteq a$, $c \supseteq b$.

Координатизация дезарговых и папповых плоскостей

Любая дезаргова (паппова) плоскость определеляется с точностью до изоморфизма некоторым ассоциативным телом (полем) $\mathfrak{K}$ следующим образом:

Пусть $V_{\mathfrak{K}}$ — 3-мерное левое векторное пространство над $\mathfrak{K}$.

$$A^0 = \{a \subseteq V \mid a \text{ — 1-мерное подпространство } V_{\mathfrak{K}}\}$$

$$^0A = \{a \subseteq V \mid a \text{ — 2-мерное подпространство } V_{\mathfrak{K}}\}$$

Для различных $a, b \in A^0$, $a{\cdot}b$ — единственное $c \in {}^0A$ такое, что $c \supseteq a$, $c \supseteq b$.

Для различных $a, b \in {}^0A$, $a{\cdot}b$ — единственное $c \in A^0$ такое, что $c \subseteq a$, $c \subseteq b$ $(a{\cdot}b = a \cap b)$.

Координатизация дезарговых и папповых плоскостей

Любая дезаргова (паппова) плоскость определеляется с точностью до изоморфизма некоторым ассоциативным телом (полем) $\mathfrak{K}$ следующим образом:

Пусть $V_{\mathfrak{K}}$ — 3-мерное левое векторное пространство над $\mathfrak{K}$.

$$A^0 = \{a \subseteq V \mid a \text{ — 1-мерное подпространство } V_{\mathfrak{K}}\}$$

$$^0A = \{a \subseteq V \mid a \text{ — 2-мерное подпространство } V_{\mathfrak{K}}\}$$

Для различных $a, b \in A^0$, $a{\cdot}b$ — единственное $c \in {}^0A$ такое, что $c \supseteq a$, $c \supseteq b$.

Для различных $a, b \in {}^0A$, $a{\cdot}b$ — единственное $c \in A^0$ такое, что $c \subseteq a$, $c \subseteq b$ $(a{\cdot}b = a \cap b)$.

Ассоциативное тело (поле) $\mathfrak{K}$ называется *координатным телом (полем)* дезарговой (папповой) плоскости $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}} = \langle A, A^0, {}^0A, \cdot\rangle$.

Вычислимые представления дезарговых плоскостей

Предложение 3. *Пусть* $\mathbf{d}$ *— тьюрингова степень,* $\mathfrak{F}$ *—* $\mathbf{d}$*-вычислимое представление ассоциативного тела* $\mathfrak{K}$*. Тогда существует* $\mathbf{d}$*-вычислимое представление* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ *дезарговой проективной плоскости* $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$*.*

Вычислимые представления дезарговых плоскостей

Предложение 3. *Пусть* $\mathbf{d}$ *— тьюрингова степень,* $\mathfrak{F}$ *—* $\mathbf{d}$*-вычислимое представление ассоциативного тела* $\mathfrak{K}$*. Тогда существует* $\mathbf{d}$*-вычислимое представление* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ *дезарговой проективной плоскости* $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$*.*

Остовом в $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$ будем называть упорядоченный набор из четырёх точек такой, что никакие три из них не инцидентны одной прямой.

Вычислимые представления дезарговых плоскостей

Предложение 3. *Пусть* $\mathbf{d}$ *— тьюрингова степень,* $\mathfrak{F}$ *—* $\mathbf{d}$*-вычислимое представление ассоциативного тела* $\mathfrak{K}$*. Тогда существует* $\mathbf{d}$*-вычислимое представление* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ *дезарговой проективной плоскости* $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$*.*

Остовом в $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$ будем называть упорядоченный набор из четырёх точек такой, что никакие три из них не инцидентны одной прямой.

Предложение 4. *Пусть* $\mathbf{d}$ *— тьюрингова степень,* $\mathfrak{A}$ *—* $\mathbf{d}$*-вычислимое представление дезарговой проективной плоскости* $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$*, и* $\overline{D} = \langle D_1, D_2, D_3, D_4 \rangle$ *— произвольный остов в* $\mathfrak{A}$*. Тогда существует* $\mathbf{d}$*-вычислимое представление* $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}$ *ассоциативного тела* $\mathfrak{K}$*.*

Вычислимые представления дезарговых плоскостей

Предложение 3. *Пусть* $\mathbf{d}$ *— тьюрингова степень,* $\mathfrak{F}$ *—* $\mathbf{d}$*-вычислимое представление ассоциативного тела* $\mathfrak{K}$*. Тогда существует* $\mathbf{d}$*-вычислимое представление* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ *дезарговой проективной плоскости* $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$*.*

Остовом в $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$ будем называть упорядоченный набор из четырёх точек такой, что никакие три из них не инцидентны одной прямой.

Предложение 4. *Пусть* $\mathbf{d}$ *— тьюрингова степень,* $\mathfrak{A}$ *—* $\mathbf{d}$*-вычислимое представление дезарговой проективной плоскости* $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$*, и* $\overline{D} = \langle D_1, D_2, D_3, D_4 \rangle$ *— произвольный остов в* $\mathfrak{A}$*. Тогда существует* $\mathbf{d}$*-вычислимое представление* $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}$ *ассоциативного тела* $\mathfrak{K}$*.*

Доказательство: Ассоциативное тело $\mathfrak{K}$ является Δ_1-определимым в проективной плоскости $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$ с параметрами $\overline{D}$.

Вычислимые представления дезарговых плоскостей

Предложение 3. *Пусть* $\mathbf{d}$ *— тьюрингова степень,* $\mathfrak{F}$ *—* $\mathbf{d}$*-вычислимое представление ассоциативного тела* $\mathfrak{K}$*. Тогда существует* $\mathbf{d}$*-вычислимое представление* $\mathfrak{A}_{\mathfrak{F}}$ *дезарговой проективной плоскости* $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$*.*

Остовом в $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$ будем называть упорядоченный набор из четырёх точек такой, что никакие три из них не инцидентны одной прямой.

Предложение 4. *Пусть* $\mathbf{d}$ *— тьюрингова степень,* $\mathfrak{A}$ *—* $\mathbf{d}$*-вычислимое представление дезарговой проективной плоскости* $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$*, и* $\overline{D} = \langle D_1, D_2, D_3, D_4 \rangle$ *— произвольный остов в* $\mathfrak{A}$*. Тогда существует* $\mathbf{d}$*-вычислимое представление* $\mathfrak{F}_{\mathfrak{A},\overline{D}}$ *ассоциативного тела* $\mathfrak{K}$*.*

Доказательство: Ассоциативное тело $\mathfrak{K}$ является Δ_1-определимым в проективной плоскости $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$ с параметрами $\overline{D}$.

Следствие 5. *Дезаргова (паппова) проективная плоскость* $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$ *имеет вычислимое представление тогда и только тогда, когда ассоциативное тело (поле)* $\mathfrak{K}$ *имеет вычислимое представление.*

Определение автоматного отношения

Подход Хусаинова-Нероуда: *конечные слова, синхронные автоматы*.

Определение автоматного отношения

Подход Хусаинова-Нероуда: *конечные слова, синхронные автоматы*.

Пусть Σ — конечный алфавит, $\Sigma_\perp = \Sigma \cup \{\perp\}$, $\perp \notin \Sigma$.

Определение автоматного отношения

Подход Хусаинова-Нероуда: *конечные слова, синхронные автоматы*.

Пусть Σ — конечный алфавит, $\Sigma_\perp = \Sigma \cup \{\perp\}$, $\perp \notin \Sigma$.

Конволюцией кортежа $\langle w_1, \ldots, w_n \rangle \in (\Sigma^*)^n$ является кортеж $\langle w_1, \ldots, w_n \rangle_\perp \in (\Sigma_\perp^n)^*$, полученный добавлением наименьшего числа символов $\perp$ к правым концам слов w_i таким образом, чтобы длины всех слов стали одинаковыми.

Определение автоматного отношения

Подход Хусаинова-Нероуда: *конечные слова, синхронные автоматы.*

Пусть Σ — конечный алфавит, $\Sigma_\perp = \Sigma \cup \{\perp\}$, $\perp \notin \Sigma$.

Конволюцией кортежа $\langle w_1, \ldots, w_n \rangle \in (\Sigma^*)^n$ является кортеж $\langle w_1, \ldots, w_n \rangle_\perp \in (\Sigma_\perp^n)^*$, полученный добавлением наименьшего числа символов $\perp$ к правым концам слов w_i таким образом, чтобы длины всех слов стали одинаковыми.

Конволюция отношения $R \subseteq (\Sigma^*)^n$ — это отношение $R_\perp = \{w_\perp \mid w \in R\} \subseteq (\Sigma_\perp^n)^*$.

Определение автоматного отношения

Подход Хусаинова-Нероуда: *конечные слова, синхронные автоматы.*

Пусть Σ — конечный алфавит, $\Sigma_\perp = \Sigma \cup \{\perp\}$, $\perp \notin \Sigma$.

Конволюцией кортежа $\langle w_1, \ldots, w_n \rangle \in (\Sigma^*)^n$ является кортеж $\langle w_1, \ldots, w_n \rangle_\perp \in (\Sigma_\perp^n)^*$, полученный добавлением наименьшего числа символов $\perp$ к правым концам слов w_i таким образом, чтобы длины всех слов стали одинаковыми.

Конволюция отношения $R \subseteq (\Sigma^*)^n$ — это отношение $R_\perp = \{w_\perp \mid w \in R\} \subseteq (\Sigma_\perp^n)^*$.

Отношение $R \subseteq (\Sigma^*)^n$ является *автоматным над алфавитом* Σ, если его конволюция $R_\perp$ распознаётся некоторым конечным автоматом над алфавитом $\Sigma_\perp^n$.

Определение автоматной модели

Модель $\mathfrak{A} = \langle A, R_1, \ldots, R_s \rangle$ предикатной сигнатуры *автоматна над алфавитом* Σ, если её носитель $A \subseteq \Sigma^*$ и основные отношения $R_i \subseteq (\Sigma^*)^{n_i}$, $1 \leqslant i \leqslant s$, являются автоматными над алфавитом Σ.

Определение автоматной модели

Модель $\mathfrak{A} = \langle A, R_1, \ldots, R_s \rangle$ предикатной сигнатуры *автоматна над алфавитом* Σ, если её носитель $A \subseteq \Sigma^*$ и основные отношения $R_i \subseteq (\Sigma^*)^{n_i}$, $1 \leqslant i \leqslant s$, являются автоматными над алфавитом Σ.

Модель $\mathfrak{A}$ *автоматна*, если она автоматна над некоторым алфавитом Σ. Модель $\mathfrak{A}$ *автоматно представима*, если существует автоматная модель $\mathfrak{B}$, изоморфная $\mathfrak{A}$.

Автоматные представления проективных плоскостей

Теорема 6 [А.С. Денисенко, 2012].
Никакая свободная проективная плоскость не имеет автоматных представлений.

Теорема 7 [А.С. Денисенко, 2012].
Произвольная дезаргова (паппова) проективная плоскость автоматно представима тогда и только тогда, когда она конечна.

Автоматные представления проективных плоскостей

Теорема 6 [А.С. Денисенко, 2012].
Никакая свободная проективная плоскость не имеет автоматных представлений.

Теорема 7 [А.С. Денисенко, 2012].
Произвольная дезаргова (паппова) проективная плоскость автоматно представима тогда и только тогда, когда она конечна.

Вопрос: Можно ли обобщить Теорему 6 на случай произвольной свободно порождённой проективной плоскости?

Автоматные представления проективных плоскостей

Теорема 6 [А.С. Денисенко, 2012].
Никакая свободная проективная плоскость не имеет автоматных представлений.

Теорема 7 [А.С. Денисенко, 2012].
Произвольная дезаргова (паппова) проективная плоскость автоматно представима тогда и только тогда, когда она конечна.

Вопрос: Можно ли обобщить Теорему 6 на случай произвольной свободно порождённой проективной плоскости?

Теорема 8. *Никакая свободно порождённая проективная плоскость не имеет автоматных представлений.*

Определение вычислимого класса структур

Если структура $\mathfrak{M}$ вычислима, то её *вычислимым индексом* будем называть число e такое, что $D(\mathfrak{M})$ вычисляется машиной Тьюринга с кодом e.

Определение вычислимого класса структур

Если структура $\mathfrak{M}$ вычислима, то её *вычислимым индексом* будем называть число e такое, что $D(\mathfrak{M})$ вычисляется машиной Тьюринга с кодом e.

Последовательность $\{\mathfrak{M}_n\}_{n\in\omega}$ вычислимых структур *вычислима*, если существует вычислимая функция f такая, что $f(n)$ является вычислимым индексом структуры $\mathfrak{M}_n$ для каждого $n \in \omega$.

Определение вычислимого класса структур

Если структура $\mathfrak{M}$ вычислима, то её *вычислимым индексом* будем называть число e такое, что $D(\mathfrak{M})$ вычисляется машиной Тьюринга с кодом e.

Последовательность $\{\mathfrak{M}_n\}_{n\in\omega}$ вычислимых структур *вычислима*, если существует вычислимая функция f такая, что $f(n)$ является вычислимым индексом структуры $\mathfrak{M}_n$ для каждого $n \in \omega$.

Пусть K — некоторый класс моделей, замкнутый относительно изоморфизмов, K^c — множество всех вычислимых представителей класса K, и $\sim$ — некоторое отношение эквивалентности на K^c.

Определение вычислимого класса структур

Если структура $\mathfrak{M}$ вычислима, то её *вычислимым индексом* будем называть число e такое, что $D(\mathfrak{M})$ вычисляется машиной Тьюринга с кодом e.

Последовательность $\{\mathfrak{M}_n\}_{n\in\omega}$ вычислимых структур *вычислима*, если существует вычислимая функция f такая, что $f(n)$ является вычислимым индексом структуры $\mathfrak{M}_n$ для каждого $n \in \omega$.

Пусть K — некоторый класс моделей, замкнутый относительно изоморфизмов, K^c — множество всех вычислимых представителей класса K, и $\sim$ — некоторое отношение эквивалентности на K^c.

Отображение $\nu : \omega \to K^c$ называется *нумерацией класса K^c с точностью до $\sim$ (нумерацией $K^c/{\sim}$)*, если для любой вычислимой структуры $\mathfrak{M} \in K^c$ существует $n \in \omega$ такой, что $\mathfrak{M} \sim \nu(n)$.

Определение вычислимого класса структур

Если структура $\mathfrak{M}$ вычислима, то её *вычислимым индексом* будем называть число e такое, что $D(\mathfrak{M})$ вычисляется машиной Тьюринга с кодом e.

Последовательность $\{\mathfrak{M}_n\}_{n\in\omega}$ вычислимых структур *вычислима*, если существует вычислимая функция f такая, что $f(n)$ является вычислимым индексом структуры $\mathfrak{M}_n$ для каждого $n \in \omega$.

Пусть K — некоторый класс моделей, замкнутый относительно изоморфизмов, K^c — множество всех вычислимых представителей класса K, и $\sim$ — некоторое отношение эквивалентности на K^c.

Отображение $\nu : \omega \to K^c$ называется *нумерацией класса K^c с точностью до $\sim$ (нумерацией $K^c/\sim$)*, если для любой вычислимой структуры $\mathfrak{M} \in K^c$ существует $n \in \omega$ такой, что $\mathfrak{M} \sim \nu(n)$.

Нумерация ν класса $K^c/\sim$ называется *вычислимой*, если последовательность структур $\{\nu(n)\}_{n\in\omega}$ является вычислимой.

Неограниченность свободной плоскости $\mathfrak{F}_\omega$

Пусть $\mathfrak{F}_\omega$ — свободная проективная плоскость ранга ω.

Неограниченность свободной плоскости $\mathfrak{F}_\omega$

Пусть $\mathfrak{F}_\omega$ — свободная проективная плоскость ранга ω.

Теорема 9.
(1) По любой вычислимой последовательности $\{\mathfrak{A}_n\}_{n\in\omega}$ моделей сигнатуры $\sigma = \langle A^0, {}^0A, P\rangle$ эффективно строится вычислимое представление $\mathfrak{A}$ плоскости $\mathfrak{F}_\omega$ такое, что $\mathfrak{A}$ не является вычислимо изоморфным $\mathfrak{A}_n$ ни для какого $n \in \omega$;

Неограниченность свободной плоскости $\mathfrak{F}_\omega$

Пусть $\mathfrak{F}_\omega$ — свободная проективная плоскость ранга ω.

Теорема 9.
(1) По любой вычислимой последовательности $\{\mathfrak{A}_n\}_{n\in\omega}$ моделей сигнатуры $\sigma = \langle A^0, {}^0A, P\rangle$ эффективно строится вычислимое представление $\mathfrak{A}$ плоскости $\mathfrak{F}_\omega$ такое, что $\mathfrak{A}$ не является вычислимо изоморфным $\mathfrak{A}_n$ ни для какого $n \in \omega$;
(2) Существует такое вычислимое семейство $\{\mathfrak{M}_i\}_{i\in\omega}$ вычислимых представлений $\mathfrak{F}_\omega$, что для любых $i \neq j$ модели $\mathfrak{M}_i$ и $\mathfrak{M}_j$ не являются вычислимо изоморфными.

Неограниченность свободной плоскости $\mathfrak{F}_\omega$

Пусть $\mathfrak{F}_\omega$ — свободная проективная плоскость ранга ω.

Теорема 9.
(1) По любой вычислимой последовательности $\{\mathfrak{A}_n\}_{n\in\omega}$ моделей сигнатуры $\sigma = \langle A^0, {}^0A, P\rangle$ эффективно строится вычислимое представление $\mathfrak{A}$ плоскости $\mathfrak{F}_\omega$ такое, что $\mathfrak{A}$ не является вычислимо изоморфным $\mathfrak{A}_n$ ни для какого $n \in \omega$;
(2) Существует такое вычислимое семейство $\{\mathfrak{M}_i\}_{i\in\omega}$ вычислимых представлений $\mathfrak{F}_\omega$, что для любых $i \neq j$ модели $\mathfrak{M}_i$ и $\mathfrak{M}_j$ не являются вычислимо изоморфными.

Доказательство: Метод неограниченных моделей [С.С. Гончаров, 1980].

Следствия из неограниченности $\mathfrak{F}_\omega$

Следствие 10. *Пусть K — любой из следующих классов моделей:*

(1) *класс всех свободных проективных плоскостей,*

(2) *класс всех свободно порождённых проективных плоскостей,*

(3) *класс всех проективных плоскостей.*

Тогда K^c не имеет вычислимой нумерации с точностью до вычислимого изоморфизма.

Следствия из неограниченности $\mathfrak{F}_\omega$

Следствие 10. *Пусть K — любой из следующих классов моделей:*

(1) *класс всех свободных проективных плоскостей,*

(2) *класс всех свободно порождённых проективных плоскостей,*

(3) *класс всех проективных плоскостей.*

Тогда K^c не имеет вычислимой нумерации с точностью до вычислимого изоморфизма.

Следствие 11. *Вычислимая размерность любой счётной свободной проективной плоскости равна 1 или ω. Свободная проективная плоскость вычислимо категорична тогда и только тогда, когда её ранг конечен.*

Невычислимость классов папповых и дезарговых плоскостей

Пусть $\mathfrak{K}_\omega$ — алгебраически замкнутое поле счётного ранга трансцендентности над $\mathbb{Q}$, $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}_\omega}$ — паппова проективная плоскость, определённая полем $\mathfrak{K}_\omega$.

Невычислимость классов папповых и дезарговых плоскостей

Пусть $\mathfrak{K}_\omega$ — алгебраически замкнутое поле счётного ранга трансцендентности над $\mathbb{Q}$, $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}_\omega}$ — паппова проективная плоскость, определённая полем $\mathfrak{K}_\omega$.

Теорема 12. *Пусть $\{\mathfrak{A}_n\}_{n\in\omega}$ — вычислимая последовательность дезарговых проективных плоскостей. Тогда существует вычислимое представление $\mathfrak{A}$ плоскости $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}_\omega}$ такое, что $\mathfrak{A}$ не является вычислимо изоморфным ни одной плоскости из $\{\mathfrak{A}_n\}_{n\in\omega}$.*

Невычислимость классов папповых и дезарговых плоскостей

Пусть $\mathfrak{K}_\omega$ — алгебраически замкнутое поле счётного ранга трансцендентности над $\mathbb{Q}$, $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}_\omega}$ — паппова проективная плоскость, определённая полем $\mathfrak{K}_\omega$.

Теорема 12. *Пусть* $\{\mathfrak{A}_n\}_{n\in\omega}$ *— вычислимая последовательность дезарговых проективных плоскостей. Тогда существует вычислимое представление* $\mathfrak{A}$ *плоскости* $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}_\omega}$ *такое, что* $\mathfrak{A}$ *не является вычислимо изоморфным ни одной плоскости из* $\{\mathfrak{A}_n\}_{n\in\omega}$.

Следствие 13. *Пусть* K *— любой из следующих классов моделей:*

(1) *класс всех папповых проективных плоскостей,*

(2) *класс всех дезарговых проективных плоскостей.*

Тогда K^c *не имеет вычислимой нумерации с точностью до вычислимого изоморфизма.*

О вычислимой размерности свободных плоскостей

Напомним, что выше было получено полное описание вычислимых размерностей для свободных проективных плоскостей:

Следствие 11. *Вычислимая размерность любой счётной свободной проективной плоскости равна* 1 *или* ω. *Свободная проективная плоскость вычислимо категорична тогда и только тогда, когда её ранг конечен.*

О вычислимой размерности свободных плоскостей

Напомним, что выше было получено полное описание вычислимых размерностей для свободных проективных плоскостей:

Следствие 11. *Вычислимая размерность любой счётной свободной проективной плоскости равна 1 или ω. Свободная проективная плоскость вычислимо категорична тогда и только тогда, когда её ранг конечен.*

Вопрос: Можно ли обобщить Следствие 11 на случай свободно порождённых проективных плоскостей?

О вычислимой размерности свободных плоскостей

Напомним, что выше было получено полное описание вычислимых размерностей для свободных проективных плоскостей:

Следствие 11. *Вычислимая размерность любой счётной свободной проективной плоскости равна 1 или ω. Свободная проективная плоскость вычислимо категорична тогда и только тогда, когда её ранг конечен.*

Вопрос: Можно ли обобщить Следствие 11 на случай свободно порождённых проективных плоскостей?

Вопрос: Можно ли реализовать произвольную конечную вычислимую размерность в классе свободно порождённых проективных плоскостей?

Спектры степеней в теории вычислимых моделей

Спектром степеней структуры $\mathfrak{M}$ называется множество

$$\mathrm{DgSp}(\mathfrak{M}) = \{\deg(\mathfrak{N}) \mid \mathfrak{N} \text{ — представление } \mathfrak{M}\}.$$

Спектры степеней в теории вычислимых моделей

Спектром степеней структуры $\mathfrak{M}$ называется множество

$$\mathrm{DgSp}(\mathfrak{M}) = \{\deg(\mathfrak{N}) \mid \mathfrak{N} \text{ — представление } \mathfrak{M}\}.$$

Спектром степеней отношения R на носителе вычислимо представимой структуры $\mathfrak{M}$ называется множество

$$\mathrm{DgSp}_{\mathfrak{M}}(R) = \{\deg(f(R)) \mid f : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N} \text{ — выч. представление } \mathfrak{M}\}.$$

Спектры степеней в теории вычислимых моделей

Спектром степеней структуры $\mathfrak{M}$ называется множество

$$\mathrm{DgSp}(\mathfrak{M}) = \{\deg(\mathfrak{N}) \mid \mathfrak{N} \text{ — представление } \mathfrak{M}\}.$$

Спектром степеней отношения R на носителе вычислимо представимой структуры $\mathfrak{M}$ называется множество

$$\mathrm{DgSp}_{\mathfrak{M}}(R) = \{\deg(f(R)) \mid f : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N} \text{ — выч. представление } \mathfrak{M}\}.$$

Спектром категоричности вычислимо представимой структуры $\mathfrak{M}$ называется множество

$$\mathrm{CatSp}(\mathfrak{M}) = \{\mathbf{d} \mid \mathfrak{M} \text{ — } \mathbf{d}\text{-вычислимо категорична}\}.$$

Спектры степеней в теории вычислимых моделей

Спектром степеней структуры $\mathfrak{M}$ называется множество

$$\mathrm{DgSp}(\mathfrak{M}) = \{\deg(\mathfrak{N}) \mid \mathfrak{N} \text{ — представление } \mathfrak{M}\}.$$

Спектром степеней отношения R на носителе вычислимо представимой структуры $\mathfrak{M}$ называется множество

$$\mathrm{DgSp}_{\mathfrak{M}}(R) = \{\deg(f(R)) \mid f : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N} \text{ — выч. представление } \mathfrak{M}\}.$$

Спектром категоричности вычислимо представимой структуры $\mathfrak{M}$ называется множество

$$\mathrm{CatSp}(\mathfrak{M}) = \{\mathbf{d} \mid \mathfrak{M} \text{ — } \mathbf{d}\text{-вычислимо категорична}\}.$$

Спектром автоморфизмов вычислимой структуры $\mathfrak{M}$ называется множество

$$\mathrm{AutSp}^*(\mathfrak{M}) = \{\deg(f) \mid f \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{M}),\ f \neq \mathrm{id}\}.$$

Эффективная полнота класса графов

Теорема 14 [Хиршвельд, Хусаинов, Шор, Слинько, 2002].
Для любой автоморфно нетривиальной счётной структуры $\mathfrak{M}$ *существует счётный ориентированный граф* $\mathfrak{G}$ *такой, что*

(1) $\mathrm{DgSp}(\mathfrak{G}) = \mathrm{DgSp}(\mathfrak{M})$;

(2) *Для любой степени* $\mathbf{d}$, $\dim_{\mathbf{d}}(\mathfrak{G}) = \dim_{\mathbf{d}}(\mathfrak{M})$;

(3) *Для любого* $a \in |\mathfrak{M}|$ *существует* $x \in |\mathfrak{G}|$ *такой, что* $\dim\langle\mathfrak{G}, x\rangle = \dim\langle\mathfrak{M}, a\rangle$;

(4) *Для любого* $R \subseteq |\mathfrak{M}|$ *существует* $U \subseteq |\mathfrak{G}|$ *такое, что* $\mathrm{DgSp}_{\mathfrak{G}}(U) = \mathrm{DgSp}_{\mathfrak{M}}(R)$.

Другие эффективно полные классы

Теорема 14 также справедлива для следующих классов структур:

- симметричные иррефлексивные графы;
- частичные порядки;
- решётки;
- кольца (с делителями нуля);
- области целостности (произвольной характеристики);
- коммутативные полугруппы;
- 2-ступенно нильпотентные группы;
- поля (произвольной характеристики).

Эффективно полные классы

Определение [Хиршвельд, Хусаинов, Шор, Слинько, 2002].
Класс K такой, что структуры из K удовлетворяют Теореме 14, называется *полным относительно спектров степеней автоморфно нетривиальных структур, эффективных размерностей, константных расширений и спектров степеней отношений.*

Достаточный признак эффективной полноты класса K

Пусть $\mathfrak{G}$ — автоморфно нетривиальный счётный граф с отношением смежности E, $\mathfrak{A}$ — счётная структура, $\mathfrak{A} \in K$, и пусть существуют относительно наследственно вычислимые и инвариантные отношения $D(x)$ и $R(x, y)$ на $|\mathfrak{A}|$ и отображение $G \mapsto A_G$ из множества представлений $\mathfrak{G}$ в множество представлений $\mathfrak{A}$ со следующими свойствами:

Достаточный признак эффективной полноты класса K

Пусть $\mathfrak{G}$ — автоморфно нетривиальный счётный граф с отношением смежности E, $\mathfrak{A}$ — счётная структура, $\mathfrak{A} \in K$, и пусть существуют относительно наследственно вычислимые и инвариантные отношения $D(x)$ и $R(x,y)$ на $|\mathfrak{A}|$ и отображение $G \mapsto A_G$ из множества представлений $\mathfrak{G}$ в множество представлений $\mathfrak{A}$ со следующими свойствами:

(P0) Для любого G структура A_G $\deg(G)$-вычислима.

Достаточный признак эффективной полноты класса K

Пусть $\mathfrak{G}$ — автоморфно нетривиальный счётный граф с отношением смежности E, $\mathfrak{A}$ — счётная структура, $\mathfrak{A} \in K$, и пусть существуют относительно наследственно вычислимые и инвариантные отношения $D(x)$ и $R(x, y)$ на $|\mathfrak{A}|$ и отображение $G \mapsto A_G$ из множества представлений $\mathfrak{G}$ в множество представлений $\mathfrak{A}$ со следующими свойствами:

(P0) Для любого G структура A_G $\deg(G)$-вычислима.

(P1) Для любого G существует $\deg(G)$-вычислимая биекция $g_G : D(A_G) \to |G|$ такая, что для всех $x, y \in D(A_G)$ $R^{A_G}(x, y) \iff E^G(g_G(x), g_G(y))$.

Достаточный признак эффективной полноты класса K

Пусть $\mathfrak{G}$ — автоморфно нетривиальный счётный граф с отношением смежности E, $\mathfrak{A}$ — счётная структура, $\mathfrak{A} \in K$, и пусть существуют относительно наследственно вычислимые и инвариантные отношения $D(x)$ и $R(x, y)$ на $|\mathfrak{A}|$ и отображение $G \mapsto A_G$ из множества представлений $\mathfrak{G}$ в множество представлений $\mathfrak{A}$ со следующими свойствами:

(P0) Для любого G структура A_G $\deg(G)$-вычислима.

(P1) Для любого G существует $\deg(G)$-вычислимая биекция $g_G : D(A_G) \to |G|$ такая, что для всех $x, y \in D(A_G)$ $R^{A_G}(x, y) \iff E^G(g_G(x), g_G(y))$.

(P2) Если $f : D(\mathfrak{A}) \to D(\mathfrak{A})$ — биекция, и $R(x, y) \iff R(f(x), f(y))$, то f можно расширить до автоморфизма $\mathfrak{A}$.

Достаточный признак эффективной полноты класса K

Пусть $\mathfrak{G}$ — автоморфно нетривиальный счётный граф с отношением смежности E, $\mathfrak{A}$ — счётная структура, $\mathfrak{A} \in K$, и пусть существуют относительно наследственно вычислимые и инвариантные отношения $D(x)$ и $R(x, y)$ на $|\mathfrak{A}|$ и отображение $G \mapsto A_G$ из множества представлений $\mathfrak{G}$ в множество представлений $\mathfrak{A}$ со следующими свойствами:

(P0) Для любого G структура A_G $\deg(G)$-вычислима.

(P1) Для любого G существует $\deg(G)$-вычислимая биекция $g_G : D(A_G) \to |G|$ такая, что для всех $x, y \in D(A_G)$ $R^{A_G}(x, y) \iff E^G(g_G(x), g_G(y))$.

(P2) Если $f : D(\mathfrak{A}) \to D(\mathfrak{A})$ — биекция, и $R(x, y) \iff R(f(x), f(y))$, то f можно расширить до автоморфизма $\mathfrak{A}$.

(P3) Для любого G существует $\deg(G)$-вычислимое определяющее семейство $\exists$-формул для $\langle A_G, b\rangle_{b \in D(A_G)}$.

Интерпретация графов в свободно порождённых плоскостях

Пусть $\mathfrak{G} = \langle G, E \rangle$ – счётный симметричный иррефлексивный граф. Можно считать, что $G = \omega$.

Интерпретация графов в свободно порождённых плоскостях

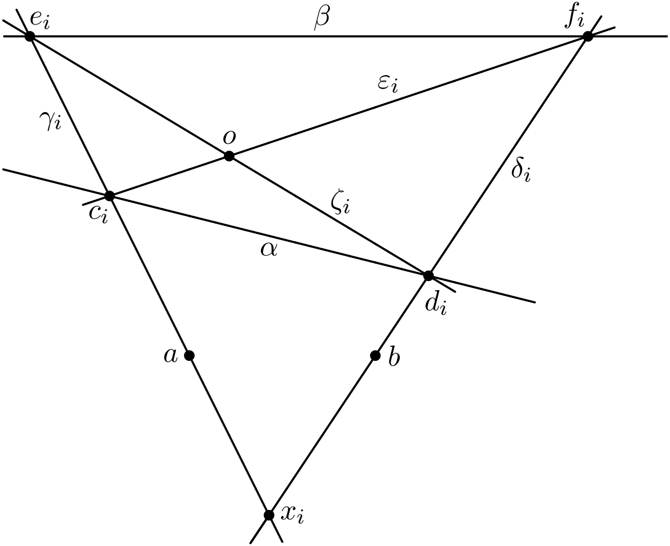
Пусть $\mathfrak{G} = \langle G, E\rangle$ – счётный симметричный иррефлексивный граф. Можно считать, что $G = \omega$.

Определим невырожденную незамкнутую конфигурацию $\mathfrak{A} = \langle A, A^0, {}^0A, I\rangle$ бесконечного ранга, где

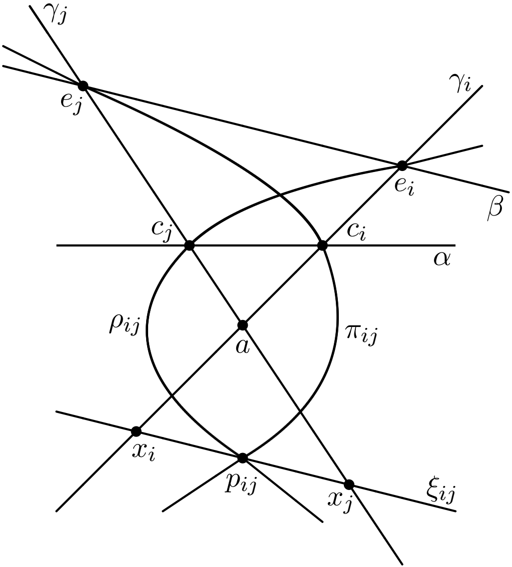
$$A^0 = \{a, b, c_i, d_i, e_i, f_i, o, x_i \mid i \in G\} \cup \{g_{ij}, h_{ij}, p_{ij} \mid i, j \in G, i < j\},$$
$${}^0A = \{\alpha, \beta, \gamma_i, \delta_i, \varepsilon_i, \zeta_i, \theta \mid i \in G\} \cup \{\eta_{ij}, \xi_{ij}, \pi_{ij}, \rho_{ij} \mid i, j \in G, i < j\},$$

а отношение инцидентности I изображено на рисунках ниже.

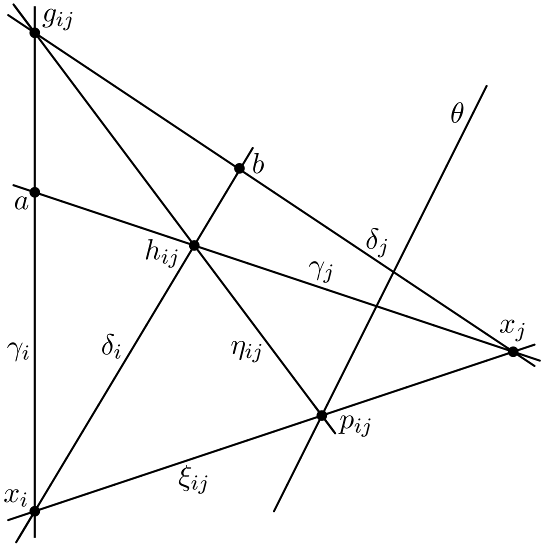
Отношение инцидентности (Рис.1)



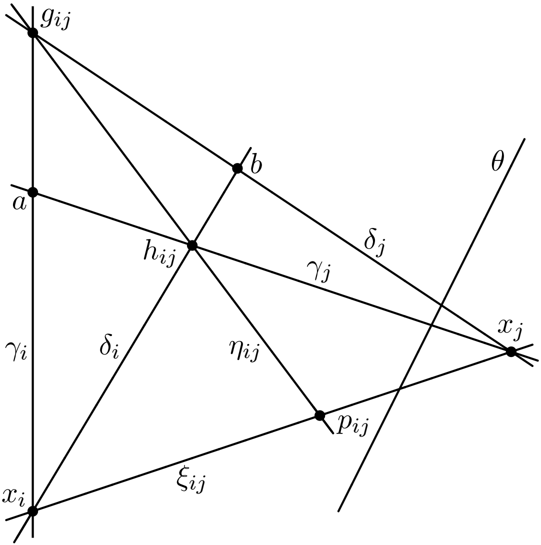
Отношение инцидентности (Рис.2)



Отношение инцидентности (Рис.3): $\langle i, j\rangle \in E$



Отношение инцидентности (Рис.4): $\langle i, j \rangle \notin E$



Интерпретация графов в свободно порождённых плоскостях

Пусть $\mathfrak{F} = \langle F, F^0, {}^0F, \cdot \rangle$ — проективная плоскость, свободно порождённая конфигурацией $\mathfrak{A}$. Определим на $\mathfrak{F}$ отношения

$$D(\mathfrak{F}) = \{x_i \mid i \in G\},$$
$$R(\mathfrak{F}) = \{\langle x_i, x_j \rangle \mid i, j \in G, \langle i, j \rangle \in E\}.$$

Интерпретация графов в свободно порождённых плоскостях

Пусть $\mathfrak{F} = \langle F, F^0, {}^0F, \cdot \rangle$ — проективная плоскость, свободно порождённая конфигурацией $\mathfrak{A}$. Определим на $\mathfrak{F}$ отношения

$$D(\mathfrak{F}) = \{x_i \mid i \in G\},$$
$$R(\mathfrak{F}) = \{\langle x_i, x_j \rangle \mid i, j \in G, \langle i, j \rangle \in E\}.$$

Для произвольных $u, v, w \in F^0$ определим в проективной плоскости $\mathfrak{F}$ следующие частичные термы:

$$S(w) = \Big(\big((w \cdot b) \cdot \beta\big) \cdot \big((w \cdot a) \cdot \alpha\big)\Big) \cdot \Big(\big((w \cdot b) \cdot \alpha\big) \cdot \big((w \cdot a) \cdot \beta\big)\Big),$$
$$T(u, v) = \Big(\big((u \cdot b) \cdot (v \cdot a)\big) \cdot \big((u \cdot a) \cdot (v \cdot b)\big)\Big) \cdot (u \cdot v).$$

Свойства интерпретации

(1) Пусть $w \in F^0$, $w \neq a$, $w \neq b$, $w \neq \beta\alpha$ и $w{\cdot}a \neq w{\cdot}b$. Тогда $S(w) = o$, если и только если $w = x_i$ для некоторого $i \in G$.

Свойства интерпретации

(1) Пусть $w \in F^0$, $w \neq a$, $w \neq b$, $w \neq \beta\alpha$ и $w{\cdot}a \neq w{\cdot}b$. Тогда $S(w) = o$, если и только если $w = x_i$ для некоторого $i \in G$.

(2) Пусть $u, v \in F^0$, $u \neq v$, $S(u)$ и $S(v)$ определены, $S(u) = o$ и $S(v) = o$. Тогда $T(u, v) = (u{\cdot}v){\cdot}\theta$, если и только если $u = x_i$, $v = x_j$ для некоторых $i, j \in G$ таких, что $\langle i, j\rangle \in E$.

Свойства интерпретации

(1) Пусть $w \in F^0$, $w \neq a$, $w \neq b$, $w \neq \beta\alpha$ и $w{\cdot}a \neq w{\cdot}b$. Тогда $S(w) = o$, если и только если $w = x_i$ для некоторого $i \in G$.

(2) Пусть $u, v \in F^0$, $u \neq v$, $S(u)$ и $S(v)$ определены, $S(u) = o$ и $S(v) = o$. Тогда $T(u,v) = (u{\cdot}v){\cdot}\theta$, если и только если $u = x_i$, $v = x_j$ для некоторых $i, j \in G$ таких, что $\langle i, j \rangle \in E$.

(3) Отношения $D(\mathfrak{F})$ и $R(\mathfrak{F})$ относительно наследственно вычислимы (Δ_1-определимы в $\mathfrak{F}$ с параметрами a, b, o, α, β, θ).

Свойства интерпретации

(1) Пусть $w \in F^0$, $w \neq a$, $w \neq b$, $w \neq \beta\alpha$ и $w{\cdot}a \neq w{\cdot}b$. Тогда $S(w) = o$, если и только если $w = x_i$ для некоторого $i \in G$.

(2) Пусть $u, v \in F^0$, $u \neq v$, $S(u)$ и $S(v)$ определены, $S(u) = o$ и $S(v) = o$. Тогда $T(u, v) = (u{\cdot}v){\cdot}\theta$, если и только если $u = x_i$, $v = x_j$ для некоторых $i, j \in G$ таких, что $\langle i, j\rangle \in E$.

(3) Отношения $D(\mathfrak{F})$ и $R(\mathfrak{F})$ относительно наследственно вычислимы (Δ_1-определимы в $\mathfrak{F}$ с параметрами a, b, o, α, β, θ).

(4) Отношения $D(\mathfrak{F})$ и $R(\mathfrak{F})$ инвариантны.

Свойства интерпретации

(5) Для любого представления $\mathfrak{H}$ графа $\mathfrak{G}$ существует $\deg(\mathfrak{H})$-вычислимое представление $\mathfrak{F}_{\mathfrak{H}}$ плоскости $\mathfrak{F}$ (конструкция Ширшова).

Свойства интерпретации

(5) Для любого представления $\mathfrak{H}$ графа $\mathfrak{G}$ существует $\deg(\mathfrak{H})$-вычислимое представление $\mathfrak{F}_{\mathfrak{H}}$ плоскости $\mathfrak{F}$ (конструкция Ширшова).

(6) Для любого $\mathfrak{H}$ существует $\deg(\mathfrak{H})$-вычислимая биекция $g_{\mathfrak{H}} : D(\mathfrak{F}_{\mathfrak{H}}) \to |\mathfrak{H}|$ такая, что для всех $u, v \in D(\mathfrak{F}_{\mathfrak{H}})$ $\langle u, v\rangle \in R(\mathfrak{F}_{\mathfrak{H}}) \iff \langle g_{\mathfrak{H}}(u), g_{\mathfrak{H}}(v)\rangle \in E^{\mathfrak{H}}$.

Свойства интерпретации

(5) Для любого представления $\mathfrak{H}$ графа $\mathfrak{G}$ существует $\deg(\mathfrak{H})$-вычислимое представление $\mathfrak{F}_{\mathfrak{H}}$ плоскости $\mathfrak{F}$ (конструкция Ширшова).

(6) Для любого $\mathfrak{H}$ существует $\deg(\mathfrak{H})$-вычислимая биекция $g_{\mathfrak{H}} : D(\mathfrak{F}_{\mathfrak{H}}) \to |\mathfrak{H}|$ такая, что для всех $u, v \in D(\mathfrak{F}_{\mathfrak{H}})$ $\langle u, v\rangle \in R(\mathfrak{F}_{\mathfrak{H}}) \iff \langle g_{\mathfrak{H}}(u), g_{\mathfrak{H}}(v)\rangle \in E^{\mathfrak{H}}$.

(7) Если $f : D(\mathfrak{F}) \to D(\mathfrak{F})$ — биекция, и $\langle u, v\rangle \in R(\mathfrak{F}) \iff \langle f(u), f(v)\rangle \in R(\mathfrak{F})$, то f можно расширить до автоморфизма $\mathfrak{F}$.

Свойства интерпретации

(5) Для любого представления $\mathfrak{H}$ графа $\mathfrak{G}$ существует $\deg(\mathfrak{H})$-вычислимое представление $\mathfrak{F}_{\mathfrak{H}}$ плоскости $\mathfrak{F}$ (конструкция Ширшова).

(6) Для любого $\mathfrak{H}$ существует $\deg(\mathfrak{H})$-вычислимая биекция $g_{\mathfrak{H}} : D(\mathfrak{F}_{\mathfrak{H}}) \to |\mathfrak{H}|$ такая, что для всех $u, v \in D(\mathfrak{F}_{\mathfrak{H}})$ $\langle u, v\rangle \in R(\mathfrak{F}_{\mathfrak{H}}) \iff \langle g_{\mathfrak{H}}(u), g_{\mathfrak{H}}(v)\rangle \in E^{\mathfrak{H}}$.

(7) Если $f : D(\mathfrak{F}) \to D(\mathfrak{F})$ — биекция, и $\langle u, v\rangle \in R(\mathfrak{F}) \iff \langle f(u), f(v)\rangle \in R(\mathfrak{F})$, то f можно расширить до автоморфизма $\mathfrak{F}$.

(8) Для любого $\mathfrak{H}$ существует $\deg(\mathfrak{H})$-вычислимое определяющее семейство $\exists$-формул для $\langle \mathfrak{F}_{\mathfrak{H}}, x\rangle_{x \in D(\mathfrak{F}_{\mathfrak{H}})}$.

Вычислимые размерности свободно порождённых плоскостей

Теорема 15. *Класс свободно порождённых проективных плоскостей является полным относительно спектров степеней автоморфно нетривиальных структур, эффективных размерностей, константных расширений и спектров степеней отношений.*

Вычислимые размерности свободно порождённых плоскостей

Теорема 15. *Класс свободно порождённых проективных плоскостей является полным относительно спектров степеней автоморфно нетривиальных структур, эффективных размерностей, константных расширений и спектров степеней отношений.*

Следствие 16. *Для любого $1 \leqslant n \leqslant \omega$ существует вычислимая свободно порождённая проективная плоскость (бесконечного ранга), вычислимая размерность которой равна n.*

Неразрешимость теории класса свободно порождённых плоскостей

Теорема 17. *Теория класса всех свободно порождённых проективных плоскостей наследственно неразрешима.*

Неразрешимость теории класса свободно порождённых плоскостей

Теорема 17. *Теория класса всех свободно порождённых проективных плоскостей наследственно неразрешима.*

Доказательство: Модификация предыдущей интерпретации на случай *конечных* симметричных иррефлексивных графов.

Эффективная полнота класса полей

Теорема 18 [Миллер, Пунен, Шутенс, Шлапентох, 2014].
Класс полей является полным относительно спектров степеней автоморфно нетривиальных структур, эффективных размерностей, спектров степеней отношений, спектров категоричности и спектров автоморфизмов.

Эффективная полнота класса полей

Теорема 18 [Миллер, Пунен, Шутенс, Шлапентох, 2014].
Класс полей является полным относительно спектров степеней автоморфно нетривиальных структур, эффективных размерностей, спектров степеней отношений, спектров категоричности и спектров автоморфизмов.

Идея: Перенести результат Теоремы 18 в класс папповых проективных плоскостей, используя естественную интерпретацию поля $\mathfrak{K}$ в папповой плоскости $\mathfrak{P}_{\mathfrak{K}}$.

Вычислимые размерности папповых плоскостей

Теорема 19. *Класс папповых проективных плоскостей является полным относительно спектров степеней автоморфно нетривиальных структур, эффективных размерностей, спектров степеней отношений, спектров категоричности и спектров автоморфизмов.*

Вычислимые размерности папповых плоскостей

Теорема 19. *Класс папповых проективных плоскостей является полным относительно спектров степеней автоморфно нетривиальных структур, эффективных размерностей, спектров степеней отношений, спектров категоричности и спектров автоморфизмов.*

Следствие 20. *Для любого $1 \leqslant n \leqslant \omega$ существует вычислимая паппова проективная плоскость, вычислимая размерность которой равна n.*

Замечание к доказательству теоремы 19

Достаточный признак Хиршвельда-Хусаинова-Шора-Слинько полноты класса не используется.

Замечание к доказательству теоремы 19

Достаточный признак Хиршвельда-Хусаинова-Шора-Слинько полноты класса не используется.

В рассматриваемой папповой плоскости $\mathfrak{A}$ мы определяем отношения

$$D(\mathfrak{A}, \overline{D}), P_+(\mathfrak{A}, \overline{D}), P_\times(\mathfrak{A}, \overline{D}),$$

где $\overline{D} = \langle D_1, D_2, D_3, D_4 \rangle$ — невырожденный четырёхугольник в $\mathfrak{A}$. Отношения $D(\mathfrak{A}, \overline{D})$, $P_+(\mathfrak{A}, \overline{D})$, $P_\times(\mathfrak{A}, \overline{D})$ задают некоторое поле, но они не инварианты.

Замечание к доказательству теоремы 19

Достаточный признак Хиршвельда-Хусаинова-Шора-Слинько полноты класса не используется.

В рассматриваемой папповой плоскости $\mathfrak{A}$ мы определяем отношения

$$D(\mathfrak{A}, \overline{D}), P_{+}(\mathfrak{A}, \overline{D}), P_{\times}(\mathfrak{A}, \overline{D}),$$

где $\overline{D} = \langle D_1, D_2, D_3, D_4 \rangle$ — невырожденный четырёхугольник в $\mathfrak{A}$. Отношения $D(\mathfrak{A}, \overline{D})$, $P_{+}(\mathfrak{A}, \overline{D})$, $P_{\times}(\mathfrak{A}, \overline{D})$ задают некоторое поле, но они не инварианты.

Лемма. *Для любого автоморфизма h вычислимой плоскости $\mathfrak{A}$ существует вычислимый автоморфизм g плоскости $\mathfrak{A}$ такой, что $g(\overline{D}) = h(\overline{D})$.*

Проблема изоморфизма

Через $\mathfrak{M}_e$ обозначим вычислимую модель с вычислимым индексом e.

Проблема изоморфизма

Через $\mathfrak{M}_e$ обозначим вычислимую модель с вычислимым индексом e.

Пусть K — некоторый класс моделей, замкнутый относительно изоморфизма.

Проблема изоморфизма

Через $\mathfrak{M}_e$ обозначим вычислимую модель с вычислимым индексом e.

Пусть K — некоторый класс моделей, замкнутый относительно изоморфизма.

Индексным множеством класса K называется множество

$$I(K) = \{e \in \omega \mid \mathfrak{M}_e \in K\}.$$

Проблема изоморфизма

Через $\mathfrak{M}_e$ обозначим вычислимую модель с вычислимым индексом e.

Пусть K — некоторый класс моделей, замкнутый относительно изоморфизма.

Индексным множеством класса K называется множество

$$I(K) = \{e \in \omega \mid \mathfrak{M}_e \in K\}.$$

Проблемой изоморфизма для класса K называется множество

$$E(K) = \{\langle a, b\rangle \in I(K) \times I(K) \mid \mathfrak{M}_a \cong \mathfrak{M}_b\}.$$

Проблема изоморфизма

Через $\mathfrak{M}_e$ обозначим вычислимую модель с вычислимым индексом e.

Пусть K — некоторый класс моделей, замкнутый относительно изоморфизма.

Индексным множеством класса K называется множество

$$I(K) = \{e \in \omega \mid \mathfrak{M}_e \in K\}.$$

Проблемой изоморфизма для класса K называется множество

$$E(K) = \{\langle a, b\rangle \in I(K) \times I(K) \mid \mathfrak{M}_a \cong \mathfrak{M}_b\}.$$

Если $I(K)$ гиперарифметично, то в худшем случае $E(K)$ лежит в классе Σ^1_1.

Сложность внутри класса

Пусть Γ — класс сложности и $A \subseteq B$.

Сложность внутри класса

Пусть Γ — класс сложности и $A \subseteq B$.

Множество A является Γ-*множеством внутри* B, если существует $R \in \Gamma$, для которого $A = R \cap B$.

Сложность внутри класса

Пусть Γ — класс сложности и $A \subseteq B$.

Множество A является Γ-*множеством внутри* B, если существует $R \in \Gamma$, для которого $A = R \cap B$.

Множество A является m-*полным* Γ-*множеством внутри* B, если A является Γ-множеством внутри B, и для любого $S \in \Gamma$ существует вычислимая функция $f : \omega \to B$ такая, что для всех $n \in \omega$ справедлива эквивалентность: $n \in S \iff f(n) \in A$.

Сложность внутри класса

Пусть Γ — класс сложности и $A \subseteq B$.

Множество A является Γ-*множеством внутри* B, если существует $R \in \Gamma$, для которого $A = R \cap B$.

Множество A является m-*полным* Γ-*множеством внутри* B, если A является Γ-множеством внутри B, и для любого $S \in \Gamma$ существует вычислимая функция $f : \omega \to B$ такая, что для всех $n \in \omega$ справедлива эквивалентность: $n \in S \iff f(n) \in A$.

Говоря о сложности проблемы изоморфизма *внутри класса*, мы подразумеваем сложность $E(K)$ внутри $I(K) \times I(K)$.

Примеры с низкой сложностью $E(K)$

- Векторные пространства над фиксированным вычислимым полем: $E(K)$ — m-полное Π^0_3-множество. [Калверт, 2004]
- Алгебраически замкнутые поля фиксированной характеристики: $E(K)$ — m-полное Π^0_3-множество. [Калверт, 2004]
- Абелевы группы без кручения конечного ранга: $E(K)$ — m-полное Σ^0_3-множество внутри $I(K) \times I(K)$. [Калверт, 2005]

Примеры с максимальной сложностью $E(K)$

В каждом из следующих классов K проблема изоморфизма $E(K)$ является m-полным Σ_1^1-множеством:

- неориентированные графы [Морозов, 1993; Нис, 1996]
- линейные порядки [Гончаров, Найт, 2002]
- булевы алгебры [Гончаров, Найт, 2002]
- абелевы p-группы [Гончаров, Найт, 2002]
- кольца [Хиршвельд, Хусаинов, Шор, Слинько, 2002]
- дистрибутивные решётки [Хиршвельд, Хусаинов, Шор, Слинько, 2002]
- нильпотентные группы [Хиршвельд, Хусаинов, Шор, Слинько, 2002]
- поля фиксированной характеристики [Калверт, 2004]
- вещественно замкнутые поля [Калверт, 2004]

Проблема изоморфизма проективных плоскостей

Теорема 21. *Проблема изоморфизма $E(K)$ является m-полным Σ_1^1-множеством для следующих классов K:*

(1) *папповы проективные плоскости,*

(2) *дезарговы проективные плоскости,*

(3) *произвольные проективные плоскости.*

Проблема изоморфизма проективных плоскостей

Теорема 21. *Проблема изоморфизма $E(K)$ является m-полным Σ_1^1-множеством для следующих классов K:*

(1) *папповы проективные плоскости,*

(2) *дезарговы проективные плоскости,*

(3) *произвольные проективные плоскости.*

Теорема 22. *Проблема изоморфизма для класса всех свободных проективных плоскостей конечного ранга является m-полным Δ_3^0-множеством внутри класса.*

Проблема вложимости

[Карсон, Фокина, Харизанова, Найт, Куинн, Сафрански, Воллбаум, 2011]:

Проблемой вложимости для класса K называется множество

$$Em(K) = \{\langle a, b\rangle \in I(K)\times I(K) \mid \mathfrak{M}_a \hookrightarrow \mathfrak{M}_b\}.$$

Проблема вложимости

[Карсон, Фокина, Харизанова, Найт, Куинн, Сафрански, Воллбаум, 2011]:

Проблемой вложимости для класса K называется множество

$$Em(K) = \{\langle a, b\rangle \in I(K) \times I(K) \mid \mathfrak{M}_a \hookrightarrow \mathfrak{M}_b\}.$$

Если $I(K)$ гиперарифметично, то в худшем случае $Em(K)$ лежит в классе Σ^1_1.

Проблема вложимости проективных плоскостей

Теорема 23. *Проблема вложимости $Em(K)$ является m-полным Σ^1_1-множеством для следующих классов K:*

(1) *папповы проективные плоскости,*

(2) *дезарговы проективные плоскости,*

(3) *произвольные проективные плоскости.*

Проблема вложимости проективных плоскостей

Теорема 23. *Проблема вложимости $Em(K)$ является m-полным Σ_1^1-множеством для следующих классов K:*

(1) *папповы проективные плоскости,*
(2) *дезарговы проективные плоскости,*
(3) *произвольные проективные плоскости.*

Теорема 24. *Проблема вложимости для класса всех свободных проективных плоскостей конечного ранга является вычислимым множеством внутри класса.*

Проблема вычислимой категоричности

Вычислимая модель $\mathfrak{M}$ *вычислимо категорична*, если для любой её вычислимой копии $\mathfrak{N} \cong \mathfrak{M}$ существует вычислимый изоморфизм $f : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$.

Проблема вычислимой категоричности

Вычислимая модель $\mathfrak{M}$ *вычислимо категорична*, если для любой её вычислимой копии $\mathfrak{N} \cong \mathfrak{M}$ существует вычислимый изоморфизм $f : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$.

Проблемой вычислимой категоричности для класса K называется множество

$$I_{cc}(K) = \{e \in I(K) \mid \mathfrak{M}_e \text{ вычислимо категорична}\}.$$

Проблема вычислимой категоричности

Вычислимая модель $\mathfrak{M}$ *вычислимо категорична*, если для любой её вычислимой копии $\mathfrak{N} \cong \mathfrak{M}$ существует вычислимый изоморфизм $f : \mathfrak{M} \to \mathfrak{N}$.

Проблемой вычислимой категоричности для класса K называется множество

$$I_{cc}(K) = \{e \in I(K) \mid \mathfrak{M}_e \text{ вычислимо категорична}\}.$$

Если $I(K)$ гиперарифметично, то в худшем случае $I_{cc}(K)$ лежит в классе Π^1_1.

Примеры с низкой сложностью $I_{cc}(K)$

- Линейные порядки: $I_{cc}(K)$ — m-полное Σ^0_3-множество.
  Линейный порядок вычислимо категоричен тогда и только тогда, когда он содержит лишь конечное число пар соседних элементов. [Гончаров, Дзгоев, 1980; Реммел, 1981]
- Булевы алгебры: $I_{cc}(K)$ — m-полное Σ^0_3-множество.
  Булева алгебра вычислимо категорична тогда и только тогда, когда она содержит лишь конечное число атомов. [Гончаров, Дзгоев, 1980; Реммел, 1981]
- Алгебраические поля: $I_{cc}(K)$ — m-полное Π^0_4-множество.
  Любое вычислимое алгебраическое поле имеет вычислимую размерность 1 *или* ω. [Хиршвельд, Крамер, Миллер, Шлапентох, 2015]

Максимальная сложность $I_{cc}(K)$ достижима

Теорема 25 [Доуни, Кач, Лемпп, Льюис-Пай, Монталбан, Турецки, 2015]. *Проблема вычислимой категоричности $I_{cc}(K)$ для класса K всех деревьев является m-полным Π^1_1-множеством.*

Максимальная сложность $I_{cc}(K)$ достижима

Теорема 25 [Доуни, Кач, Лемпп, Льюис-Пай, Монталбан, Турецки, 2015]. *Проблема вычислимой категоричности $I_{cc}(K)$ для класса K всех деревьев является m-полным Π^1_1-множеством.*

Следствие 26 *Проблема вычислимой категоричности $I_{cc}(K)$ является m-полным Π^1_1-множеством для следующих классов K: симметричные иррефлексивные графы, частичные порядки, решётки, кольца, коммутативные полугруппы, поля и др.*

Проблема вычислимой категоричности проективных плоскостей

Теорема 27. *Проблема вычислимой категоричности* $I_{cc}(K)$ *является* Π^1_1*-полным множеством для следующих классов* K*:*

(1) *папповы проективные плоскости,*

(2) *дезарговы проективные плоскости,*

(3) *произвольные проективные плоскости.*

Проблема вычислимой категоричности проективных плоскостей

Теорема 27. *Проблема вычислимой категоричности $I_{cc}(K)$ является Π^1_1-полным множеством для следующих классов K:*

(1) *папповы проективные плоскости,*

(2) *дезарговы проективные плоскости,*

(3) *произвольные проективные плоскости.*

Теорема 28. *Проблема вычислимой категоричности для класса всех свободно порождённых проективных плоскостей является Π^1_1-полным множеством внутри класса.*

Основные результаты

1. Доказано, что произвольная свободно порождённая проективная плоскость не имеет автоматных представлений.

Основные результаты

1. Доказано, что произвольная свободно порождённая проективная плоскость не имеет автоматных представлений.

2. Доказано, что ни один из следующих классов проективных плоскостей не имеет вычислимой нумерации с точностью до вычислимого изоморфизма: свободные плоскости, свободно порождённые плоскости, дезарговы плоскости, папповы плоскости, произвольные проективные плоскости.

Основные результаты

1. Доказано, что произвольная свободно порождённая проективная плоскость не имеет автоматных представлений.

2. Доказано, что ни один из следующих классов проективных плоскостей не имеет вычислимой нумерации с точностью до вычислимого изоморфизма: свободные плоскости, свободно порождённые плоскости, дезарговы плоскости, папповы плоскости, произвольные проективные плоскости.

3. Показано, что в классе свободных проективных плоскостей реализуются только две вычислимые размерности: 1 и ω. Доказано, что произвольная свободная проективная плоскость вычислимо категорична тогда и только тогда, когда её ранг конечен.

Основные результаты

1. Доказано, что произвольная свободно порождённая проективная плоскость не имеет автоматных представлений.
2. Доказано, что ни один из следующих классов проективных плоскостей не имеет вычислимой нумерации с точностью до вычислимого изоморфизма: свободные плоскости, свободно порождённые плоскости, дезарговы плоскости, папповы плоскости, произвольные проективные плоскости.
3. Показано, что в классе свободных проективных плоскостей реализуются только две вычислимые размерности: 1 и ω. Доказано, что произвольная свободная проективная плоскость вычислимо категорична тогда и только тогда, когда её ранг конечен.
4. Доказано, что класс свободно порождённых проективных плоскостей является полным относительно спектров степеней и эффективных размерностей. Как следствие, получен результат о том, что в классе свободно порождённых проективных плоскостей реализуется любая вычислимая размерность $n \in \omega \cup \{\omega\}$.

Основные результаты

5. Доказано, что теория класса свободно порождённых проективных плоскостей наследственно неразрешима.

Основные результаты

5. Доказано, что теория класса свободно порождённых проективных плоскостей наследственно неразрешима.

6. Доказано, что класс папповых проективных плоскостей является полным относительно спектров степеней и эффективных размерностей. Установлено, что вычислимая размерность папповой (дезарговой) проективной плоскости совпадает с вычислимой размерностью её координатного поля (тела). В частности, в классе папповых проективных плоскостей реализуется любая вычислимая размерность $n \in \omega \cup \{\omega\}$.

Основные результаты

5. Доказано, что теория класса свободно порождённых проективных плоскостей наследственно неразрешима.

6. Доказано, что класс папповых проективных плоскостей является полным относительно спектров степеней и эффективных размерностей. Установлено, что вычислимая размерность папповой (дезарговой) проективной плоскости совпадает с вычислимой размерностью её координатного поля (тела). В частности, в классе папповых проективных плоскостей реализуется любая вычислимая размерность $n \in \omega \cup \{\omega\}$.

7. Найдены точные оценки сложности проблем изоморфизма, вложимости и вычислимой категоричности в классах папповых, дезарговых и произвольных проективных плоскостей. Для класса свободных проективных плоскостей конечного ранга найдены точные оценки сложности проблемы изоморфизма и вложимости.

Основные публикации

[1] Н.Т. Когабаев, *Класс проективных плоскостей невычислим*, Алгебра и логика, 47, № 4 (2008), 428–455.

[2] Н.Т. Когабаев, *Неразрешимость теории проективных плоскостей*, Алгебра и логика, 49, № 1 (2010), 3–17.

[3] Н.Т. Когабаев, *О вычислимой размерности папповых и дезарговых проективных плоскостей*, Алгебра и логика, 51, № 1 (2012), 61–81.

[4] Н.Т. Когабаев, *Сложность проблемы изоморфизма вычислимых проективных плоскостей*, Вестник НГУ, Серия: матем., мех., информ., 13, № 1 (2013), 68–75.

[5] Н.Т. Когабаев, *Невычислимость классов папповых и дезарговых проективных плоскостей*, Сиб. матем. ж., 54, № 2 (2013), 325-335.

Основные публикации

[6] А.С. Денисенко, Н.Т. Когабаев, *Об автоматных представлениях проективных плоскостей*, Сиб. матем. ж., 55, № 1 (2014), 66–78.

[7] Н.Т. Когабаев, *Теория проективных плоскостей полна относительно спектров степеней и эффективных размерностей*, Алгебра и логика, 54, № 5 (2015), 599–627.

[8] Н.Т. Когабаев, Π^1_1*-полнота проблемы вычислимой категоричности проективных плоскостей*, Алгебра и логика, 55, № 4 (2016), 432–440.

[9] Н.Т. Когабаев, *Свободно порождённые проективные плоскости конечной вычислимой размерности*, Алгебра и логика, 55, № 6 (2016), 704–737.

[10] Н.Т. Когабаев, *О проблеме вложимости вычислимых проективных плоскостей*, Алгебра и логика, 56, № 1 (2017), 110–117.