УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2017, Т. 159, кн. 3 ISSN 2541-7746 (Print)
С. 296–305 ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 510.5

СПЕКТР ОТНОШЕНИЯ БЛОКА 1-ВЫЧИСЛИМЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПОРЯДКОВ

Р.И. Бикмухаметов, М.С. Еряшкин, А.Н. Фролов

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

Работа посвящена исследованию внутренне вычислимо перечислимых отношений на линейных порядках, таких как отношение соседства на вычислимых линейных порядках и отношение блока на 1-вычислимых линейных порядках. Для удобства изложения линейные порядки, сигнатура которых обогащена отношением соседства, называются 1-вычислимым линейным порядком. Этот термин согласуется с известными результатами.

Доказывается, что для каждого $\mathbf{0}'$-вычислимого линейного порядка L существует 1-вычислимый линейный порядок, спектр отношения блока которого совпадает с Σ^0_1-спектром линейного порядка L. Спектром отношения блока линейного порядка R называется класс тьюринговых степеней образа отношения блока на вычислимых представлениях R, а Σ^0_1-спектром линейного порядка L – класс тьюринговых перечислимых степеней представлений L.

Этот результат позволяет получить ряд примеров спектров отношения блока 1-вычислимых линейных порядков. В частности, класс всех перечислимых n-высоких степеней и класс всех перечислимых степеней, не являющихся n-низкими, реализуются спектрами отношения блока некоторых 1-вычислимых линейных порядков.

Ключевые слова: линейные порядки, 1-вычислимость, отношение блока, отношение соседства, спектр отношения, внутренне вычислимо перечислимые отношения

Введение

В настоящей работе изучаются внутренне вычислимые и внутренне перечислимые отношения на вычислимых алгебраических структурах и, в частности, на линейных порядках. Алгебраическая структура с конечной сигнатурой называется *вычислимой*, если основное множество и все отношения и функции структуры вычислимы. В частности, линейный порядок вычислим, если его основное множество и отношение порядка вычислимы. Отношение на вычислимой структуре называется *внутренне вычислимым* или *внутренне перечислимым*, если оно является вычислимым или, соответственно, перечислимым в любом вычислимом представлении этой структуры (аналогично определяются внутренне Σ_n-отношения).

Исследования внутренне вычислимых и внутренне перечислимых отношений берут свое начало с работы 1981 года К. Эша и А. Нероуда [1] и продолжаются в большом количестве работ различных авторов. Например, здесь можно выделить работу Д. Хиршфельдта [2], которая несет в себе ценность как самостоятельной большой исследовательской работы, так и обзорной, в которой собрано большинство известных на тот момент результатов в этом направлении исследований.

Самым естественным отношением на линейном порядке является отношение соседства. Два элемента линейного порядка называются *соседними*, если между ними нет другого элемента этого порядка. Исследования алгоритмических свойств отношения соседства имеет широкий спектр применения. Например, А.Н. Фролов [3] и

А. Монталбан [4] независимо доказали, что линейный порядок имеет низкое представление тогда и только тогда, когда он имеет $\mathbf{0}'$-вычислимое представление с $\mathbf{0}'$-вычислимым отношением соседства. Дж. Реммел [5] показал, что вычислимый линейный порядок является вычислимо категоричным тогда и только тогда, когда он имеет лишь конечное число соседних элементов.

Очевидно, что дополнение отношения соседства является внутренне перечислимым отношением. М. Мозес [6] показал, что линейный порядок имеет внутренне вычислимое отношение соседства тогда и только тогда, когда порядок содержит лишь конечное число пар соседних элементов. Д. Хиршфельдт [7] доказал, что отношение соседства либо внутренне вычислимо, либо его спектр бесконечен. А.Н. Фролов [8] обобщил предыдущий результат, показав, что либо отношение соседства вычислимого линейного порядка внутренне вычислимо, либо спектр отношения соседства содержит в точности все перечислимые степени[1]. Понятие спектра отношений вычислимых алгебраических структур введено В. Харизановой [10] и сейчас является широко используемым понятием.

Определение 1. Спектром отношения P вычислимой алгебраической структуры $\mathcal{A}$ называется класс $\mathrm{DgSp}_{\mathcal{A}}(P) = \{\deg_T(P_{\mathcal{B}}) \mid (\exists \mathcal{B} \cong \mathcal{A})\,(\mathcal{B} \equiv_T \emptyset)\}$.

М. Мозес [11] показал, что линейный порядок является 1-вычислимым тогда и только тогда, когда сам порядок и его отношение соседства вычислимы. Линейный порядок называется 1-*вычислимым* (или 1-разрешимым), если все формулы над его сигнатурой с одним квантором равномерно вычислимы. Таким образом, все внутренне перечислимые отношения, а также их дополнения, заданные формулой над сигнатурой линейного порядка, вычислимы относительно отношения соседства.

Другим естественным отношением на линейном порядке является отношение блока. Говорим, что два элемента находятся в *отношении блока*, если между ними лишь конечное число элементов. Отношение блока (вместе с отношением соседства) используется в описании 2-низких линейных порядках, это отношение играет особенную роль в описании 2-низких дискретных, квазидискретных и разреженных линейных порядках (см., например, [12–14]).

В работах [15–20] изучались вопросы алгоритмической независимости естественных отношений вычислимых линейных порядков, в том числе и отношений соседства и блока.

Отметим, что отношение блока является внутренне Σ_2-отношением. М. Мозес в [6] показал, что линейный порядок имеет внутренне вычислимое отношение блока тогда и только тогда, когда порядок содержит конечное число точек, интервалы между которыми либо пусты, либо имеют тип η, ω или ω^*.

В настоящей работе рассматриваются вычислимые линейные порядки, сигнатура которых обогащена отношением соседства, которое также является вычислимым. Другими словами, рассматриваются вычислимые алгебраические структуры с двумя бинарными отношениями, первое из которых является отношением линейного порядка, а второе – отношением соседства, согласованным с отношением

[1]На самом деле в работе [8] показано, что спектр отношения соседства замкнут наверх в классе перечислимых степеней для широкого класса вычислимых линейных порядков. Еще один пример класса порядков, спектр отношения соседства которого замкнут наверх в перечислимых степенях получен в [9]. Вопрос о замкнутости наверх в классе перечислимых степеней спектра отношения соседства произвольного вычислимого линейного порядка с бесконечным числом пар соседних элементов остается открытым. К сожалению, следующая работа Р.Доуни, Ш.Лемпп, Г.Ву, дающая положительный ответ на поставленный вопрос, содержит неустранимую ошибку: *Downey R., Lempp S., Wu G.* On the complexity of the successivity relation in computable linear orderings // J. Math. Log. – 2010. – V. 10. – P. 83–100.

порядка. Такие вычислимые обогащенные порядки будем называть 1-*вычислимыми линейными порядками*, что согласовывается с вышеприведенным результатом М. Мозеса [11].

Очевидно, что отношение блока 1-вычислимого линейного порядка является внутренне перечислимым отношением. М. Мозес [6] получил также описание 1-вычислимых линейных порядков, отношение блока которых является внутренне вычислимым. А именно показано, что 1-вычислимый линейный порядок имеет внутренне вычислимое отношение блока тогда и только тогда, когда порядок содержит конечное число точек, интервалы между которыми либо пусты, либо являются сильно η-схожими, либо имеют тип ω, ω^* или $\omega+\omega^*$. Линейный порядок называется *сильно η-схожим*, если существует некоторое натуральное число k такое, что если два элемента находятся в отношении блока, то количество элементов между ними не превосходит k.

В настоящей работе также показывается, что для каждого $\mathbf{0}'$-вычислимого линейного порядка L существует 1-вычислимый линейный порядок, спектр отношения блока которого совпадает с Σ^0_1-спектром порядка L. Этот результат позволяет получить ряд примеров спектров отношения блока 1-вычислимых линейных порядков. Впервые ограниченные спектры на линейных порядках ввел Р. Миллер [21], им был построен пример Δ^0_2-спектра, содержащего в точности все ненулевые степени. Затем А.Н. Фролов [22] построил вычислимые линейные порядки, чьи Δ^0_2-спектры состоят в точности из всех n-высоких Δ^0_2-степеней и всех Δ^0_2-степеней, не являющихся n-низкими, для любого наперед заданного натурального n. Впервые Σ^0_1-спектр использовался в [23] для исследования спектров отношения соседства, примеры построенных в настоящей работе спектров будут приведены ниже.

Определение 2. Σ^0_1-спектром линейного порядка L называется класс $\mathrm{Spec}^{\Sigma^0_1}(L) = \mathrm{Spec}(L) \bigcap \Sigma^0_1$. Другими словами,

$$\mathrm{Spec}^{\Sigma^0_1}(L) = \{\deg_T(\widetilde{L}) \in \Sigma^0_1 \mid \widetilde{L} \cong L\}.$$

1. Спектр отношения блока 1-вычислимых линейных порядков

В данном разделе докажем, что для каждого $\mathbf{0}'$-вычислимого линейного порядка $\mathcal{A}$ существует 1-вычислимый линейный порядок $\mathcal{B}$, спектр отношения блока которого совпадает с Σ^0_1-спектром линейного порядка $\mathcal{A}$. Для этого необходимо следующие предложение и лемма.

Предложение 1. *Пусть $\mathcal{L}$ – 1-вычислимый линейный порядок вида $\zeta\cdot\mathcal{B}$ для некоторого бесконечного линейного порядка $\mathcal{B}$. Тогда спектр отношения блока замкнут наверх в перечислимых степенях.*

Доказательство. Зафиксируем перечислимое множество A такое, что $F_{\mathcal{L}} \leq_T A$. Пусть A_s – эффективное перечисление множества A, то есть $A_s \subseteq A_{s+1}$ и $A = \bigcup\limits_{s\in\mathbb{N}} A_s$. Построим вычислимый линейный порядок $R \cong \mathcal{L}$ такой, что $F_R \equiv_T A$. Для этого в конструкции строится f – функция изоморфизма из $\mathcal{L}$ в R.

Основная идея кодирования множества A в линейный порядок R заключается в построении последовательности (a^x_s, b^x_s) такой, что $x \notin A$ тогда и только тогда, когда $\exists s \neg F_R(a^x_s, b^x_s)$. В этом случае множество A является перечислимым относительно F_R и, следовательно, $A \leq_T F_R$. На каждом шаге конструкции будем строить конечный линейный порядок R_s и изоморфизм

$$f_s : L_s = (|L_s|, <_{\mathcal{L}}) \to R_s = (|R_s|, <_R).$$

Обозначим

$$F_{s,L}(x,y) = \mathrm{Succ}_L(x,y) \vee (\exists x_1, \dots, x_n \in L_s)(\mathrm{Succ}_L(x,x_1)\,\& \\ \&\,\mathrm{Succ}_L(x_1,x_2)\,\&\,\cdots\&\mathrm{Succ}_L(x_n,y)).$$

Тогда отношение $P_s(x,y) = F_{s,L}(x,y) \vee F_{s,L}(y,x)$ задает отношение эквивалентности на множестве L_s. Таким образом, множество $|L_s|$ является объединением попарно непересекающихся классов эквивалентности. Обозначим через $[a]_s$ класс эквивалентности на шаге s, содержащий элемент a.

Конструкция порядка R.

Шаг $s = 0$. Пусть $R = \emptyset$, $f_0 = \emptyset$ и все наборы (a_0^x, b_0^x) не определены.

Шаг $s+1$. Предположим, что на шаге s уже определены наборы (a_s^x, b_s^x) для любого $x < s$ и построены конечный линейный порядок R_s и изоморфизм $f_s : L_s = (|L_s|, <_{\mathcal{L}}) \to R_s = (|R_s|, <_R)$ такие, что

a) $\{0, 1, \dots, s\} \subseteq |L_s|$ и $\{0, 1, \dots, s\} \subseteq |R_s|$;

b) $a_s^x <_R b_s^x$;

c) пары элементов $(f^{-1}(a_s^x), f^{-1}(b_s^x))$ лежат в различных классах эквивалентности L_s тогда и только тогда, когда $x \notin A_s$.

Пусть $x \in L$. Под *добавлением элемента* x *в* L_{s+1} будем понимать следующую процедуру. Найдем такие y, $z \in L_{s+1}$, что $y <_L x <_L z$ и $\neg(y <_L c <_L z)$ для всех $c \in L_s$. Выберем наименьшее натуральное число d, еще не использованное в построении R_{s+1}, и поместим его между элементами $f_{s+1}(y)$ и $f_{s+1}(z)$. Добавим элемент x в L_{s+1} и определим $f_{s+1}(x) = d$.

Под *добавлением нового элемента* будем понимать следующую конструкцию. Выберем наименьшее натуральное число $x \in |L|$, еще не перечисленное в $|L_{s+1}|$, и *добавим элемент* x.

Добавим новый элемент.

Выполним следующие действия последовательно для каждого $x < s$, начиная с 0. Назовем эту процедуру *циклом* x. В каждом цикле будем определять множество $I_{x,s+1} \subseteq |L|$.

Описание цикла x.

Определим $I_{<x,s+1} = \bigcup\limits_{y<x} I_{y,s+1}$, $I_{<0,s+1} = \emptyset$, где $I_{y,s+1}$ – множество, которое определяется на предыдущем цикле y.

Случай 1. Пусть $x \notin A_{s+1}$. Если в множестве $|L_{s+1}|$ не существует пары элементов (a,b) такой, что $a, b \notin I_{<x,s+1}$, $a < b$, $\neg(F_{s+1,L}(a,b))$ и $\neg(a < z < b)$ для любого $z \in I_{<x,s+1}$, то *добавляем новый элемент* и начинаем выполнение всех циклов сначала. В противном случае выберем наименьшую такую пару в множестве $|L_{s+1}|$ и обозначим её через a^x, b^x. Определим $(a_{s+1}^x, b_{s+1}^x) = (f_{s+1}(a^x), f_{s+1}(b^x))$. Определяем $I_{x,s+1} = [a^x]_{s+1} \bigcup [b^x]_{s+1} \bigcup [x]_{s+1}$.

Случай 2. Пусть $x \in A_{s+1}$. Если пара (a_s^x, b_s^x) не определена или между элементами $f^{-1}(a_s^x)$ и $f^{-1}(b_s^x)$ есть элементы из $I_{<x,s+1}$, то выбираем наименьшую пару элементов $a^x, b^x \in L_{s+1}$, лежащих в одном предблоке (если такой пары нет, то *добавляем новый элемент* и начинаем выполнение всех циклов сначала), определяем $a_{s+1}^x = f_{s+1}(a^x)$ и $b_{s+1}^x = f_{s+1}(b^x)$. Полагаем $I_{x,s+1} = [a^x]_{s+1}$.

Предположим, что пара (a_s^x, b_s^x) определена. Обозначим $a = f_{s+1}^{-1}(a_s^x)$, $b = f_{s+1}^{-1}(b_s^x)$. Если элементы a, b лежат в одном предблоке, то переходим к следующему циклу, полагая $I_{x,s+1} = I_{x,s} \bigcup [x]_{s+1}$, если $x \in A_s$, и $I_{x,s+1} = [a]_{s+1} \bigcup [x]_{s+1}$ в противном случае.

Пусть элементы a, b не лежат в одном классе эквивалентности. Заметим, что благодаря вычислимости отношения соседства на L для любого предблока можно эффективно найти правого соседа для крайнего правого элемента этого предблока, будем называть эти элементы правыми соседями предблока. Для каждого предблока, лежащего между предблоками $[a]_{s+1}, [b]_{s+1}$ и предблока $[a]_{s+1}$, найдем их правых соседей в L и *добавим их.* Обозначим $T = \{x \mid a < \ x, [x]_{s+1} \leq [b]_{s+1}\}$, $V = f_{s+1}(T)$. Найдем $|T|$ правых соседей элемента a и перечислим их в L_{s+1}. Обозначим $U = \{x \mid a < x, x \in [a]_{s+1}\}$.

Добавим $|U| + |T \setminus U| - |V|$ новых элементов в R_{s+1} между множеством V и соседним справа от V элементом и обозначим множество добавленных элементов через W. Изменим f_{s+1}, отобразив элементы из $U \bigcup T$ на $V \bigcup W$ с сохранением порядка. Определяем $a^x_{s+1} = a^x_s$, $b^x_{s+1} = b^x_s$ и $I_{x,s+1} = [a]_{s+1} \bigcup [x]_{s+1} \bigcup \bigcup\limits_{z \in T} [z]_{s+1}$.

Описание цикла x завершено. Определим $\mathrm{Succ}_R(x, y) = \mathrm{Succ}_L(f^{-1}_{s+1}(x), f^{-1}_{s+1}(y))$ для всех $x, y \in R_{s+1}$.

Описание шага $s + 1$ и конструкции порядка R завершено.

Заметим, что для каждого x пары (a^x_s, b^x_s) стабилизируются начиная с некоторого шага $s_0(x)$ (пара для x не стабилизируется, пока не стабилизируются пары для всех $y < x$), причем шаг $s_0(x)$ вычислим относительно оракула A. Так как $x \in I_{x,s}$ для каждого x, то для любого $s > s_0(x)$ и $y > x$ не могут быть выполнены неравенства $f^{-1}(a^y_s) < x < f^{-1}(b^y_s)$. Таким образом, подслучай случая 2, в котором изменяется f, не изменит значение f на x. Поэтому $f_s(x) = f_{s_0(x)}(x)$ для любого $s > s_0(x)$. Значит, *конструкция* R корректно определяет отображение f, вычислимое относительно оракула A. Причем в силу условия а) f является изоморфизмом. Так как f вычислимо относительно оракула A, то f^{-1} также вычислимо относительно оракула A. Таким образом, $F_R \leq_T A$.

Пусть $s_{-1} = 0$. Заметим, что $x \in A$ тогда и только тогда, когда $x \in A_{s_x}$, где шаг $s_x > s_{x-1}$ – наименьший такой, что либо $x \in A_{s_x}$, либо $\neg F_R(a^x_{s_x}, b^x_{s_x})$. Итак, множество A вычислимо относительно оракула F_R. Значит, $A \equiv_T F_R$. □

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{A}$ – линейный порядок, вычислимый относительно перечислимого множества X и $\deg(X) = \mathbf{x}$. Тогда существует $\mathbf{x}$-вычислимый линейный порядок $\mathcal{B} \cong \mathcal{A}$, лежащий в классе Π^0_1.*

Доказательство. Зафиксируем некоторую гёделеву нумерацию $\{q_0, q_1, \ldots\}$ рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Без ограничения общности предполагаем, что Δ^0_2-аппроксимация $\{A_s\}_{s \in \omega}$ универсума A линейного порядка $\mathcal{A}$ обладает свойством $A_0(q_i) = 0$ для всех i. Построение Π^0_1-представления $\mathcal{B}$ начинаем с копии $\mathbb{N} \times \mathbb{Q}$, упорядоченной по типу $\omega \cdot \eta$. В случае, если на шаге s для некоторого q_i имеем $A_s(q_i) = 0$, то удаляем все элементы вида (n, q_i) для $n \leq s$. В противном случае оставляем наименьший к началу шага s элемент вида (n, q_i) и удаляем следующий за ним по порядку. Очевидно, что построенный таким образом линейный порядок будет изоморфен $\mathcal{A}$.

Нетрудно видеть, что функция *наименьшего модуля*

$$m(q_i) = (\mu s)(\forall t \geq s)[A_t(q_i) = A(q_i)]$$

вычислима относительно множества X. Таким образом, элемент (n, q_i) принадлежит универсуму B линейного порядка $\mathcal{B}$ тогда и только тогда, когда $A(q_i) = 1$ и на шаге $m(q_i)$ выполнено $(B(n, q_i) = 1)\,\&\,(\forall k < n)(B(k, q_i) = 0)$.

Другими словами, линейный порядок $\mathcal{B}$ вычислим относительно множества X. □

Теорема 1. *Для каждого* $\mathbf{0}'$*-вычислимого линейного порядка* $\mathcal{A}$ *существует* 1*-вычислимый линейный порядок* $\mathcal{B}$*, спектр отношения блока которого совпадает с* Σ_1^0*-спектром линейного порядка* $\mathcal{A}$*. Другими словами, выполнено равенство* $\mathrm{DgSp}_{\mathcal{B}}(F) = \mathrm{Spec}^{\Sigma_1^0}(\mathcal{A})$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ является $\mathbf{0}'$-вычислимым линейным порядком. В [23] показано, если $\mathcal{L}$ является $\mathbf{0}'$-вычислимым линейным порядком, то $\zeta \cdot \mathcal{L}$ имеет вычислимое представление с вычислимым отношением соседства. Положим $\mathcal{B} = \zeta \cdot \mathcal{A}$.

Пусть $\mathbf{x} \in \mathrm{DgSp}_{\mathcal{B}}(F)$. Нетрудно видеть, что $\mathbf{x} \in \Sigma_1^0$ и $\mathbf{x}$ вычисляет некоторую копию $\tilde{\mathcal{A}}$ линейного порядка $\mathcal{A}$. Поскольку спектр линейного порядка замкнут наверх, то $\mathbf{x} \in \mathrm{Spec}^{\Sigma_1^0}(A)$.

Докажем обратное. Пусть $\mathbf{x} \in \mathrm{Spec}^{\Sigma_1^0}(A)$. Тогда $\mathbf{x} \in \Sigma_1^0$ и по лемме 1 существует $\mathbf{x}$-вычислимый, принадлежащий классу Π_1^0 линейный порядок $\mathcal{A}_1 \cong \mathcal{A}$. Аналогично [23] строим 1-вычислимый линейный порядок $\mathcal{B}_1 \cong \mathcal{B}$ в виде следующей суммы блоков $\sum\limits_{q_i \in A_1} V(q_i)$. До тех пор, пока $q_i \in A_{1,s}$, естественным образом строим блок $V(q_i)$ типа ζ. Если на некотором шаге $q_i \notin A_{1,s}$, то присоединяем блок $V(q_i)$ к ближайшему блоку $V(q_j)$, где $j < i$. Стандартные приоритетные рассуждения завершают конструкцию.

Заметим, что $F_{\mathcal{B}_1}(x, y)$ тогда и только тогда, когда для некоторого s элементы $x, y \in V_s(q_i)$ и выполнено $\{0, \ldots, i\} \bigcap A_1 = \{0, \ldots, i\} \bigcap A_{1,s}$. Таким образом, $\deg_T(F_{\mathcal{B}_1}) \le \mathbf{x}$. В силу предложения 1 имеем, что спектр отношения блока порядка $\mathcal{B}$ замкнут наверх в перечислимых степенях. Следовательно, существует 1-вычислимый линейный порядок $\mathcal{B}' \cong \mathcal{B}$ такой, что $\deg_T(F_{\mathcal{B}'}) = \mathbf{x}$. Значит, $\mathrm{DgSp}_{\mathcal{B}}(F) = \mathrm{Spec}^{\Sigma_1^0}(\mathcal{A})$. □

Следствие 1. *Для каждого натурального* n *существует* 1*-вычислимый линейный порядок* $\mathcal{A}$ *такой, что* $\mathrm{DgSp}_{\mathcal{A}}(F)$ *состоит в точности из всех* n*-высоких перечислимых степеней.*

Следствие 2. *Для каждого натурального* n *существует* 1*-вычислимый линейный порядок* $\mathcal{A}$ *такой, что* $\mathrm{DgSp}_{\mathcal{A}}(F)$ *состоит в точности из всех перечислимых степеней, не являющихся* n*-низкими.*

В работе [23] показано, что для каждого натурального n существуют вычислимые линейные порядки $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$ такие, что $\mathrm{Spec}^{\Sigma_1^0}(\mathcal{A}_1)$ состоит в точности из всех n-высоких перечислимых степеней, а $\mathrm{Spec}^{\Sigma_1^0}(\mathcal{A}_2)$ состоит в точности из всех перечислимых степеней, не являющихся n-низкими[2]. Отсюда непосредственно из теоремы 1 следуют оба следствия.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 15-41-02507 и 15-01-08252). Кроме того, исследования А.Н. Фролова поддержаны РФФИ (проект № 16-31-60077).

Литература

1. *Ash C.J., Nerode A.* Intrinsically recursive relations // Crossley J.N. (Ed.) Aspects of Effective Algebra. – U.D.A. Book Co., Steel's Greek, Australia, 1981. – P. 26–41.

[2] На самом деле в работе [24] показано, что при $n \ge 2$ можно выбрать такие вычислимые линейные порядки $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$, что $\mathrm{Spec}(\mathcal{A}_1)$ состоит в точности из всех n-высоких степеней (а не только перечислимых), а $\mathrm{Spec}(\mathcal{A}_2)$ состоит в точности из всех степеней (аналогично, не только перечислимых), не являющихся n-низкими.

2. *Hirschfeldt D.R.* Degree spectra of intrinsically c.e. relations // J. Symb. Logic. – 2001. – V. 66, No 2. – P. 441–469. – doi: 10.2307/2695024.

3. *Frolov A.N.* Linear orderings of low degrees // Sib. Math. J. – 2010. – V. 51, No 5. – P. 913–925.

4. *Montalban A.* Notes on the jump of a structure // Mathematical Theory and Computational Practice: 5th Conf. on Computability in Europe, CiE 2009 / Eds. K. Ambos-Spies, B. Löwe, W. Merkle. – Berlin: Springer-Verlag, 2009. – P. 372–378. (Lecture Notes in Computer Science, V. 5635.)

5. *Remmel J.B.* Recursively categorical linear orderings // Proc. Am. Math. Soc. – 1981. – V. 83, No 2. – P. 387–391.

6. *Moses M.* Relations intrinsically recursive in linear orders // Z. Math. Logik Grundlag. Math. – 1986. – Bd. 32. – S. 467–472.

7. *Hirschfeldt D.R.* Degree spectra of relations on computable structures in the presence of Δ_2^0 isomorphisms // J. Symb. Logic. – 2002. – V. 67, No 2. – P. 697–720.

8. *Frolov A.N.* Presentations of the successor relation of computable linear orderings // Russ. Math. – 2010. – No 7. – P. 64–74.

9. *Chubb J., Frolov A., Harizanov V.* Degree spectra of successivities of linear orderings // Arch. Math. Logic. – 2009. – V. 48, No 1. – P. 7–13.

10. *Harizanov V.* Degree spectrum of a recursive relation on a recursive structure: Ph.D. Thesis. – Madison, USA: University of Wisconsin, 1987. – 170 p.

11. *Moses M.* Recursive linear orders with recursive successivities // Ann. Pure Appl. Logic. – 1984. – V. 27, No 3. – P. 253–264. – doi: 10.1016/0168-0072(84)90028-9.

12. *Frolov A.N.* Low linear orderings // J. Logic Comput. – 2012. – V. 22, No. 4. – P. 745–754. – doi: 10.1093/logcom/exq040.

13. *Alaev P.E., Frolov A.N., Thurber J.* Computability on linear orderings enriched with predicates // Algebra Logic. – 2009. – V. 48, No 5. – P. 313–320.

14. *Frolov A.N.* Scattered linear orderings with no computable presentation // Lobachevskii J. Math. – 2014. – V. 35, No 1. – P. 19–22. – doi: 10.1134/S199508021401003X.

15. *Zubkov M.V.* Initial segments of computable linear orders with additional computable predicates // Algebra Logic. – 2009. – V. 48, No 5. – P. 321–329. – doi: 10.1007/s10469-009-9068-7.

16. *Turner W.P.* Computable linear orders and Turing reductions: Master's Thesis. – University of Connecticut, 2012.

17. *Bikmukhametov R.I.* Initial segments of computable linear orders with computable natural relations // Russ. Math. – 2016. – V. 60, No 6. – P. 12–20. – doi: 10.3103/S1066369X16060025.

18. *Bikmukhametov R.I.* Σ_2^0-initial segments of computable linear orders // Algebra Logic. – 2014. – V. 53, No 3. – P. 266–267. – doi: 10.1007/s10469-014-9288-3.

19. *Bikmukhametov R.I.* Codings on linear orders and algorithmic independence of natural relations // Lobachevskii J. Math. – 2014. – V. 35, No 4. – P. 326–331. – doi: 10.1134/S1995080214040131.

20. *Бикмухаметов Р.И.* Алгоритмическая независимость естественных отношений на вычислимых линейных порядках // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ-матем. науки. – 2013. – Т. 155, кн. 3. – С. 80–90.

21. *Miller R.* The Δ_2^0 spectrum of a linear ordering // J. Symb. Logic. – 2001. – V. 66. – P. 470–486.

22. *Frolov A.N.* Δ_2^0-copies of linear orderings // Algebra logic. – 2006. – V. 45, No 3. – P. 201–209.

23. *Frolov A.N.* A note on Δ_2^0-spectra of linear orderings and degree spectra of the successor relation // Russ. Math. – 2013. – V. 57, No 11. – P. 65–68. – doi: 10.3103/S1066369X13110078.

24. *Frolov A., Harizanov V., Kalimullin I., Kudinov O., Miller R.* Spectra of high$_n$ and non-low$_n$ degrees // J. Logic Comput. – 2012. – V. 22, No 4. – P. 745–754. – doi: 10.1093/logcom/exq041.

Поступила в редакцию
21.06.17

Бикмухаметов Равиль Ильдарович, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник кафедры алгебры и математической логики

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *ravil.bkm@gmail.com*

Еряшкин Михаил Сергеевич, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник кафедры алгебры и математической логики

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *mikhail.eryashkin@gmail.com*

Фролов Андрей Николаевич, доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник кафедры алгебры и математической логики

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *andrey.frolov@kpfu.ru*, *a.frolov.kpfu@gmail.com*

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

**UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)**

2017, vol. 159, no. 3, pp. 296–305

Degree Spectra of the Block Relation of 1-Computable Linear Orders

R.I. Bikmukhametov, M.S. Eryashkin**, A.N. Frolov****

Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia
E-mail: **ravil.bkm@gmail.com*, ***mikhail.eryashkin@gmail.com*, ****andrey.frolov@kpfu.ru*

Received June 21, 2017

Abstract

In this paper, we study the intrinsically computably enumerable relations on linear orderings, such as the successor relation on computable linear orderings and the block relation on 1-computable linear orderings. For ease of reading, the linear ordering , in which the signature is enriched with the successor relation, is called 1-computable linear ordering. This notion is consistent with the known results.

We have proved that for any $\mathbf{0}'$-computable linear ordering L there exists a 1-computable linear ordering, in which the degree spectrum of the block relation coincides with the Σ^0_1-spectrum of the linear ordering L. The degree spectrum of the block relation of a linear ordering R is called the class of Turing degrees of the images of the block relation on computable presentations of R; and Σ^0_1-spectrum of a linear ordering L is called the class of Turing enumerable degrees of L.

This obtained result provides a number of examples of the spectra of the block relation of 1-computable linear orderings. In particular, the class of all enumerable high$_n$ degrees and the class of all enumerable non-low$_n$ degrees are realized by the spectra of the block relation of some 1-computable linear orderings.

Keywords: linear orders, 1-computability, block relation, successivity relation, spectra of relations, intrinsically computably enumerable relations

Acknowledgments. This study was supported by the Russian Foundation for Basic Research (projects nos. 15-41-02507 and 15-01-08252). A.N. Frolov's investigations were supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-31-60077).

References

1. Ash C.J., Nerode A. Aspects of Effective Algebra. Crossley J.N. (Ed.). *Intrinsically Recursive Relations*. U.D.A. Book Co., Steel's Greek, Australia, 1981, pp. 26–41.

2. Hirschfeldt D.R. Degree spectra of intrinsically c.e. relations. *J. Symb. Logic*, 2001, vol. 66, no. 2, pp. 441–469. doi: 10.2307/2695024.

3. Frolov A.N. Linear orderings of low degrees. *Sib. Math. J.*, 2010, vol. 51, no. 5, pp. 913–925.

4. Montalban A. Notes on the jump of a structure. *Mathematical Theory and Computational Practice: 5th Conf. on Computability in Europe, CiE 2009*. Ambos-Spies K., Löwe B., Merkle W. (Eds.). Berlin, Springer-Verlag, 2009, pp. 372–378. (Lecture Notes in Computer Science, vol. 5635).

5. Remmel J.B. Recursively categorical linear orderings. *Proc. Am. Math. Soc.*, 1981, vol. 83, no. 2, pp. 387–391.

6. Moses M. Relations intrinsically recursive in linear orders. *Z. Math. Logik Grundlag. Math.*, 1986, Bd. 32, S. 467–472.

7. *Hirschfeldt D.R.* Degree spectra of relations on computable structures in the presence of Δ^0_2 isomorphisms. *J. Symb. Logic*, 2002, vol. 67, no. 2, pp. 697–720.

8. Frolov A.N. Presentations of the successor relation of computable linear orderings. *Russ. Math.*, 2010. no. 7, pp. 64–74.

9. Chubb J., Frolov A., Harizanov V. Degree spectra of successivities of linear orderings. *Arch. Math. Logic*, 2009, vol. 48, no. 1, pp. 7–13.

10. Harizanov V. Degree spectrum of a recursive relation on a recursive structure. *Ph.D. Thesis*. Madison, USA, Univ. of Wis., 1987. 170 p.

11. Moses M. Recursive linear orders with recursive successivities. *Ann. Pure Appl. Logic*, 1984, vol. 27, no. 3, pp. 253–264. doi: 10.1016/0168-0072(84)90028-9.

12. Frolov A.N. Low linear orderings. *J. Logic Comput.*, 2012, vol. 22, no. 4, pp. 745–754. doi: 10.1093/logcom/exq040.

13. Alaev P.E., Frolov A.N., Thurber J. Computability on linear orderings enriched with predicates. *Algebra Logic*, 2009, vol. 48, no. 5, pp. 313–320.

14. Frolov A.N. Scattered linear orderings with no computable presentation. *Lobachevskii J. Math.*, 2014, vol. 35, no. 1, pp. 19–22. doi: 10.1134/S199508021401003X.
15. Zubkov M.V. Initial segments of computable linear orders with additional computable predicates. *Algebra Logic*, 2009, vol. 48, no. 5, pp. 321–329. doi: 10.1007/s10469-009-9068-7.
16. Turner W.P. Computable linear orders and Turing reductions. *Master's Thesis*. Univ. of Conn., 2012.
17. Bikmukhametov R.I. Initial segments of computable linear orders with computable natural relations. *Russ. Math.*, 2016, vol. 60, no. 6, pp. 12–20. doi: 10.3103/S1066369X16060025.
18. Bikmukhametov R.I. Σ^0_2-initial segments of computable linear orders. *Algebra Logic*, 2014, vol. 53, no. 3, pp. 266–267. doi: 10.1007/s10469-014-9288-3.
19. Bikmukhametov R.I. Codings on linear orders and algorithmic independence of natural relations. *Lobachevskii J. Math.*, 2014, vol. 35, no. 4, pp. 326–331. doi: 10.1134/S1995080214040131.
20. Bikmukhametov R.I. Algorithmic independence of natural relations on computable linear orders. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta, Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2013, vol. 155. no. 3, pp. 80–90. (In Russian)
21. Miller R. The Δ^0_2 spectrum of a linear ordering. *J. Symb. Logic*, 2001, vol. 66, pp. 470–486.
22. Frolov A.N. Δ^0_2-copies of linear orderings. *Algebra Logic*, 2006, vol. 45, no. 3, pp. 201–209.
23. Frolov A.N. A note on Δ^0_2-spectra of linear orderings and degree spectra of the successor relation. *Russ. Math.*, 2013, vol. 57, no. 11, pp. 65–68. doi: 10.3103/S1066369X13110078.
24. Frolov A., Harizanov V., Kalimullin I., Kudinov O., Miller R. Spectra of high$_n$ and non-low$_n$ degrees. *J. Logic Comput.*, 2012, vol. 22, no. 4, pp. 745–754. doi: 10.1093/logcom/exq041.

***Для цитирования*:** *Бикмухаметов Р.И., Еряшкин М.С., Фролов А.Н.* Спектр отношения блока 1-вычислимых линейных порядков // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2017. – Т. 159, кн. 3. – С. 296–305.

***For citation*:** Bikmukhametov R.I., Eryashkin M.S., Frolov A.N. Degree spectra of the block relation of 1-computable linear orders. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2017, vol. 159, no. 3, pp. 296–305. (In Russian)