ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ КАЗАНСКИЙ(ПРИВОЛЖСКИЙ)ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

КАФЕДРА АЛГЕБРЫ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

Специальность: 010100 – Математика

Специализация: Математическая логика

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

(дипломная работа)

"Спектры импримитивных стохастических матриц"

Работа завершена:

«___»____________2015 г. _____________ Нургаянов А. А.

Работа допущена к защите:

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук, доцент

«___»____________2015 г. _____________ Альпин Ю. А.

Заведующий кафедрой:
доктор физико-математических наук, профессор

«___»____________2015 г. _____________ Арсланов М. М.

Казань — 2015

Содержание

1 Введение

Стохастическая матрица – это матрица с вещественными неотрицательными элементами и тем свойством, что сумма элементов каждой строки равна 1. Основные приложения стохастические матрицы имеют в теории цепей Маркова. Пусть $P = (p_{ij})$ – стохастическая матрица порядка n. Тогда элемент p_{ij} понимается как вероятность перехода марковской цепи из состояния i в состояние j за один шаг. Соответственно, элементы матрицы $P^k = (p_{ij}^{(k)})$ понимаются как вероятности перехода за k шагов. Поведение вероятностей $p_{ij}^{(k)}$ при $k \to \infty$ имеет важное значение в приложениях стохастических матриц. Это поведение зависит от собственных значений матрицы $P = (p_{ij})$.

В данной дипломной работе исследуются спектры стохастических матриц, то есть наборы их собственных значений, в которых каждое собственное значение включается столько раз, какова его кратность, как корня характеристического многочлена матрицы.

Вычисление спектра матрицы в общем случае, для произвольной комплексной матрицы, – это известная трудная задача линейной алгебры. Но для неотрицательных и, в частности, стохастических матриц существует теория, разработанная О. Перроном, Ф.Г. Фробениусом и В.И. Романовским [1], [2], [3] которая облегчает изучение спектров таких матриц.

В моей дипломной работе вначале излагаются, в переработанном виде, элементы теории неотрицательных и стохастических матриц из указанных выше источников. Сюда входит описание примитивных матриц и формы Фробениуса для импримитивных матриц. Главную роль в этом описании играют графы матриц, отображающие их комбинаторную структуру, то есть расположение в них ненулевых элементов. Вывод формы Фробениуса основан на статьях [4] и [5].

В работе описано, как графом матрицы определяется, является ли матрица примитивной. Если матрица не примитивна, то по графу матрицы вычисляется индекс импримитивности d и строится форма Фробениуса матрицы. Приводятся соответствующие примеры. Затем форма Фробениуса матрицы и свойство инвариантности спектра импримитивной стохастической матрицы относительно его поворота на угол $\frac{2\pi}{d}$ в комплексной плоскости применяется для нахождения сведений о спектре, которые можно получить, не вычисляя корней характеристического многочлена, или вычисляя корни многочлена малой степени. Существенную роль при этом играет понятие темпоральной подматрицы и её спектра. Наиболее детальные результаты получены для импримитивных стохастических матриц порядка 5 и меньше. Показано, что во многих случаях таким способом можно полностью вычислить спектр стохастической матрицы.

2 Графы неотрицательных матриц

Матрица A называется *неотрицательной*, если её элементы - вещественные неотрицательные числа. Матрица A называется *положительной*, если все её элементы положительны. Обозначения:$A \geqslant 0$ и $A > 0$ соответственно. Сумма и произведение неотрицательных (положительных) матриц являются, понятно, неотрицательными (положительными) мартицами.

Удобным средством изучения неотрицательных матриц являются *ориентированные графы*. Напомним, что ориентированным графом (орграфом) называется пара (V, E), где V - непустое множество вершин, $E \subseteq V \times V$ - множество *дуг*. Таким образом, дуга — это упорядоченная пара вершин. Обычно мы считаем, что вершины пронумерованы натуральными числами: V={1,...,n}. Если *e = (i, j)*, то вершина i - *начало* дуги e, вершина j - её *конец*. Говорят, что дуга *e выходит* из i и *входит* в j. Дуга (i, i) называется *петлей*. На рисунке дуги графа изображаются стрелками. Вместо "дуга ведёт из вершины i в вершину j"будем иногда писать $i \to j$. *Путём* длины k в орграфе называется любая последовательность вершин

$$i_1 i_2 \dots i_{k+1},$$

такая, что $i_m i_{m+1}$ — дуга $(m = 1, \dots, k)$. Говорят, что i_1 - начало, i_{k+1} - конец пути. Когда хотят указать начало и конец пути, пишут: $(i_1 j_{k+1})$ - путь. Если $i_1 = i_{k+1}$, то путь называется *контуром.*

Путь называется *простым*, если все его вершины различны (кроме, возможно, первой и последней).

Введём операцию произведения или *катенации* путей. Катенация путей $p = i_1...i_k$ и $q = j_1...j_m$ определена, если они *стыкуются.* Это значит, что последняя буква p совпадает с первой буквой q. В этом случае катенация равна

$$pq = x_1...x_k y_2...y_m = x_1...x_{k-1} y_1...y_m.$$

Катенация ассоциативна в следующем смысле слова: если катенация $(pq)r$ определена, то катенация $p(qr)$ тоже определена и выполняется равенство $(pq)r = p(qr)$. Из ассоциативности следует, что скобки в катенации любого числа путей можно опускать.

Заметим, что *для пути pqr путь pr существует в точности тогда, когда q — контур.*

Путь называется *простым*, если все его вершины различны, кроме, может быть, первой и последней. Следовательно, простой путь — это путь, который нельзя разложить в произведение pqr, где q — контур. Легко доказывается

Лемма 1 *В графе с n вершинами*

1) длина простого (i, j) - пути при $i \neq j$ не больше, чем n - 1;

2) длина простого контура не больше, чем n;

3) если существует (i, j) - путь, то существует и простой (i, j) - путь

Доказательство. Длина (i,j) - пути при $i \neq j$ равна числу вершин пути минус единица, а длина контура равна числу вершин в контуре. Отсюда и из определения простого пути следует пункты 1) и 2).

Чтобы доказать п. 3), рассмотрим произвольно взятый (i,j) - путь. Если он не простой, то разложить его в произведение pqr, где q — контур. Удалив контур q, получим более короткий (i,j) - путь. Если и он не простой, то продолжим удаление контуров. Ясно, что на некотором шаге получится простой (i,j) - путь. ■

Говорят, что вершина j *достижима* из вершины i (короче: $i \to j$), если существует (i,j) - путь.

Граф называется *сильно связным*, если из любой вершины достижимы все вершины.

Граф (V_1, E_1)называется *подграфом* графа (V, E), если $V_1 \subseteq V$, $E_1 \subseteq E$. Говорят, что подграф *порождён подмножеством вершин* V_1, если E_1 состоит из дуг, соединяющих вершины из V_1.

Графом неотрицательной матрицы $\mathrm{A} = (a_{i,j})$ порядка n называется орграф с множеством вершин 1, ... , n, в котором

$$i \to j \Longleftrightarrow a_{ij} > 0.$$

Если каждой дуге (i,j) графа матрица приписать число a_{ij}, то получится наглядное и точное представление матрицы в виде нагруженного графа. И, наоборот, всякий нагруженный граф очевидным образом определяет матрицу.

Весом пути $i_1 i_2 ... i_k i_{k+1}$ в графе матрицы A называется произведение весов дуг пути, то есть число

$$a_{i_1 i_2} ... a_{i_k i_{k+1}}.$$

Согласно правилу умножения матриц ij-элемент матрицы A^k определяется формулой

$$a_{ij}^{(k)} = \sum_{l_1,\dots,l_{k-1}} a_{il_1} a_{l_1 l_2} \dots a_{l_{k-1} j}, \tag{1}$$

где суммирование ведётся по всевозможным последовательностям индексов $l_1, ..., l_{k-1}$. Эта формула доказывается индукцией по k.

Используя понятия графа матрицы и веса пути, можно сказать, что

$$a_{ij}^{(k)} = \tag{2}$$

сумма весов (i,j) - путей длины k.

Лемма 2 *Пусть $A = (a_{ij})$ — неотрицательная матрица. Для любых i, j, k $a_{ij}^{(k)} > 0 \Longleftrightarrow$ в графе A существует (i,j) - путь длины k.*

Доказательство. Ясно, что неравенство $a_{il_1}a_{l_1l_2}\ldots a_{l_{k-1}j} > 0$ выполняется тогда и только тогда, когда в графе матрицы A есть путь $il_1l_2...l_{k-1}j$. Отсюда и из формулы (1) следует утверждение леммы. ∎

Матрица $A \geqslant 0$ называется *неразложимой*, если её граф сильно связен.

3 Примитивные матрицы

Матрица $A \geqslant 0$ называется *примитивной*, если существует показатель k, при котором $A^k > 0$. Из леммы 2 следует

Теорема 1 *Следующие условия равносильны:*

1) матрица $A^k > 0$,

2) в графе A из любой вершины в любую можно перейти путём длины k.

Итак, матрица примитивна, если в её графе из любой вершины в любую можно перейти путём одной и той же длины.

Назовём матрицу $A \geqslant 0$ *полупримитивной*, если при некотором показателе k матрица A^k содержит положительные столбцы. Вершину графа, достижимую из любой вершины за одно и то же число шагов, назовём *фокусом*, а граф, содержащий фокусы — *полупримитивным.* В силу леммы 2 столбец

$$\begin{pmatrix} a_{1j}^{(k)} \\ . \\ . \\ . \\ a_{nj}^{(k)} \end{pmatrix}$$

положителен в точности тогда, когда вершина j достижима из любой вершины за k шагов. Следовательно, *полупримитивность матрицы эквивалентна полупримитивности её графа.*

Отметим, что в полупримитивном графе нет висячих вершин. Следовательно, из каждой вершины выходит путь какой угодно длины k. В переводе на язык матриц это значит, что в полупримитивной матрице A нет нулевых строк. Следовательно, и в матрице A^k нет нулевых строк при любом показателе k.

Лемма 3 *Если фокус j полупримитивного графа k-достижим из всех вершин, то он l-достижим при любом $l > k$. На языке матриц это значит: если j-й столбец положителен в матрице A^k, то он положителен в A^l при всех $l > k$.*

Доказательство. Пусть некоторые пути длины $l-k$ ведут из вершин $1,...,n$ в вершины, соответственно, $i_1,...,i_n$. По условию леммы есть пути длины k из этих вершин в фокус j. Тогда, очевидно, есть пути длины $(l-k)+k=l$ из всех вершин в j.

Приведём матричное доказательство. В матрице A^{l-k} все строки ненулевые, в матрице A^k столбец j положителен. Отсюда следует, что и в матрице $A^l = A^{l-k}A^k$ столбец j положителен. ■

По лемме 3 при любом достаточно большом показателе m столбцы матрицы A^m, отвечающие фокусам, положительны. Отсюда вытекает

Следствие 1 *При любом k фокусы в графах матриц A и A^k одни и те же. Следовательно,*

1) A полупримитивна $\Longleftrightarrow$ A^k полупримитивна,

2) A примитивна $\Longleftrightarrow$ A^k примитивна.

Лемма 4 *Множество фокусов замкнуто.*

Доказательство. Действительно, пусть вершина i фокус, достижимый из всех вершин за k шагов. Если $i \to j$, то вершина j достижима из всех вершин за $(k+1)$ шагов, следовательно, тоже является фокусом. ■

Следствие 2 *Если матрица A полупримитивна и неразложима, то она примитивна.*

Доказательство. Из полупримитивности A следует, что в графе A есть фокусы. Согласно предложению 2 множество фокусов замкнуто. Но граф неразложимой матрицы сильно связен и не имеет собственных замкнутых подмножеств. Следовательно, все вершины — фокусы, то есть матрица A примитивна. ■

Будем говорить, что вершины i_1 и i_2 *совместимы*, если из этих вершин синхронно, то есть путями одинаковой длины, достижима некоторая общая вершина. Желая указать длину путей, будем писать, что вершина k-совместимы.

Вершины i_1 и i_2 графа матрицы A совместимы, если существует такой показатель $k \geqslant 1$, что для некоторого j одновременно $a_{i_1 j}^{(k)} > 0$ и $a_{i_2 j}^{(k)} > 0$.

Предложение 1 *Граф полупримитивен $\Longleftrightarrow$ любые две вершины графа совместимы.*

С лева направо утверждение очевидно. Докажем в обратную сторону. При n = 2 утверждение легко усматривается. Предположим, что $n \geqslant 3$. Пусть из вершин 1 и 2 синхронно k_1-достижима вершина j, из вершины 3 за k_1 шагов достижима вершина l, из вершин j и l синхронно k_2-достижима вершина m. Тогда, очевидно, из вершин 1, 2, 3 вершина m достижима за (k_1+k_2) шагов. Продолжая аналогично, получим, что из вершин 1, 2, ... , n есть пути длины $k_1+k_2+...+k_{n-1}$ в некоторую вершину p.

Из следствия 2 и предложению 1 автоматически получается

Теорема 2 *Матрица $A \geqslant 0$ примитивна тогда и только тогда, когда она неразложима и любые две вершины в графе A совместимы.*

Предложение 2 *Примитивная матрица порядка 1 — это положительное число, т.к. если бы примитивная матрица порядка 1 была бы равной нулю, то при возведении её в куб, мы бы получили нулевую матрицу, а это противоречит определению примитивности (параграф 2).*

Неотрицательная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

примитивна тогда и только тогда, когда $a + d > 0, b > 0, c > 0$.

Доказательство. Пусть A примитивная матрица. Возведём эту матрицу в квадрат.

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{pmatrix}.$$

1)Если $a + d = 0$, то получается диагональная матрица

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & 0 \\ 0 & bc + d^2 \end{pmatrix},$$

а эта матрица не примитивна. Отсюда, по следствию 1, п.2) и матрица A не примитивна.

2)Если $b = 0$, то получается матрица вида

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ c(a+d) & d^2 \end{pmatrix},$$

а эта матрица тоже не примитивна, как нижняя треугольная матрица.

3)Если $c = 0$, будет матрица вида

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & b(a+d) \\ 0 & d^2 \end{pmatrix},$$

а она также не примитивна.

В обратную сторону.

Если заданы условия $a + d > 0, b > 0, c > 0$, то из вида матрицы A^2 видно, что на каждой позиции ij стоит положительный элемент. Отсюда следут, матрица A — примитивна.

■

4 Форма Фробениуса импримитивной матрицы

Разбиение множества вершин графа называется *циклическим*, если существует нумерация классов разбиения:

$$C_1, C_2, \dots, C_d, \tag{3}$$

при которой все дуги с началом в классе C_1 ведут в класс C_2, дуги с началом в C_2 ведут в C_3 и так далее; наконец, дуги из C_d ведут в C_1. Назовём описанную нумерацию классов циклического разбиения *правильной*. Будем говорить, что класс C_{t+1} *следует* за классом C_t при $t \le d-1$, класс C_1 следует за C_d.

Пусть для графа матрицы A циклическое разбиение существует и правильная нумерация (3) классов получена. Далее перенумеруем вершины графа: сначала вершины класса C_1, потом C_2 и так далее. Произведём перестановку рядов матрицы A соответственно новой нумерации вершин и разобьём полученную матрицу на блоки, соответствующие классам. В результате получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & A_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_{23} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{d-1,d} \\ A_{d1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Матрицу типа (4) будем называть *блочно-циклической*. У такой матрицы нулевые диагональные блоки — квадратные, единственный ненулевой блок блочной строки является правым соседом диагонального блока, в нижней блочной строке единственный ненулевой блок занимает левый нижний угол. Количество блочных строк (и столбцов) называется блочным порядком матрицы. Как видим, циклическое разбиение множества вершин приводит к блочно-циклической форме матрицы.

И наоборот, всякой блочно-циклической матрице формы (4) естественным образом соответствует циклическое разбиение множества вершин её графа. А именно, если $n_1, n_2, \dots, n_d$ — порядки диагональных блоков, то первый класс разбиения состоит из первых n_1 вершин, второй класс — из следующих n_2 вершин, и так далее. Граф допускает, вообще говоря, различные циклические разбиения, соответственно, матрица может быть приведена к различным блочно-циклическим формам.

Если граф допускает циклическое разбиение на d классов, то переход из вершины в вершину того же класса возможен, очевидно, лишь за число шагов, кратное d. Определим понятие темпорального подграфа. Множеством вершин темпорального подграфа является класс циклического разбиения, дуга ij существует $\iff$ в графе существует (i,j)-путь длины d.

При возведении блочно-циклической матрицы (4) в степень d получается блочно-диагональная матрица

$$A^d = \begin{pmatrix} A_{11}^{(d)} & & & \\ & A_{22}^{(d)} & & \\ & & \dots & \\ & & & A_{dd}^{(d)} \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Назовём диагональные блоки матрицы (5) *темпоральными* подматрицами матрицы A (отвечающими данному циклическому разбиению). Графы этих подматриц являются темпоральными подграфами графа A.

Неотрицательная блочно-циклическая матрица (4) называется *формой Фробениуса* (или имеет форму Фробениуса), если её темпоральные подматрицы примитивны. Обозначим наибольший общий делитель всех контуров графа $G(A)$ матрицы A через d.

Основная цель этого параграфа — доказать, что всякая неразложимая неотрицательная матрица либо примитивна, либо приводится к форме Фробениуса.

Удобнее рассуждать в графовых терминах. Вернёмся к отношению совместимости вершин и докажем, что для сильно связного графа это отношение является эквивалентностью.

Вначале установим следующее свойство сильно связных графов.

Лемма 5 *Если из вершины a сильно связного графа синхронно достижимы вершины b и c, то из вершин b и c синхронно достижима вершина a.*

Доказательство. Поскольку граф сильно связен, то существуют путь $b \to a$ некоторый длины p и путь $c \to a$ некоторой длины q. Тогда существуют контур $a \to b \to a$ длины $k+p$ и контур $a \to c \to a$ длины $k+q$. Проходя по первому контуру $k+q$ раз, а по второму контуру $k+p$ раз, получим контуры одинаковой длины $(k+p)(k+q)$ с началом a. Удалив из этих контуров начальные отрезки длины k, получим искомые пути из b и c в a одинаковой длины $(k+p)(k+q)-k$. ■

Теорема 3 *Бинарное отношение совместимости на множестве вершин сильно связного графа является отношением эквивалентности.*

Доказательство. В сильно связном графе нет висячих вершин, это обеспечивает рефлексивность. Симметричность видна прямо из определения совместимости. Докажем транзитивность. Пусть из вершин i_1 и i_2 k_1-достижима вершина j_1, а из вершин i_2 и i_3 k_2-достижима вершина j_2. Можно считать, что $k_1 = k_2 = k$. Действительно, если, например, $k_1 < k_2$, то пути из i_1 и i_2 в j_1 можно продолжить общим путём длины $k_2 - k_1$. По лемме 1 существует пути некоторой длины m из j_1 и j_2 в i_2. Следовательно, существуют пути длины $k+m$ из вершин i_1 и i_3 в общую вершину i_2, что и доказывает транзитивность. ■

Лемма 6 *Разбиение множества вершин сильно связного графа на классы совместимости является циклическим.*

Доказательство. Пусть имеется d > 1 классов совместимости. Выберем какой-нибудь класс и обозначим его C_d. Любые две вершины, дуги из которых ведут в C_d, совместимы, следовательно, лежат в одном классе. Обозначим этот класс C_{d-1}. Аналогично выберем следующий класс C_{d-2}. И так далее, пока не получим класс C_1. В вершины класса C_1 могут вести дуги лишь из класса C_d. Действительно, если допустить, что в C_1 ведут дуги из класса C_b, $b < d$, то выйдет, что все вершины из C_d — висячие. Но этого, разумеется, не может быть. Требуемая нумерация классов совместимости получена. ■

Определим *индекс совместимости* сильно связного графа как количество классов совместимости. Другими словами, индекс совместимости равен максимальному числу попарно несовместимых вершин. Положим, что индекс совместимости матрицы равен индексу совместимости графа этой матрицы.

Теорема 4 *Пусть* $A \geqslant 0$ *— неразложимая матрица с индексом совместимости* d*. Если* d = 1*, то матрица* A *примитивна. Если* d > 1*, то матрица* A *некоторой перестановкой рядов приводится к форме Фробениуса.*

Доказательство. Если $d = 1$, то любые две вершины совместимы и матрица А примитивна. Пусть $d > 1$. По лемме 2 разбиение на классы совместимости является циклическим. Пусть правильная нумерация $C_1, C_2, ..., C_d$ классов уже получена и соответствующая блочно циклическая матрица (4) построена. Докажем, что темпоральные подматрицы этой матрицы примитивны. Достаточно доказать это для матрицы $H = A_{11}^{(d)}$. Путь в графе матрицы А приводит из класса C_1 снова в C_1 в точности тогда, когда его длина кратна d. Поскольку граф сильно связен, то для любых $i, j \in C_1$ существеут показатель ld, для которого $a_{ij}^{(ld)} = h_{ij}^{(l)} > 0$. Следовательно, матрица $H = (h_{ij})$ неразложима. Далее, по определению отношения S для любых $i, j \in C_1$ найдутся пути одинаковой длины k в общую вершину. Эти пути можно продолжить общим путём какой угодно длины, поэтому при достаточном большом l из любых $i, j \in C_1$ синхронно ld-достижима некоторая общая вершина $p \in C_1$. На языке матрицы H это значит: $h_{ip}^{(l)} > 0$ и $h_{jp}^{(l)} > 0$, то есть любые две вершины i, j в графе матрицы H совместимы. Следовательно, матрица $H = A_{11}^{(d)}$ примитивна. ■

Теперь предположим, что матрица А имеет форму Фробениуса. Докажем, что она неразложиа и что классы соответствующего циклического разбиения вершин графа А (обозначим его ω) являются классами совместимости. Пусть число l так велико, что в матрице A^{ld} диагональные блоки положительны. Тогда матрица A^{ld+1} имеет блочную структуру вида

$$A^{ld+1} = \begin{pmatrix} 0 & \times & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \times & \cdots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \times \\ \times & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

причем ненулевые блоки, отмеченные $\times$, положительны. Это значит, что из любой вершины любого класса разбиения ω, за $ld+1$ шагов можно перейти в любую вершину следующего класса. Отсюда, конечно, следует, что A неразложима. Из положительности диагональных блоков в A^{ld} следует, что вершины из одного класса совместимы; вершины из разных классов, разумеется, не совместимы. Значит, ω есть разбиение на классы совместимости.

Назовём *контурным индексом* сильно связного графа число, равное наибольшему общему делителю длин контуров графа. Под контурным индексом неразложимой матрицы будем понимать контурный индекс её графа.

Теорема 5 *Индекс совместимости неразложимой матрицы равен её контурному индексу.*

Доказательство. Длина любого контура делится на индекс совместимости d. При $d = 1$ это очевидно, а при $d > 1$ вытекает из циклического свойства разбиения на классы совместимости. При $d = 1$ матрица A примитивна, а при $d > 1$ примитивна матрица $A_{11}^{(d)}$ (см. теорему 4). В любом случае при достаточно большом r имеем $a_{11}^{(dr)} > 0$ и $a_{11}^{(d(r+1))} > 0$. Это значит, что через вершину 1 проходят контуры длины dr и $d(r+1)$. Наибольший общий делитель этих чисел и, следовательно, множества длин всех контуров графа, равен d. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Вместо выражения "контурный индекс"часто употребляется термин "индекс импримитивности". Этот термин объясняется теоремой 4, согласно которой неразложимая матрица либо примитивна, либо приводится к виду (4), причем число d можно считать мерой отклонения от примитивности (мерой импримитивности).

Из теоремы 4 (с. 7) и 5 вытекает

Следствие 3 *Неразложимая матрица $A \geqslant 0$ примитивна в точности тогда, когда контурный индекс A равен 1.*

5 Как строить форму Фробениуса

Нетрудно видеть, что длина непростого контура, равна сумме длин некоторых простых контуров. Поэтому контурный индекс равен наибольшему общему делителю длин только простых контуров графа. Если их количество невелико, то контурный индекс легко вычисляется. Пусть даны неразложимая матрица A и её граф. Предположим, что контурный индекс d известен. Если $d = 1$, то, как доказано, матрица примитивна и уже имеет форму Фробениуса. Если $d > 1$, то выберем любую вершину, например, вершину 1, и зачислим её в класс C_1. Далее рассмотрим простые пути, ведущие из 1-ой вершины в вершины 2, ... , n. Пути длины 1 (дуги) ведут в один и тот же класс, обозначим его C_2. Класс, в который идут пути длины 2, обозначим C_3 и так далее. Пути длины d приводят в класса C_1. Вообще, любой путь длины $k = qd + r(r = 1, 2, ..., d-1)$ приводит из вершины 1 в вершину класса C_{r+1}, а при $r = 0$ в класс C_1. Так, проследив простые пути, ведущие из вершины 1, распределим вершины по классам совместимости. Затем перенумеруем вершины соответственно их разбиению на классы. Пусть $Q = (q_{ij})$ — матрица перестановки, соответствующая перенумерации σ, то есть $q_{ij} = 1 \iff \sigma(i) = j$. Тогда QAQ^{-1} — форма Фробениуса.

Рассмотрим класс графов, содержащий полный простой контур

$$1 \to 2 \to ... \to n \to 1$$

и ещё одну дугу

$$m \to 1, 1 \le m < n.$$

Из определения видно, что

1) любой граф этого класса сильно связен и содержит ровно два простых контура, длины n и m.

2) индекс импримитивности d графа равен НОД(n, m).

3) граф примитивен тогда и только тогда, когда числа n и m взаимно просты. В частности, все графы данного вида с простым числом вершин примитивны.

Примеры. 1) Рассмотрим матрицу

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Построим для неё граф:

В этом графе есть два контура длины 3 и 6.

Матрица является импритивной, т.к. контурный индекс равен НОД(3,6) $= 3 > 1$. По описанному выше способу вычислим классы совместимости:

$$C_1 = \{1, 4\}, C_2 = \{2, 5\}, C_3 = \{3, 6\}.$$

Перенумеруем вершины соответствующие их разбиению на классы. Укажем стрелками новые номера вершин:

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 4 & 2 & 5 & 3 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

При такой нумерации матрица P приобретает форму Фробениуса:

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

2) Рассмотрим матрицу

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Построим для неё граф:

В этом графе есть два контура длины 4 и 6.

Матрица является импритивной (не примитивной), т.к. контурный индекс равен НОД(4,6) $= 2 > 1$. По описанному выше способу вычислим классы совместимости:

$$C_1 = \{1, 3, 5\}, C_2 = \{2, 4, 6\}.$$

Перенумеруем вершины соответствующие их разбиению на классы. Укажем стрелками новые номера вершин:

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 3 & 5 & 2 & 4 & 6 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6
\end{array}$$

При такой нумерации матрица P приобретает форму Фробениуса:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)$$

6 Стохастические матрицы и их графы

Представим себе случайную динамическую систему, состояния которой изменяются по следующему закону: если в некоторый момент времени система находится в состоянии i, то в следующий момент она переходит в состояние j с вероятностью p_{ij}, которая зависит лишь от i и j и не зависит от предыдущих состояний. Такая система называется марковской.

Марковские системы описываются стохастическими матрицами переходных вероятностей. Неотрицательная матрица $P = (P_{ij})$ порядка n называется стохастической, если

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1, i = 1, ..., n. \tag{7}$$

Предложение 3 *Произведение стохастических матриц и любая степень стохастической матрицы — стохастические матрицы.*

Доказательство. Обозначим символом 1 столбец из единиц высоты n. Тогда условие (7) записывается так:

$$P1 = 1. \tag{8}$$

Теперь пусть P и Q — стохастические матрицы. Докажем, что PQ — стохастическая матрица. Пользуемся ассоциативностью умножения матриц.

$$(PQ)1 = P(Q1) = P1 = 1.$$

Аналогично доказывается, что степень стохастической матрицы — стохастические матрица. ■

Полезно иметь образное представление марковского процесса: по графу стохастической матрицы блуждает частица, переходя из вершины i в вершину j с вероятностью p_{ij}. Каждой дуге $i \to j$ графа приписана вероятность p_{ij}, причём выполняются равенства (7).

Предложение 4 *1) В графе стохастической матрицы из каждой вершины выходит хотя бы одна дуга (то есть нет висячих вершин);*

2) Любой граф без висячих вершин является графом стохастической матрицы.

Доказательство.

1) Согласно определению графа неотрицательной матрицы, данному в курсовой работе,

$$i \to j \Longleftrightarrow a_{ij} > 0.$$

Из любой вершины i графа стохастической матрицы выходит хотя бы одна дуга, поскольку сумма элементов i-й строки равна 1, следовательно, хотя бы для одного номера j элемент a_{ij} положителен.

2) Пусть дан граф без висячих вершин с вершинами (1, ... , n). Определим матрицу A следующим образом. Пусть из вершины i выходят дуги в вершины $j_1, ..., j_k$.Тогда положим

$$a_{ij_1} = ... = a_{ij_k} = 1/k,$$

остальные элементы i-й строки положим равными 0. И так для каждой строки. Матрица A очевидно стохастическая. ■

Предложение 5 *Ранг стохастической матрицы равен 1 тогда и только тогда, когда строки матрицы равны.*

Доказательство. Если строки равны, то ранг очевидно равен 1.

Пусть ранг равен 1, тогда возьмём стохастическую строку $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k)$, где сумма элементов строки равна 1. Если умножить эту строку на элемент c и получить стохастическую строку $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k)$, где сумма элементов даёт 1, то очевидно $c = 1$. Отсюда получается строки равны. ■

Предложение 6 *Спектр стохастической матрицы ранга 1 равен (1, 0, ... , 0).*

Доказательство. Стохастическая матрица ранга 1 равна $A^n = A^{n-1}$. Отсюда $A^n - A^{n-1} = 0$. Вычисляем сообственные значения $\lambda^n - \lambda^{n-1} = 0$. Выносим λ^{n-1} и получаем $\lambda^{n-1}(\lambda - 1) = 0$. Отсюда видно, что собственные значения равны 0 и 1, значит спектр равен (1, 0, ... , 0). ■

Всё, сказанное в параграфе 1, верно, в частности, для стохастической матрицы $P = (p_{ij})$. Но в теории цепей Маркова произведение

$$p_{il_1}p_{l_1l_2}...p_{l_{k-1}j}$$

понимается не как все пути, а как вероятность того, что система (частица), находясь вначале в состоянии (вершине) i, пройдет путь $i, l_1, ..., l_{k-1}, j$. А число

$$p_{ij}^{(k)} = \sum_{l_1,...,l_{k-1}} p_{il_1}p_{l_1l_2}...p_{l_{k-1}j}, \tag{9}$$

где суммирование производится по всевозможным (i, j)-путям длины k, равно вероятности перехода системы из состояния i в состояние j за k шагов. Таким образом, вероятность перехода из состояния i в состояние j за k шагов равна (ij)-элементу матрицы P^k.

7 Общие спектральные свойства стохастических матриц

Спектром комплексной матрицы называется совокупность всех её собственных значений с учётом их кратностей, *граничный спектр* состоит из собственных значений, имеющих максимальный модуль.

Докажем, что граничный спектр стохастической матрицы всегда содержит единицу.

Предложение 7 *Для любой стохастической матрицы $P = (p_{ij})$ число 1 является собственным значением, а столбец $\mathbb{1} = (1, ..., 1)^T$ — соответствующим собственным вектором. Модули всех собственных значений стохастической матрицы не больше единицы.*

Доказательство. Первое утверждение легко проверить вычислением. А именно, оно вытекает из равенства (15). Теперь пусть λ — любое собственное значение стохастической матрицы $P = (p_{ij})$, а вектор $x = (x_i)$ — соответствующий ему собственный вектор-столбец. Пусть $|x_k|$ — максимальный из модулей элементов вектора $x = (x_i)$. Из равенства $Px = \lambda x$, в частности, следует, что

$$p_{k1}x_1 + p_{k2}x_2 + ... + p_{kn}x_n = \lambda x_k.$$

Отсюда, учитывая, что модуль суммы комплексных чисел не больше суммы их модулей, получим

$$|\lambda x_k| = |\lambda||x_k| \leq p_{k1}|x_1| + p_{k2}|x_2| + ... + p_{kn}|x_n| \leq p_{k1}|x_k| + p_{k2}|x_k| + ... + p_{kn}|x_k| = |x_k|.$$

Доказали, что

$$|\lambda||x_k| \leq |x_k|.$$

Сокращая на $|x_k| > 0$, получаем желаемое неравенство

$$|\lambda| \leq 1.$$

■

Для примитивных матриц имеет место более сильное утверждение

Предложение 8 *Если стохастическая матрица P примитивна, то единица является простым собственным значением P, превосходящим по модулю все остальные собственные значения.*

Доказательство. Известно (см., например, [2], гл. 2, параграф 6.2), что матрицы P^k при $k \to \infty$ поэлементно сходятся к стохастической матрице P^∞, строки которой одинаковы. Это значит, что элементы j-го столбца сходятся к одному пределу, зависящему от j. Поэтому для любых i_1, i_2 и любого столбца j

$$p_{i_1 j}^{(k)} - p_{i_2 j}^{(k)} \to 0 \tag{10}$$

при $k \to \infty$.

Пусть матрица T получена из матрицы E заменой первого столбца столбцом из 1.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & \dots & 0 \\ \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Приведём матрицу P к блочно-треугольному виду.

Если $\lambda_1 = 1, \lambda_2, ..., \lambda_n$— спектр P, то $\lambda_2, ..., \lambda_n$ — спектр Q. Нетрудно вычислить, что

$$T^{-1}P^kT = \begin{pmatrix} 1 & p_{12}^{(k)} & \dots & p_{1n}^{(k)} \\ 0 & p_{22}^{(k)} - p_{12}^{(k)} & \dots & p_{2n}^{(k)} - p_{1n}^{(k)} \\ \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & p_{n2}^{(k)} - p_{12}^{(k)} & \dots & p_{nn}^{(k)} - p_{1n}^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & p_1^{(k)} \\ 0 & Q^k \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$p_1^{(k)} = (p_{12}^{(k)}, ..., p_{1n}^{(k)}), Q^k = \begin{pmatrix} p_{22}^{(k)} - p_{12}^{(k)} & \dots & p_{2n}^{(k)} - p_{1n}^{(k)} \\ \\ \dots & \dots & \dots \\ p_{n2}^{(k)} - p_{12}^{(k)} & \dots & p_{nn}^{(k)} - p_{1n}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

Из вида элементов матрицы Q^k и свойства (10) следует, что $limQ^k \to 0$ при $k \to \infty$. Последнее же имеет место только если собственные значения Q^k меньше единицы по модулю, то есть $|\lambda_i| < 1$ при $i = 2, ..., n$ (см. [5], теор. 5.6.12, стр.362). ■

Вычислим спектр стохастической матрицы порядка 2. Запишем стохастическую матрицу в виде

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}, 0 \le a, b \le 1. \tag{11}$$

Предложение 9 *Собственными значениями стохастической матрицы P вида (11) являются числа 1 и $\lambda = 1 - a - b$.*

Доказательство. Приведём матрицу Р к верхнему треугольному виду:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1-a-b \end{pmatrix}.$$

Из курса алгебры известно, что собственными значениями верхней треугольной матрицы, являются её диагональные элементы. Так как спектры подобных матриц Р и Q совпадают, то отсюда видно, что собственными значениями матрицы Р являются числа 1 и $\lambda = 1 - a - b$. ■

Условие (11) примитивности матрицы 2-го порядка из предложения 2 для стохастических матриц равносильно следующему условию:

Предложение 10 *Стохастическая матрица*

$$P = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix} \qquad (12)$$

примитивна тогда и только тогда, когда $0 < ab < 1$.

Доказательство. Пусть P примитивная матрица. Возведём эту матрицу в квадрат.

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-a)(1-a)+ab & a-a^2+a-ab \\ b-ab+b-b^2 & ab+(1-b)(1-b) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (1-a)(1-a)+ab & 2a-a^2-ab \\ 2b-ab-b^2 & (1-b)(1-b)+ab \end{pmatrix}.$$

1)Если $ab = 0$, то получается либо $a = 0$, либо $b = 0$, либо оба равны 0. Если оба равны 0, то получается диагональная матрица:

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а эта матрица не примитивна.

Если $a = 0$, то получается нижнетреугольная матрица:

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2b-b^2 & (1-b)(1-b) \end{pmatrix},$$

а эта матрица не примитивна.

Если $b = 0$, то получается верхнетреугольная матрица:

$$P^2 = \begin{pmatrix} (1-a)(1-a) & 2a-a^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а эта матрица не примитивна.

Отсюда, по следствию 1, п.2) и матрица P не примитивна.

2)Если $ab = 1$, то возьмём и $a = 1$ и $b = 1$. Получается матрица вида

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

которая непримитивна.

В обратную сторону.

Если заданы условия $0 < ab < 1$, то из вида матрицы P^2 видно, что на каждой позиции ij стоит положительный элемент. Отсюда следут, матрица P — примитивна. ■

8 Спектр импримитивной стохастической матрицы

Согласно предложению 8 граничный спектр примитивной стохастической матрицы состоит из одного числа – единицы. Используем это свойство для описания граничного спектра импримитивной стохастической матрицы. Пусть матрица P имеет контурный индекс $d > 1$ и находится в форме Фробениуса:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & P_{12} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & P_{23} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & P_{d-1,d} \\ P_{d1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Если выбрать первообразный корень степени d из единицы

$$\epsilon = cos(\frac{2\pi}{d}) + isin(\frac{2\pi}{d}),$$

то спектр матрицы P можно записать в виде

$$1, \epsilon, ..., \epsilon^{d-1}.$$

Корень n-й степени из 1 называется *примитивным* (или *первообразным*), если он не является корнем из 1 никакой меньшей степени. Таковым и будет

$$\epsilon = cos(\frac{2\pi}{d}) + isin(\frac{2\pi}{d}),$$

Так как, если представим комплексную единицу в тригонометрическом виде:

$$1 = cos0 + isin0$$

Тогда по формуле Муавра: $z = r(cos\phi + isin\phi)$, получим:

$$u_d = cos(\frac{2\pi k}{d}) + isin(\frac{2\pi k}{d}), k = 0, 1, ..., d-1.$$

Здесь u_d - корни из единицы.

Корни d-й степени из единицы — комплексные корни многочлена $x^d - 1 (d \geqslant 1)$. Другими словами, это комплексные числа, d-я степень которых равна 1.

Лемма 7 *Если матрица P (возможно, комплексная), имеет блочную форму (13), то спектр P инвареантен относительно поворота на угол $2\pi/d$.*

Доказательство. Пусть $n_1, n_2, \ldots, n_d$ – порядки диагональных блоков в (13). Составим диагональную матрицу

$$S = diag(E_{n1}, \epsilon E_{n2}, \ldots, \epsilon^{d-1} E_{nd}).$$

Непосредственно проверяется, что $S^{-1}PS = \epsilon P$. Утверждение леммы следует из подобия матриц P и ϵP, а также из того, что при умножении матрицы на число её спектр умножается на это число. ■

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В формулировке леммы подразумевается, что комплексное число z можно считать вектором на комплексной плоскости с началом в точке О. Тогда умножение на число

$$\epsilon = cos(\frac{2\pi}{d}) + isin(\frac{2\pi}{d})$$

поворачивает вектор z на угол $2\pi/d$.

Пусть

$$\epsilon, \epsilon^2, ..., \epsilon^{d-1}$$

–корни степени d из единицы, кроме самой единицы. Тогда лемму 7 можно переформулировать следующим образом:

Следствие 4 *Если число $\lambda \neq 0$ входит в спектр матрицы (13), то в него входят и числа*

$$\lambda\epsilon, ..., \lambda\epsilon^{d-1}.$$

Известна следующая теорема о граничном спектре стохастической матрицы.

Теорема 6 *Если контурный индекс неразложимой стохастической матрицы P равен d, то граничный спектр P совпадает с множеством корней из единицы степени d.*

Доказательство теоремы можно найти в книге [3] стр.102, также в лекциях Ю.А. Альпина по спецкурсу "Матричный анализ".

Вычисление собственных значений стохастических матриц больших порядков — сложная задача. Но, используя форму Фробениуса, можно облегчить это задачу. Предположим, что стохастическая матрица Р находится в нормальной форме Фробениуса

$$P = \begin{pmatrix} 0 & P_{12} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & P_{23} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & P_{d-1,d} \\ P_{d1} & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Блоки $P_{12}, P_{23}, ..., P_{d-1,d}, P_{d1}$ являются стохастическими матрицами, в общем случае прямоугольными. Обозначим порядки диагональных нулевых блоков через

$$n_1, n_2, \ldots, n_d.$$

Тогда в блоке P_{12} n_1 строк и n_2 столбцов, в блоке P_{23} n_2 строк и n_3 столбцов и так далее. Наконец, в блоке P_{d1} n_d строк и n_1 столбцов.

Возведём матрицу P в степень, равную её контурному индексу:

$$P^d = \begin{pmatrix} P_{11}^{(d)} & & & \\ & P_{22}^{(d)} & & \\ & & \dots & \\ & & & P_{dd}^{(d)} \end{pmatrix}.$$

Темпоральные подматрицы матрицы P, то есть стохастические матрицы

$$P_{11}^{(d)}, ..., P_{dd}^{(d)}, \tag{14}$$

как доказано в параграфе 3, примитивны. Порядки темпоральных подматриц равны, соответственно, $n_1, n_2, ..., n_d$.

Выпишем явные выражения для темпоральных подматриц P через блоки матрицы P:

$$\begin{aligned} G_1 &= P_{11}^{(d)} = P_{12}P_{13}...P_{d1}, \\ G_2 &= P_{22}^{(d)} = P_{23}...P_{d1}P_{12}, \\ &\text{.........................} \\ G_d &= P_{dd}^{(d)} = P_{d1}P_{12}...P_{d-1,d}. \end{aligned} \tag{15}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Как видно из (15), каждая следующая темпоральная подматрица получается перестановкой первого матричного сомножителя предыдущей темпоральной подматрицы на последнее место. Первая темпоряльная подматрица G_1 аналогично получается из подматрицы G_d.

Часть спектра, содержащую только ненулевые собственные значения, будем называть ненулевым спектром матрицы. То есть ненулевой спектр матрицы A состоит из ненулевых собственных значений A, взятых с учётом кратности.Докажем, что темпоральные подматрицы имеют одни и те же ненулевые собственные значения. Вначале докажем лемму

Лемма 8 *Пусть A — комплексная матрица размеров $m \times n$, B — комплексная матрица размеров $n \times m$. Ненулевые спектры матриц AB и BA совпадают.*

Доказательство. Известно по книге [4] Глава 3, параграф 5, стр. 75, что что для матриц ранга r существуют обратимые матрицы P и Q порядков, соответственно, m и n, такие, что

$$A = P \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q,$$

где E — единичная матрица порядка $r = rkA$.

Для матрицы A существует матрицы X размера $m \times m$ и Y размера $n \times n$, что

$$XAY = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

существует. Тогда выразим A:

$$A = X^{-1} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y^{-1}$$

и обозначим X^{-1} и Y^{-1} через P и Q

Теперь представим матрицу B в виде

$$B = Q^{-1} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Для этого преобразуем матрицу B. Слева умножим на Q, а справа на P и обозначим его через $QBP = B'$. Разобъём эту матрицу на блоки

$$B' = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix}.$$

Теперь выразим B:

$$B = Q^{-1} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Здесь B_{11} — квадратная матрица порядка r, размеры остальных подматриц легко вычисляются. Тогда

$$AB = P \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Имеем матрицу, содержащую на диагонали два блока. У первого блока характеристический многочлен равен $\phi(B_{11})$, а у второго блока все λ^{m-r}, т.к. размер нулевого блока $m - r$. Следовательно, характеристический многочлен матрицы AB равен

$$\phi(AB) = \lambda^{m-r}\phi(B_{11}). \tag{16}$$

Аналогично получаем

$$BA = Q^{-1} \begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix} Q.$$

Характеристический многочлен матрицы BA равен

$$\phi(BA) = \lambda^{n-r}\phi(B_{11}).$$

Из равентсва (16) следует, что ненулевой спектр матрицы AB совпадает ненулевым спектром матрицы B_{11}. И то же самое для матрицы BA следует из равенства (16).

Выше предполагалось, что $r < m, n$.

1) Рассмотрим случай, когда A — квадратная невырожденная матрица, т.е. $r = m = n$. Возьмём квадратные матрицы AB и BA. Умножим матрицу BA на невырожденную матрицу A и обратную к ней. Имеет место равенство

$$A(BA)A^{-1} = AB.$$

Отсюда видно, что матрицы AB и BA являются подобными, значит следует, для матриц AB и BA множество собственных значений одно и то же, т.е. имеют один и тот же характерестический многочлен. А значит спектры матриц совпадают.

2)Случай когда $r = m < n$. Если $m < n$, то пулучается

$$A = P\begin{pmatrix} E & 0 \end{pmatrix} Q,$$

где E — единичная матрица порядка $r = rkA$.

Преобразуем матрицу B. Слева умножим на Q, а справа на P и обозначим его через $QBP = B'$. Разобъём эту матрицу на блоки

$$B' = \begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix},$$

где B_{11} — квадратная матрица порядка r. Теперь выразим B:

$$B = Q^{-1}\begin{pmatrix} B_{11} \\ B_{21} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Тогда

$$AB = P\begin{pmatrix} B_{11} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Следовательно, характеристический многочлен матрицы AB равен

$$\phi(AB) = \phi(B_{11}).$$

Аналогично получаем

$$BA = Q^{-1}\begin{pmatrix} B_{11} & 0 \\ B_{21} & 0 \end{pmatrix} Q.$$

Характеристический многочлен матрицы BA равен

$$\phi(BA) = \lambda^{n-m}\phi(B_{11}).$$

Отсюда опять видно, что ненулевые собственные значения матрицы AB является собственным значением матрицы BA, т.е. ненулевые спектры совпадают.

3) И последний случай, когда $r = n < m$. Если $n < m$, то получается

$$A = P \begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix} Q,$$

где E — единичная матрица порядка $r = rkA$.

Преобразуем матрицу B. Слева умножим на Q, а справа на P и обозначим его через $QBP = B'$. Разобъём эту матрицу на блоки

$$B' = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \end{pmatrix}.$$

Теперь выразим B:

$$B = Q^{-1} \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Тогда

$$AB = P \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Следовательно, характеристический многочлен матрицы AB равен

$$\phi(AB) = \lambda^{m-n} \phi(B_{11}).$$

Аналогично получаем

$$BA = Q^{-1} \begin{pmatrix} B_{11} \end{pmatrix} Q.$$

Характеристический многочлен матрицы BA равен

$$\phi(BA) = \phi(B_{11}).$$

Отсюда снова видно, что ненулевые собственные значения матрицы AB является собственным значением матрицы BA, спектры совпадают.

■

Теорема 7 *Каждая из темпоральных подматриц (15) имеет одно и то же множество ненулевых собственных значений.*

Доказательство. Доказательство получается последовательным применением леммы 7. В силу этой леммы и замечания 1 множество ненулевых собственных значений матрицы G_1 совпадает с множеством ненулевых собственных значений матрицы G_2, множество ненулевых собственных значений матрицы G_2 совпадает с множеством ненулевых собственных значений матрицы G_3 и т.д. ■

Число элементов ненулевого спектра матрицы не превышает, очевидно, порядка матрицы. Отсюда и из теоремы 7 вытекает

Следствие 5 *Число элементов ненулевого спектра каждой из темпоральных подматриц матрицы (14) не больше, чем* $\mu = min(n_1, ..., n_d)$. *Здесь* n_i *— число элементов в* i*-м классе совместимосте графа матрицы,* d *— индекс импримитивности матрицы.*

Следствие 6 *Число элементов ненулевого спектра матрицы P не меньше, чем d, и не больше, чем $d\mu$.*

Доказательство. Ненулевой спектр P содержит граничный спектр, в котором по теореме 6 ровно d элементов. Отсюда следует нижняя оценка для числа элементов ненулевого спектра.

Докажем верхнюю оценку. Если спектр матрицы P равен $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, то спектр матрицы P^d равен $\lambda_1^k, \lambda_2^k, ..., \lambda_n^k$. Отсюда видно, что ненулевые спектры P и P^k содержат одинаковое число элементов. В ненулевом спектре P^d , как вытекает из следствия 5, не больше, чем $d\mu$ элементов. ■

Из теоремы 7 следует, что для того, чтобы вычислить ненулевые собственные значения всех темпоральных подматриц, достаточно вычислить их для одной подматрицы. Объём вычислений будет меньше, если выбрать подматрицу наименьшего порядка. Если среди темпоральных подматриц (15) существует подматрица порядка 1 (это значит, что некоторый класс совместимости содержит единственный элемент), то вычислений совсем не требуется. Это показывает следующая теорема.

Следствие 7 *Если одна из стохастических темпоральных подматриц (16) имеет порядок 1 (то есть является числом 1), то спектр темпоральной подматрицы порядка n_k состоит из одной единицы, остальные $n_k - 1$ элементов спектра равны 0.*

Доказательство. По теореме 7 у темпоральных подматриц нет ненулевых собственных значений кроме единицы. При этом единица, согласно предложению 6 параграфа 6 является простым собственным значением (она входит в спектр с кратностью 1), поскольку темпоральные подматрицы примитивны. ■

Следствие 8 допускает переформулировку в терминах графа матрицы P:

Следствие 8 *Если одна из вершин графа матрицы P не совместима ни с какой другой вершиной, то спектр P содержит корни степени d из единицы, остальные $n - d$ элементов спектра равны 0.*

Доказательство. Если вершина i не совместима ни с какой другой вершиной, то пусть она образует класс $(i) = C_u$, что матрица P содержит темпоральную подматрицу, т.е. $P_{uu}^{(d)} = 1$.Согласно лемме 9, спектр матрицы P^d содержит d единиц и $n-d$ нулей. Следовательно, если записать спектр P как $1, \epsilon, \epsilon^2, ..., \epsilon^{d-1}, \lambda_{d+1}, ..., \lambda_n$, то $\lambda_{d+1} = ...\lambda_n = 0$, поскольку спектр p^d есть $1, ..., 1, \lambda_{d+1}^d, ..., \lambda_n^d$ ■

Если минимальный порядок темпоральных подматриц (14) равен двум, то для вычисления собственных значений всех темпоральных подматриц достаточно воспользоваться предложением 9.

Примеры. Иногда темпоральные подматрицы совпадают, например, пусть стохастическая матрица имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & E & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & E & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & E \\ P & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

где E — единичная матрица порядка $r = n/d$, P — стохастическая матрица. Тогда

$$A^d = \begin{pmatrix} P & & & \\ & P & & \\ & & \dots & \\ & & & P \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Таким образом, все темпоральные подматрицы равны P. Согласно определению, данному в параграфе 3, матрица A находится в форме Фробениуса тогда и только тогда, когда P — примитивная матрица.

Следствие 9 *Пусть минимальный порядок темпоральных подматриц (14) матрицы P равен двум. Тогда возможны два случая.*

1. Строки некоторой темпоральной подматрицы G_u порядка 2 равны. Тогда спектр G_u имеет вид (1, 0), а спектр матрицы P имеет вид

$$1, \epsilon, ..., \epsilon^{d-1}, 0, ..., 0. \tag{19}$$

2. Строки некоторой темпоральной подматрицы G_u порядка 2 неравны. Тогда спектр G_u имеет вид $(1, \lambda)$, $|\lambda| < 1$, а спектр матрицы P имеет вид

$$1, \epsilon, ..., \epsilon^{d-1}, r, r\epsilon, ..., r\epsilon^{d-1}, 0, ..., 0. \tag{20}$$

Здесь r — некоторый корень степени d из λ.

Доказательство. 1. В этом случае $\mathrm{rk} G_u = 1$, спектр G_u по предложению 6 равен (1, 0). Ненулевой спектр матрицы P^d согласно теореме 8 состоит из d единиц. Следовательно, спектр P имеет вид (21).

2. Пусть матрица G_u записана в виде (11). В силу предложения 9 спектр этой матрицы имеет вид $(1, \lambda)$, $\lambda = 1 - a - b$. Поскольку строки G_u неравны, то $0 < |\lambda| < 1$. Пользуясь теоремой 7, запишем спектр матрицы P в виде

$$1, \epsilon, ..., \epsilon^{d-1}, \lambda_{d+1}, ..., \lambda_{2d}, \lambda_{2d+1} ... \lambda_n. \tag{21}$$

Спектр матрицы P^d содержит последовательность d единиц, затем последовательность d чисел, равных λ, затем $n - 2d$ нулей.

$$1, ..., 1, \lambda, ..., \lambda, 0, ..., 0. \tag{22}$$

Учитывая, что элементы $\lambda_{d+1}, ..., \lambda_{2d}$ последовательности (21) является корнями степени d из λ, а также следствие 4, получаем утверждение п. 2. ■

9 Спектры импримитивных стохастических матриц малого порядка

Если количество элементов в циклических классах составляют последовательность

$$n_1, n_2, \ldots, n_d, \tag{23}$$

то блок P_{12} имеет размеры $n_1 \times n_2$, блок P_{23} - размеры $n_2 \times n_3$ и т.д. Наконец, блок P_{d1} имеет размеры $n_d \times n_1$. Мы не будем различать формы Фробениуса, отличающиеся нумерацией циклических классов — см. замечание в конце параграфа 3. Первым классом всегда будет класс, имеющий минимальное число элементов.

Выпишем все возможные формы Фробениуса для импримитивных стохастических матриц порядка $n = 2, 3, 4, 5$ и их спектры (когда это возможно).

Случай $n = 2$.Для второго порядка есть только одна неразложимая импримитивная стохастическая матрица. Форма Фробениуса для матрицы такого порядка имеет вид:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Число классов $d = 2$.

Последовательностей типа (23) всего одна: (1, 1).

Для импримитивной матрицы при $n = 2$ мы явно можем выписать спектр матрицы.

Для последовательности (1, 1) спектр равен

$$(1, -1).$$

Случай $n = 3$. Последовательностей типа (23) всего две: (1, 1, 1) и (1, 2). Если $d = 3$, то форма Фробениуса имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вообще, нормальная форма Фробениуса неразложимой стохастической матрицы при $d = n$ имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ .. & .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ 1 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристический многочлен этой матрицы равен $\lambda^n - 1$, спектр совпадает с множеством корней из 1 степени n. Для всех n картина одинакова. Поэтому в дальнейшем мы не будем выписывать матрицы для случая $d = n$.

Случай $n = 3$ и $d = 2$. Форма Фробениуса для матриц такого порядка при (1, 2) имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p & 1-p \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $0 < p < 1$, т.к. если $p = 0$ или $p = 1$, то матрица будет иметь нулевой столбец и потому будет разложимой. По следствию 8 параграфа 7 выпишем спектр P:

$$(1, -1, 0).$$

Случай $n = 4$.Выпишем формы Фробениуса для матриц такого порядка. Последовательностей типа (19) всего четыре:

$$(1, 1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 3), (2, 2) \tag{24}$$

Для случая (1, 1, 2) форма Фробениуса примет вид

$$P = \begin{pmatrix} 0 & P_{12} & 0 \\ 0 & 0 & P_{23} \\ P_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 1-p \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, 0 < p < 1. \tag{25}$$

По следствию 8 параграфа 7 спектр имеет вид (1, ϵ, ϵ', 0), где

$\epsilon = -1/2 + i\frac{\sqrt{3}}{2})$

$\epsilon' = -1/2 - i\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Индекс импримитивности d для этого случая равен трём.

Для случая (1, 3) форма Фробениуса примет вид

$$P = \begin{pmatrix} 0 & P_{12} \\ P_{21} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p & q & r \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{26}$$

$0 < p, q, r < 1$, т.к.в остальных случаях матрица будет иметь нулевые столбцы и потому будет разложимой. По следствию 8 параграфа 7 выпишем спектр (1, -1, 0, 0). Индекс импримитивности d для этого случая равен двум.

Для порядка $n = 4$ единственным случаем, когда спектр P неполностью определяется, является случай (2, 2).

Форма Фробениуса примет вид

$$P = \begin{pmatrix} 0 & P_{12} \\ P_{21} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & p & 1-p \\ 0 & 0 & q & 1-q \\ r & 1-r & 0 & 0 \\ s & 1-s & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{27}$$

матрицы P_{12}, P_{21} размера 2×2. Спектр равен (1, -1, λ_3, λ_4). Индекс импримитивности d для этого случая равен двум. Если хотя бы одна из матриц P_{12}, P_{21} вырождена, то и темпоральные подматрицы $P_{12}P_{21}$ и $P_{21}P_{12}$ вырождены (согласно следствию 9 имеют одинаковые строки). Они имеют одинаковый спектр (1, 0). Следовательно, спектр P равен (1, -1, 0, 0). Если матрицы P_{12} и P_{21} обе невырождены, то и их произведения невырожденны, следовательно, спектр $P_{12}P_{21}$ и $P_{21}P_{12} = (1, a)$, где $a \neq 0$. Матрицы невырождены, поэтому и нулевых собственных значений нет. Из следствия 9 следует, что спектр P равен

$$(1, -1, \sqrt{|a|}, -\sqrt{|a|})$$

Случай $n = 5$. Последовательностей типа (23) всего пять:

$$(1, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 2), (1, 2, 2), (1, 4), (2, 3) \tag{28}$$

В случае $d = 4$, т.е. для последовательности (1, 1, 1, 2) матрица P имеет форму Фробениуса

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p & q \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где p + q = 1, 0 < p, q < 1.

По следствию 8 параграфа 7 спектр P равен

$$(1, -1, i, -i, 0).$$

В случае (1, 4):

$$P = \begin{pmatrix} 0 & p & q & r & s \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где p + q + r + s = 1, p, q, r, s > 0.

По следствию 8 параграфа 7 спектр равен

$$(1, -1, 0, 0, 0).$$

В случае $d = 2$, т.е. для последовательности (2, 3) форма Фробениуса примет вид:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & P_{12} \\ P_{21} & 0 \end{pmatrix},$$

где матрица P_{12} размера 2×3, а матрица P_{21} размера 3×2 и возведём эту матрицу в квадрат

$$P^2 = \begin{pmatrix} P_{12}P_{21} & 0 \\ 0 & P_{21}P_{12} \end{pmatrix},$$

где матрица $P_{12}P_{21}$ размера 2×2, а матрица $P_{21}P_{12}$ размера 3×3.

Рассмотрим всевозможные варианты, связанные с рангом темпоральной подматрицы $P_{12}P_{21}$.

1) $\mathrm{rk}P_{12}P_{21} = 1$.

В этом случае по следствию 9 п.1 спектр P равен (1, -1, 0, 0, 0).

2)$\mathrm{rk}P_{12}P_{21} = 2$. Тогда спектр $P_{12}P_{21}$ равен (1, a), $0 < |\mathrm{a}| < 1$. Отсюда по следствию 9 п.2, учитывая, что в нашем случае $\epsilon = -1$, следует, что спектр P имеет вид

$$(1, -1, r, -r, 0),$$

где r - некоторый корень степени 2 из a.

Примеры к случаю (2, 3).

Случай 1) может реализоваться, если $\mathrm{rk}P_{12}$ или $\mathrm{rk}P_{21} = 1$. Но такой случай может быть и тогда, когда $\mathrm{rk}P_{12} = rkP_{21} = 2$.

Например, пусть

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что ненулевые блоки в этой форме Фробениуса имеют ранг 2. Однако

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Видно, что строки темпоральной подматрицы $P_{12}P_{21}$ равны.

Следовательно, по следствию 9, п.1, спектр P равен

$$(1, -1, 0, 0, 0).$$

Для реализации случая 2) возьмём такую матрицу:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим её темпоральные компоненты.

$$P^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Видно, что строки темпоральных подматриц не равны. Спектр подматрицы

$$P_{12}P_{21} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет вид $(1, a)$. По предложению 9: $a = -\frac{1}{2}$. По следствию 9 спектр P равен

$$(1, -1, i\frac{\sqrt{2}}{2}, -i\frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$$

.

10 Список литературы

[1] Хорн Р.,Джонсон Ч. Матричный анализ. — М.: Мир, 1989

[2] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц.—М.Наука, 1967.

[3] Романовский В.И. Дискретные цепи Маркова. — М.: Гостехиздат, 1949.

[4] Альпин Ю. А., Альпина В. С. Теорема Перрона — Фробениуса: доказательство с помощью цепей Маркова. Зап. научн. семин. ПОМИ (2008) Т. 359, 5-16.

[5] Альпин Ю. А., Альпина В. С. О нормальной форме стохастической матрицы. Учен. записки Каз. ун-та - 2012. - Т. 154. - кн.2. - 60-72.