Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ им. Н.И. Лобачевского

КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ
01.03.01: математика

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(Бакалаврская работа)

ЗАДАЧА ГУРСА ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ БИАНКИ

Работа завершена:

Студентка IV курса, группа 05-103
«____»____________ 2015 г. ________ (Мартиросян Г. М.)

Работа допущена к защите:

Научный руководитель
Док. физ.-мат.н. Профессор кафедры дифференциальных ур-ий

«____»____________ 2015 г. ________ (Жегалов В. И.)

Заведующий кафедрой

«____»____________ 2015 г. ________ (Елизаров А. М.)

Казань 2015

Содержание

Введение

Данная тема относится к теории дифференциальных уравнений с доминирующей частной производной, различные вопросы которой исследуются в настоящее время многими математиками.

Основателем этой теории считается итальянский математик Луиджи Бианки, предложивший [1] ещё в 1895 г. вариант распространения метода решения задачи Коши, разработанного в свое время Б. Риманом для уравнения

$$u_{xy} + au_x + bu_y + cu = f(x, y), \tag{1}$$

на уравнение вида, где M- линейный дифференциальный оператор, содержащий лишь производные искомой функции, получаемые из первого слагаемого отбрасыванием по крайней мере одного дифференцирования.

Понятно, что (2) представляет собой обобщение уравнения (1) на случай n-мерного пространства. Через 50 лет результат Л.Бианки был переоткрыт Е.Лаэ [2] (Бельгия), а в 1956-1958 г.г. появились публикации М.К.Фаге [3]-[4].

В перечисленных работах речь шла о теоретическом обобщении результата Римана. Однако впоследствии обнаружились различные прикладные аспекты обсуждаемых уравнений, а также получаемых из (2) путем замены первого слагаемого на $\frac{\partial^{m_1+...+m_n}u}{\partial x_1^{m_1}...\partial x_n^{m_n}}$, где хотя бы одно значение $m_k > 1$. А именно, частные случаи указанных уравнений возникают при математическом моделировании процессов вибрации и играют существенную роль в теории аппроксимации, теории отображений, ним сводится задача интегрального представления преобразования одних линейных дифференциальных операторов в другие.

Такbе уравнения встречаются в теории упругости, при исследовании фильтрации жидкости в трещиновых породах, передачи тепла в гетерогенных средах, моделировании ряда биологических процессов и так далее.(См. библиографические ссылки в статье [5])

Основные результаты теории рассматриваемых уравнений отражены в монографиях [6]-[7].

Тема данной работы связана с уравнением (2) при $n = 3$. Предложенная автору проблема состояла в отыскании частных случаев рассматриваемого уравнения, допускающих построение решения для него задачи Гурса в явном виде (в квадратурах). Для этой цели использована факторизация левой части уравнения (2) операторами первого и второго порядка, позволяющая редуцировать задачу Гурса к подобной же задаче, но уже для более простого и достаточно хорошо изученного ранее уравнения (1). В первой части предлагаемого текста излагается обзор исходных результатов, используемых во второй ее части, являющейся содержанием исследования, проведенного автором настоящей выпускной работы. Удалось выделить 14 новых вариантов условий эффективной разрешимости рассматриваемой задачи. Эти условия представляют собой соотношения, связывающие коэффициенты рассматриваемого уравнения определенными тождествами.

§1. Обзор известных исходных результатов: классическая задача Гурса и её решение методами интегральных уравнений и Бернхарда Римана.

1.1 Постановка задачи и метод интегральных уравнений. Задача Гурса рассматривается в области $D = \{x_0 < x < x_1, y_0 < y < y_1\}$ для уравнения

$$L(u) \equiv u_{xy} + a(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y) \tag{1.1}$$

$$a, b, c, f \in C(\bar{D})$$

и состоит в отыскании решения $u(x,y)$ класса $C^{1,1}$, удовлетворяющего условиям

$$u(x_0, y) = \varphi(y), \quad u(x, y_0) = \psi(x), \quad \varphi(y_0) = \psi(x_0) \tag{1.2}$$

Путем вычисления интеграла от левой и правой части (1.1) с учетом (1.2) придем к интегральному уравнению

$$u(x,y) + \int_{x_0}^{x} b(\xi,y)u(\xi,y)d\xi + \int_{y_0}^{y} a(x,\eta)u(x,\eta)d\eta + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}[c(\xi,\eta) - a_\xi(\xi,\eta) - \\ - b_\eta(\xi,\eta)]u(\xi,\eta)d\eta d\xi = F(x,y) \tag{1.3}$$

$$F(x,y) = \varphi(y) + \psi(x) - \psi(x_0) + \int_{x_0}^{x} b(\xi, y_0)\psi(\xi)d\xi + \\ + \int_{y_0}^{y} a(x_0,\eta)\varphi(\eta)d\eta + \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} f(\xi,\eta). \tag{1.4}$$

Доказательство существования единственного решения этого уравнения можно считать одним из методов исследования задачи (1.1)-(1.2). Приведем это доказательство, изложенное в книге [6,с.9-13].

Рассмотрим несколько более общее уравнение

$$\varphi(x,y)-\int_{x_0}^{x}K_1(x,y,\xi)\varphi(\xi,y)d\xi-\int_{y_0}^{y}K_2(y,x,\eta)\varphi(x,\eta)d\eta-$$

$$-\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}K(x,y,\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta)d\eta d\xi=F(x,y) \qquad (1.5)$$

с непрерывными коэффициентами. Наша задача состоит в том, чтобы записать единственное решение в виде обозримой формулы.

Возьмем сначала частные случаи, которые нам удобно рассматривать с параметром λ:

$$\varphi_1(x,y)-\lambda\int_{x_0}^{x}K_1(x,y,\xi)\varphi_1(\xi,y)d\xi=F_1(x,y), \qquad (1.6)$$

$$\varphi_2(x,y)-\lambda\int_{y_0}^{y}K_2(y,x,\eta)\varphi_1(x,\eta)d\eta=F_2(x,y)$$

Обычным способом, отыскивая решения в виде ряда Неймана

$$\varphi_1(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\varphi 1k(x,y),$$

получим

$$\varphi_1(x,y)=F_1(x,y)+\int_{x_0}^{x}\mathit{\Gamma}_1(x,y,\xi)F_1(\xi,y)d\xi, \qquad (1.7)$$

$$\varphi_2(x,y)=F_2(x,y)+\int_{y_0}^{y}\mathit{\Gamma}_2(x,y,\eta)F_1(x,\eta)d\eta,$$

где резольвенты $\mathit{\Gamma}_k$ имеют вид:

$$\mathit{\Gamma}_1(x,y,\xi)=\sum_{m=0}^{\infty}K_{1,m}(x,y,\xi), \quad K_{1,0}\equiv K_1,$$

$$K_{1,m}(x,y,\xi)=\int_{\xi}^{x}K_1(x,y,\xi_1)K_{1,m-1}(\xi_1,y,\xi)d\xi_1,$$

$$m=1,2,... \qquad (1.8)$$

$$\mathit{\Gamma}_2(y,x,\eta)=\sum_{m=0}^{\infty}K_{2,m}(y,x,\eta), \quad K_{2,0}\equiv K_2,$$

$$K_{2,m}(y,x,\eta)=\int_\eta^y K_2(y,x,\eta_1)K_{2,m-1}(\eta_1,y,\eta)d\eta_1,$$
$$m=1,2,...$$

При этом Γ_1, Γ_2 удовлетворяют соотношениям

$$\Gamma_1(x,y,\xi)=K_1(x,y,\xi)+\int_\xi^x K_1(x,y,\xi_1)\Gamma_1(\xi_1,y,\xi)d\xi_1=$$
$$=K_1(x,y,\xi)+\int_\xi^x K_1(\xi_1,y,\xi)\Gamma_1(x,y,\xi_1)d\xi_1, \tag{1.9}$$
$$\Gamma_2(y,x,\eta)=K_2(y,x,\eta)+\int_\eta^y K_2(y,x,\eta_1)\Gamma_1(\eta_1,x,\eta)d\eta_1=$$
$$=K_1(y,x,\eta)+\int_\eta^y K_2(\eta_1,x,\eta)\Gamma_1(y,x,\eta_1)d\xi_1,$$

Обратимся теперь к общему случаю уравнения (1.1). Будем искать его решение в форме

$$\varphi(x,y)=\varphi_0(x,y)+\int_{x_0}^x \Gamma_1(x,y,\xi)\varphi_0(\xi,y)d\xi+$$
$$+\int_{y_0}^y \Gamma_2(y,x,\eta)\varphi_0(x,\eta)d\eta, \tag{1.10}$$

где $\varpi_0(x,y)$ - новая искомая функция. Подставляя (1.10) в (1.5) и принимая во внимание (1.9), получим

$$\varphi_0(x,y)-\int_{x_0}^x\int_{y_0}^y K_0(x,y,\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta)d\eta d\xi=F(x,y), \tag{1.11}$$

$$K_0(x,y,\xi,\eta)=K_1(x,y,\xi)\Gamma_2(y,\xi,\eta)+K_2(y,x,\eta)\Gamma_1(x,\eta,\xi)+$$
$$+K(x,y,\xi,\eta)+\int_\xi^x K(x,y,\xi_1,\eta)\Gamma_1(\xi_1,\eta,\xi)d\xi_1+ \tag{1.12}$$
$$+\int_\eta^y K(x,y,\xi,\eta_1)\Gamma_2(\eta_1,\xi,\eta)d\eta_1.$$

Поступая с (1.11), как с (1.7), найдем его решение в виде

$$\varphi_0(x,y)=F(x,y)+\int_{x_0}^x\int_{y_0}^y \Gamma_0(x,y,\xi,\eta)F(\xi,\eta)d\eta d\xi, \tag{1.13}$$

где
$$\varGamma_0(x,y,\xi,\eta)=\sum_{m=0}^{\infty}K_{0,m}(x,y,\xi,\eta),\quad K_{0,0}\equiv K_0, \tag{1.14}$$
$$K_{0,m}(x,y,\xi,\eta)=\int_{\xi}^{x}\int_{\eta}^{y}K_{0,m-1}(\xi_1,\eta_1,\xi,\eta)d\eta_1 d\xi_1,$$

Подставляя (1.13) в (1.11), получим окончательную форму решения:

$$\varphi(x,y)=F(x,y)+\int_{x_0}^{x}\varGamma_1(x,y,\xi)F(\xi,y)d\xi+\int_{y_0}^{y}\varGamma_2(y,x,\eta)F(x,\eta)d\eta+$$
$$+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\varGamma_(x,y,\xi,\eta)F(\xi,\eta)d\eta d\xi, \tag{1.15}$$
$$\varGamma_(x,y,\xi,\eta)=\varGamma_0(x,y,\xi,\eta)+\int_{x_0}^{x}\varGamma_1(x,y,\xi_1)\varGamma_0(\xi_1,y,\xi,\eta)d\xi_1+$$
$$+\int_{\eta}^{y}\varGamma_2(y,x,\eta_1)\varGamma_0(x,\eta_1,\xi,\eta)d\eta_1.$$

Замечание Проследив вывод формулы (1.15), а также учитывая абсолютную и равномерную сходимость рядов (1.8), (1.14) и рядов получаемых из них дифференцированием, делаем вывод, что степень гладкости $\varphi(x,y)$ будет той же, что у K_1, K_2, K, F.

Процесс получения формулы (1.15) можно считать доказательством существования решения уравнения (1.5). Покажем возможность доказать его единственность.

Считая в (1.10)

$$\varphi(x,y)-\int_{y_0}^{y}\varGamma_2(y,x,\eta)\varphi_0(x,\eta)d\eta$$

временно известной функцией, мы можем с помощью резольвенты $\varGamma_1^*(x,y,\eta)$ прийти к соотношению

$$\varphi(x,y)+\int_{y_0}^{y}\varGamma_2(y,x,\eta)\varphi_0(x,\eta)d\eta=\varphi(x,y)+\int_{x_0}^{x}\varGamma_1^*(x,y,\xi)\varphi(\xi,y)d\xi-$$

$$
-\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} \Gamma_1^*(x,y,\xi)\Gamma_2(y,\xi,\eta)\varphi_0(\xi,\eta)d\eta d\xi.
$$

Рассматривая правую часть, как известную, разрешим это уравнение через резольвенту для ядра " $-\Gamma_2^*$". Тогда придем для φ_0 к уравнению (1.11), которое в свою очередь разрешим по формуле (1.13). Функция играющая роль F, будет представлять собой однородный интегральный оператор от φ. Таким образом, мы доказали, что (1.10) определяет взаимно однозначное соответствие между решениями φ уравнения (1.5) и решениями φ_0 уравнения (1.11), при этом тривиальному значению $\varphi_0 \equiv 0$ соответствует $\varphi \equiv 0$.

Пусть теперь в (1.5) $F \equiv 0$. Тогда и (1.11) будет однородным для φ_0. Но для (1.11) имеет место теорема единственности. Следовательно $\varphi_0 \equiv 0$, откуда по сказанному следует $\varphi \equiv 0$, что означает требующуюся единственность решения уравнения (1.5), а следовательно, и уравнения (1.3), которому удовлетворяет искомая в задаче Гурса функция $u(x,y)$. Заметим, что в изложенной выше схеме использованы результаты из [8].

1.2 Метод Римана. Это еще один метод, который позволяет формально записать решение задачи (1.1)-(1.2) через вспомогательную функцию $v(x,y)$, определяемую как решение интегрального уравнения

$$
v(x,y) - \int_{\xi}^{x} b(\alpha,y)v(\alpha,y)d\alpha - \int_{\eta}^{y} a(x,\beta)v(x,\beta)d\beta +
$$
$$
+\int_{\xi}^{x}\int_{\eta}^{y} c(\alpha,\beta)v(\alpha,\beta)d\beta d\alpha = 1 \qquad (1.17)
$$

Это есть частный случай рассмотренного выше уравнения

$$
\varphi(x,y) - \int_{x_0}^{x} K_1(x,y,\xi)\varphi(\xi,y)d\xi - \int_{y_0}^{y} K_2(y,x,\eta)\varphi(x,\eta)d\eta -
$$

$$-\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}K(x,y,\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta)d\eta d\xi = F(x,y)$$

Поэтому функция $v(x,y)$ существует и единственна. Она будет еще, очевидно, зависеть также от переменных (ξ,η), стоящих в качестве нижних пределов интегрирования. Далее удобно обозначать функцию v как зависящую от четырех переменных (x,y,ξ,η). Такая функция была введена Риманом, носит его имя и записывается как $R(x,y,\xi,\eta)$.

Из (1.17) непосредственно усматривается, что $v = R(x,y,\xi,\eta)$. Из (2.1) видно,что

$$\frac{\partial R}{\partial x} - b(x,\eta)R \equiv 0 \quad npu \quad y = n,$$

$$\frac{\partial R}{\partial y} - a(\xi,y)R \equiv 0 \quad npu \quad x = \xi, \tag{1.18}$$

$$R(x,y,x,y) \equiv 1$$

Если $a, b, c, a_x, b_y \in C(\bar{D})$, то для любой непрерывной в $\bar{D}$ функции $u(x,y)$, удовлетворяющей условиям $u_x, u_y, u_{xy} \in C(D)$, имеет место тождество

$$\frac{\partial^2(uR)}{\partial x\partial y} - RL(u) \equiv \frac{\partial}{\partial x}[u(\frac{\partial R}{\partial y} - aR)] + \frac{\partial}{\partial y}[u(\frac{\partial R}{\partial x} - bR)]. \tag{1.19}$$

Из (1.7) следует, что по (x,y) R удовлетворяет сопряженному с $L(u) = 0$ уравнению. Полагая в (1.19) $u(x,y)$ решением (1.1), меняя ролями переменные (x,ξ), (y,η) и вычисляя затем двойной интеграл по ξ, η в пределах $x_0 < \xi < x$, $y_0 < \eta < y$, с учетом тождеств (1.18), интегрируя дополнительно по частям слагаемые, в которые входят $\frac{\partial u(\xi,y_0)}{\partial \xi}$, $\frac{\partial u(x_0,\eta)}{\partial \eta}$, а также подставляя значения

$$u(x_0,y) = \varphi(y), \quad u(x,y_0) = \psi(x), \quad \varphi(y_0) = \psi(x_0),$$

получаем

$$u(x,y) = R(x,y_0,x,y)\psi(x) + R(x_0,y,x,y)\phi(y) - R(x_0,y_0,x,y)\psi(x_0) +$$

$$+\int_{x_0}^{x}[b(\alpha,y_0)R(\alpha,y_0,x,y) - \frac{\partial}{\partial\alpha}R(\alpha,y_0,x,y)]\psi(\alpha)d\alpha +$$

$$+\int_{y_0}^{y}[a(x_0,\beta)R(x_0,\beta,x,y) - \frac{\partial}{\partial\beta}R(x_0,\beta,x,y)]\phi(\beta)d\beta +$$

$$+\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}R(\alpha,\beta,x,y)f(\alpha,\beta)d\beta d\alpha. \qquad (1.20)$$

Это и есть решение задачи Гурса.

Из вышесказанного понятно, что функция R существует, но конкретный ее вид неизвестен. Поэтому формулу (1.20) нельзя рассматривать, как решение в явном виде. В связи с этим (1.20) обычно называют структурной формулой решения рассматриваемой задачи. Однако имеются случаи, когда R может быть построена в форме вполне определенной функции, записываемой с помощью интегралов, зависящих от коэффициентов уравнения (1.1), то есть в квадратурах. Указанные случаи имеют место при определенных дополнительных условиях, накладываемых на коэффициенты того же уравнения (1.1).

Дополнительные условия можно записать в формах следующих соотношений:

$$1) a_x + ab - c \equiv 0;$$

$$2) b_y + ab - c \equiv 0;$$

$$3) a_x \equiv b_y, a_x + ab - c = \alpha_0(x)\beta_0(y) \neq 0;$$

$$4) b_y - a_x \equiv a_x + ab - c \equiv \alpha_1(x)\beta_1(y) \neq 0; \qquad (1.21)$$

$$5) a_x - b_y \equiv b_y + ab - c \equiv \alpha_2(x)\beta_2(y) \neq 0;$$

$$6) m a_x - b_y \equiv m b_y - a_x \equiv (m-1)(ad-c);$$

$$7) w \equiv \frac{2s'(x)t'(y)}{(2-m)[s(x)+t(y)]^2}, s'(x)t'(y) \neq 0, s(x)+t(y) \neq 0$$

Здесь a, b, c- коэффициенты уравнения (1.1), имеющие достаточную гладкость для реализации соответствующих вариантов 1)-7), $\lambda_k, \beta_k \in C^1$, $s, t, m \in C^2$ причем функция m зависит лишь от одной из переменных (x, y) и не принимает значение 2. Классы гладкости указаны на замкнутых множествах определения соответствующих функций. Заметим, что варианты 1)-2) взяты из книги [6, с. 15-16], а 3)- из [7, формулы (2.2) на с.169].

Лемма 1 Пусть имеет место одно из тождеств 1)-2), или существуют функции $\lambda_k, \beta_k, m, s, t$ указанных выше классов, для которых реализуется одна из групп соотношений 3)-5), или при выполнении тождеств 6) одна из двух конструкций, стоящих в левых частях 1)-2), имеет вид содержащийся в варианте 7) дроби. Тогда функция Римана для уравнения (1.1) записывается в явном виде.

Заметим, что функция Римана для вариантов 1)-2) указаны в [6, формулы (1.23),(1.24)], а для 3) и 4)-7)- в [7, формулы (2.2) на с.169] и [10] соответственно.

§2. Результаты, полученные автором данной выпускной работы.

Нашей целью является применение результатов, изложенных в п. 1.2, к исследованию задачи Гурса для уравнения

$$\mathcal{L}(u) \equiv u_{xyz} + au_{xy} + bu_{yz} + cu_{xz} + du_x + eu_y + fu_z + gu = 0, \quad (2.1)$$

рассматриваемого в параллелепипеде $D = \{x_0 < x < x_1, y_0 < y < y_1, z_0 < z < z_1\}$. Если через X,Y,Z обозначить грани D при $x = x_0$, $y = y_0$, $z = z_0$ соответственно, то граничные условия Гурса можно задать формулами

$$u|_{\bar{X}} = \varphi_1(y, z), \quad u|_{\bar{Y}} = \varphi_2(x, z), u|_{\bar{Z}} = \varphi_3(x, y), \quad (2.2)$$

а роль условия согласования $\varphi(y_0) = \psi(x_0)$ из (1.2) будут играть

$$\varphi_2(x, z_0) = \varphi_3(x, y_0), \quad \varphi_(y, z_0) = \varphi_3(x_0, y), \quad \varphi_1(y_0, z) = \varphi_2(x_0, z) \quad (2.3)$$

Как и в п. 1.2, нас будут интересовать случаи разрешимости задачи (2.1)-(2.3) в квадратурах. При этом основная идея состоит в исследовании возможностей сведения данной задачи к случаям, связанным с вариантами (1.21). Реализовать эту идею удалось на основе факторизации левой части уравнения (2.1), то есть представления её в виде произведения (композиции) операторами первого и второго порядка. А именно, попробуем найти такие α, β, γ, δ, чтобы левая часть (2.1) приобрела вид

$$(\frac{\partial}{\partial x} + \alpha)(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \beta\frac{\partial u}{\partial y} + \gamma\frac{\partial u}{\partial z} + \delta u) \quad (2.4)$$

Проделав в левой части (2.4) указанные действия и сравнив полученные формулы с (2.1) нетрудно убедиться, что для представления (2.4) достаточно выполнения тождеств

$$a_x + ab - e \equiv c_x + bc - f \equiv d_x + bd - g \equiv 0 \tag{2.5}$$

. При этом α, β, γ, δ определяются формулами

$$\alpha = b, \beta = a, \gamma = c, \delta = d \tag{2.6}$$

Аналогично, убеждаемся, что при наличии тождеств

$$b_z + ab - e \equiv b_y + bc - f \equiv b_{yz} + ab_y + b_z c + bd - g \equiv 0 \tag{2.7}$$

левая часть (2.1) приобретает вид

$$(\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} + \beta \frac{\partial}{\partial y} + \gamma \frac{\partial}{\partial z} + \delta)(\frac{\partial}{\partial x} u + \alpha u) \tag{2.8}$$

Интересно, что и в этом случае α, β, γ, δ должны быть заданы по прежнему соотношениями (2.6).
Таким образом, доказана

Лемма 2. Для представления левой части уравнения (2.1) в видах (2.4) или (2.8) достаточно, чтобы коэффициенты уравнения (2.1) удовлетворяли соответственно тождествам (2.5), или (2.7).

Сформулированный в лемме 2 результат позволяет редуцировать рассматриваемую задачу (2.1) к двум парам задач. Одна задача первой пары заключается в отыскании решения уравнения:

$$u_{yz} + \beta u_y + \gamma u_z + \delta u = v, \tag{2.9}$$

удовлетворяющего условиям

$$u(x, y_0, z) = \varphi_2(y, z), \quad u(x, y, z_0) = \varphi_3(x, y) \tag{2.10}$$

а вторая состоит в нахождении решения уравнения

$$v_x + \lambda v = 0 \tag{2.11}$$

по известному значению

$$v(x_0, y, z) = [\varphi_{1yz} + \beta\varphi_{1y} + \gamma\varphi_{1z} + \delta\varphi_1]_{x=x_0} \qquad (2.12),$$

Понятно, что сначала надо найти v. Нам удобно временно обозначить правую часть (2.12) через $w(y, z)$, считая y,z параметрами. Тогда функция $e^{\int_{x_0}^{x} \alpha(\xi,y,z)d\xi}$ оказывается интегрирующим множителем для левой части (2.11), то есть

$$\frac{\partial}{\partial x}[ve^{\int_{x_0}^{x} \alpha(\xi,y,z)d\xi}] = 0.$$

Отсюда вычисляем

$$v(x, y, z)e^{\int_{x_0}^{x} \alpha(\xi,y,z)d\xi} - v(x_0, y, z) = 0,$$

в следствии чего

$$v(x, y, z) = w(y, z)e^{-\int_{x_0}^{x} \alpha(\xi,y,z)d\xi}$$

Таким образом (считается опять y,z переменными), имеем, что функция $v(x, y, z)$ найдена, а задача (2.9)-(2.10) превращаются в классическую задачу Гурса (1.1)-(1.2), если считать (опять временно) переменную x параметром. Конечно, при этом роль x и y в задаче Гурса будут соответственно играть y и z.

Условия 1)-7) из (1.21) примут вид

$$1)a_x + ab - c \equiv 0;$$

$$2)b_y + ab - c \equiv 0;$$

$$3) a_x \equiv b_y, a_x + ab - c = \alpha_k(x,y)\beta_k(x,z) \neq 0, \quad k = 0,1,2;$$

$$4) b_y - a_x \equiv a_x + ab - c \equiv \alpha_1(x)\beta_1(y) \neq 0; \tag{2.13}$$

$$5) a_x - b_y \equiv b_y + ab - c \equiv \alpha_2(x)\beta_2(y) \neq 0;$$

$$6) m a_x - b_y \equiv m b_y - a_x \equiv (m-1)(ad - c);$$

$$7) w \equiv \frac{2 s_y(x,y) t_z(x,y)}{(2-m)[s(x,y)+t(x,z)]^2}, s_y(x,y)t_z(x,y) \neq 0, s(x)+t(y) \neq 0$$

Конечно, здесь a,b,c зависят по-прежнему от (x,y,z) и имеют гладкость, достаточную для реализации всех вариантов из (2.13), а функция m зависит лишь от одной из пар (x,y), (x,z) и не принимает значение 2.

На основе лемм 1 и 2 с учетом соотношений (2.13) может быть сформулирована

Теорема 1.Пусть в (2.13) имеет место одно из тождеств 1)-2), или существуют функции $\lambda_k(x,y)$,$\beta_k(x,y)$, $(k = 0,1,2)$, m,s,t, для которых реализуется одна из групп соотношений 3)-5), или при выполнении тождеств 6) одна из двух конструкций $a_y + ab - c$, $b_z + ab - c$ имеет вид содержащейся в 7) дроби. Если при этом выполнены ещё тождества (2.5), то задача (2.1)-(2.3) разрешима в квадратурах.

Вспомним ещё, что лемма 2 содержит ещё утверждение о возможности сведения задачи (2.1)-(2.3) к другой паре задач, связанных с уравнениями

$$u_x + \alpha u = v, \tag{2.14}$$

$$v_{yz} + \beta v_y + \gamma v_z + \delta v = 0, \tag{2.15}$$

граничные условия для которых имеют соответственно вид

$$u(x_0, y, z) = \varphi_1(y,z), \tag{2.16}$$

$$v(x, y_0, z) = [\varphi_{2x} + \alpha\varphi_2]|_{y=y_0}, \quad v(x, y, z_0) = [\varphi_{3x} + \alpha\varphi_3]|_{z=z_0}. \quad (2.17)$$

Здесь сначала тоже надо отыскивать функцию $v(x, y, z)$, но уже из решения задачи Гурса, после чего задача (2.14), (2.16) решается без особого труда. Поскольку левые части уравнений (2.9) и (2.15) совпадают, мы еще раз можем воспользоваться вариантами (2.13)

Отсюда понятно, что аналогично предыдущему может быть на основании тех же лемм 1 и 2 сформулирована теорема 2, отличающаяся от теоремы 1 только тем, что вместо (2.5) должны быть выполнены тождества (2.7).

Очевидно, каждая из этих двух теорем содержит семь вариантов условий разрешимости рассматриваемой задачи в квадратурах. Следовательно, общее количество таких вариантов равно 14.

Заключение

Подводя итог, сформулируем результаты проведенной автором работы.

1. Изучены вопросы доказательства существования и единственности решения классической задачи Гурса на основе теории интегральных уравнений и построения структурной формулы ее решения методом Римана вплоть до выделения случаев разрешимости в квадратурах. Составлен обзор этих результатов (§1), являющийся основной для дальнейшего текста.

2. Двумя способами реализована идея факторизации уравнения Бианки третьего порядка, позволившая редуцировать задачу Гурса для него к классическому её случаю.

3. Осуществлена адаптация метода решения в квадратурах классической задачи Гурса к двум ее вариантам, получаемым на основе указанной выше факторизации, что позволило выделить 14 неизвестных ранее случаев разрешимости в явном виде трехмерной задачи Гурса. Содержание п.п. 2-3 изложено в §2.

Список использованной литература

1. Bianci L. Sulla estensione del metodo di Riemann alle equazioni lineari alle derivate parziali d'ordine superiore // Atti R. Accad.Lincei. Rend. Cl.Sc.fis., mat. e natur.-1895. Vol. IV, 1 sem.-P. 89-99, 133-142.

2. Lahaye E. La metode de Riemann appligee a la resolution d'une categorie d'equations lineares de troisieme ordre // Bull. cl. sci.Acad. Roy. de Belg.-1946-5 serie.- V.31-P. 479-494.

3. Фаге М.К. Дифференциальные уравнения с чистосмешанными производными и главным членом // ДАН СССР, 1956.-Т.108, N=5.- с.780-783.

4. Фаге М.К. Задача Коши для уравнения Бианки // Математический сборник, 1958-Т.451(87), N=3-с.281-322.

5. Джакадзе О.М. об инвариантах уравнений в частных производных//Дифференц. уравнения, 2006-Т.42,№3-с. 385-394.

6. Жегалов В.И., Миронов А.Н., Уткина Е.А. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. -Казанское математ. о-во, 2001-с. 226

7. Жегалов В.И., Миронов А.Н., Уткина Е.А. Уравнения с доминирующей частной производной.-Изд-во Казанского ун-та, 2014-385с.

8. Крикунов Ю.М. Лекции по уравнениям математической физики и интегральным уравнениям.-Казань: Казанск. ун-т,1970.- 209с.

9. Трикоми Ф. Лекции по дифференциальным уравнениям в частных производных.

10. Жегалов В.И., Сарварова И.М. К условиям разрешимости задачи Гурса в квадратурах // Известия вузов. Математика, 2013- №3. с. 68-73.