УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 148, кн. 2 Физико-математические науки *2006*

УДК 532.529.6

АНАЛИЗ ОСОБЫХ ТОЧЕК УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ В ЗАДАЧЕ АСПИРАЦИИ АЭРОЗОЛЯ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ПРОБООТБОРНИК

М.В. Ванюнина, Ш.Х. Зарипов, Э.В. Скворцов

Аннотация

Проведен анализ особых точек уравнений движения частиц в окрестности цилиндрического пробоотборника при аспирации из неподвижного и подвижного воздуха. Аналитически и численно исследованы зависимости координат особых точек от скорости гравитационного осаждения, относительного размера входной щели и угла ориентации пробоотборника относительно направления ветра и направления силы тяжести. Получены критерии существования в области решения одной и двух особых точек. Показано, что количество особых точек не зависит от наличия ветрового потока.

Введение

Поведение траекторий аэрозольных частиц при обтекании различных тел или при аспирации в пробоотборники в значительной степени определяется наличием особых точек уравнений движения частиц в области решения. Под особой или стационарной точкой понимается точка, в которой скорость частицы и ее производная равны нулю. Появление особых точек качественно меняет картину поведения траекторий в области течения, приводя к их ветвлению в этих точках. Знание координат особых точек, их зависимость от различных параметров течения (геометрии, скорости гравитационного оседания, мощности стока и т. д.) важны для понимания картины траекторий и правильного прогнозирования интегральных характеристик при обтекании тел запыленными потоками или аспирации аэрозоля.

Анализ особых точек уравнений движения аэрозольных частиц для ряда простых течений в приближении потенциальной жидкости (точечный сток, гиперболический поток) проведен в работах [1, 2]. В работе [3] приводится анализ особых точек уравнений движения частиц при аспирации аэрозоля из неподвижного воздуха в сферический пробоотборник. Исследованы их положения в зависимости от скорости седиментации и угла ориентации пробоотборника. Указано, что расположение особой точки вне сферической головной части пробоотборника свидетельствует о подсосе воздуха без частиц. В данной статье подобное исследование обобщается для задачи аспирации аэрозоля из движущегося воздуха на примере цилиндрического пробоотборника.

1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу об аспирации аэрозоля в идеализированный цилиндрический пробоотборник с одиночным щелевым отверстием, ориентированным под различными углами относительно направления силы тяжести и направления ветра (рис. 1). Обозначим через α угол между обратным направлением оси Ox и

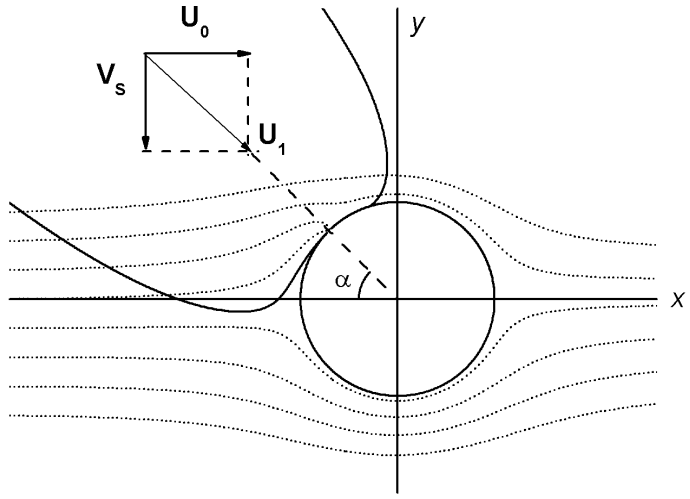

Рис. 1. Схема течения аэрозоля при аспирации в цилиндрический пробоотборник

линией, соединяющей центр отверстия с началом координат. Вдали от цилиндра газ движется с постоянной скоростью $\bar{U}_0$, а частицы перемещаются по направлению, задаваемому начальным вектором скорости $\bar{U}_1 = \bar{U}_0 + \bar{V}_S$, где $\bar{V}_s = \tau\bar{g}$ – скорость седиментации, $\bar{g}$ – вектор ускорения свободного падения, $\tau = \rho_p d^2/18\mu$ – время релаксации, ρ_p – плотность частицы, d – диаметр частицы, μ – динамическая вязкость. Часть частиц улавливается пробоотборником. На рис. 1 сплошными кривыми изображены предельные траектории, отделяющие поток аспирируемых частиц. Штриховыми кривыми показаны линии тока течения газа. Определение изменения средней концентрации частиц при аспирации в пробоотборник составляет основную задачу теории пробоотбора аэрозоля.

Двумерное течение через щелевое отверстие моделируется течением, создаваемым одиночным точечным стоком на цилиндрической поверхности [4]. Пусть одиночный сток мощностью q расположен на поверхности цилиндра в точке $e^{(\pi-\alpha)i}$ в системе безразмерных координат $(x,\ y)$. В качестве масштаба длины и скорости выбирается радиус цилиндра r_0 и скорость аспирации U_a (средняя скорость во входном отверстии). Для отверстия шириной $2H$ скорость аспирации определяется как $U_a = q/2H$.

Комплексный потенциал рассматриваемого течения в безразмерной форме может быть записан как

$$w(z) = a\left(z + \frac{1}{z}\right) - \frac{q}{2\,\pi\,r_0\,U_a}\ln\frac{\left(z - e^{(\pi-\alpha)i}\right)^2}{z}, \tag{1}$$

где $z = x + iy$, $a = U_0/U_a$.

С учетом (1) комплексно-сопряженная скорость dw/dz представляется в виде

$$\frac{dw}{dz} = a\left(1 + \frac{1}{z^2}\right) - \frac{h}{\pi}\left(\frac{2}{z - e^{(\pi-\alpha)i}} - \frac{1}{z}\right), \tag{2}$$

где $h = H/r_0 \ll 1$.

Выделив действительную и мнимую части в (2), запишем выражения для безразмерных составляющих скорости несущей среды $u_x = \mathrm{Re}\,(dw/dz)$, $u_y =$

$= -\operatorname{Im}(dw/dz)$:

$$
\begin{aligned}
u_x &= a\left(1-\frac{x^2-y^2}{r^4}\right)+\frac{h}{\pi}\left[\frac{x}{r^2}-\frac{2(x+\cos\alpha)}{r^2+2(x\cos\alpha-y\sin\alpha)+1}\right],\\
u_y &= -a\frac{2xy}{r^4}+\frac{h}{\pi}\left[\frac{y}{r^2}-\frac{2(y-\sin\alpha)}{r^2+2(x\cos\alpha-y\sin\alpha)+1}\right],
\end{aligned}
\tag{3}
$$

где $r^2 = x^2 + y^2$.

Уравнения движения невзаимодействующих аэрозольных частиц с учетом силы аэродинамического сопротивления в приближении Стокса и силы тяжести могут быть записаны в форме [5]:

$$
\begin{aligned}
&\frac{dv_x}{dt}=\frac{u_x-v_x}{\mathrm{St}},\quad \frac{dv_y}{dt}=\frac{u_y-v_y-v_s}{\mathrm{St}},\\
&\frac{dx}{dt}=v_x,\quad \frac{dy}{dt}=v_y,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где v_x, v_y – безразмерные декартовы составляющие скорости частицы, t – безразмерное время, $\mathrm{St} = \tau U_a/r_0$ – число Стокса, $v_s = V_s/U_a$.

2. Анализ местоположения особых точек

Так как особые точки являются стационарными точками покоя, для определения их координат приравняем нулю правые части уравнений (4):

$$
u_x = 0,\quad u_y = v_s,\quad v_x = 0,\quad v_y = 0. \tag{5}
$$

Введем величины $A = a\pi/h$ и $V = v_s\pi/h$. Из (5) получим систему нелинейных алгебраических уравнений для координат особых точек x, y при заданных значениях A, V и α:

$$
\begin{aligned}
&A\left(1-\frac{x^2-y^2}{r^4}\right)+\frac{x}{r^2}-\frac{2(x+\cos\alpha)}{r^2+2(x\cos\alpha-y\sin\alpha)+1}=0,\\
&-A\frac{2xy}{r^4}+\frac{y}{r^2}-\frac{2(y-\sin\alpha)}{r^2+2(x\cos\alpha-y\sin\alpha)+1}=V.
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Проведем исследование решений системы (6) в зависимости от A, V и α. Проанализируем решение (6) при $r = 1$, то есть возможность появления особых точек на границе цилиндра Γ. Умножая первое уравнение системы на x, второе на y и суммируя их, получим

$$
x = \pm 1,\quad y = 0.
$$

Решения $x = 1$, $y = 0$ и $x = -1$, $y = 0$ достигаются при $V = \operatorname{tg}\alpha/2$ и $V = \operatorname{ctg}\alpha/2$ соответственно. Так как $V \geqslant 0$, то при $\alpha < 0$ на границе цилиндра Γ особые точки появиться не могут. При $\alpha = 0$ и $V = 0$ на Γ имеется особая точка с координатами $(1, 0)$, а при $\alpha = 0$ и $V > 0$ особых точек нет. При $\alpha = \pi$ и $V = 0$ на Γ имеется особая точка с координатами $(-1, 0)$, если $\alpha = \pi$ и $V > 0$, то особых точек нет. Для углов ориентации пробоотборника $0 < \alpha < \pi$ на границе цилиндра могут быть две особые точки с координатами $(1, 0)$ и $(-1, 0)$ при $V = \operatorname{tg}\alpha/2$ и $V = \operatorname{ctg}\alpha/2$ соответственно.

Изучим положение особых точек уравнений движения частиц в области вне цилиндра ($r > 1$) для случая неподвижной среды ($A = 0$) при трех углах $\alpha = \pi$; $\pi/2$; $-\pi/2$. Представим уравнения (6) в виде

$$\begin{gathered} -2y(y\cos\alpha + x\sin\alpha) = x(r^2-1), \\ (r^2-1)(1+Vy) = 2Vy(-x\cos\alpha + y\sin\alpha - 1). \end{gathered} \tag{7}$$

Из (7) при $\alpha = \pi$ получим, что координаты особых точек связаны соотношениями

$$y = -\sqrt{\frac{x(x^2-1)}{2-x}}, \quad 1 < x < 2. \tag{8}$$

Величина V при этом определится из уравнения

$$V = \frac{1}{2x-1}\sqrt{\frac{(x+1)(2-x)}{x(x-1)}}, \quad 1 < x < 2.$$

При угле $\alpha = \pi/2$ система (7) примет вид

$$\begin{gathered} -2xy = x(r^2-1), \\ (r^2-1)(1+Vy) = 2Vy(y-1). \end{gathered} \tag{9}$$

При $x \neq 0$ при условии $3 - 2\sqrt{2} < V < 1$ из (9) получим

$$y = \frac{V-1}{2V}, \quad x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{6V-1-V^2}}{2V}. \tag{10}$$

Из (10) следует, что особые точки лежат на дуге окружности $x^2 + (y+1)^2 = 2$.

Анализ уравнений (9) показывает, что при условии $0 < V \leqslant 3 - 2\sqrt{2}$ имеются две особые точки с координатами

$$\begin{gathered} x = 0, \quad y = \frac{V-1+\sqrt{V^2-6V+1}}{2V}, \\ x = 0, \quad y = \frac{V-1-\sqrt{V^2-6V+1}}{2V}. \end{gathered} \tag{11}$$

В случае пробоотборника, ориентированного отверстием вниз ($\alpha = -\pi/2$), особые точки находятся на прямой $x = 0$, а их ординаты определяются формулой

$$y = -\frac{1+V+\sqrt{V^2+6V+1}}{2V}, \quad 0 < V < \infty. \tag{12}$$

При углах $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi$ особые точки располагаются симметрично относительно оси y. Дальнейшее исследование положения особых точек при $A \neq 0$ и произвольной ориентации пробоотборника основывается на численном решении нелинейной системы (6), результаты которого согласуются с приведенным выше анализом.

Положения особых точек в случае неподвижной среды ($A = 0$) для различных значений V показаны на рис. 2. Кривые, соответствующие различным значениям V, получены вариацией угла α.

С уменьшением параметра V кривая, образуемая особыми точками, расширяется, приобретая приталенную форму при $V = 0.2$. При значении $V = 3 - 2\sqrt{2}$

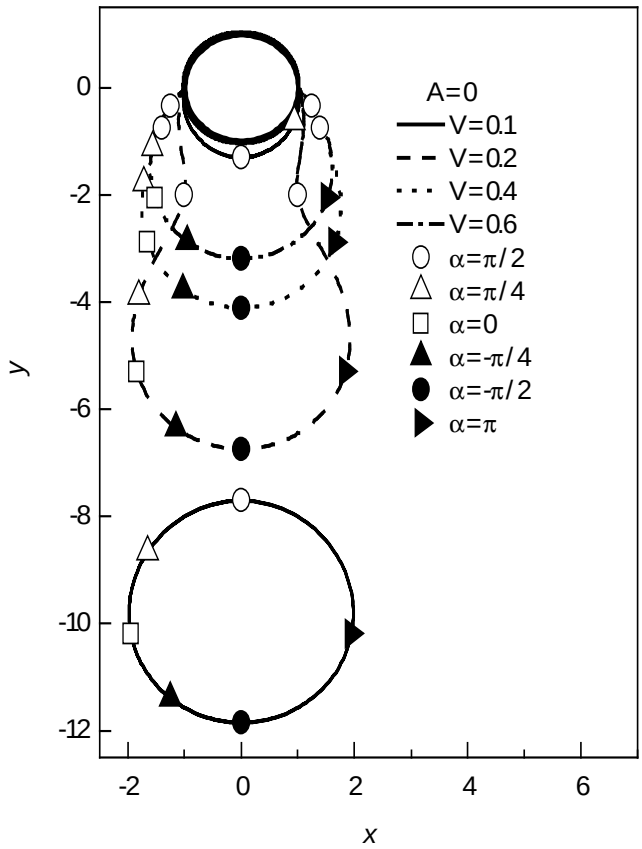

Рис. 2. Положения особых точек вокруг пробоотборника при $A = 0$

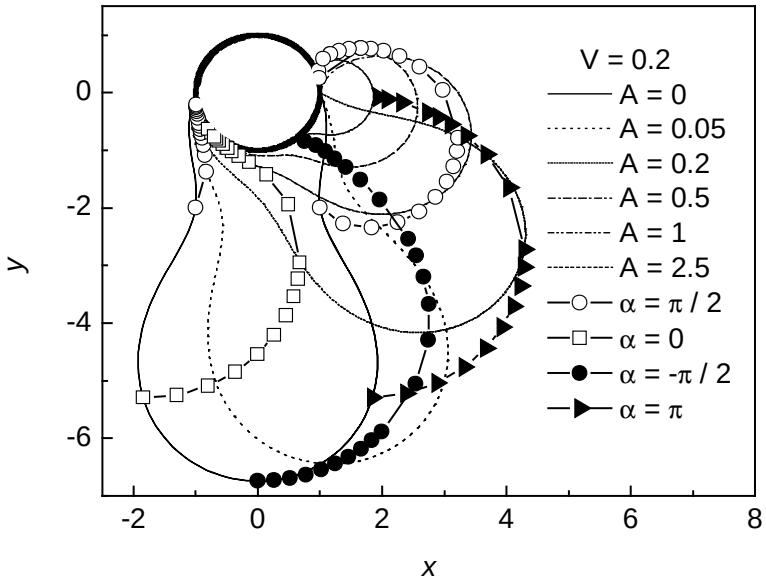

Рис. 3. Положение особых точек вокруг пробоотборника при слабом ветре A и $V = 0.2$

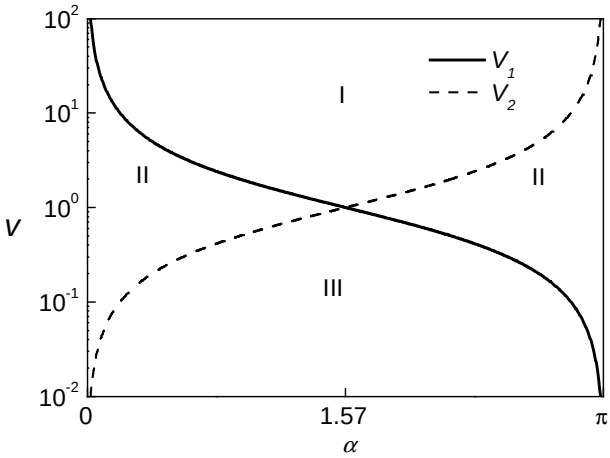

Рис. 4. Характерные области в плоскости $(V,\ \alpha)$

множество особых точек разделяется на две кривые, одна из которых прилегает к цилиндру, а вторая, близкая по форме к окружности, находится на некотором удалении от цилиндра. На рис. 2 показаны соответствующие кривые для $V = 0.1$. Нижние положения особых точек на замкнутых кривых при выбранном V соответствуют положению пробоотборника отверстием вниз $(\alpha = -\pi/2)$. С увеличением угла α и параметра V особые точки располагаются ближе к пробоотборнику.

Полученные из решения системы (6) кривые, образуемые особыми точками в случае подвижной среды, приведены на рис. 3 для $V = 0.2$. Замкнутые кривые, соответствующие различным значениям A, получены вариацией угла α. Кривые особых точек при варьировании A для некоторых углов α показаны линиями с метками. С увеличением значения A особые точки начинают смещаться по потоку, приближаясь к цилиндру. При $A = 2.5$ особые точки преимущественно располагаются за пробоотборником.

Как было показано выше, существуют критические значения параметра V и угла α, соответствующие положению особых точек на цилиндре $(x = \pm 1,\ y = 0)$:

$$V_1 = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}, \quad V_2 = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}. \tag{13}$$

Графики функций (13) при $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$ представлены на рис. 4. В плоскости $(V,\ \alpha)$ можно выделить три характерные области: I – $V > V_1$ $(0 < \alpha < \pi/2)$, $V > V_2$ $(\pi/2 < \alpha < \pi)$ – особые точки вне цилиндра отсутствуют; II – $V_2 < V \leqslant V_1$ $(0 < \alpha < \pi/2)$, $V_1 < V \leqslant V_2$ $(\pi/2 < \alpha < \pi)$ – существует единственная особая точка, лежащая за пределами цилиндра; III – $V \leqslant V_2$ $(0 < \alpha < \pi/2)$, $V \leqslant V_1$ $(\pi/2 < \alpha < \pi)$ – существуют две особые точки. Отметим, что наличие ветрового потока не влияет на количество особых точек, которое определяется только параметром V и углом наклона пробоотборника α.

Область вокруг цилиндрического пробоотборника в общем случае может быть разделена на четыре характерные зоны: зона траекторий аспирируемых частиц, зона траекторий частиц, которые оседают на цилиндре, зона траекторий частиц, проходящих мимо пробоотборника, и зона, не занятая частицами. В качестве примера на рис. 5–6 показаны траектории частиц аэрозоля в окрестности пробоотборника для двух углов α. Положения особых точек выделены черными кружками и отмечены буквой P. Траектории, проходящие через особую точку, отделяют зону

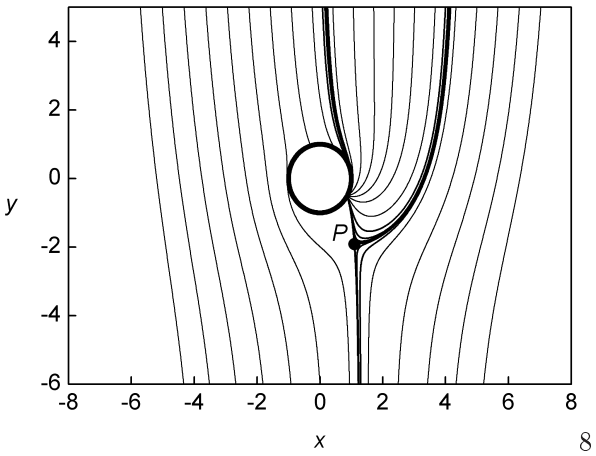

Рис. 5. Картина траекторий частиц при $\alpha = 7\pi/6$, $\mathrm{St} = 1$, $V = 0.1$, $A = 0$

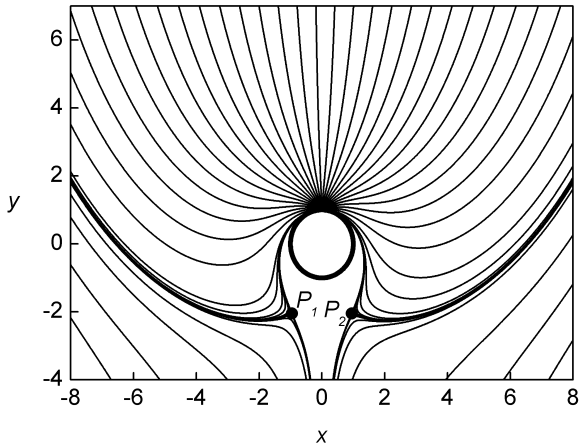

Рис. 6. Картина траекторий аэрозольных частиц при $\alpha = \pi/2$, $\mathrm{St} = 0.1$, $V = 0.2$, $A = 0$

аспирируемых частиц от зоны частиц, проходящих мимо пробоотборника. В результате экранирования падающих частиц цилиндром под ним возникает зона, не занятая частицами. Если данная зона достигает входного отверстия, происходит дополнительный забор воздуха без частиц, уменьшающий концентрацию частиц в пробоотборнике, вследствие чего коэффициент аспирации становится меньшим единицы даже для безинерционных частиц. Этот эффект проявляется, когда особая точка лежит в области потока $r > 1$, то есть за пределами пробоотборника.

Заключение

Проведен анализ особых точек уравнений движения частиц в окрестности цилиндрического пробоотборника. Исследованы зависимости координат особых точек от скорости гравитационного осаждения и угла ориентации пробоотборника относительно направления ветра и направления силы тяжести. Получены критерии существования в области решения одной и двух особых точек и показано, что наличие ветрового потока не влияет на количество особых точек. Знание положения особых точек облегчает анализ топологии траекторий аэрозольных частиц. В част-

ности, присутствие особых точек в области потока за пределами пробоотборника указывает на явление дополнительного отбора воздуха из зоны без частиц.

Работа посвящается светлой памяти Равиля Саидовича Галеева, ведущего научного сотрудника НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарева Казанского государственного университета. Равиль Саидович безвременно ушел из жизни летом этого года. Он был признанным специалистом в области механики жидкости и газа. В последние годы Равиль Саидович активно участвовал в решении задач, связанных с течениями аэрозоля, и был инициатором наших исследований особых точек уравнений движения частиц в задачах аспирации. В нашей памяти навсегда останется совместная научная работа с ярким и талантливым ученым.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 05-01-00794).

Summary

M.V. Vanyunina, S.K. Zaripov, E.V. Skvortsov. Study of singular points of motion equations of aerosol particles for problem of aspiration into cylindrical sampler.

The results of the study of singular points of motion equation of aerosol particles in the vicinity of cylindrical sampler at the aspiration from calm and moving air are presented. The coordinates of singular points as a function of settling velocity, relative size of input orifice and angle of sampler orientation relatively to wind and gravity force directions are investigated analytically and numerically. The criterions of existence of one or two singular points in the solution region are obtained. It is shown that the number of singular points doesn't depend on the wind flow.

Литература

1. *Левин Л.М.* Исследования по физике грубодисперсных аэрозолей. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – 268 с.
2. *Волощук В.М.* Введение в гидродинамику грубодисперсных аэрозолей. – Л.: Гидрометеоиздат, 1971. – 208 с.
3. *Galeev R.S., Zaripov S.K.* Theoretical study of aerosol sampling by an idealised sampler in calm air // J. Aerosol Sci. – 2003. – V. 34, No 9. – P. 1135–1150.
4. *Dunnett S.J., Ingham D.B.* The mathematics of blunt body sampling. – Springer, 1988.
5. *Ванюнина М.В., Галеев Р.С., Зарипов Ш.Х., Скворцов Э.В.* Аспирация аэрозоля в цилиндрический пробоотборник из низкоскоростного нисходящего потока и из неподвижной среды // Прикл. механика и техн. физика. – 2005. – Т. 46, № 2. – С. 122–129.

Поступила в редакцию
14.06.06

Ванюнина Марина Валерьевна – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарева Казанского государственного университета.

E-mail: *mvanioun@ksu.ru*

Зарипов Шамиль Хузеевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры моделирования экосистем Казанского государственного университета.

E-mail: *Shamil.Zaripov@ksu.ru*

Скворцов Эдуард Викторович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой моделирования экосистем Казанского государственного университета.

E-mail: *Eduard.Skvortsov@ksu.ru*