ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ им. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО
КАФЕДРА ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ПРИБЛИЖЕНИЙ

Направление: 01.03.01– Математика

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(Бакалаврская работа)

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ВЕРСИЯ НЕРАВЕНСТВА БРУННА-МИНКОВСКОГО И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Работа завершена:
Студент(ка) гр.__________

______________<Гаязова А.Н.>"__"__2015 г.

Работа допущена к защите в ГАК:
Научный руководитель:

__________<Авхадиев Ф.Г.><Док.физ.-мат. наук, профессор>"__"__2015 г.

Заведующий кафедрой:

__________<Авхадиев Ф.Г.><Док.физ.-мат. наук, профессор>"__"__2015 г.

Казань – 2015

Содержание.

Введение.

Общее неравенство Брунна-Минковского для произвольных тел X и Y, имеет вид

$$|(1-\lambda)X+\lambda Y|^{\frac{1}{n}} \geq (1-\lambda)|X|^{\frac{1}{n}}+\lambda|Y|^{\frac{1}{n}}, \qquad (1)$$

где λ – любое число из интервала (0,1), $|X|$ – мера множества X (допустимое обозначение $|X| = vol(X) = mesX$), $|Y|$ – мера множества Y. $|X|$ и $|Y|$ обозначают площадь при $n = 2$ и объем при $n \geq 3$.

О п р е д е л е н и е. *Суммой Минковского* для двух множеств $A, B \in \mathbf{R}^n$ называется множество C, состоящее из сумм всевозможных векторов из A и B:

$$C = \{c | c = a + b, a \in A, b \in B\}.$$

Данное неравенство (1) было получено в 1887 году Брунном в случае $n = 3$. В 1910 году Минковский указал на ошибку в доказательстве Брунна, которую тот исправил. И Брунн, и Минковский показали, что равенство достигается тогда и только тогда, когда X и Y являются равными с точностью до переноса и расширения.

Неравенства Брунна-Минковского для случая n-мерных выпуклых тел.

Неравенство (1) будем рассматривать для n-мерных выпуклых тел. Сформулируем теперь общее неравенство в несколько иной форме (равносильно, впрочем, неравенство (1), примененному к множествам $X_1 = (1-\lambda)X$ и $Y_1 = \lambda Y$. В 1935 году Л.А.Люстерник доказал, что неравенство (1) является верным для произвольных ограниченных и измеримых множеств X и Y. В 1954 году Хадвигер и Охман опубликовали доказательство общего неравенства Брунна-Минковсокого. Его мы и приводим ниже.

Т е о р е м а 1. *Пусть X и Y - непустые компакты в $\mathbf{R}^n$. Тогда*

$$|X+Y|^{\frac{1}{n}} \geq |X|^{\frac{1}{n}} + |Y|^{\frac{1}{n}}. \tag{2}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о (Хадвигера-Охмана). Рассмотрим вначале частный случай, когда X, Y и $X+Y$ - параллелепипеды, грани которых параллельны координатными плоскостям и ребра которых имеют длины x_k, y_k и $x_k + y_k$ ($k = 1, ..., n$), соответственно. Далее разделим наше доказательство на 2 случая, когда $n = 2$ и $n \geq 3$.

Начнем наше доказатльство со случая $n = 2$. Следовательно, X,Y и $X+Y$ являются прямоугольниками. Тогда

$$|X| = x_1 \cdot x_2, \qquad |Y| = y_1 \cdot y_2, \qquad |X+Y| = (x_1+y_1)(x_2+y_2),$$

неравенство (2), следовательно, примет вид

$$1 = \frac{1}{2}\left(\frac{x_1}{x_1+y_1} + \frac{x_2}{x_2+y_2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{y_1}{x_1+y_1} + \frac{y_2}{x_2+y_2}\right) \geq$$
$$\geq \sqrt{\frac{x_1 \cdot x_2}{(x_1+y_1)(x_2+y_2)}} + \sqrt{\frac{y_1 \cdot y_2}{(x_1+y_1)(x_2+y_2)}}.$$

Данное неравенство можно переписать в следующем виде,

$$1 \geq \sqrt{\frac{|X|}{|X+Y|}} + \sqrt{\frac{|Y|}{|X+Y|}}.$$

Далее вынесим за скобкт общий знаменатель,

$$1 \geq \sqrt{\frac{1}{|X+Y|}}(\sqrt{|X|} + \sqrt{|Y|}).$$

Теперь домножим обе части на $\sqrt{|X+Y|}$ (при условие, что $|X+Y| \neq 0$),

$$\sqrt{|X+Y|} \geq \sqrt{|X|} + \sqrt{|Y|}.$$

Слудеющим действием возведем обе части в квадрат,

$$(\sqrt{|X+Y|})^2 \geq (\sqrt{|X|}+\sqrt{|Y|})^2.$$

Далее получаем, такое неравенство

$$|X+Y| \geq (\sqrt{|X|}+\sqrt{|Y|})^2.$$

следовательно, мы привели к нужному виду и доказали неравенство (2) для случая $n=2$.

Далее рассмотрим случай для $n \geq 3$. В этом случае мера наших параллелепипедов X, Y и $X+Y$ будет находится, следующим образом,

$$|X| = \prod_{k=1}^{n} x_k, \qquad |Y| = \prod_{k=1}^{n} y_k, \qquad |X+Y| = \prod_{k=1}^{n}(x_k+y_k).$$

Неравенство (2) для двух параллелепипедов вытекает из неравенства для арифметических и геометрических средних. Более подробно этот вывод мы осуществляем, следующим образом. Имеем простые равенства

$$1 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k+y_k}{x_k+y_k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{x_k+y_k} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k}{x_k+y_k}$$

Запишем наши дроби, таким образом,

$$a_k = \frac{x_k}{x_k+y_k}, \qquad b_k = \frac{y_k}{x_k+y_k}.$$

Далее введем обозначения

$$a_{ar} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k, \qquad a_{geom} = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}}.$$

Теперь используем неравенство Коши(неравенство о средних), которое утверждает, что для любых неотрицательных чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ верно неравенсто $a_{ar} \geq a_{geom}$. Следовательно, справедливо неравенство

$$1 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{x_k}{x_k+y_k} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{y_k}{x_k+y_k} \geq \left(\prod_{k=1}^{n}\frac{x_k}{x_k+y_k}\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{k=1}^{n}\frac{y_k}{x_k+y_k}\right)^{\frac{1}{n}} =$$

$$= \frac{\left(\prod\limits_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}}}{\left(\prod\limits_{k=1}^{n}(x_k+y_k)\right)^{\frac{1}{n}}} + \frac{\left(\prod\limits_{k=1}^{n} y_k\right)^{\frac{1}{n}}}{\left(\prod\limits_{k=1}^{n}(x_k+y_k)\right)^{\frac{1}{n}}} = \frac{|X|^{\frac{1}{n}}+|Y|^{\frac{1}{n}}}{|X+Y|^{\frac{1}{n}}}.$$

Теперь перепишем получившиеся неравенство

$$1 \geq \frac{|X|^{\frac{1}{n}} + |Y|^{\frac{1}{n}}}{|X+Y|^{\frac{1}{n}}}.$$

Умножим обе части на $|X+Y|^{\frac{1}{n}}$, получим

$$|X+Y|^{\frac{1}{n}} \geq |X|^{\frac{1}{n}} + |Y|^{\frac{1}{n}}.$$

Пусть теперь X и Y являются элементарными множествами, то есть X и Y составлены из конечного числа вырожденных замкнутых параллелепипедов с ребрами, параллельными координатным осям. Пусть l - суммарное число составляющих X и Y параллелепипедов, $l > 2$. Применим метод математической индукций по l. Пусть (2) верно для элементарных X и Y, когда общее число составляющих X и Y параллелепипедов меньше или равно $(l-1)$ и $l > 2$. Тогда хотя бы одно из множеств X и Y содержит более двух состовляющих параллелепипедов.

Предположим, для определенности, что таким множеством является X. Без ограничения общности можно считать, что по обе стороны от гиперплоскоти $\{x_n = 0\}$ находятся составляющие X параллелепипеды. Тогда $\{x_n = 0\}$ разбивает X на непустые элементарные множества X_1 и X_2, лежащие в разных полупространствах и такие, что число составляющих параллелепипедов в каждом множестве X_1 и X_2 будет меньше, чем в X. Через $\mu \in (0, 1)$ обозначим число, определяемое равенством

$$|X_1| = \mu|X|, \qquad |X_2| = (1-\mu)|X|.$$

Параллельно перенесем множество Y так, чтобы гиперплоскость $\{x_n = 0\}$ делила Y на множества Y_1 и Y_2, причем Y_1 и X_1 находятся по одну сторону от $\{x_n = 0\}$ и

$$|Y_1| = \mu|Y|, \qquad |Y_2| = (1-\mu)|Y|.$$

Учитывая следущие факты: переносы не меняют $|X|, |Y|, |X+Y|$, а Y_1 и Y_2 - элементарные множества, лежащие в разных полупространствах и такие, что число составляющих параллелепипедов в каждом из них меньше, чем в Y. Так как в каждой из пар (X_1, Y_1) и (X_2, Y_2) не более, чем $(l-1)$ составляющих параллелепипедов.

По предположенной индукци, следующее неравенство верно в верхней полупространстве $\{x_n\} > 0$

$$|X_1 + Y_1| \geq (|X_1|^{\frac{1}{n}} + |Y_1|^{\frac{1}{n}})^n.$$

Так же можно записать неравенство и для нижней полупространства $\{x_n\} < 0$

$$|X_2 + Y_2| \geq (|X_2|^{\frac{1}{n}} + |Y_2|^{\frac{1}{n}})^n.$$

Теперь запишем, чему равна сумма $|X + Y|$,

$$|X + Y| = |X_1 + Y_1| + |X_2 + Y_2| + Z.$$

Следовательно, будет верно неравенство,

$$|X + Y| \geq |X_1 + Y_1| + |X_2 + Y_2|.$$

Очевидные соотношения и предположение индукции позволяют записать

$$\begin{gathered}
|X + Y| \geq |X_1 + Y_1| + |X_2 + Y_2| \geq \\
\geq (|X_1|^{\frac{1}{n}} + |Y_1|^{\frac{1}{n}})^n + (|X_2|^{\frac{1}{n}} + |Y_2|^{\frac{1}{n}})^n = \\
= (\mu^{\frac{1}{n}}|X|^{\frac{1}{n}} + \mu^{\frac{1}{n}}|Y|^{\frac{1}{n}})^n + ((1-\mu)^{\frac{1}{n}}|X|^{\frac{1}{n}} + (1-\mu)^{\frac{1}{n}}|Y|^{\frac{1}{n}})^n = \\
= (\mu^{\frac{1}{n}}(|X|^{\frac{1}{n}} + |Y|^{\frac{1}{n}}))^n + ((1-\mu)^{\frac{1}{n}}(|X|^{\frac{1}{n}} + |Y|^{\frac{1}{n}}))^n = \\
= (\mu^{\frac{1}{n}})^n(|X|^{\frac{1}{n}} + |Y|^{\frac{1}{n}})^n + ((1-\mu)^{\frac{1}{n}})^n(|X|^{\frac{1}{n}} + |Y|^{\frac{1}{n}})^n = \\
= \mu(|X|^{\frac{1}{n}} + |Y|^{\frac{1}{n}})^n + (1-\mu)(|X|^{\frac{1}{n}} + |Y|^{\frac{1}{n}})^n = \\
= (|X|^{\frac{1}{n}} + |Y|^{\frac{1}{n}})^n.
\end{gathered}$$

Перепишем наше неравенство,

$$|X + Y| \geq (|X|^{\frac{1}{n}} + |Y|^{\frac{1}{n}})^n.$$

Далее возведем все в степень $\frac{1}{n}$,

$$|X + Y|^{\frac{1}{n}} \geq |X|^{\frac{1}{n}} + |Y|^{\frac{1}{n}}. \tag{3}$$

Заметим, что всякий компакт X и Y можно приближать элементарными X_k и Y_k, соответственно, так, чтобы $|X_k| \to |X|$ и $|Y_k| \to |Y|$. Поэтому доказательство неравенства (2) завершается предельным переходом

$$\begin{gathered}
|X + Y|^{\frac{1}{n}} \geq \lim_{k\to\infty} |X_k + Y_k|^{\frac{1}{n}} \geq \lim_{k\to\infty} (|X_k|^{\frac{1}{n}} + |Y_k|^{\frac{1}{n}}) = \\
= |X|^{\frac{1}{n}} + |Y|^{\frac{1}{n}}. \ \square
\end{gathered}$$

Неравенство типа Брунна-Минковского.

В 1956 году Хадвигер обнаружил, что неравенство типа Брунна-Минковского справедливы и для двух моментов инерции выпуклой области, а именно, момента области относительно центра масс и момента относительно гиперплоскости. В 1971-1972 годах Прекопа и Лайндлер доказали следующую функциональную версию Брунна-Минковского.

Т е о р е м а 2. *Пусть 0< $t<1$, и пусть φ_0, φ_1, h – неотрицательные непрерывные функции в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Если для всех $x, y \in \mathbf{R}$ выполняется неравенство*

$$h((1-t)x+ty) \geqslant (\varphi_0(x))^{1-t}(\varphi_1(y))^t, \tag{4}$$

то будет выполнятся и интегральное нераевнство

$$\int_{\mathbf{R}} h(x)dx \geqslant \left(\int\limits_{\mathbf{R}} \varphi_0(x)dx\right)^{1-t} \left(\int\limits_{\mathbf{R}} \varphi_0(x)dx\right)^t. \tag{5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если хотя бы один из интегралов в правой части неравенства (6) равен нулю, тогда все верно. Поэтому предположим с учетом неотрицательности функций φ_0, φ_1, что

$$\Phi_j := \int\limits_{\mathbf{R}} \varphi_j(x)dx > 0 \qquad (j=0,1),$$

$$\Phi_0 := \int\limits_{\mathbf{R}} \varphi_0(x)dx > 0,$$

$$\Phi_1 := \int\limits_{\mathbf{R}} \varphi_1(x)dx > 0.$$

Φ_0 и Φ_1 две монотонно неубывающие, почти всюду дифференцируемые функции $v_j : [0,1] \to \mathbf{R}$, сичтая, что $v_j(t)$ является наименьшим числом, удовлетворяющим равенству

$$\frac{1}{\Phi_j} \int\limits_{-\infty}^{v_j(t)} \varphi_j(x)dx = t \qquad (t \in [0,1], j=0,1).$$

Дифференцируя это тождество по переменной t для почти всех $t \in [0,1]$ получаем два следующих равенства

$$\frac{\varphi_0(v_0(t))v_0'(t)}{\Phi_0} = \frac{\varphi_1(v_1(t))v_1'(t)}{\Phi_1} = 1.$$

В силу этих равенст и простого неравенства Йенсена $(1-t)a+tb \geqslant a^{1-t}b^t$ для функции

$$V(t) := (1-t)v_0(t) + tv_1(t)$$

применем это к $V'(t)$, взяв $a = v_0'(t)$ и $b = v_1'(t)$, получаем

$$V'(t) := (1-t)v_0'(t) + tv_1'(t) \geqslant (v_0'(t))^{1-t}(v_1'(t))^t =$$
$$= \left(\frac{\Phi_0}{\varphi_0(v_0(t))}\right)^{1-t}\left(\frac{\Phi_1}{\varphi_1(v_1(t))}\right)^t.$$

Следовательно, с учетом заданного в условии теоремы неравенства (5) будем иметь

$$\int_{\mathbf{R}} h(x)dx = \{\text{сделаем замену } x = V(t), dx = dV(t)\} =$$
$$= \int_0^1 h(V(t))dV(t) \geqslant \int_0^1 h(V(t))V'(t)dt \geqslant$$
$$\geqslant \int_0^1 \varphi_0(v_0(t))^{1-t}\varphi_1(v_1(t))^t\left(\frac{\Phi_0}{\varphi_0(v_0(t))}\right)^{1-t}\left(\frac{\Phi_1}{\varphi_1(v_1(t))}\right)^t dt =$$
$$= \Phi_0^{1-t}\Phi_1^t = \left(\int_{\mathbf{R}} \varphi_0(x)dx\right)^{1-t}\left(\int_{\mathbf{R}} \varphi_1(x)dx\right)^t,$$

что и требовалось доказать. □

Т е о р е м а 3. *Пусть 0< t < 1, и пусть φ_0, φ_1, h – неотрицательные непрерывные функции в евклидовом пространстве $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. Если для всех $x, y \in \mathbf{R}^n$ выполняется неравенство,*

$$h((1-t)x + ty) \geqslant (\varphi_0(x))^{1-t}(\varphi_1(y))^t, \tag{6}$$

то выполнится и интегральное неравенство

$$\int_{\mathbf{R}^n} h(x)dx \geqslant \left(\int_{\mathbf{R}^n} \varphi_0(x)dx\right)^{1-t}\left(\int_{\mathbf{R}^n} \varphi_1(x)dx\right)^t. \tag{7}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для случая $n = 1$ мы доказалии в доказательстве теоремы 3. Далее будем доказывать по индукции. Предположим теорема 2 верна для случая $\mathbf{R}^k (k \leq n-1)$. Покажем, что она верна и для размерности n.

Пусть $h : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, \varphi_0 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}, \varphi_1 : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, неотрицательные непрерывные функции и выполняется неравенство

$$h((1-t)x + ty) \geq \varphi_0^{1-t}(x) \cdot \varphi_1^t(y),$$

где $x = (\underbrace{x_1, x_2, ..., x_{n-1}}_{x'}, x_n) = (x', x_n), \qquad y = (\underbrace{y_1, y_2, ..., y_{n-1}}_{y'}, y_n) = (y', y_n)$. Обозначим $(z', z_n) = (1-t)x + ty$, следовательно,

$$\begin{cases} z' = (1-t)x' + ty' \\ z_n = (1-t)x_n + ty_n \end{cases}$$

Фиксируем произвольно взятые числа $x_n, y_n, z_n = (1-t)x_n + ty_n$ и рассмотрим функции $(n-1)$ переменной, определяем их формулами

$$\Phi_{0x_n}(x') \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_0(x) = \varphi(x', x_n), x' \in \mathbf{R}^{n-1},$$
$$\Phi_{1y_n}(y') \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_1(y) = \varphi_1(y', y_n), y' \in \mathbf{R}^{n-1},$$
$$H_{z_n}(z') \stackrel{\text{def}}{=} h(z) = h(z', z_n), z' \in \mathbf{R}^{n-1}.$$

Тогда

$$H_{z_n}((1-t)x' + ty') = h((1-t)x + ty) \geq (\varphi_0(x))^{1-t}(\varphi_1(y))^t = (\Phi_{ox_n}(x'))^{1-t} \cdot (\Phi_{1y_n}(y'))^t.$$

По предположеной индукций к тройке $H_{z_n}, \Phi_{1y_n}, \Phi_{0x_n}$ применима теорема 3 в $\mathbf{R}^{n-1}$,

$$\int\limits_{\mathbf{R}^{n-1}} H_{z_n}(x')dx' \geqslant \left(\int\limits_{\mathbf{R}^{n-1}} \Phi_{0x_n}(x')dx' \right)^{1-t} \left(\int\limits_{\mathbf{R}^{n-1}} \Phi_{1y_n}(x')dx' \right)^t. \tag{8}$$

Введем обозначения

$$\begin{cases} h_1(z_n) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{\mathbf{R}^{n-1}} H_{z_n}(x')dx, \\ \varphi_{01}(x_n) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{\mathbf{R}^{n-1}} \Phi_{0x_n}(x')dx' \\ \varphi_{11}(y_n) \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{\mathbf{R}^{n-1}} \Phi_{1y_n}(x')dx'. \end{cases}$$

Отсюда, в силу неравенства (8), следует,

$$h_1((1-t)x_n + ty_n) \geq (\varphi_{01}(x_n))^{1-t}(\varphi_{11}(y_n))^t, \forall x_n, y_n \in \mathbf{R}$$

К тройке $h_1, \varphi_{01}, \varphi_{11}$ так же применима теорема 3,

$$\int\limits_{\mathbf{R}^{n-1}} h_1(z_n)dz_n \geqslant \left(\int\limits_{\mathbf{R}^{n-1}} \varphi_{01}(x_n)dx_n \right)^{1-t} \left(\int\limits_{\mathbf{R}^{n-1}} \varphi_{11}(y_n)dy_n \right)^{t}. \qquad (9)$$

Далее вместо $h_1, \varphi_{01}, \varphi_{11}$ подставляем выражения, которые они определяются и используя трижды теорему Фубини, получаем

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} h(x)dx = \int\limits_{\mathbf{R}} \int\limits_{\mathbf{R}^{n-1}} H_{z_n}(x')dx'dz_n = \int\limits_{\mathbf{R}} h_1(z_n)dz_n \geqslant$$

$$\geqslant \left(\int\limits_{\mathbf{R}} \varphi_{10}(x_n)dx_n \right)^{1-t} \left(\int\limits_{\mathbf{R}} \varphi_{11}(y_n)dy_n \right)^{t} =$$

$$= \left(\int\limits_{\mathbf{R}} \int\limits_{\mathbf{R}^{n-1}} \Phi_{0x_n}(x')dx_n dx' \right)^{1-t} \left(\int\limits_{\mathbf{R}} \int\limits_{\mathbf{R}^{n-1}} \Phi_{1y_n}(y')dy_n dy' \right)^{t} =$$

$$= \left(\int\limits_{\mathbf{R}^n} \varphi_0(x)dx \right)^{1-t} \left(\int\limits_{\mathbf{R}^n} \varphi_1(y)dy \right)^{t}.$$

На этом и завершается наше доказательство.

Интеграл Стилтьеса.

Интеграл Стилтьеса является обобщением обычного определенного интеграла Римана. Его будем определять следующим образом.

Пусть в промежутке $[a,b]$ заданы две ограниченные функции $f(x)$ и $g(x)$. Разложим точками

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$$

промежуток $[a,b]$ на части и положим $\lambda = \max \Delta x_i$. Выбрав в каждой из частей $[x_i, x_{i+1}] (i = \overline{0, n-1})$ по точке ξ_i, вычислим

значение $f(\xi_i)$ функции $f(x)$ и умножим его на соответствующее промежутку $[x_i, x_{i+1}]$ приращение функции $g(x)$

$$\Delta g(x_i) = g(x_{i+1}) - g(x_i).$$

Наконец, составим сумму всех таких произведений:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta g(x_i).$$

Эта сумма носит название интегральной суммы Стилтьеса.

Конечный предел суммы Стилтьеса σ при стремлении $\lambda = \max \Delta x_i$ к нулю называется интегралом Стилтьеса функции $f(x)$ по функции $g(x)$ и обозначается символом

$$\int\limits_a^b f(x)\, dg(x) = \lim_{\lambda \to 0} \sigma = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta g(x_i).$$

Далее, установим общие условия существования интеграла Стилтьеса, ограничиваясь, впрочем, предложением, что функция $g(x)$ монотонно возрастает.

Введем сумму Дарбу,

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta g(x_i), \qquad S = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta g(x_i),$$

где m_i и M_i обозначают, соответственно, нижнюю и верхнюю точные границы функции $f(x)$ в i-м промежутке $[x_i, x_{i+1}]$

Эти суммы мы будем называть нижней и верхней суммами Дарбу-Стилтьеса.

Прежде всего, ясно, что (при одном и том же разбиении)

$$s \leqslant \sigma \leqslant S,$$

причем s и S служат точными границами для стилтьесовых сумм σ.

Сами суммы Дарбу–Стилтьеса обладают, следующими двумя свойствами:

1^o. Если к имеющимся точкам деления добавитьб новые точки, то нижняя сумма Дарбу–Стилтьеса может от этого разве лишь возрасти, а верхяя сумма – разве лишь уменьшится.

2^o. Каждая нижняя сумма Дарбу–Стилтьеса не превосходит каждой верхней суммы, хотя бы и отвечающей другому разбиению промежутка.

З а д а н и е 1. *Необходимо доказать, что следующие три утверждения эквивалентны, для любого $t \in [0;1]$ и любых ограниченных измерениях множеств в $X, Y, (1-t)X + tY$ справедливы неравенства:*

(1)$|(1-t)X + tY|^{1/n} \geq (1-t)|X|^{1/n} + t|Y|^{1/n}$;
(2)$|(1-t)X + tY| \geq |X|^{1-t} \cdot |Y|^t$;
(3)$|(1-t)X + tY| \geq \min\{|X|, |Y|\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1. Докажем, что из неравенство (1) следует неравенство (2).

Введем обозначения $|X|^{1/n} = a, \quad |Y|^{1/n} = b$. Следовательно,

$$\left(|(1-t)X + tY|^{1/n}\right)^n \geq (1-t)|X|^{1/n} + t|Y|^{1/n} =$$
$$= [(1-t)a + tb]^n \geq a^{(1-t)n} \cdot b^{tn}.$$

Последнее неравенство равносильно неравенству Йенсена:

$$(1-t)a + tb \geq a^{1-t}b^t.$$

Сделаем еще одну замену $a'^p = a, \quad b'^q = b$. Отсюда следует, что $a' = a^{1/p}, \quad b' = b^{1/q}$, теперь используя наши значеня, сделаем еще одну замену $\frac{1}{p} = t, \quad \frac{1}{q} = 1-t$. Следовательно, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = t + 1 - t = 1$. Теперь наше неравенство Йенсена будет иметь вид

$$a'b' = \frac{a'^p}{p} + \frac{b'^q}{q}.$$

2. Докажем, что из неравенство (2) следует неравенство (3).

$$|(1-t)X + tY|^{1/n} \geq |X|^{1-t}|Y|^t = a^{1-t}b^t, \quad t \in [0;1].$$

Обозначим, $y = a^{1-t} \cdot b^t, \quad t \in [0;1]$. Найдем extr функций y:

$$y' = -a^{1-t} \cdot b^t \cdot \ln a + a^{1-t} \cdot b^t \cdot \ln b.$$

Далее приравняем к нулю

$$-a^{1-t} \cdot b^t \cdot \ln a + a^{1-t} \cdot b^t \cdot \ln b = 0.$$

Вынесим за скобки общие множители

$$a^{1-t} \cdot b^t \cdot (-\ln a + \ln b) = 0.$$

Так как мы знаем, что $a, b > 0$, то мы можем разделить на произведение $a^{1-t} \cdot b^t$, получим

$$-\ln a + \ln b = 0.$$

Следовательно переносим $\ln b$ в правую часть и умножаем все на (-1),

$$\ln a = \ln b$$

Следовательно, $y(0) = a, y(1) = b$.

3. Далее переидем к доказательству того, что из неравенства (3) следует неравенство (1).

$$\left(|(1-t)X + tY|^{1/n}\right)^n = |(1-t)X + tY| \geq \min\{|X|, |Y|\} \geq (1-t)|X|^{1/n} + t|Y|^{1/n}.$$

Пользуясь следующим свойством объемов $|sX| = s^n|X|$ для любого $s > 0$. Так же мы знаем, что неравенство (1) необходимо доказать только для $t = \frac{1}{2}$ (это следует из доказательства неравенства Б-М). Применяя неравенство из утверждения (3) к множествам

$$X_1 = \frac{1}{|X|^{1/n}} \cdot X = \frac{X}{|X|^{1/n}},$$
$$Y_1 = \frac{1}{|Y|^{1/n}} \cdot Y = \frac{Y}{|Y|^{1/n}}.$$

Получаем для любого $t_0 \in [0; 1]$

$$|(1-t_0)X_1 + t_0Y_1| \geq \min\{|X_1, Y_1|\} = 1,$$

так как $|X_1| = 1, |Y_1| = 1$. Тогда обозначим,

$$t_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|Y|^{1/n}}{|X|^{1/n} + |Y|^{1/n}}, \quad 1 - t_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|X|^{1/n}}{|X|^{1/n} + |Y|^{1/n}}.$$

Следовательно, сделав обратныую замену, получим,

$$1 \leq |(1-t_0)X_1 + t_0Y_1| = \Big|\frac{|X|^{1/n}}{|X|^{1/n} + |Y|^{1/n}} \cdot \frac{X}{|X|^{1/n}} + \frac{|Y|^{1/n}}{|X|^{1/n} + |Y|^{1/n}} \cdot \frac{Y}{|Y|^{1/n}}\Big| =$$
$$= \Big|\frac{X}{|X|^{1/n} + |Y|^{1/n}} + \frac{Y}{|X|^{1/n} + |Y|^{1/n}}\Big|$$

Получается,

$$\Big|\frac{X}{|X|^{1/n} + |Y|^{1/n}} + \frac{Y}{|X|^{1/n} + |Y|^{1/n}}\Big| \leq$$

Теперь домножим обе части на $(|X|^{1/n} + |Y|^{1/n})$,

$$|X + Y| \geq \left[|X|^{1/n} + |Y|^{1/n}\right]^n.$$

Извлечем n-й корень с обеих частей

$$\sqrt[n]{|X + Y|} \geq |X|^{1/n} + |Y|^{1/n}.$$

Что и требовалось найти. $\square$

З а д а н и е 2. *Как следствие теоремы Лайндлера-Прекопы получите следующие утверждение:*

для любого $t \in [0;1]$ и любых ограниченных измеримых множеств $X, Y, (1-t)X+tY$ справедливо неравенство

$$|(1-t)X+tY| \geq |X|^{1-t}|Y|^t.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

В качестве неотрицательных интегрируемых функций φ_0, φ_1, h возьмем характеристические функций $\chi_X(x), \chi_Y(y), \chi_{(1-t)X+tY}(z)$ множеств $X, Y, (1-t)X+tY$, соответственно. Следовательно,

$$\varphi_0(x) = \chi_X(x), \text{то есть} \quad \varphi_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin X; \\ 1, & \text{если } x \in X. \end{cases}$$

$$\varphi_1(y) = \chi_Y(y), \text{то есть} \quad \varphi_1(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \notin Y; \\ 1, & \text{если } y \in Y. \end{cases}$$

$$h(z) = \chi_{(1-t)X+tY}(z), z = (1-t)x+ty, \text{то есть} \quad h(z) = \begin{cases} 0, & \text{если } z \notin (1-t)X+tY; \\ 1, & \text{если } z \in (1-t)X+tY. \end{cases}$$

Рассмотрим теорему Прекопы-Лайндлера, необходимо доказать, что следующее неравенство верно,

$$h((1-t)x+ty) \geq \varphi_0^{1-t}(x) \cdot \varphi_0^t(y), \forall x, y \in \mathbf{R}^n.$$

Докажем, что для любого $x \in X$ и $y \in Y$, следует что $(1-t)x+ty \in (1-t)X+tY$.

Если все это выполняется, тогда $\varphi_0(x) = 1, \varphi_1(y) = 1, h((1-t)x+ty) = 1$. Значит неравенство примет вид

$$1 \geq 1^{1-t} \cdot 1^t,$$

получившиеся неравенство верно.

Рассмотрим еще несколько случаев.

Если $x \notin X$, $y \in Y$, тогда в правой части неравенства будет стоять ноль, т.к. $\varphi_0(x) = 0$.

Если $x \in X$, $y \notin Y$, тогда в правой части неравенства будет стоять ноль, т.к. $\varphi_1(y) = 0$.

Если $x \notin X$, $y \notin Y$, тогда в правой части неравенства будет стоять ноль, т.к. $\varphi_0(x) = 0$ и $\varphi_1(y) = 0$.

Остальные случай таковы, что справа стоит 0, а слева, либо 0, либо 1, следовательно, можно сказать, что данное неравенство верно для любых $x, y \in \mathbf{R}^n$.

Так как предыдущее неравенство верно, следовательно верно и интергральное неравенство, по теореме Прекопы-Лайндлера,

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} h(x)dx \geqslant \left(\int\limits_{\mathbf{R}^n} \varphi_0(x)dx\right)^{1-t} \left(\int\limits_{\mathbf{R}^n} \varphi_1(x)dx\right)^{t}.$$

Рассмотрим каждый интеграл из неравенство по отдельности,

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} \varphi_0(x)dx = \int\limits_{X} 1 \cdot dx + \int\limits_{X} 0 \cdot dx = \int\limits_{X} dx = |X|,$$

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} \varphi_1(y)dy = \int\limits_{Y} 1 \cdot dy + \int\limits_{Y} 0 \cdot dy = \int\limits_{Y} dy = |Y|,$$

$$\int\limits_{\mathbf{R}^n} hdz = \int\limits_{(1-t)X+tY} 1 \cdot dz + \int\limits_{(1-t)X+tY} 0 \cdot dz = \int\limits_{(1-t)X+tY} dz = |(1-t)X + tY|,$$

Следовательно, мы можем переписать наше неравенство следующим образом,

$$|(1-t)X + tY| \geq |X|^{1-t}|Y|^t.$$

Что и требовалось доказать.

Литература

[1] Авхадиев, Ф.Г. Экстремальные проблемы теории функции: рукопись / Ф.Г. Авхадиев - Казань, 2015.

[2] Авхадиев, Ф.Г. Введение в геометрическую теорию функций: учеб. пособие / Ф.Г. Авхадиев - Казань, 2012.

[3] Boroczky, K.J. The log-Brunn-Minkowski inequality / K. J. Boroczky, E. Lutwak, D. Yang, G. Zhang, 2013.

[4] Haberl, C. The even Orlicz Minkowski problem / C. Haberl, E. Lutwak, D. Yang, and G. Zhang - Adv. Math., 2010

[5] Ball, K. M., Boroczky, K. J. Stability of some versions of the PrekopaLeindler inequality / K.M. Ball, K.J. Boroczky - Monatshefte fur Mathematik, 2011

[6] Фихтенгольц, Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: Учебник. В 3-х тт. Том 1 / Г.М. Фихтенгольц - Лань, 2009