УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2020, Т. 162, кн. 3 ISSN 2541-7746 (Print)
С. 350–358 ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 519.714.22 doi: 10.26907/2541-7746.2020.3.350-358

О РЕАЛИЗАЦИИ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ КОНТАКТНЫМИ СХЕМАМИ РАВНОМЕРНОЙ ШИРИНЫ 3

К.А. Попков

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук,
г. Москва, 125047, Россия

Аннотация

Основной задачей исследования является изучение возможностей реализации произвольной булевой функции контактной схемой как можно меньшей равномерной ширины. Х.А. Мадатян в 1965 г. сформулировал понятие ширины контактной схемы; однако оно не всегда соответствует интуитивному представлению о ширине. В связи с этим в настоящей статье введено понятие равномерной ширины контактной схемы и показано, что для ряда случаев оно соответствует интуитивному смыслу понятия ширины. Доказано, что любую булеву функцию можно реализовать контактной схемой, равномерная ширина которой не превосходит 3.

Ключевые слова: контактная схема, булева функция, равномерная ширина

Введение

В работе рассматривается задача синтеза двухполюсных[1] контактных схем [1], реализующих заданные булевы функции и имеющих некоторые ограничения на структуру. Впервые такая задача, по-видимому, была рассмотрена в работах К.Э. Шеннона [2, 3]. Ряд результатов, касающихся сложности контактных схем с различными ограничениями, представлены в разд. 1 обзорной работы [4] (под сложностью контактной схемы здесь и далее подразумевается число контактов в ней). Х.А. Мадатян в [5] ввёл понятие ширины контактной схемы (см. также [4, с. 106]) и нашёл асимптотику по n минимальной сложности контактных схем ширины не более b, реализующих произвольные булевы функции от n переменных, при некоторых условиях на числа n и b. В дальнейшем понятие ширины было определено и рассматривалось для других классов управляющих систем: схем из функциональных элементов [6, с. 136], ветвящихся программ [7, с. 74], вычислительных программ [8, с. 99], [9]. Естественным образом можно также ввести понятия ширины (плоской) клеточной контактной схемы [4, с. 111] и прямоугольной схемы [10, с. 285–286] как одного из измерений соответствующего прямоугольника.

1. Основные определения и вспомогательные утверждения

Множество (некоторых) контактов контактной схемы (КС) называется её *сечением*, если оно имеет хотя бы один общий контакт с каждой несамопересекающейся цепью (НЦ), соединяющей полюса схемы. Сечение считается *тупиковым*,

[1] Слово «двухполюсная» в дальнейшем будем опускать.

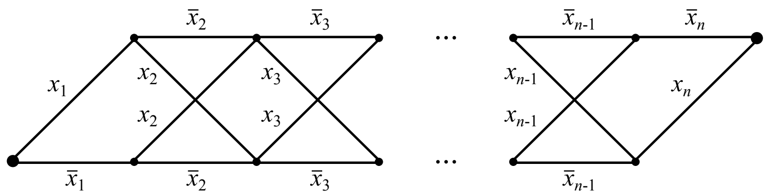

Рис. 1. Схема $S^n_\oplus$

если после выбрасывания из него любого одного контакта оно перестает быть сечением [11, с. 133]. В качестве одного из сечений любой КС, полюса которой не совпадают, можно взять множество, состоящее из всех контактов данной схемы.

Непустое множество контактов называется *пучком*, если все контакты из этого множества имеют одну и ту же пару концов и концы каждого контакта различны.

В работе [5] вводится понятие ширины КС, определяемое как наибольшее число контактов в тупиковом сечении этой схемы. Несложно показать, что: а) ширина любой КС S_1, представляющей собой параллельное соединение m несамопересекающихся цепей, где $m \in \mathbb{N}$, равна m; б) ширина любой КС S_2, представляющей собой последовательное соединение p пучков, где $p \in \mathbb{N}$, равна максимальному количеству контактов в одном пучке. Для доказательства утверждения достаточно заметить, а) что любое тупиковое сечение схемы S_1 содержит ровно по одному контакту из каждой из m цепей, а также б) что любое тупиковое сечение схемы S_2 совпадает с одним из p пучков контактов, участвующих в её определении. Однако у введённого понятия ширины КС, с нашей точки зрения, есть существенный недостаток, который мы продемонстрируем на конкретном примере. Рассмотрим известную КС $S^n_\oplus$, где $n \geqslant 2$, реализующую линейную булеву функцию $x_1 \oplus \ldots \oplus x_n$ и содержащую $4n-4$ контактов (см. рис. 1). С интуитивной точки зрения ширина этой схемы не должна зависеть от n (если длину схемы связывать с максимальной или минимальной длиной НЦ между её полюсами, а ширину считать вторым измерением этой схемы), однако, как легко убедиться, одним из тупиковых сечений схемы $S^n_\oplus$ является множество, состоящее из всех её замыкающих контактов, то есть всех её контактов $x_1, x_2, \ldots, x_n$. В этом сечении содержится $1 + 2(n-2) + 1 = 2n-2$ контактов, следовательно, ширина схемы $S^n_\oplus$ не меньше $2n-2$, то есть растёт с ростом n. Таким образом, приведённое определение ширины КС, по нашему мнению, не всегда согласуется с интуитивным смыслом данного понятия.

В связи с вышеуказанным введём другое понятие ширины КС, которое во избежание путаницы будем называть её равномерной шириной. Пусть S – КС и K – произвольный содержащийся в ней контакт. Обозначим через $W_K(S)$ наименьшее число контактов в тупиковом сечении схемы S, содержащем контакт K, и положим $W(S) = \max W_K(S)$, где максимум берётся по всем контактам K схемы S, для которых определено значение $W_K(S)$. Величину $W(S)$ назовём *равномерной шириной* схемы S. Величина $W_K(S)$ играет роль «локальной» ширины этой схемы в окрестности контакта K.

Предложение 1. *Значение $W_K(S)$ определено тогда и только тогда, когда в схеме S есть хотя бы одна НЦ между полюсами, содержащая контакт K.*

Доказательство. Значение $W_K(S)$ определено тогда и только тогда, когда у схемы S есть хотя бы одно тупиковое сечение, содержащее контакт K. Если в этой схеме нет ни одной НЦ между полюсами, содержащей контакт K, то из любого сечения M схемы, содержащего этот контакт, его можно удалить, и полученное множество по определению также будет сечением. Значит, сечение M

не является тупиковым, то есть у схемы S нет ни одного тупикового сечения, содержащего контакт K.

Пусть теперь в схеме S есть хотя бы одна НЦ C между полюсами, содержащая контакт K. Обозначим через M' множество всех контактов схемы S, не принадлежащих цепи C. Если из этой схемы удалить все контакты из множества M' и контакт K, то в полученной схеме, очевидно, не будет ни одной цепи между полюсами, поэтому множество $M' \bigcup \{K\}$ является сечением схемы S. Путём последовательного выбрасывания «лишних» контактов из сечения $M' \bigcup \{K\}$ можно получить тупиковое сечение $M'' \subseteq M' \bigcup \{K\}$. Если $K \notin M''$, то $M'' \subseteq M'$, однако в этом случае множество M'', как и M', не имеет ни одного общего контакта с цепью C и поэтому не может быть сечением схемы S; противоречие. Поэтому $K \in M''$, то есть у схемы S есть тупиковое сечение M'', содержащее контакт K. Предложение 1 доказано. □

Предложение 2. *Значение $W(S)$ определено тогда и только тогда, когда полюса схемы S не совпадают и в ней есть хотя бы одна НЦ между полюсами.*

Доказательство. Значение $W(S)$ определено тогда и только тогда, когда хотя бы для одного контакта K, содержащегося в схеме S, определено значение $W_K(S)$. В таком случае предложение 2 непосредственно следует из предложения 1. □

Доопределим величину $W(S)$ для случаев, когда полюса схемы S совпадают или в ней нет ни одной НЦ между полюсами, положив в каждом из этих двух случаев $W(S) = 0$.

Отметим важность присутствия слова «тупиковом» в определении величины $W_K(S)$. Рассмотрим любую КС S, у которой есть сечение, состоящее из одного контакта K_1. Например, таковой является любая КС, один из полюсов которой инцидентен ровно одному контакту K_1. Пусть K – произвольный контакт схемы S. Тогда множество $\{K_1, K\}$ является сечением (не тупиковым в случае $K \neq K_1$) схемы S, и если бы в определении величины $W_K(S)$ не было слова «тупиковом», то мы бы получили, что $W_K(S) \leqslant 2$ для любого контакта K схемы S, а значит, $W(S) \leqslant 2$, то есть равномерная ширина любой КС указанного вида не превосходила бы 2, что опять же не согласуется с интуитивным смыслом понятия ширины КС (например, если второй полюс схемы S инцидентен по крайней мере трём контактам).

Для любой КС S, в которой через каждый контакт проходит хотя бы одна НЦ между полюсами этой схемы (то есть для которой значение $W_K(S)$ определено для любого её контакта K), величина $W(S)$ играет роль наибольшей «локальной» ширины схемы S.

Найдём равномерную ширину схем S_1 и S_2, определённых утверждениями а) и б). По аналогии с доказательствами этих утверждений нетрудно получить, что ширина схемы S_1, представляющей собой параллельное соединение m несамопересекающихся цепей, равна m, а ширина схемы S_2, представляющей собой последовательное соединение нескольких пучков, равна максимальному количеству контактов в одном пучке. Таким образом, для схем S_1 и S_2 понятия ширины и равномерной ширины совпадают. Оценим сверху равномерную ширину схемы $S^n_\oplus$, выше определённой.

Предложение 3. *Справедливо неравенство $W(S^n_\oplus) \leqslant 4$.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $W_K(S^n_\oplus) \leqslant 4$ для каждого контакта K схемы $S^n_\oplus$. Пусть K – это контакт переменной x_i (то есть либо контакт x_i, либо контакт $\overline{x}_i$), где $i \in \{1, \ldots, n\}$. Несложно убедиться, что множество всех контактов переменной x_i, содержащихся в схеме $S_{\oplus}^n$, имеет мощность 2 при $i = 1$ или $i = n$ и мощность 4 в остальных случаях и является тупиковым сечением схемы $S_{\oplus}^n$, содержащим контакт K, откуда следует требуемое неравенство. □

Выше было показано, что ширина схемы $S_{\oplus}^n$ растёт с ростом n. Таким образом, введённое определение равномерной ширины КС при рассмотрении схемы $S_{\oplus}^n$, с нашей точки зрения, согласуется с интуитивным смыслом понятия ширины этой схемы, в отличие от определения ширины КС, данного в [5].

Пусть $n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ и $f(\widetilde{x}^n)$ – булева функция, где $\widetilde{x}^n = (x_1, \ldots, x_n)$. Введём следующие обозначения: $W(f) = \min W(S)$, где минимум берётся по всем КС S, реализующим функцию f; $W(n) = \max W(f)$, где максимум берётся по всем булевым функциям f от n переменных. По аналогии с другими подобными величинами (см., например, [11, с. 32]), назовём величину $W(n)$ *функцией Шеннона* равномерной ширины контактных схем; она определяет минимально возможную равномерную ширину таких схем, достаточную для реализации произвольной булевой функции от n переменных.

Предложение 4. *В случаях* $f \equiv 0$, $f \equiv 1$ *справедливо равенство* $W(f) = 0$.

Доказательство. Очевидно, что функцию f можно реализовать КС S, не содержащей ни одного контакта. Тогда $W(S) = 0$ согласно доопределению величины $W(S)$, откуда следует, что $W(f) = 0$. □

Предложение 5. *Для любого* $n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ *справедливо неравенство* $W(n) \leqslant n$.

Доказательство. Достаточно доказать неравенство $W(f) \leqslant n$ для любой булевой функции $f(\widetilde{x}^n)$. В случаях $f \equiv 0$, $f \equiv 1$ оно вытекает из предложения 4. Далее будем считать, что функция f отлична от констант. Реализуем её КС, моделирующей представление функции f в виде совершенной конъюнктивной нормальной формы [8, с. 26, (2.4)]: каждую элементарную дизъюнкцию (ЭД) $x_1^{\overline{\beta}_1} \vee \cdots \vee x_n^{\overline{\beta}_n}$ из этого представления реализуем пучком из n контактов $x_1^{\overline{\beta}_1}, \ldots, x_n^{\overline{\beta}_n}$; затем все построенные пучки соединим последовательно. Очевидно, что полученная КС S реализует функцию f; её равномерная ширина равна максимальному количеству контактов в одном пучке (см. выше), то есть равна n. Таким образом, $W(f) \leqslant W(S) = n$. Предложение 5 доказано. □

С учётом простоты доказательства предложения 5 число n можно считать тривиальной верхней оценкой величины $W(n)$.

2. Формулировка и доказательство основного результата

Основным результатом данной работы является следующее утверждение.

Теорема 1. *Для любого* $n \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$ *справедливо неравенство*

$$W(n) \leqslant \min(3, n).$$

Доказательство. В силу предложения 5 достаточно доказать, что $W(n) \leqslant 3$ при $n \geqslant 4$, то есть что $W(f) \leqslant 3$ для любой булевой функции $f(\widetilde{x}^n)$ при указанных значениях n. В случаях $f \equiv 0$, $f \equiv 1$ последнее неравенство вытекает из предложения 4. Далее будем считать, что функция f отлична от констант. Представим её в виде произвольной конъюнктивной нормальной формы:

$$f(\widetilde{x}^n) = D_1 \& \cdots \& D_m, \tag{1}$$

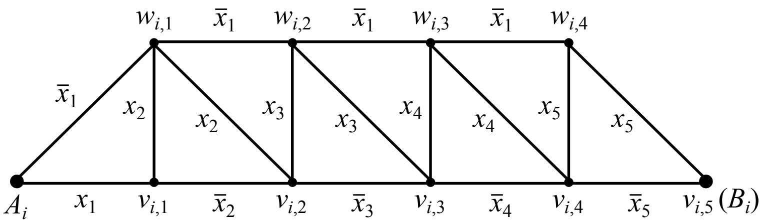

Рис. 2. Схема S_i

где $D_i = x^{\sigma_1(i)}_{j_1(i)} \vee \cdots \vee x^{\sigma_{t_i}(i)}_{j_{t_i}(i)}$ – ЭД, $i = 1, \ldots, m$, $t_i \in \{1, \ldots, n\}$; $j_1(i), \ldots, j_{t_i}(i)$ – попарно различные индексы от 1 до n и $\sigma_1(i), \ldots, \sigma_{t_i}(i) \in \{0, 1\}$. Для каждого $i = 1, \ldots, m$ построим контактную схему S_i с полюсами A_i и B_i, реализующую ЭД D_i. В случае $t_i = 1$ схема S_i представляет собой контакт $x^{\sigma_1(i)}_{j_1(i)}$, а в случае $t_i = 2$ – параллельное соединение контактов $x^{\sigma_1(i)}_{j_1(i)}$ и $x^{\sigma_2(i)}_{j_2(i)}$. Очевидно, что в каждом из этих двух случаев схема S_i реализует ЭД D_i.

Пусть теперь $t_i \geqslant 3$. Тогда в схеме S_i имеется $2t_i$ попарно различных вершин: полюса A_i и B_i и внутренние вершины $v_{i,1}, \ldots, v_{i,t_i-1}, w_{i,1}, \ldots, w_{i,t_i-1}$; для удобства полюс B_i будем также обозначать через v_{i,t_i}. Вершины A_i и $v_{i,1}$ соединяются контактом $x^{\sigma_1(i)}_{j_1(i)}$, а вершины A_i и $w_{i,1}$ – контактом $\overline{x^{\sigma_1(i)}_{j_1(i)}}$. Для каждого $q = 2, \ldots, t_i$ вершины $v_{i,q-1}$ и $v_{i,q}$ соединяются контактом $\overline{x^{\sigma_q(i)}_{j_q(i)}}$, а вершина $w_{i,q-1}$ соединяется с каждой из вершин $v_{i,q-1}$, $v_{i,q}$ контактом $x^{\sigma_q(i)}_{j_q(i)}$. Кроме того, для каждого $q = 2, \ldots, t_i - 1$ вершины $w_{i,q-1}$ и $w_{i,q}$ соединяются контактом $\overline{x^{\sigma_1(i)}_{j_1(i)}}$. Таким образом, всего в схеме S_i содержится $2 + 3(t_i - 1) + t_i - 2 = 4t_i - 3$ контактов. Вид этой схемы при $t_i = 5$, $j_1(i) = 1$, $\ldots$, $j_5(i) = 5$, $\sigma_1(i) = \ldots = \sigma_5(i) = 1$, то есть при $D_i = x_1 \vee \ldots \vee x_5$, показан на рис. 2.

Пусть схема S_i реализует булеву функцию $f_i(\widetilde{x}^n)$. Докажем, что $f_i = D_i$. Сначала докажем **свойство (*)** схемы S_i: функция проводимости между вершинами $v_{i,q}$ и v_{i,t_i} этой схемы тождественно равна единице для любого $q \in \{1, \ldots, t_i - 1\}$. Достаточно доказать аналогичное свойство, получающееся из свойства (*) заменой v_{i,t_i} на $v_{i,q+1}$. Между вершинами $v_{i,q}$ и $v_{i,q+1}$ в схеме S_i есть, в частности, цепи $v_{i,q} - \overline{x^{\sigma_{q+1}(i)}_{j_{q+1}(i)}} - v_{i,q+1}$ и $v_{i,q} - x^{\sigma_{q+1}(i)}_{j_{q+1}(i)} - w_{i,q} - x^{\sigma_{q+1}(i)}_{j_{q+1}(i)} - v_{i,q+1}$, поэтому функция проводимости между данными двумя вершинами имеет вид $\overline{x^{\sigma_{q+1}(i)}_{j_{q+1}(i)}} \vee x^{\sigma_{q+1}(i)}_{j_{q+1}(i)} \vee \ldots \equiv 1$, что и требовалось доказать.

Для доказательства функционального равенства $f_i = D_i$ надо доказать, что $f_i(\widetilde{\pi}) = D_i(\widetilde{\pi})$ для любого двоичного набора $\widetilde{\pi}$ длины n. Рассмотрим три случая.

1. Пусть $j_1(i)$-я компонента набора $\widetilde{\pi}$ равна $\sigma_1(i)$. Тогда контакт $x^{\sigma_1(i)}_{j_1(i)}$, соединяющий вершины A_i и $v_{i,1}$ схемы S_i, проводит на наборе $\widetilde{\pi}$, поэтому на данном наборе в указанной схеме есть проводимость между вершинами A_i и $v_{i,1}$, а значит, в силу свойства (*), применяемого при $q = 1$, и между вершинами A_i и v_{i,t_i}, то есть между полюсами A_i и B_i. Таким образом, $f_i(\widetilde{\pi}) = 1$, откуда вместе с соотношением $D_i(\widetilde{\pi}) = (\sigma_1(i))^{\sigma_1(i)} \vee \cdots = 1$ получаем, что $f_i(\widetilde{\pi}) = D_i(\widetilde{\pi})$.

2. Пусть $j_1(i)$-я, $\ldots$, $j_{t_i}(i)$-я компоненты набора $\widetilde{\pi}$ равны $\overline{\sigma_1(i)}, \ldots, \overline{\sigma_{t_i}(i)}$ соответственно. Тогда на наборе $\widetilde{\pi}$ в схеме S_i проводят все контакты, принадлежащие цепи $A_i - \overline{x^{\sigma_1(i)}_{j_1(i)}} - w_{i,1} - \overline{x^{\sigma_1(i)}_{j_1(i)}} - w_{i,2} - \ldots - w_{i,t_i-1}$, а также все контакты, принадлежащие цепи $v_{i,1} - \overline{x^{\sigma_q(i)}_{j_q(i)}} - v_{i,2} - \ldots - v_{i,t_i-1} - \overline{x^{\sigma_{t_i}(i)}_{j_{t_i}(i)}} - B_i$ и не проводит ни

один другой контакт. Поэтому на данном наборе проводимость между полюсами A_i и B_i схемы S_i отсутствует, то есть $f_i(\widetilde{\pi}) = 0$, откуда вместе с соотношением

$$D_i(\widetilde{\pi}) = \left(\overline{\sigma_1(i)}\right)^{\sigma_1(i)} \vee \dots \vee \left(\overline{\sigma_{t_i}(i)}\right)^{\sigma_{t_i}(i)} = 0 \vee \dots \vee 0 = 0$$

получаем, что $f_i(\widetilde{\pi}) = D_i(\widetilde{\pi})$.

3. Отрицание объединения случаев 1 и 2: пусть $j_1(i)$-я компонента набора $\widetilde{\pi}$ равна $\overline{\sigma_1(i)}$ и существует такое $q \in \{2, \dots, t_i\}$, что $j_q(i)$-я компонента набора $\widetilde{\pi}$ равна $\sigma_q(i)$. Тогда на наборе $\widetilde{\pi}$ в схеме S_i проводят все контакты, принадлежащие цепи $A_i - x_{j_1(i)}^{\overline{\sigma_1(i)}} - w_{i,1} - x_{j_1(i)}^{\overline{\sigma_1(i)}} - w_{i,2} - \ldots - w_{i,q-1} - x_{j_q(i)}^{\sigma_q(i)} - v_{i,q}$, поэтому на данном наборе в указанной схеме есть проводимость между вершинами A_i и $v_{i,q}$, а значит, в силу свойства (*), и между вершинами A_i и v_{i,t_i}, то есть между полюсами A_i и B_i. Таким образом, $f_i(\widetilde{\pi}) = 1$, откуда вместе с соотношением $D_i(\widetilde{\pi}) = \ldots \vee (\sigma_q(i))^{\sigma_q(i)} \vee \dots = 1$ получаем, что $f_i(\widetilde{\pi}) = D_i(\widetilde{\pi})$.

Равенство $f_i = D_i$ полностью доказано. Значит, схема S_i реализует ЭД D_i для каждого $i = 1, \dots, m$. Пусть S – контактная схема, представляющая собой последовательное соединение схем $S_1, \dots, S_m$. Тогда в силу (1) схема S реализует функцию $f(\widetilde{x}^n)$. Для доказательства неравенства $W(f) \leqslant 3$ достаточно доказать, что $W(S) \leqslant 3$, то есть что для любого контакта схемы S существует тупиковое сечение этой схемы, содержащее не более трёх контактов, в том числе указанный контакт. Легко видеть, что для любого $i \in \{1, \dots, m\}$ произвольное тупиковое сечение подсхемы S_i является тупиковым сечением схемы S, поэтому надо доказать, что для любых $i \in \{1, \dots, m\}$ и контакта K, принадлежащего подсхеме S_i, существует тупиковое сечение этой подсхемы, содержащее не более трёх контактов, в том числе контакт K. В случае $t_i \in \{1, 2\}$ схема S_i по построению представляет собой пучок из t_i контактов, и множество всех её контактов является искомым тупиковым сечением. Пусть $t_i \geqslant 3$. Для краткости контакт, соединяющий произвольные вершины a и b схемы S_i, будем обозначать через $[a, b]$. Рассмотрим пять случаев; в каждом из них утверждение вида «множество …является искомым тупиковым сечением» наглядно проверяется по рис. 2.

1′. Пусть K – это контакт $[A_i, v_{i,1}]$ или $[A_i, w_{i,1}]$. Тогда множество $\{[A_i, v_{i,1}], [A_i, w_{i,1}]\}$ является искомым тупиковым сечением.

2′. Пусть K – это один из контактов $[w_{i,q-1}, w_{i,q}]$, $[w_{i,q-1}, v_{i,q}]$ или $[v_{i,q-1}, v_{i,q}]$, где $q \in \{2, \dots, t_i - 1\}$. Тогда множество $\{[w_{i,q-1}, w_{i,q}], [w_{i,q-1}, v_{i,q}], [v_{i,q-1}, v_{i,q}]\}$ является искомым тупиковым сечением.

3′. Пусть K – это контакт $[w_{i,1}, v_{i,1}]$. Тогда множество $\{[A_i, w_{i,1}], [w_{i,1}, v_{i,1}], [v_{i,1}, v_{i,2}]\}$ является искомым тупиковым сечением.

4′. Пусть K – это контакт $[w_{i,q}, v_{i,q}]$ для некоторого $q \in \{2, \dots, t_i - 1\}$. Тогда множество $\{[w_{i,q-1}, w_{i,q}], [w_{i,q}, v_{i,q}], [v_{i,q}, v_{i,q+1}]\}$ является искомым тупиковым сечением.

5′. Пусть K – это контакт $[v_{i,t_i-1}, B_i]$ или $[w_{i,t_i-1}, B_i]$. Тогда множество $\{[v_{i,t_i-1}, B_i], [w_{i,t_i-1}, B_i]\}$ является искомым тупиковым сечением.

Неравенство $W(f) \leqslant 3$, а вместе с ним теорема 1 доказаны. □

Заключение

В работе предложен метод синтеза контактных схем равномерной ширины не более 3, реализующих произвольные булевы функции. Данный метод может найти практическое применение, если для каких-то целей требуется построить «узкую» контактную схему с заданным функционированием.

Следующим шагом, по нашему мнению, должно стать нахождение для каждой булевой функции $f(\widetilde{x}^n)$ точного значения величины $W(f)$ (в силу теоремы 1 это значение всегда принадлежит множеству $\{0,1,2,3\}$). У автора имеется задел в данном направлении и есть гипотеза, что $W(n)=\min(3,n)$ для любого $n\in\mathbb{N}\bigcup\{0\}$, то есть верхняя оценка величины $W(n)$, полученная в теореме 1, совпадает с нижней.

Литература

1. *Лупанов О.Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. – 138 с.
2. *Shannon C.E.* A symbolic analysis of relay and switching circuits // Trans. AIEE. – 1938. – V. 57. – P. 713–723. – doi: 10.1109/T-AIEE.1938.5057767.
3. *Shannon C.E.* The synthesis of two-terminal switching circuits // Bell Syst. Tech. J. – 1949. – V. 28, No 1. – P. 59–98. – doi: 10.1002/j.1538-7305.1949.tb03624.x.
4. *Коршунов А.Д.* Сложность вычислений булевых функций // Усп. матем. наук. – 2012. – Т. 67, Вып. 1. – С. 97–168. – doi: 10.4213/rm9459.
5. *Мадатян Х.А.* Синтез контактных схем ограниченной ширины // Проблемы кибернетики. – М.: Наука, 1965. – Вып. 14. – С. 301–307.
6. *Карпова Н.А.* О вычислениях с ограниченной памятью // Математические вопросы кибернетики. – М.: Наука, 1989. – Вып. 2. – С. 131–144.
7. *Окольнишникова Е.А.* О сложности ветвящихся программ // Математические вопросы кибернетики. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001. – Вып. 10. – С. 69–82.
8. *Ложкин С.А.* Лекции по основам кибернетики. – М.: Изд. отд. фак. ВМиК МГУ, 2004. – 253 с.
9. *Коноводов В.А.* О синтезе схем ограниченной ширины // Материалы VIII молодёжной науч. шк. по дискретной математике и её приложениям. – М.: Изд-во мех.-матем. фак. МГУ, 2011. – Ч. 1. – С. 37–41.
10. *Кравцов С.С.* О реализации функций алгебры логики в одном классе схем из функциональных и коммутационных элементов // Проблемы кибернетики. – М.: Наука, 1967. – Вып. 19. – С. 285–292.
11. *Редькин Н.П.* Надёжность и диагностика схем. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1992. – 192 с.

Поступила в редакцию
06.07.2020

Попков Кирилл Андреевич, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук
Миусская пл., д. 4, г. Москва, 125047, Россия

E-mail: *kirill-formulist@mail.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2020, vol. 162, no. 3, pp. 350–358

doi: 10.26907/2541-7746.2020.3.350-358

On the Implementation of Boolean functions by Contact Circuits with Uniform Width 3

K.A. Popkov

Keldysh Institute of Applied Mathematics,
Russian Academy of Sciences, Moscow, 125047 Russia
E-mail: *kirill-formulist@mail.ru*

Received July 6, 2020

Abstract

Implementation an arbitrary Boolean function by a contact circuit with as little uniform width as possible was studied. In 1965, Kh.A. Madatyan framed the concept of contact circuit width. However, it does not always correspond to the intuitive view of width. In this regard, the concept of the uniform width of the contact circuit, which corresponds to the intuitive perception of width in a number of cases, was introduced in this paper. It was proved that every Boolean function can be implemented by a contact circuit with a uniform width of no more than 3.

Keywords: contact circuit, Boolean function, uniform width

Figure Captions

Fig. 1. Schema $S_{\oplus}^{n}$.

Fig. 2. Schema S_i.

References

1. Lupanov O.B. *Asimptoticheskie otsenki slozhnosti upravlyayushchikh sistem* [Asymptotic Complexity Bounds for Control Systems]. Moscow, Izd. Mosk. Univ., 1984. 138 p. (In Russian)
2. Shannon C.E. A symbolic analysis of relay and switching circuits. *Trans. AIEE*, 1938, vol. 57, pp. 713–723. doi: 10.1109/T-AIEE.1938.5057767.
3. Shannon C.E. The synthesis of two-terminal switching circuits. *Bell Syst. Tech. J.*, 1949, vol. 28, no. 1, pp. 59–98. doi: 10.1002/j.1538-7305.1949.tb03624.x.
4. Korshunov A.D. Computational complexity of Boolean functions. *Russ. Math. Surv.*, 2012, vol. 67, no. 1, pp. 93–165. doi: 10.1070/RM2012v067n01ABEH004777.
5. Madatyan Kh.A. Synthesis of contact circuits with bounded width. *Probl. Kibern.*, 1965, no. 14, pp. 301–307. (In Russian)
6. Karpova N.A. On computing with bounded memory. *Mat. Vopr. Kibern.*, 1989, no. 2, pp. 131–144. (In Russian)

7. Okol'nishnikova E.A. On the complexity of branching programs. *Mat. Vopr. Kibern.*, 2001, no. 10, pp. 69–82. (In Russian)

8. Lozhkin S.A. *Lektsii po osnovam kibernetiki* [Lectures on Principles of Cybernetics]. Moscow, Izd. Otd. Fak. VMiK MGU, 2004. 253 p. (In Russian)

9. Konovodov V.A. On synthesis of circuits with bounded width. *Materialy VIII molodezhnoi nauch. shk. po diskretnoi matematike i ee prilozheniyam* [Proc. VIII Youth Sci. Sch. on Discrete Mathematics and Its Applications]. Pt. 1. Moscow, Izd. Mekh.-Mat. Fak. MGU, 2011, pp. 37–41. (In Russian)

10. Kravtsov S.S. On the implementation of logic algebra functions in a single class of circuits consisting of functional and switching elements. *Probl. Kibern.*, 1967, no. 19, pp. 285–292. (In Russian)

11. Red'kin N.P. *Nadezhnost' i diagnostika skhem* [Reliability and Diagnostics of Circuits]. Moscow, Izd. Mosk. Univ., 1992. 192 p. (In Russian)

⟨ ***Для цитирования*:** *Попков К.А.* О реализации булевых функций контактными схемами равномерной ширины 3 // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2020. – Т. 162, кн. 3. – С. 350–358. – doi: 10.26907/2541-7746.2020.3.350-358. ⟩

⟨ ***For citation*:** Popkov K.A. On the implementation of Boolean functions by contact circuits with uniform width 3. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2020, vol. 162, no. 3, pp. 350–358. doi: 10.26907/2541-7746.2020.3.350-358. (In Russian) ⟩