Пространства Буземана и связанные с ними проблемы

П.Д. Андреев

25.11.2016

Отрезок

Пусть (X, d) — метрическое пространство. **Отрезком** в X, соединяющим точки $x, y \in X$, называется образ числового отрезка $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ при изометрическом отображении $\gamma : [\alpha, \beta] \to X$, при котором $\gamma(\alpha) = x$ и $\gamma(\beta) = y$.

Отрезок

Пусть (X, d) — метрическое пространство. **Отрезком** в X, соединяющим точки $x, y \in X$, называется образ числового отрезка $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ при изометрическом отображении $\gamma : [\alpha, \beta] \to X$, при котором $\gamma(\alpha) = x$ и $\gamma(\beta) = y$. Точки x, y называются **концами отрезка**.

Отрезок

Пусть (X, d) — метрическое пространство. **Отрезком** в X, соединяющим точки $x, y \in X$, называется образ числового отрезка $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ при изометрическом отображении $\gamma : [\alpha, \beta] \to X$, при котором $\gamma(\alpha) = x$ и $\gamma(\beta) = y$. Точки x, y называются **концами отрезка**. Отображение γ — **натуральная параметризация** отрезка.

Геодезические пространства

Отрезок

Пусть (X, d) — метрическое пространство. **Отрезком** в X, соединяющим точки $x, y \in X$, называется образ числового отрезка $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ при изометрическом отображении $\gamma : [\alpha, \beta] \to X$, при котором $\gamma(\alpha) = x$ и $\gamma(\beta) = y$. Точки x, y называются **концами отрезка**. Отображение γ — **натуральная параметризация** отрезка.
Иначе говоря, отрезок с концами $x, y \in X$ есть образ спрямляемого пути, соединяющего x с y, длина которого равна расстоянию между x и y.

Геодезические пространства

Отрезок

Пусть (X, d) — метрическое пространство. **Отрезком** в X, соединяющим точки $x, y \in X$, называется образ числового отрезка $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ при изометрическом отображении $\gamma : [\alpha, \beta] \to X$, при котором $\gamma(\alpha) = x$ и $\gamma(\beta) = y$. Точки x, y называются **концами отрезка**. Отображение γ — **натуральная параметризация** отрезка.
Иначе говоря, отрезок с концами $x, y \in X$ есть образ спрямляемого пути, соединяющего x с y, длина которого равна расстоянию между x и y.

Пространство X называется **геодезическим пространством**, если в нём любые две точки можно соединить отрезком.

Выпуклые пространства

Пусть (X, d) — геодезическое пространство. Оно называется **выпуклым пространством** (**пространством неположительной кривизны по Буземану**), если выпуклой является функция расстояния на $X \times X$: для любых двух отрезков с аффинными параметризациями $\gamma : [0, 1] \to X$ и $\delta : [0, 1] \to X$ соответственно, функция $f(s, t) = d(\gamma(s), \delta(t))$ выпуклая функция двух переменных.

Выпуклые пространства

Пусть (X, d) — геодезическое пространство. Оно называется **выпуклым пространством** (**пространством неположительной кривизны по Буземану**), если выпуклой является функция расстояния на $X \times X$: для любых двух отрезков с аффинными параметризациями $\gamma : [0, 1] \to X$ и $\delta : [0, 1] \to X$ соответственно, функция $f(s, t) = d(\gamma(s), \delta(t))$ выпуклая функция двух переменных.

Пространство (X, d) называется **локально выпуклым**, если каждая точка в X обладает выпуклой окрестностью.

Выпуклые пространства

Пусть (X, d) — геодезическое пространство. Оно называется **выпуклым пространством** (**пространством неположительной кривизны по Буземану**), если выпуклой является функция расстояния на $X \times X$: для любых двух отрезков с аффинными параметризациями $\gamma : [0, 1] \to X$ и $\delta : [0, 1] \to X$ соответственно, функция $f(s, t) = d(\gamma(s), \delta(t))$ выпуклая функция двух переменных.

Пространство (X, d) называется **локально выпуклым**, если каждая точка в X обладает выпуклой окрестностью.

Теорема Картана-Адамара для локально выпуклых пространств

Теорема Всякое полное, односвязное, локально выпуклое пространство (X, d) выпукло.

Примеры

CAT(0)-пространства

Пусть (X, d) — геодезическое пространство. Для треугольника $\triangle xyz$ **евклидовым треугольником сравнения** называется треугольник $\triangle \bar{x}\bar{y}\bar{z}$ евклидовой плоскости E^2 с теми же длинами соответствующих сторон: $|\bar{x}\bar{y}| = d(x, y)$, $|\bar{x}\bar{z}| = (x, z)$ и $|\bar{y}\bar{z}| = d(y, z)$.

CAT(0)-пространства

Пусть (X, d) — геодезическое пространство. Для треугольника $\triangle xyz$ **евклидовым треугольником сравнения** называется треугольник $\triangle\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ евклидовой плоскости E^2 с теми же длинами соответствующих сторон: $|\bar{x}\bar{y}| = d(x, y)$, $|\bar{x}\bar{z}| = (x, z)$ и $|\bar{y}\bar{z}| = d(y, z)$.
Для точки m на стороне треугольника $\triangle xyz$, **соответствующая** ей точка $\bar{m}$ в треугольнике сравнения делит соответствующую сторону в том же отношении.

Примеры

CAT(0)-пространства

Пусть (X, d) — геодезическое пространство. Для треугольника $\triangle xyz$ **евклидовым треугольником сравнения** называется треугольник $\triangle\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ евклидовой плоскости E^2 с теми же длинами соответствующих сторон: $|\bar{x}\bar{y}| = d(x, y)$, $|\bar{x}\bar{z}| = (x, z)$ и $|\bar{y}\bar{z}| = d(y, z)$.
Для точки m на стороне треугольника $\triangle xyz$, **соответствующая** ей точка $\bar{m}$ в треугольнике сравнения делит соответствующую сторону в том же отношении.
Пусть $\triangle xyz$ — треугольник в пространстве X, $\triangle\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ — соответствующий ему треугольник сравнения. Предположим, что для любой пары его точек m, n и для пары соответствующих точек $\bar{m}$ и $\bar{n}$ выполнены неравенства $|\bar{m}\bar{n}| \leq d(m, n)$. В этом случае треугольник $\triangle xyz$ называется **тонким**.
Пространство X называется ***CAT*(0)-пространством**, если в нём всякий треугольник — тонкий.

Примеры

CAT(0)-пространства

Пусть (X, d) — геодезическое пространство. Для треугольника $\triangle xyz$ **евклидовым треугольником сравнения** называется треугольник $\triangle \bar{x}\bar{y}\bar{z}$ евклидовой плоскости E^2 с теми же длинами соответствующих сторон: $|\bar{x}\bar{y}| = d(x, y)$, $|\bar{x}\bar{z}| = (x, z)$ и $|\bar{y}\bar{z}| = d(y, z)$.
Для точки m на стороне треугольника $\triangle xyz$, **соответствующая** ей точка $\bar{m}$ в треугольнике сравнения делит соответствующую сторону в том же отношении.
Пусть $\triangle xyz$ — треугольник в пространстве X, $\triangle \bar{x}\bar{y}\bar{z}$ — соответствующий ему треугольник сравнения. Предположим, что для любой пары его точек m, n и для пары соответствующих точек $\bar{m}$ и $\bar{n}$ выполнены неравенства $|\bar{m}\bar{n}| \leq d(m, n)$. В этом случае треугольник $\triangle xyz$ называется **тонким**.
Пространство X называется ***CAT*(0)-пространством**, если в нём всякий треугольник — тонкий.
Всякое CAT(0)-пространство является выпуклым пространством.

Примеры

CAT(0)-пространства

Пусть (X, d) — геодезическое пространство. Для треугольника $\triangle xyz$ **евклидовым треугольником сравнения** называется треугольник $\triangle \bar{x}\bar{y}\bar{z}$ евклидовой плоскости E^2 с теми же длинами соответствующих сторон: $|\bar{x}\bar{y}| = d(x, y)$, $|\bar{x}\bar{z}| = (x, z)$ и $|\bar{y}\bar{z}| = d(y, z)$.
Для точки m на стороне треугольника $\triangle xyz$, **соответствующая** ей точка $\bar{m}$ в треугольнике сравнения делит соответствующую сторону в том же отношении.
Пусть $\triangle xyz$ — треугольник в пространстве X, $\triangle \bar{x}\bar{y}\bar{z}$ — соответствующий ему треугольник сравнения. Предположим, что для любой пары его точек m, n и для пары соответствующих точек $\bar{m}$ и $\bar{n}$ выполнены неравенства $|\bar{m}\bar{n}| \leq d(m, n)$. В этом случае треугольник $\triangle xyz$ называется **тонким**.
Пространство X называется ***CAT*(0)-пространством**, если в нём всякий треугольник — тонкий.
Всякое CAT(0)-пространство является выпуклым пространством.

Примеры

Нормированные пространства

Всякое нормированное пространство со строго выпуклой нормой является пространством неположительной (нулевой) кривизны.

Примеры

Нормированные пространства

Всякое нормированное пространство со строго выпуклой нормой является пространством неположительной (нулевой) кривизны.

Теорема о склеивании

Теорема. Пусть (X_1, d_1), (X_2, d_2) и (X_3, d_3) — три геодезических пространства неположительной кривизны в смысле Буземана, представленных в виде объединения замкнутых выпуклых подмножеств $X_i := A_i \cup B_i$. Пусть $g_1 : B_2 \to A_3$, $g_2 : B_3 \to A_1$ и $g_3 : B_1 \to A_2$ — три изометрии, причём

$$(g_2 \circ g_1 \circ g_3)|_{A_1 \cup B_1} = \mathrm{Id}\,|_{A_1 \cap B_1}.$$

Пусть пространство (X, d) получено как факторпространство объединения $X := (X_1 \cup X_2 \cup X_3)$ по семейству отображений $\{g_1, g_2, g_3\}$, метрика d на X совпадает с d_i на каждом из X_i. Тогда X есть пространство неположительной кривизны по Буземану.

Равностепенная выпуклость

Пусть X — пространство неположительной кривизны по Буземану. **Модулем выпуклости** в точке $x \in X$ называется функция

$$\delta_x(r, \varepsilon) =$$

$$= \inf\{r - d(x, m) \mid d(x, y) \leq r, d(x, z) \leq r, d(y, z) \geq \varepsilon r, m \text{ — середина } [yz]\}.$$

Равностепенная выпуклость

Пусть X — пространство неположительной кривизны по Буземану. **Модулем выпуклости** в точке $x \in X$ называется функция

$$\delta_x(r, \varepsilon) =$$

$$= \inf\{r - d(x, m) \mid d(x, y) \leq r, d(x, z) \leq r, d(y, z) \geq \varepsilon r, m \text{ — середина } [yz]\}.$$

Пространство X называется **слабо равномерно выпуклым**, если $\delta_x(r, \varepsilon) > 0$ в любой точке $x \in X$ для всех $\varepsilon, r > 0$.

Равностепенная выпуклость

Пусть X — пространство неположительной кривизны по Буземану. **Модулем выпуклости** в точке $x \in X$ называется функция

$$\delta_x(r, \varepsilon) =$$

$$= \inf\{r - d(x,m) \mid d(x,y) \leq r, d(x,z) \leq r, d(y,z) \geq \varepsilon r, m \text{ — середина } [yz]\}.$$

Пространство X называется **слабо равномерно выпуклым**, если $\delta_x(r, \varepsilon) > 0$ в любой точке $x \in X$ для всех $\varepsilon, r > 0$.

Будем говорить, что семейство пространств $\{(X_\alpha, o_\alpha, d_\alpha)\}$ с метриками d_α и отмеченными точками o_α **равностепенно выпукло**, если каждое из метрических пространств (X_α, d_α) слабо равномерно выпукло и существует положительная функция $L(\epsilon, r)$, определённая при $\epsilon, r > 0$ и равномерно ограничивающая снизу модули выпуклости всех пространств X_α:

$$\delta_x(\epsilon, r) \geq L(\epsilon, r) > 0 \tag{1}$$

для произвольной точки $x \in X_\alpha$ при всех α.

Сходимость равностепенно выпуклого семейства

Теорема. Пусть полное локально компактное метрическое пространство (X, o, d_X) с отмеченной точкой o является пределом по Хаусдорфу (по Громову-Хаусдорфу) для равностепенно выпуклой последовательности (X_n, o_n, d_n) геодезических пространств неположительной кривизны по Буземану. Тогда X — также пространство неположительной кривизны в смысле Буземана и его модуль выпуклости $\delta_x(\epsilon, r)$ при всех $x \in X$ ограничен снизу общей нижней границей модуля выпуклости пространств X_n.

Пространство параллельных прямых

Прямые $a, b \subset X$ называются **параллельными**,

$$\mathrm{Hd}(a, b) < +\infty.$$

Пространство параллельных прямых

Прямые $a, b \subset X$ называются **параллельными**,

$$\mathrm{Hd}(a, b) < +\infty.$$

Пусть X — пространство неположительной кривизны по Буземану, $a \subset X$ — прямая в X, Y_a — множество прямых в X, параллельных a.

Пространство параллельных прямых

Прямые $a, b \subset X$ называются **параллельными**,

$$\mathrm{Hd}(a, b) < +\infty.$$

Пусть X — пространство неположительной кривизны по Буземану, $a \subset X$ — прямая в X, Y_a — множество прямых в X, параллельных a.
Теорема. Метрическое пространство (Y_a, Hd) является пространством неположительной кривизны по Буземану.

Геодезическая компактификация

Пусть X — полное, некомпактное, локально компактное пространство неположительной кривизны в смысле Буземана. Лучи $c, d : \mathbb{R}_+ \to X$ в X будем называть **асимптотическими**, если расстояние Хаусдорфа между ними конечно:

$$\mathrm{Hd}(c(\mathbb{R}_+), d(\mathbb{R}_+)) < +\infty.$$

Геодезическая компактификация

Пусть X — полное, некомпактное, локально компактное пространство неположительной кривизны в смысле Буземана. Лучи $c, d : \mathbb{R}_+ \to X$ в X будем называть **асимптотическими**, если расстояние Хаусдорфа между ними конечно:

$$\mathrm{Hd}(c(\mathbb{R}_+), d(\mathbb{R}_+)) < +\infty.$$

Отношение σ асимптотичности есть отношение эквивалентности на множестве $\mathcal{G}(\mathbb{R}_+, X)$ лучей в X. Фактормножество $\partial_g X = \mathcal{G}(\mathbb{R}_+, X)/\sigma$ образует множество **геодезических идеальных точек**.

Геодезическая компактификация

Пусть X — полное, некомпактное, локально компактное пространство неположительной кривизны в смысле Буземана. Лучи $c, d : \mathbb{R}_+ \to X$ в X будем называть **асимптотическими**, если расстояние Хаусдорфа между ними конечно:

$$\mathrm{Hd}(c(\mathbb{R}_+), d(\mathbb{R}_+)) < +\infty.$$

Отношение σ асимптотичности есть отношение эквивалентности на множестве $\mathcal{G}(\mathbb{R}_+, X)$ лучей в X. Фактормножество $\partial_g X = \mathcal{G}(\mathbb{R}_+, X)/\sigma$ образует множество **геодезических идеальных точек**. Определим на объединении $\overline{X}_g = X \cap \partial_g X$ **коническую топологию**.

Коническая топология

Для произвольной точки $x \in \overline{X}_g$ построим базу её окрестностей.

Коническая топология

Для произвольной точки $x \in \overline{X}_g$ построим базу её окрестностей. Если $x \in X$, то в качестве базы её окрестностей примем семейство открытых шаров с центром x, то есть стандартную базу окрестностей x в топологии X.

Коническая топология

Для произвольной точки $x \in \overline{X}_g$ построим базу её окрестностей. Если $x \in X$, то в качестве базы её окрестностей примем семейство открытых шаров с центром x, то есть стандартную базу окрестностей x в топологии X. Пусть $x \in \partial_g X$. Зададим числа $r, \varepsilon > 0$ и для каждой такой пары построим множество $\mathcal{U}_{r,\varepsilon}(x)$ по следующему правилу. Пусть $\xi : \mathbb{R}_+ \to X$ — натуральная параметризация луча $[ox)$. Рассмотрим произвольную точку $y \in \overline{X}_g$ с натуральной параметризацией $\eta : [0, d(o,y)] \to \overline{X}_g$ обобщённого отрезка $[oy]$. Мы считаем, что $y \in \mathcal{U}_{r,\varepsilon}$, если $d(o,y) > r$ и $d(\xi(r), \eta(r)) < \varepsilon$.

Коническая топология

Для произвольной точки $x \in \overline{X}_g$ построим базу её окрестностей. Если $x \in X$, то в качестве базы её окрестностей примем семейство открытых шаров с центром x, то есть стандартную базу окрестностей x в топологии X. Пусть $x \in \partial_g X$. Зададим числа $r, \varepsilon > 0$ и для каждой такой пары построим множество $\mathcal{U}_{r,\varepsilon}(x)$ по следующему правилу. Пусть $\xi : \mathbb{R}_+ \to X$ — натуральная параметризация луча $[ox)$. Рассмотрим произвольную точку $y \in \overline{X}_g$ с натуральной параметризацией $\eta : [0, d(o,y)] \to \overline{X}_g$ обобщённого отрезка $[oy]$. Мы считаем, что $y \in \mathcal{U}_{r,\varepsilon}$, если $d(o,y) > r$ и $d(\xi(r), \eta(r)) < \varepsilon$. Стандартная проверка показывает, что заданная таким образом система окрестностей точек в $\overline{X}_g$ действительно является базой некоторой топологии, которую мы и будем называть **коническое топологией** на $\overline{X}_g$.

Орифункциональная компактификация

Пусть $C^*(X, \mathbb{R}) := C(X, \mathbb{R})/\{\text{const}\}$ — линейное пространство непрерывных функций на полном локально компактном метрическом пространстве X, профакторизованное по подпространству констант. Здесь $C(X, \mathbb{R})$ имеет топологию равномерной сходимости на ограниченных множествах. Зафиксируем отмеченную точку $o \in X$ и отождествим каждую точку $x \in X$ с порождаемой ею дистанционной функцией d_x. Тем самым определено вложение ν пространства X в $C^*(X, \mathbb{R})$. При этом, поскольку при изменении отмеченной точки все дистанционные функции меняются на некоторую константу, указанное вложение не зависит от выбора отмеченной точки $o \in X$.

Орифункциональная компактификация

Пусть $C^*(X, \mathbb{R}) := C(X, \mathbb{R})/\{\mathrm{const}\}$ — линейное пространство непрерывных функций на полном локально компактном метрическом пространстве X, профакторизованное по подпространству констант. Здесь $C(X, \mathbb{R})$ имеет топологию равномерной сходимости на ограниченных множествах. Зафиксируем отмеченную точку $o \in X$ и отождествим каждую точку $x \in X$ с порождаемой ею дистанционной функцией d_x. Тем самым определено вложение ν пространства X в $C^*(X, \mathbb{R})$. При этом, поскольку при изменении отмеченной точки все дистанционные функции меняются на некоторую константу, указанное вложение не зависит от выбора отмеченной точки $o \in X$. **Орифункциональной компактификацией** $\overline{X}_h$ называется замыкание образа $\nu(X)$ в $C^*(X, \mathbb{R})$.

Орифункциональная компактификация

Пусть $C^*(X,\mathbb{R}) := C(X,\mathbb{R})/\{\mathrm{const}\}$ — линейное пространство непрерывных функций на полном локально компактном метрическом пространстве X, профакторизованное по подпространству констант. Здесь $C(X,\mathbb{R})$ имеет топологию равномерной сходимости на ограниченных множествах. Зафиксируем отмеченную точку $o \in X$ и отождествим каждую точку $x \in X$ с порождаемой ею дистанционной функцией d_x. Тем самым определено вложение ν пространства X в $C^*(X,\mathbb{R})$. При этом, поскольку при изменении отмеченной точки все дистанционные функции меняются на некоторую константу, указанное вложение не зависит от выбора отмеченной точки $o \in X$. **Орифункциональной компактификацией** $\overline{X}_h$ называется замыкание образа $\nu(X)$ в $C^*(X,\mathbb{R})$.При этом само пространство X отождествляется с множеством $\nu(X)$ дистанционных функций. Функции, составляющие границу $\partial_h X$, называются **орифункциями**. Каждая идеальная точка орифункциональной границы представляет собой класс орифункций, отличающихся на константу.

Точки орифункциональной границы

Пусть $T \subset \mathbb{R}_+$ — неограниченное множество, содержащее 0, и $\gamma : T \to X$ — некоторое отображение в метрическое пространство X. Согласно определению Риффеля, отображение γ является

Точки орифункциональной границы

Пусть $T \subset \mathbb{R}_+$ — неограниченное множество, содержащее 0, и $\gamma : T \to X$ — некоторое отображение в метрическое пространство X. Согласно определению Риффеля, отображение γ является

- **геодезическим лучом**, если $d(\gamma(s), \gamma(t)) = |s - t|$ для всех $s, t \in T$;

Точки орифункциональной границы

Пусть $T \subset \mathbb{R}_+$ — неограниченное множество, содержащее 0, и $\gamma : T \to X$ — некоторое отображение в метрическое пространство X. Согласно определению Риффеля, отображение γ является

- **геодезическим лучом**, если $d(\gamma(s), \gamma(t)) = |s - t|$ для всех $s, t \in T$;
- **почти геодезическим лучом**, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $N > 0$, что при всех $s, t \in T$, для которых $s \geq t \geq N$, выполняется неравенство
$$| \, d(\gamma(s), \gamma(t)) + d(\gamma(0), \gamma(t)) - s| < \varepsilon;$$

Точки орифункциональной границы

Пусть $T \subset \mathbb{R}_+$ — неограниченное множество, содержащее 0, и $\gamma : T \to X$ — некоторое отображение в метрическое пространство X. Согласно определению Риффеля, отображение γ является

- **геодезическим лучом**, если $d(\gamma(s), \gamma(t)) = |s - t|$ для всех $s, t \in T$;
- **почти геодезическим лучом**, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $N > 0$, что при всех $s, t \in T$, для которых $s \geq t \geq N$, выполняется неравенство
$$| \, d(\gamma(s), \gamma(t)) + d(\gamma(0), \gamma(t)) - s| < \varepsilon;$$
- **слабо геодезическим лучом**, если для любой точки $y \in X$ и любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $N > 0$, что при всех $s, t \in T$, для которых $s, t \geq N$, выполняются неравенства
$$| \, d(\gamma(0), \gamma(t)) - t|| < \varepsilon$$
и
$$d(\gamma(t), y) - d(\gamma(s), y) - |s - t| < \varepsilon.$$

Точки орифункциональной границы

Теорема Риффеля Пусть $\gamma : T \to X$ — слабо геодезический луч в локально компактном метрическом пространстве X. Тогда существует орифункция $f \in \partial_h X$, являющаяся равномерным на ограниченных множествах пределом дистанционных функций:

$$f := \lim_{t \to \infty} d_{\gamma(t)}, \tag{2}$$

определяющая некоторый элемент в $\partial_h X$. Обратно, если пространство X конечно компактно и имеет счётную базу, то всякая точка границы $\partial_h X$ представляется как предел вида (2) по некоторому слабо геодезическому лучу γ.

Сравнение компактификаций

Теорема. Пусть X — полное локально компактное пространство неположительной кривизны в смысле Буземана. Тогда тождественное отображение $\mathrm{Id} : X \to X$ однозначно продолжается до непрерывной сюръекции $\pi_{hg} : \overline{X}_h \to \overline{X}_g$.

Сравнение компактификаций

Теорема. Пусть X — полное локально компактное пространство неположительной кривизны в смысле Буземана. Тогда тождественное отображение $\mathrm{Id} : X \to X$ однозначно продолжается до непрерывной сюръекции $\pi_{hg} : \overline{X}_h \to \overline{X}_g$.

Возможное несовпадение компактификаций

Пусть V^2 — двумерное линейное пространство с нормой

$$\|(x, y)\| := \sqrt{x^2 + 2y^2} + |y|.$$

Для луча $c : \mathbb{R}_+ \to X$, сонаправленного с осью ox с началом $c(0) = (x_0, y_0)$, функция Буземана β_c имеет вид

$$\beta_c(x, y) = |y - y_0| - x + x_0.$$

Разность функций Буземана для двух таких лучей равна

$$(\beta_{c_1} - \beta_{c_2})(x, y) = |y - y_1| - |y - y_2| + x_1 - x_2 \neq \mathrm{const}\,.$$

Направления и тени

Пусть кривые $\gamma, \delta : [0, b) \to X$ имеют общее начало $\gamma(0) = \delta(0) = x$. **Верхний угол** между ними в точке x есть по определению

$$\overline{\measuredangle}_x(\gamma, \delta) := \overline{\lim_{s,t\to 0}} \arccos \frac{d^2(x, y) + d^2(x, z) - d^2(y, z)}{2d(x, y)d(x, z)}.$$

В частности, для любой кривой γ в её начальной точке $x = \gamma(0)$ определён верхний угол $\overline{\measuredangle}_x(\gamma, \gamma)$.

Направления и тени

Пусть кривые $\gamma, \delta : [0, b) \to X$ имеют общее начало $\gamma(0) = \delta(0) = x$. **Верхний угол** между ними в точке x есть по определению

$$\overline{\measuredangle}_x(\gamma, \delta) := \overline{\lim_{s,t\to 0}} \arccos \frac{d^2(x, y) + d^2(x, z) - d^2(y, z)}{2d(x, y)d(x, z)}.$$

В частности, для любой кривой γ в её начальной точке $x = \gamma(0)$ определён верхний угол $\overline{\measuredangle}_x(\gamma, \gamma)$. Говорят, что кривая $\gamma : [0, b) \to X$ **обладает направлением** в точке $x = \gamma(0)$, если $\overline{\measuredangle}_x(\gamma, \gamma) = 0$.

Направления и тени

Пусть кривые $\gamma, \delta : [0, b) \to X$ имеют общее начало $\gamma(0) = \delta(0) = x$. **Верхний угол** между ними в точке x есть по определению

$$\overline{\measuredangle}_x(\gamma, \delta) := \overline{\lim_{s,t\to 0}} \arccos \frac{d^2(x, y) + d^2(x, z) - d^2(y, z)}{2d(x, y)d(x, z)}.$$

В частности, для любой кривой γ в её начальной точке $x = \gamma(0)$ определён верхний угол $\overline{\measuredangle}_x(\gamma, \gamma)$. Говорят, что кривая $\gamma : [0, b) \to X$ **обладает направлением** в точке $x = \gamma(0)$, если $\overline{\measuredangle}_x(\gamma, \gamma) = 0$.

Полной тенью точки x_0 относительно точки $y \in \overline{X}_g \setminus \{x_0\}$ называется множество

$$\mathrm{Shadow}_y(x_0) := \{z \in \overline{X}_g | \quad \exists [yz] \quad x_0 \in [yz]\}.$$

Здесь предположение существования необходимо лишь в том случае, если обе точки y, z бесконечно удалены: $y, z \in \partial_g X$.

Направления и тени

Пусть кривые $\gamma, \delta : [0, b) \to X$ имеют общее начало $\gamma(0) = \delta(0) = x$. **Верхний угол** между ними в точке x есть по определению

$$\overline{\measuredangle}_x(\gamma, \delta) := \overline{\lim_{s,t\to 0}} \arccos \frac{d^2(x, y) + d^2(x, z) - d^2(y, z)}{2d(x, y)d(x, z)}.$$

В частности, для любой кривой γ в её начальной точке $x = \gamma(0)$ определён верхний угол $\overline{\measuredangle}_x(\gamma, \gamma)$. Говорят, что кривая $\gamma : [0, b) \to X$ **обладает направлением** в точке $x = \gamma(0)$, если $\overline{\measuredangle}_x(\gamma, \gamma) = 0$.

Полной тенью точки x_0 относительно точки $y \in \overline{X}_g \setminus \{x_0\}$ называется множество

$$\mathrm{Shadow}_y(x_0) := \{z \in \overline{X}_g | \quad \exists [yz] \quad x_0 \in [yz]\}.$$

Здесь предположение существования необходимо лишь в том случае, если обе точки y, z бесконечно удалены: $y, z \in \partial_g X$. **Сферической тенью** точки x_0 **радиуса** $\rho > 0$ относительно точки $y \in \overline{X}_g$ называется пересечение $\mathrm{Shadow}_y(x_0, \rho)$ её полной тени $\mathrm{Shadow}_y(x_0)$ со сферой $S(x_0, \rho)$.

Теорема. Пусть (X, d) — конечно компактное пространство неположительной кривизны по Буземану. Тогда выподняются следующие свойства теней.

Теорема. Пусть (X, d) — конечно компактное пространство неположительной кривизны по Буземану. Тогда выподняются следующие свойства теней.

1. Для любых точек $x_0, y \in X$ и чисел $\rho, \varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любой точки $x_1 \in B(x_0, \delta)$, для которой справедливо равенство $d(y, x_1) = d(y, x_0)$, выполнено включение

$$\mathrm{Shadow}_y(x_1, \rho) \subset \mathcal{N}_\varepsilon(\mathrm{Shadow}_y(x_0, \rho)).$$

Теорема. Пусть (X, d) — конечно компактное пространство неположительной кривизны по Буземану. Тогда выподняются следующие свойства теней.

1. Для любых точек $x_0, y \in X$ и чисел $\rho, \varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для любой точки $x_1 \in B(x_0, \delta)$, для которой справедливо равенство $d(y, x_1) = d(y, x_0)$, выполнено включение
$$\mathrm{Shadow}_y(x_1, \rho) \subset \mathcal{N}_\varepsilon(\mathrm{Shadow}_y(x_0, \rho)).$$

2. Для любых точек $x_0 \in X$ и $y \in \partial_g X$ существует такое $\delta > 0$, что для любой точки $x_1 \in B(x_0, \delta)$, для которой справедливо равенство $\beta_y(x_1) = \beta_y(x_0)$, выполнено
$$\mathrm{Shadow}_y(x_1, \rho) \cap \mathcal{N}_\varepsilon(\mathrm{Shadow}_y(x_0, \rho)) \neq \varnothing.$$

   Здесь β_y — функция Буземана, порождённая лучом в направлении y с началом x_0

Точки геодезической с единственным обратным направлением

Пусть Ω_x — пространство направлений в точке $x \in X$. Направления $\xi, \eta \in \Omega_x$ называются **взаимно обратными**, если лучи, выходящие в указанных направлениях, дополняют друг друга до полной геодезической.
Для данной прямой a в геодезически полном пространстве X мы обозначим $\omega^+(a)$ множество точек $x \in a$, в которых положительное направление a имеет более чем одно обратное направление. Аналогично, $\omega^-(a)$ — это множество точек на a, в которых отрицательное направление a имеет более чем одно обратное.

Точки геодезической с единственным обратным направлением

Пусть Ω_x — пространство направлений в точке $x \in X$. Направления $\xi, \eta \in \Omega_x$ называются **взаимно обратными**, если лучи, выходящие в указанных направлениях, дополняют друг друга до полной геодезической.
Для данной прямой a в геодезически полном пространстве X мы обозначим $\omega^+(a)$ множество точек $x \in a$, в которых положительное направление a имеет более чем одно обратное направление. Аналогично, $\omega^-(a)$ — это множество точек на a, в которых отрицательное направление a имеет более чем одно обратное.
Теорема. Пусть X — конечно компактное, геодезически полное пространство неположительной кривизны в смысле Буземана. Тогда для любой прямой $a \subset X$ множества $\omega^+(a)$ и $\omega^-(a)$ не более чем счётны.

G-пространства Буземана

Пусть X — конечно компактное, выпуклое по Менгеру пространство. Следовательно, оно является геодезическим пространством. Следуя Г. Буземану, будем считать свойства пространства X аксиомами **I-III**.

G-пространства Буземана

Пусть X — конечно компактное, выпуклое по Менгеру пространство. Следовательно, оно является геодезическим пространством. Следуя Г. Буземану, будем считать свойства пространства X аксиомами **I-III**. Пространство X называется G-пространством Буземана, если помимо перечисленных выполнены следующие аксиомы.

G-пространства Буземана

Пусть X — конечно компактное, выпуклое по Менгеру пространство. Следовательно, оно является геодезическим пространством. Следуя Г. Буземану, будем считать свойства пространства X аксиомами **I-III**.
Пространство X называется G-пространством Буземана, если помимо перечисленных выполнены следующие аксиомы.
IV. Локальная продолжаемость отрезков. Для любой точки $p \in X$ существует $\rho_p > 0$, что для любых точек $x, y \in U(p, \rho_p)$ найдётся $z \in U(p, \rho_p)$, для которой $x - y - z$.
Иначе говоря, отрезок $[xy] \subset U(p, \rho_p)$ можно продолжить за его конец.

G-пространства Буземана

Пусть X — конечно компактное, выпуклое по Менгеру пространство. Следовательно, оно является геодезическим пространством. Следуя Г. Буземану, будем считать свойства пространства X аксиомами **I-III**. Пространство X называется G-пространством Буземана, если помимо перечисленных выполнены следующие аксиомы.

IV. Локальная продолжаемость отрезков. Для любой точки $p \in X$ существует $\rho_p > 0$, что для любых точек $x, y \in U(p, \rho_p)$ найдётся $z \in U(p, \rho_p)$, для которой $x - y - z$.

Иначе говоря, отрезок $[xy] \subset U(p, \rho_p)$ можно продолжить за его конец.

V. Единственность продолжения отрезков. Если $x - y - z_1$, $x - y - z_2$ и $d(x, z_1) = d(x, z_2)$, то $z_1 = z_2$.

Проблемы Буземана для G-пространств

(7) Является ли трёхмерное G-пространство топологическим многообразием?

Проблемы Буземана для G-пространств

(7) Является ли трёхмерное G-пространство топологическим многообразием?

(8) Является ли G-пространство локально однородным в смысле Монтгомери?

Проблемы Буземана для G-пространств

(7) Является ли трёхмерное G-пространство топологическим многообразием?

(8) Является ли G-пространство локально однородным в смысле Монтгомери?

(9) Является ли всякое G-пространство конечномерным?

Известные решения

Теорема (Б. Кракус, 1968). Всякое трёхмерное G-пространство является топологическим многообразием.

Известные решения

Теорема (Б. Кракус, 1968). Всякое трёхмерное G-пространство является топологическим многообразием.

Теорема (П. Тёрстон, 1996). Всякое G-пространство топологически однородно и однородно в смысле Монтгомери.

Известные решения

Теорема (Б. Кракус, 1968). Всякое трёхмерное G-пространство является топологическим многообразием.
Теорема (П. Тёрстон, 1996). Всякое G-пространство топологически однородно и однородно в смысле Монтгомери.
Теорема (П.Тёрстон, 1996.) Всякое G-пространство является абсолютным окрестностным ретрактом и гомологическим многообразием.

Известные решения

Теорема (Б. Кракус, 1968). Всякое трёхмерное G-пространство является топологическим многообразием.
Теорема (П. Тёрстон, 1996). Всякое G-пространство топологически однородно и однородно в смысле Монтгомери.
Теорема (П.Тёрстон, 1996.) Всякое G-пространство является абсолютным окрестнострым ретрактом и гомологическим многообразием.
Теорема (П.Тёрстон, 1996.) Всякое четырёхмерное G-пространство топологическим многообразием.

Известные решения

Теорема (Б. Кракус, 1968). Всякое трёхмерное G-пространство является топологическим многообразием.
Теорема (П. Тёрстон, 1996). Всякое G-пространство топологически однородно и однородно в смысле Монтгомери.
Теорема (П.Тёрстон, 1996.) Всякое G-пространство является абсолютным окрестнострым ретрактом и гомологическим многообразием.
Теорема (П.Тёрстон, 1996.) Всякое четырёхмерное G-пространство топологическим многообразием.

Теоремы В.Н. Берестовского

Теорема (1977). Всякое G-пространство, имеющее непустую выпуклую или K-выпуклую область, конечномерно.

Известные решения

Теорема (Б. Кракус, 1968). Всякое трёхмерное G-пространство является топологическим многообразием.
Теорема (П. Тёрстон, 1996). Всякое G-пространство топологически однородно и однородно в смысле Монтгомери.
Теорема (П.Тёрстон, 1996.) Всякое G-пространство является абсолютным окрестнострым ретрактом и гомологическим многообразием.
Теорема (П.Тёрстон, 1996.) Всякое четырёхмерное G-пространство топологическим многообразием.

Теоремы В.Н. Берестовского

Теорема (1977). Всякое G-пространство, имеющее непустую выпуклую или K-выпуклую область, конечномерно.
Теорема (1993). Всякое G-пространство, являющееся пространством Александрова, ограниченной снизу кривизны является топологическим многообразием.

Известные решения

Теорема (Б. Кракус, 1968). Всякое трёхмерное G-пространство является топологическим многообразием.
Теорема (П. Тёрстон, 1996). Всякое G-пространство топологически однородно и однородно в смысле Монтгомери.
Теорема (П.Тёрстон, 1996.) Всякое G-пространство является абсолютным окрестнострым ретрактом и гомологическим многообразием.
Теорема (П.Тёрстон, 1996.) Всякое четырёхмерное G-пространство топологическим многообразием.

Теоремы В.Н. Берестовского

Теорема (1977). Всякое G-пространство, имеющее непустую выпуклую или K-выпуклую область, конечномерно.
Теорема (1993). Всякое G-пространство, являющееся пространством Александрова, ограниченной снизу кривизны является топологическим многообразием.
Теорема (2002). Всякое G-пространство, являющееся пространством Александрова, ограниченной сверху кривизны является римановым C^1-многообразием.

G-пространства неположительной кривизны

G-пространства неположительной кривизны

Теорема (П.Д. Андреев, 2014–2016). Пусть (X, d) — G-пространство неположительной кривизны по Буземану. Тогда в произвольной точке $p \in X$ корректно определён касательный конус K_p, являющийся пределом по Громову-Хаусдорфу пространств с отмеченной точкой $(X, t \cdot d, p)$ и обладающий структурой n-мерного нормированного пространства со строго выпуклой нормой. При этом если кривая $\gamma : [a, b] \to X$ в каждой точке имеет направление и скорость, задаваемые при $s \in [a, b]$ вектором $\vec{v}(s) \in K_{\gamma(s)}X$, то её длина равна

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\vec{v}(s)\| \, ds,$$

где норма $\vec{v}(s)$ считается в нормированном пространстве $K_{\gamma(s)}X$.

Изометрии и их характеризации

Теорема Бекмана-Куарлеса

Теорема (F.S. Beckman, D.A. Quarles Jr., 1953). Пусть F — (возможно, многозначное) отображение евклидова пространства $\mathbb{E}^n$, $n \geq 2$, в себя. Если существует такая константа $a > 0$, что равенство $d(p, q) = a$ для точек $p, q \in \mathbb{E}^n$ влечёт равенство $d(F(p), F(q)) = a$, то F — евклидово движение $\mathbb{E}^n$ на себя.

Изометрии и их характеризации

Теорема Бекмана-Куарлеса

Теорема (F.S. Beckman, D.A. Quarles Jr., 1953). Пусть F — (возможно, многозначное) отображение евклидова пространства $\mathbb{E}^n$, $n \geq 2$, в себя. Если существует такая константа $a > 0$, что равенство $d(p, q) = a$ для точек $p, q \in \mathbb{E}^n$ влечёт равенство $d(F(p), F(q)) = a$, то F — евклидово движение $\mathbb{E}^n$ на себя.

Задача А.Д. Александрова

Найти условия, достаточные для того, чтобы в метрическом пространстве (X, d) выполнялась следующая характеризация изометрий. Всякая биекция $f : X \to X$, сохраняющая вместе с обратным к ней отображением фиксированное расстояние r, например, расстояние 1, есть изометрия.

Изометрии и их характеризации

Теорема Бекмана-Куарлеса

Теорема (F.S. Beckman, D.A. Quarles Jr., 1953). Пусть F — (возможно, многозначное) отображение евклидова пространства $\mathbb{E}^n$, $n \geq 2$, в себя. Если существует такая константа $a > 0$, что равенство $d(p, q) = a$ для точек $p, q \in \mathbb{E}^n$ влечёт равенство $d(F(p), F(q)) = a$, то F — евклидово движение $\mathbb{E}^n$ на себя.

Задача А.Д. Александрова

Найти условия, достаточные для того, чтобы в метрическом пространстве (X, d) выполнялась следующая характеризация изометрий. Всякая биекция $f : X \to X$, сохраняющая вместе с обратным к ней отображением фиксированное расстояние r, например, расстояние 1, есть изометрия.

Теорема Кузьминых

Теорема (А.В. Кузьминых, 1979). Пусть отображение f пространства Лобачевского на себя таково, что для положительных чисел a, a' из $|xy| = a$ следует $|f(x)f(y)| = a'$, то f — изометрия, и $a = a'$.

Известные результаты

Отображения, сохраняющие периметр треугольников

Теорема (С.А. Богатый, О.Д. Фролкина, 2004). Для отображения $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и заданного остроугольного треугольника T следующие условия эквивалентны:

1. f — изометрия;
2. существует такая строго монотонная функция φ, что для всякой тройки точек x, y, z, образующих треугольник, конгруэнтный T, выполняется

$$\varphi(|xy|) + \varphi(|yz|) + \varphi(|zx|) = \\ = \varphi(|f(x)f(y)|) + \varphi(|f(y)f(z)|) + \varphi(|f(z)f(x)|).$$

Известные результаты

Отображения, сохраняющие периметр треугольников

Теорема (С.А. Богатый, О.Д. Фролкина, 2004). Для отображения $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ и заданного остроугольного треугольника T следующие условия эквивалентны:

1. f — изометрия;
2. существует такая строго монотонная функция φ, что для всякой тройки точек x, y, z, образующих треугольник, конгруэнтный T, выполняется

$$\varphi(|xy|) + \varphi(|yz|) + \varphi(|zx|) = \\ = \varphi(|f(x)f(y)|) + \varphi(|f(y)f(z)|) + \varphi(|f(z)f(x)|).$$

Теорема В.Н. Берестовского

Теорема (V.N. Berestovskiĭ, 2002). Пусть (X, d) — локально компактное, геодезически полное, связное на бесконечности $CAT(\kappa)$-пространство. Если $f : X \to X$ — такая биекция, что $d(x, y) = 1$ тогда и только тогда, когда $d(f(x), f(y)) = 1$, то f является изометрией.

Характеризация изометрий пространств неположительной кривизны

Характеризация изометрий пространств неположительной кривизны

Теорема П.Д. Андреева

Теорема (П.Д. Андреев, 2003 → 2006 → 2010). Пусть метрические пространства (X, d_X) и (Y, d_Y) — геодезически полные, локально компактные, связные на бесконечности пространства неположительной кривизны в смысле Буземана, и $f : X \to Y$ — биекция. Тогда следующие утверждения эквивалентны.

1. Для точек $x, y \in X$ равенство $d_Y(f(x), f(y)) = 1$ выполняется тогда и только тогда, когда $d_X(x, y) = 1$;
2. Для точек $x, y \in X$ неравенство $d_Y(f(x), f(y)) \leq 1$ выполняется тогда и только тогда, когда $d_X(x, y) \leq 1$;
3. Для точек $x, y \in X$ неравенство $d_Y(f(x), f(y)) < 1$ выполняется тогда и только тогда, когда $d_X(x, y) < 1$;
4. f — изометрия.

Публикации П.Д. Андреева по теме доклада.

1. Общие вопросы геометрии пространств неположительной кривизны.
   1. *Орифункциональная компактификация конечномерного нормированного пространства* // Вестник Поморского университета, серия "Естественные и точные науки **2(10)** (2006), 123–130.
   2. П.Д. Андреев, *Геометрия идеальных границ геодезических пространств с неположительной кривизной в смысле Буземана*, Мат. Труды, **10**, 1 (2007).
   3. P.D. Andreev, *Geometric constructions in the class of Busemann nonpositively curved spaces* // J. Math. Ph. Geom., **5** (2009), 25–37.

Публикации П.Д. Андреева по теме доклада.

1. Общие вопросы геометрии пространств неположительной кривизны.
   1. *Орифункциональная компактификация конечномерного нормированного пространства* // Вестник Поморского университета, серия "Естественные и точные науки **2(10)** (2006), 123–130.
   2. П.Д. Андреев, *Геометрия идеальных границ геодезических пространств с неположительной кривизной в смысле Буземана*, Мат. Труды, **10**, 1 (2007).
   3. P.D. Andreev, *Geometric constructions in the class of Busemann nonpositively curved spaces* // J. Math. Ph. Geom., **5** (2009), 25–37.
2. Задача А.Д. Александрова
   1. П.Д. Андреев, *Восстановление метрики* $CAT(0)$*-пространства по диагональной трубке* // Зап. науч. сем. ПОМИ, **299** (2003), 5–29.
   2. П.Д. Андреев, *Концепция* r*-соотношений в пространствах Александрова неположительной кривизны* // Вестник Поморского университета, серия "Естественные и точные науки **1(3)** (2003), 102–106.
   3. П.Д. Андреев, *Задача А. Д. Александрова для* $CAT(0)$*-пространств* // Сиб. Мат. Ж., **46**, 1 (2006), 1–29.
   4. П.Д. Андреев, *Задача А.Д. Александрова для пространств неположительной кривизны в смысле Буземана* // Известия вузов. Математика (2010), №9, с. 10–35.

1. Проблема (7) Буземана
    1. П.Д. Андреев, *Доказательство гипотезы Буземана для GG-пространств неположительной кривизны* // Алгебра и анализ, 26 (2014), вып. 2, с. 1–20.
    2. П.Д. Андреев, *Структура нормированного пространства в G-пространстве конического типа* // Математические заметки, в печати.

Спасибо за внимание!