Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2011, № 8, с. 94–97 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421100123\0089*

С.В. СЕЛИВАНОВА

О ЛОКАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ МНОГООБРАЗИЙ КАРНО В НЕРЕГУЛЯРНЫХ ТОЧКАХ

Аннотация. В работе исследуется локальная геометрия многообразий Карно в окрестности нерегулярной точки для случая $2M$-гладких горизонтальных векторных полей, где M — глубина многообразия Карно.

Ключевые слова: многообразие Карно, нерегулярная точка, касательный конус.

УДК: 515.124 : 514.753

Abstract. In this paper we study the local geometry of Carnot manifolds in a neighborhood of a singular point in the case when horizontal vector fields are $2M$-smooth. Here M is the depth of a Carnot manifold.

Keywords: Carnot manifold, singular point, tangent cone.

В работе исследуется локальная геометрия многообразий Карно (иначе называемых субримановыми пространствами) в окрестности нерегулярной точки для случая $2M$-гладких горизонтальных векторных полей, где M — глубина многообразия Карно. В частности, доказаны локальная аппроксимационная теорема и существование касательного конуса (по Громову) в метрике Карно–Каратеодори. Исследуются также его алгебраические и геометрические свойства.

Как известно, в случае регулярных точек касательным конусом к субриманову пространству является группа Карно, т. е. связная односвязная нильпотентная стратифицированная группа Ли ([1], [2] для случая C^∞-гладких векторных полей и [3]–[8] для полей класса C^2). В случае нерегулярных точек касательным конусом является однородное пространство ([9] для C^∞-гладких векторных полей).

Известно, что основные этапы изучения локальной геометрии состоят в построении нильпотентных аппроксимаций и получении оценок расхождения интегральных линий исходных векторных полей и их нильпотентных аппроксимаций. Цель данной работы — не только обобщить некоторые методы из [9]–[12], [1], [2] на случай векторных полей с более низкой гладкостью, но и синтезировать их с методами работ [3], [4], [6]–[8]. В отличие от работ [9], [12] при получении оценок не используются специальные “привилегированные” координаты

Поступила 24.02.2011

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 10-01-00662), Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки ведущих научных школ, грант НШ-6613.2010.1, и Федеральной целевой программы “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 годы (гос. контракт № П2224).

и метод Ньютона. Есть основания полагать, что развитие методов данной статьи позволит произвести дальнейшее снижение гладкости для случая нерегулярных точек.

Мотивация изучения локальной геометрии субримановых пространств при минимальных предположениях на гладкость исходит из задач оптимального управления [13] и теории субэллиптических уравнений [14], [15].

В данной работе рассматриваем важный частный случай многообразий Карно: гладкость горизонтальных векторных полей и всех их коммутаторов вплоть до порядка $M-1$ равна $p := M$.

Определение 1. Пусть $\mathbb{M}$ — связное гладкое многообразие размерности $\dim \mathbb{M} = N$. Будем говорить, что на $\mathbb{M}$ задана субриманова структура глубины M, если в окрестности U каждой точки $u \in \mathbb{M}$ задана система векторных полей $\{X_1, \dots, X_m\} \in C^p$, $m \le N$, называемых горизонтальными, порождающих своими коммутаторами вплоть до порядка $M-1$ все касательное пространство $T_u\mathbb{M}$ в каждой точке (это условие называется условием Хёрмандера).

Полагая $H\mathbb{M} = H_1 = \operatorname{span}\{X_1, \dots, X_m\}$, $H_k = \operatorname{span}\{H_{k-1}, [H_{k-1}, H_1]\}$, получаем фильтрацию касательного расслоения $H\mathbb{M} = H_1 \subseteq H_2 \subseteq \dots \subseteq H_M = T\mathbb{M}$.

Пусть $I = (i_1, i_2, \dots, i_k)$, $i_j \in \{1, 2, \dots, m\}$, — произвольный мультииндекс порядка $|I| = k$. Обозначим через $X_I = [X_{i_1}, [X_{i_2}, \dots, [X_{i_{k-1}}, X_{i_k}] \dots]$ соответствующий коммутатор порядка $k-1$.

Определение 2. Точка $u \in \mathbb{M}$ субриманова пространства называется *регулярной*, если существует окрестность V этой точки, в которой $\dim H_k(v) = \mathrm{const}$ для всех $v \in V$, $k = 1, \dots, M$. В противном случае точка u называется *нерегулярной*.

Зафиксируем окрестность U произвольной (возможно, нерегулярной) точки u субриманова пространства $\mathbb{M}$. Обозначим через $n_k = \dim H_k(u)$ размерность соответствующего элемента фильтрации в точке u.

Определение 3. Степенью векторного поля Y называется число $\deg Y = \min\{l \mid Y \in H_l\}$.

Среди коммутаторов $\{X_I\}_{|I| \le M}$ выберем базис $\{Y_1, Y_2, \dots, Y_N\}$ такой, что наборы $\{Y_1(u), \dots, Y_{n_k}(u)\}$ образуют базисы пространств $H_k(u)$, $k = 1, \dots, M$.

Определение 4. Введем на U канонические координаты второго рода $\Phi^u : \mathbb{R}^N \to U$ как $\Phi^u(x_1, \dots, x_N) = \exp(x_1 Y_1) \circ \exp(x_2 Y_2) \circ \dots \circ \exp(x_N Y_N)(u)$.

Предложение 1. *В координатах Φ^u для произвольного C^{M+1}-гладкого векторного поля X имеет место разложение*

$$X'(x) := (\Phi^u)_*^{-1} X(\Phi^u(x)) = \sum_{j=1}^{N} \Bigg(\sum_{\substack{|\alpha|_h \ge \deg Y_j - \deg X, \\ |\alpha| \le M}} f_{(j,\alpha)} x^\alpha + o(\|x\|^M) \Bigg) \frac{\partial}{\partial x_j},$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, $|\alpha|_h = \sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i \deg Y_i$, $|\alpha| = \sum\limits_{i=1}^{N} \alpha_i$, $f_{(j,\alpha)} \in \mathbb{R}$, $\|x\|$ *— евклидова норма.*

Предложение 2. *Обозначим* $\widehat{X}_I^u = \Phi_*^u \langle (\widehat{X}_I^u)' \rangle$, *где* $(\widehat{X}_I^u)' = \sum\limits_{j=1}^{N} \sum\limits_{|\alpha|_h = \deg Y_j - \deg X} f_{(j,\alpha)} x^\alpha \frac{\partial}{\partial x_j}$.

Тогда векторные поля $\{\widehat{X}_i^u\}_{i=1}^m$ задают структуру субриманова пространства глубины M на некоторой окрестности $\widehat{U}$ точки u (без ограничения общности полагаем $\widehat{U} = U$), и алгебра Ли $\operatorname{Lie}\{\widehat{X}_1^u, \dots, \widehat{X}_m^u\}$ *нильпотентна.*

Ключевым для доказательства приведенных ниже теорем 1–3 (которые представляют собой основные результаты статьи) является

Предложение 3. *Существуют многообразие* $\widetilde{\mathbb{M}} = \mathbb{M} \times \mathbb{R}^{\widetilde{N}-N}$ *размерности* $\widetilde{N} \geq N$*, окрестность* $\widetilde{U}$ *точки* $(u,0) \in \widetilde{\mathbb{M}}$*, окрестность* U *точки* $u \in \mathbb{M}$*,* $U \times \{0\} \subseteq \widetilde{U}$*; координаты* (y,z) *на* $\widetilde{U}$ *и две системы векторных полей* $\widetilde{X}_k(y,z) = X_k(y) + \sum\limits_{j=N+1}^{\widetilde{N}} b_{kj}(y,z)\frac{\partial}{\partial z_j}$ *и* $\widetilde{\widehat{X}}_k(y,z) = \widehat{X}^u_k(y) + \sum\limits_{j=N+1}^{\widetilde{N}} b_{kj}(y,z)\frac{\partial}{\partial z_j}$*,* $k = 1,2,\ldots,m$*, задающих субримановы структуры глубины* M *на* $\widetilde{U}$ *такие, что все точки окрестности* $\widetilde{U}$ *регулярны относительно каждой из заданных систем.*

Приведем кратко основную конструкцию из доказательства предложения 3. Рассмотрим свободную алгебру Ли $\mathcal{N}_{M,m}$ с m порождающими, шага M [11], [16], реализованную в $\mathbb{R}^{\widetilde{N}}$ каноническими векторными полями $\{\widehat{\widetilde{X}'}_I\}_{|I|\leq M} \in C^\infty$. Пусть $G = \exp(\mathcal{N}_{M,m})(0)$ — соответствующая группа Карно. Определим действие группы G на исходном многообразии: для $g = \exp\Big(\sum\limits_{j=1}^{\widetilde{N}} c_j \widehat{\widetilde{X}'}_{I_j}\Big)(0) \in G$, $v \in U$ полагаем $g(v) = \exp\Big(\sum\limits_{j=1}^{\widetilde{N}} c_j \widehat{X}^u_{I_j}\Big)(v)$. Относительно введенного действия рассмотрим в G подгруппу изотропии $H = \{g \in G \mid g(u) = u\}$. На однородном пространстве G/H введем левоинвариантные горизонтальные векторные поля $\widehat{X}^H_i(Hg) = \frac{d}{dt}[Hg\exp(t\widehat{\widetilde{X}'}_i)(0)]\big|_{t=0}$, задающие субриманову структуру.

Теорема 1. *Любые две точки многообразия Карно можно соединить абсолютно непрерывной кривой, касательный вектор к которой в каждой точке принадлежит* H_1*.*

Таким образом, обобщена классическая теорема Рашевского–Чоу [17], [18]. Отметим работы [3], [6], в которых эта теорема доказана в окрестности регулярной точки в условиях минимальной гладкости векторных полей.

Теорема 1 позволяет ввести на U внутренние метрики Карно–Каратеодори d_c и d^u_c (не эквивалентные римановой метрике) как точную нижнюю грань длин всех горизонтальных (относительно векторных полей $\{X_i\}_{i=1}^m$ и $\{\widehat{X}^u_i\}_{i=1}^m$ соответственно) кривых, соединяющих данные точки. Таким образом, (U,d_c) и (U,d^u_c) — метрические пространства.

Теорема 2 (локальная аппроксимационная теорема)**.** *Пусть* $u \in U$ *— фиксированная точка. Тогда для любых точек* $v,w \in U$ *таких, что* $d_c(u,v) = O(\varepsilon)$*,* $d_c(u,w) = O(\varepsilon)$*, верна оценка* $|d_c(v,w) - d^u_c(v,w)| = O(\varepsilon^{1+1/M})$*.*

Понятие касательного конуса к метрическому пространству введено М. Громовым [1], [19]. Мы пользуемся несколько более общим определением [8], которое является модификацией определения из [20].

Теорема 3 (существование и алгебраическая структура касательного конуса)**.** *Метрическое пространство* (U,d^u_c) *является локальным касательным конусом к метрическому пространству* (U,d_c)*. При этом пространство* (U,d^u_c) *изометрично однородному пространству* G/H *с левоинвариантной метрикой Карно–Каратеодори, построенной по векторным полям* $\{\widehat{X}^H_i\}_{i=1}^m$*.*

В заключение выражаю благодарность С.К. Водопьянову за постановку задачи, постоянное внимание к работе и плодотворные обсуждения.

Литература

[1] Gromov M. *Carnot–Carathéodory spaces seen from within*, Sub-Riemannian geometry. Progr. Math. (Birkhäuser, Basel, 1996), V. 144, p. 79–323.

[2] Mitchell J. *On Carnot–Caratheodory metrics*, J. Different. Geom. **21**, 35–45 (1985).

[3] Karmanova M., Vodop'yanov S. *Geometry of Carnot–Carathéodory spaces, differentiability, coarea and area formulas*, Analysis and Mathematical Physics, Trends in Mathematics (Birkhäuser, Basel, 2009), p. 233–335.

[4] Водопьянов С.К., Карманова М.Б. *Локальная аппроксимационная теорема на многообразиях Карно в условиях минимальной гладкости*, Докл. РАН **413** (3), 305–311 (2007).

[5] Грешнов А.В. *О приложении методов группового анализа дифференциальных уравнений к некоторым системам C^1-гладких векторных полей*, Сиб. матем. журн. **50** (1), 47–62 (2009).

[6] Карманова М.Б. *Новый подход к исследованию пространств Карно-Каратеодори*, Докл. РАН **434** (3), 309–314 (2010).

[7] Селиванова С.В. *Касательный конус к регулярному квазиметрическому пространству Карно–Каратеодори*, Докл. РАН **425** (5), 595–599 (2009).

[8] Селиванова С. В. *Касательный конус к квазиметрическому пространству с растяжениями*, Сиб. матем. журн., **51** (2), 388–403 (2010).

[9] Bellaïche A. *The tangent space in sub-Riemannian geometry*, Sub-Riemannian Geometry. Progr. Math. (Birkhäuser, Basel, 1996), V. 144, p. 1–78.

[10] Hermes H. *Nilpotent and high-order approximations of vector field systems*, SIAM Rev. **33** (2), 238–264 (1991).

[11] Rotshild L.P., Stein E.M. *Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups*, Acta Math. **137** (3–4), 247–320 (1976).

[12] Jean F. *Uniform estimation of sub-Riemannian balls*, J. Dyn. and Control Syst. **7** (4), 473–500 (2001).

[13] Аграчев А.А., Сачков Ю.Л. *Геометрическая теория управления* (Физматлит, М., 2005).

[14] Hörmander L. *Hypoelliptic second order differential equations*, Acta Math. **119** (3-4), 147–171 (1967).

[15] Stein E.M. *Harmonic analysis*: *real-variable methods, orthogonality, and oscillatory integrals.* With the assistance of Timothy S. Murphy (Princeton University Press, NJ, Princeton, 1993).

[16] Christ M., Nagel A., Stein E.M., Wainger S. *Singular and maximal Radon transforms*: *analysis and geometry*, Ann. Math. Ser. 2 **150** (2), 489–577 (1999).

[17] Рашевский П.К. *О соединимости любых двух точек вполне неголономного пространства допустимой линией*, Учен. зап. Моск. гос. пед. ин-та им. К. Либкнехта. Сер. физ.-матем. **3** (2), 83–94 (1938).

[18] Chow W.L. *Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung*, Math. Ann. **117**, 98–105 (1939).

[19] Gromov M. *Groups of polynomial growth and expanding maps. Appendix by Jacques Tits*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **53**, 53–73 (1981).

[20] Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. *Курс метрической геометрии* (Ин-т компьютерных исследований, М.–Ижевск, 2004).

С.В. Селиванова

аспирант, институт математики им. С.Л. Соболева
Сибирского отделения Российской Академии наук,
проспект Ак. Коптюга, д. 4, г. Новосибирск, 630090,

`e-mail:` s_seliv@yahoo.com

S.V. Selivanova

Postgraduate, Sobolev Institute of Mathematics,
Siberian Branch of Russian Academy of Science,
4 Acad. Koptyug Ave., Novosibirsk, 630090 Russia,

`e-mail:` s_seliv@yahoo.com