Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2008, №10, с. 31–38 *e-mail: izvuz.matem@ksu.ru*

Р.Ш. МУХУТДИНОВ, Н.Б. ПЛЕЩИНСКИЙ

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ДВОЙСТВЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ И ДВОЙСТВЕННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Аннотация. Исследована связь между уравнениями, которые аппроксимируют исходное абстрактное линейное уравнение и сопряженное к нему. Показано, что оператор, сопряженный к аппроксимирующему оператору, аппроксимирует сопряженный оператор. В качестве примеров рассмотрены сопряженные линейные интегральные уравнения и взаимодвойственные задачи линейного программирования.

Ключевые слова: двойственное пространство, двойственный оператор, аппроксимация, линейное программирование, интегральные уравнения Фредгольма.

УДК: 517.988

Abstract. We study the connection between equations which approximate the initial abstract linear equation and the adjoint one. We prove that the operator which is adjoint to the approximating one approximates the adjoint operator. As examples we consider adjoint linear integral equations and mutually dual linear programming problems.

Keywords: dual space, dual operator, approximation, linear programming, Fredholm integral equations.

В теории разрешимости линейных интегральных уравнений и, в более общем случае, линейных операторных уравнений существенно используются понятия сопряженного пространства и сопряженного оператора (напр., [1], гл. I; [2], гл. IV). В данной работе исследована связь между уравнениями, которые аппроксимируют линейное операторное уравнение и сопряженное к нему. Для большей свободы действий привлечена абстрактная теория двойственности ([3], гл. 8). Использованы определения и терминология абстрактной теории приближенных методов, построенной в работе [4].

Показано, что оператор, двойственный к аппроксимирующему, аппроксимирует двойственный оператор. Аналогичное утверждение получено для взаимодвойственных задач абстрактного линейного программирования. В качестве примера рассмотрены союзные интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода.

1. Аппроксимация и интерполяция

Пусть X, Y и $\overline{X}$, $\overline{Y}$ — точные и аппроксимирующие пространства, T_X, S_X и T_Y, S_Y — пары операторов аппроксимации и интерполяции, $A : X \to Y$ и $\overline{A} : \overline{X} \to \overline{Y}$ — точный и аппроксимирующий линейные операторы (см. рис. 1).

Поступила 31.10.2006

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "A"] \arrow[d, shift right, "T_X"'] & Y \arrow[d, shift right, "T_Y"'] \\ \overline{X} \arrow[r, "\overline{A}"] \arrow[u, shift right, "S_X"'] & \overline{Y} \arrow[u, shift right, "S_Y"'] \end{tikzcd}$$

Рис. 1.

Здесь, как и в [4], пространство $\overline{X}$ аппроксимирует пространство X, если указаны такие операторы аппроксимации и интерполяции $T_X : X \to \overline{X}$ и $S_X : \overline{X} \to X$, что $T_X S_X = I$ (I — тождественный оператор). При нетривиальной аппроксимации $S_X T_X \neq I$. Если пространства $\overline{X}$, $\overline{Y}$ аппроксимируют пространства X, Y, то любой оператор $\overline{A} : \overline{X} \to \overline{Y}$ будем называть аппроксимирующим точный оператор A (или аппроксимацией A). Аналогично, если задан оператор $\overline{A} : \overline{X} \to \overline{Y}$, то любой оператор $\widetilde{A} : X \to Y$ будем называть интерполирующим оператор $\overline{A}$ (или интерполяцией $\overline{A}$). Операторы $\overline{A}^0 = T_Y A S_X$ и $\widetilde{A}^0 = S_Y \overline{A} T_X$ назовем операторами естественной аппроксимации и естественной интерполяции.

Близость операторов A и $\overline{A}$ удобно оценивать с помощью операторов $\overline{A}^0$ и $\widetilde{A}^0$. Мерой этой близости являются величины m и $\overline{m}$ из неравенств

$$\|(A - S_Y \overline{A} T_X)x\| \leq m\|x\| \quad \text{и} \quad \|(T_Y A S_X - \overline{A})\overline{x}\| \leq \overline{m}\|\overline{x}\|, \tag{1}$$

при этом можно сравнивать точный и аппроксимирующий операторы как на некотором множестве, так и на конкретном его элементе. Если нормы $\|A - S_Y \overline{A} T_X\|$ и $\|T_Y A S_X - \overline{A}\|$ можно корректно определить, то эти числа дают наилучшие оценки близости. В общем случае сохраняется возможность рассматривать неограниченные операторы или операторы, область определения которых не является плотным множеством.

2. Двойственные пространства и операторы

Пусть X и X' — линейные пространства над полем вещественных чисел и $\varphi(x, x')$ — билинейный функционал (форма) на $X \times X'$. В этом случае будем говорить, что пространства X и X' двойственны относительно φ (образуют двойственную или дуальную пару), а также форма φ приводит пространства X и X' в двойственность ([3], с. 683). Если не так важно, какой именно функционал выбран, будем использовать обозначения вида $\langle x, x' \rangle$ вместо $\varphi(x, x')$.

Оба пространства в двойственной паре равноправны. Пространство может быть двойственно само себе. Любое вещественное пространство со скалярным произведением двойственно само себе относительно билинейной формы $\langle x, x' \rangle = (x, x')$. Например, для $X = X' = C([a, b])$ можно взять

$$\langle x, x' \rangle = \varphi(x, x') = \int_a^b x(t) x'(t) dt. \tag{2}$$

Двойственной парой является также любая пара пространств функций, произведение элементов которых интегрируемо.

Линейное пространство X и алгебраически сопряженное к нему пространство X^+ (множество всех линейных функционалов на X) образуют двойственную пару, здесь $\langle x, x^+ \rangle = x^+(x)$. Также двойственны линейное пространство X и пространство X^*, к нему сопряженное (множество линейных непрерывных функционалов на X). Сопряженные пространства в двойственной паре уже не так равноправны, как просто двойственные.

Имеет место вложение $X' \subset X^+$. Действительно, если X — линейное пространство и X' — двойственное к нему относительно билинейной формы $\langle x, x' \rangle$, то каждому элементу $x' \in X'$ соответствует линейный функционал $x \mapsto \langle x, x' \rangle$. Этот функционал можно отождествить с x'.

Пусть X, X' и Y, Y' — двойственные пары линейных пространств, $A : X \to Y$ — линейный оператор, причем $D(A) = X$. Будем считать в дальнейшем, что область определения любого линейного оператора — все пространство.

Оператор $A' : Y' \to X'$ называется двойственным к A, если

$$\langle x, A'y' \rangle = \langle Ax, y' \rangle \quad \forall x \in X, \quad \forall y' \in Y'.$$

В ряде случаев нам будет удобнее рассматривать пару операторов $A : X \to Y'$ и $A' : Y \to X'$, для них условие двойственности имеет вид

$$\langle x, A'y \rangle = \langle y, Ax \rangle \quad \forall x \in X, \quad \forall y \in Y.$$

Противоречия здесь нет, различие только в обозначениях.

Как известно, двойственные (сопряженные) операторы в случае двойственных пар сопряженных пространств всегда существуют. Действительно, пусть X, X^+ и Y, Y^+ — двойственные пары, $A : X \to Y^+$. Оператор $A^+ : Y \to X^+$ называется алгебраически сопряженным к A, если

$$\langle x, A^+y \rangle = \langle y, Ax \rangle \quad \forall x \in X, \quad \forall y \in Y.$$

Чтобы построить этот оператор, нужно элементу $y \in Y$ поставить в соответствие функционал, переводящий элемент $x \in X$ в число $\langle y, Ax \rangle$. Очевидно, этот функционал линейный. Аналогично для двойственных пар сопряженных нормированных пространств: оператор $A^* : Y \to X^*$ называется сопряженным к линейному ограниченному оператору $A : X \to Y^*$, если

$$\langle x, A^*y \rangle = \langle y, Ax \rangle \quad \forall x \in X, \quad \forall y \in Y.$$

Заметим, что обычно оператор $A^* : Y^* \to X^*$ называют сопряженным к линейному ограниченному оператору $A : X \to Y$, если

$$\langle x, A^*y^* \rangle = \langle Ax, y^* \rangle \quad \forall x \in X, \quad \forall y^* \in Y^*.$$

В самом общем случае оператор, двойственный к линейному, не всегда существует.

Для двойственных операторов выполняются следующие равенства (но при условии, что двойственные операторы существуют):

1) $(A + B)' = A' + B'$;
2) $(kA)' = kA'$;
3) $(BA)' = A'B'$;
4) $(A')' = A$;
5) $I' = I \quad (I$ — тождественный оператор).

Действительно, пусть A и B — линейные операторы из X в Y'. Пусть существуют двойственные операторы A' и B', при этом выполняются тождества $\langle x, A'y \rangle = \langle y, Ax \rangle$ и $\langle x, B'y \rangle = \langle y, Bx \rangle \quad \forall x \in X, \quad \forall y \in Y$. Отсюда следует $\langle x, (A' + B')y \rangle = \langle y, (A + B)x \rangle$. Тогда $A' + B'$ — оператор, двойственный к линейному оператору $A + B$.

Аналогично доказываются остальные равенства. Например, пусть $A : X \to Y'$, $A' : Y \to X'$ и $B : Y' \to Z$, $B' : Z' \to Y$ — две пары двойственных операторов, при этом $\langle x, A'y \rangle = \langle y, Ax \rangle$ и $\langle By', z' \rangle = \langle B'z', y' \rangle$. Тогда $\langle x, A'B'z' \rangle = \langle B'z', Ax \rangle = \langle BAx, z' \rangle$, т. е. оператор $A'B' : Z' \to X'$ является двойственным к оператору $BA : X \to Z$.

В последнем равенстве подразумевается, что $Y = X$, $Y' = X'$ и $I : X \to X$.

3. Аппроксимация двойственности

Пусть X, X' и Y, Y' — двойственные пространства, $A : X \to Y$ и $A' : Y' \to X'$ — двойственные операторы. Пусть пространства $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ аппроксимируют пространства X и Y, а T_X, S_X, T_Y, S_Y — операторы аппроксимации и интерполяции. Чтобы аппроксимировать пространства X', Y' и оператор A', нужно определить операторы T'_X, S'_X, T'_Y, S'_Y и $\overline{A'}$ (см. рис. 2).

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[d, shift right, "T_{X'}"'] & Y' \arrow[l, "A'"'] \arrow[d, shift right, "T_{Y'}"'] \\
\overline{X'} \arrow[u, shift right, "S_{X'}"'] & \overline{Y'} \arrow[l, "\overline{A'}"'] \arrow[u, shift right, "S_{Y'}"']
\end{tikzcd}$$

Рис. 2.

Укажем естественный способ аппроксимации двойственных пространств и операторов. Пусть $\overline{X}'$ и $\overline{Y}'$ — пространства, двойственные к $\overline{X}$ и $\overline{Y}$.

I. *Если операторы T_X и S_X имеют двойственные, то пространство $\overline{X}'$ аппроксимирует пространство X'.*

Доказательство. По определению операторов аппроксимации и интерполяции $T_X S_X = I$ (в пространстве $\overline{X}$). Из свойств 3) и 5) двойственных операторов следует, что для операторов $T'_X : \overline{X}' \to X'$ и $S'_X : X' \to \overline{X}'$ выполняется тождество $S'_X T'_X = I$ (в пространстве $\overline{X}'$). Поэтому $\overline{X}'$ есть аппроксимация X', при этом операторы аппроксимации и интерполяции $T_{X'} = S'_X$, $S_{X'} = T'_X$.

Заметим, что равенство $\overline{X'} = \overline{X}'$ не означает, что операции аппроксимации и двойственности коммутируют. Это равенство показывает, что пространство $\overline{X}'$ выбрано в качестве аппроксимации пространства X' (из всех возможных аппроксимаций).

Утверждение I можно было бы сформулировать в такой форме: *пространство, двойственное к аппроксимирующему пространству, аппроксимирует пространство, двойственное к точному.* По аналогии можно выбирать $\overline{Y'} = \overline{Y}'$.

II. *Если оператор $\overline{A}'$ существует, то он аппроксимирует оператор A'.*

Доказательство. Пусть оператор $\overline{A} : \overline{X} \to \overline{Y}$ аппроксимирует оператор $A : X \to Y$. Как следует непосредственно из определения двойственного оператора, оператор $\overline{A}'$ действует из $\overline{Y}'$ в $\overline{X}'$.

Равенство $\overline{A'} = \overline{A}'$ также нужно понимать в том смысле, что $\overline{A}'$ – один из операторов, аппроксимирующих A'. Можно выбрать и другой аппроксимирующий оператор.

Если $\overline{X'} = \overline{X}'$, $\overline{Y'} = \overline{Y}'$ и $\overline{A'} = \overline{A}'$, то диаграмма на рис. 2 уточняется (см. рис. 3).

$$\begin{tikzcd}
X' \arrow[d, shift right, "S'_X"'] & Y' \arrow[l, "A'"'] \arrow[d, shift right, "S'_Y"'] \\
\overline{X}' \arrow[u, shift right, "T'_X"'] & \overline{Y}' \arrow[l, "\overline{A}'"'] \arrow[u, shift right, "T'_Y"']
\end{tikzcd}$$

Рис. 3.

III. *Если $\overline{A'} = \overline{A}'$, то $(\overline{A}^0)' = \overline{(A')}^0$ и $(\widetilde{A}^0)' = \widetilde{(A')}^0$.*

Доказательство. Действительно, с одной стороны, при естественной аппроксимации $\overline{A}^0 = T_Y A S_X$ получим $(\overline{A}^0)' = S'_X A' T'_Y$. С другой стороны, $\overline{(A')}^0 = T_{X'} A' S_{Y'} = S'_X A' T'_Y$. Поэтому "операции" $\overline{}^0$ и $'$ в определенном смысле перестановочны.

Кроме того, $(\widetilde{A}^0)' = (S_Y \overline{A} T_X)' = T'_X \overline{A}' S'_Y$ и $\widetilde{(A')}^0 = T'_X \overline{A'} S'_Y$. Заметим, что при $\overline{A}' \neq \overline{A'}$ второе равенство не выполняется.

В дополнение к утверждению III приведем пару формул:

$$\overline{(\widetilde{A}^0)}^0 = \overline{(S_Y \overline{A} T_X)}^0 = T_Y S_Y \overline{A} T_X S_X = \overline{A}, \quad \widetilde{(\overline{A}^0)}^0 = \widetilde{(T_Y A S_X)}^0 = S_Y T_Y A S_X T_X \neq A.$$

Для сопряженных и алгебраически сопряженных пространств и операторов имеют место аналогичные утверждения.

4. Абстрактное линейное программирование

В работе [5] исследованы двойственные задачи линейного программирования в абстрактной постановке и задачи, их аппроксимирующие.

Пусть X, X' и Y, Y' — пары двойственных упорядоченных линейных пространств, $x'_0 \in X'$, $y'_0 \in Y'$ — фиксированные их элементы. Рассмотрим две двойственные задачи абстрактного линейного программирования. Пусть $A : X \to Y'$ — линейный оператор и $A' : Y \to X'$ — двойственный к A оператор. Прямая задача абстрактного линейного программирования состоит в следующем:

$$\langle x, x'_0 \rangle \to \max, \quad Ax \leq y'_0, \quad x \geq 0. \tag{3}$$

Двойственная к ней задача ставится так:

$$\langle y, y'_0 \rangle \to \min, \quad A'y \geq x'_0, \quad y \geq 0. \tag{4}$$

Для алгебраически сопряженных и сопряженных пространств двойственные задачи линейного программирования формулируются аналогичным образом. В эту общую схему естественным образом вкладываются взаимодвойственные задачи классического конечномерного линейного программирования (в стандартной постановке) [6], гл. III, § 1.

Для задач абстрактного линейного программирования остаются в силе многие утверждения, установленные для дискретного случая. Например, справедливо утверждение

IV. *Если x и y — допустимые элементы, то $\langle x, x'_0 \rangle \leq \langle y, y'_0 \rangle$. Если x^0 и y^0 — допустимые элементы и $\langle x^0, x'_0 \rangle = \langle y^0, y'_0 \rangle$, то x^0 и y^0 — решения задач* (3) *и* (4).

Предположим, что операторы аппроксимации и интерполяции сохраняют порядок в линейных пространствах: например, если $T_X : X \to \overline{X}$, то из $x \geq 0$ следует $\overline{x} = T_X x \geq 0$.

Задачу линейного программирования, аппроксимирующую прямую задачу (3), поставим следующим образом:

$$\langle \overline{x}, S'_X x'_0 \rangle \to \max, \quad T_{Y'} A S_X \overline{x} \leq T_{Y'} y'_0, \quad \overline{x} \geq 0. \tag{5}$$

Здесь элементы точных пространств заменены на соответствующие им элементы аппроксимирующих пространств, а в качестве аппроксимирующего оператора $\overline{A} : \overline{X} \to \overline{Y'}$ выбран оператор естественной аппроксимации $\overline{A}^0 = T_{Y'} A S_X$.

Задача (5) может быть получена также в результате следующих рассуждений. Будем искать решение задачи (3) в виде $x = S_X \overline{x}$. Получим

$$\langle S_X \overline{x}, x'_0 \rangle \to \max, \quad A S_X \overline{x} \leq y'_0, \quad S_X \overline{x} \geq 0.$$

В функционале перейдем от оператора S_X к двойственному, первое неравенство спроектируем на пространство $\overline{Y}'$, а второе заменим на $\overline{x} \geq 0$.

V. *При естественной аппроксимации задача, двойственная к аппроксимирующей прямую, аппроксимирует двойственную задачу.*

Доказательство. Выполним аналогичные действия для двойственной задачи (4). Будем искать ее решения в виде $y = S_Y\overline{y}$. Из

$$\langle S_Y\overline{y}, y_0'\rangle \to \min, \quad A'S_Y\overline{y} \geq x_0', \quad S_Y\overline{y} \geq 0$$

следует

$$\langle \overline{y}, S_Y'y_0'\rangle \to \min, \quad T_{X'}A'S_Y\overline{y} \geq T_{X'}x_0', \quad \overline{y} \geq 0. \tag{6}$$

Легко видеть, что задачи (5) и (6) являются двойственными.

5. Оценки погрешности и сходимость

Близость двойственного оператора и его аппроксимации можно оценить с помощью неравенств вида (1). Покажем, что эти операторы близки друг к другу настолько, насколько близки друг к другу исходный оператор и его аппроксимирующий.

Пусть точные и аппроксимирующие пространства, а также двойственные к ним, нормированы. Ограничимся случаем, когда в качестве двойственных операторов рассматриваются сопряженные операторы.

VI.

$$\|(A^* - T_X^*\overline{A}^*S_Y^*)y^*\| \leq \sup_{\|x\|\leq 1} \|(A - S_Y\overline{A}T_X)x\| \cdot \|y^*\|,$$
$$\|(S_X^*A^*T_Y^* - \overline{A}^*)\overline{y}^*\| \leq \sup_{\|\overline{x}\|\leq 1} \|(T_YAS_X - \overline{A})\overline{x}\| \cdot \|\overline{y}^*\|.$$

Доказательство. В соответствии с определениями сопряженного оператора и нормы линейного функционала

$$\|(A^* - T_X^*\overline{A}^*S_Y^*)y^*\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle x, (A^* - T_X^*\overline{A}^*S_Y^*)y^*\rangle| =$$
$$= \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle (A^* - T_X^*\overline{A}^*S_Y^*)^*x, y^*\rangle| = \sup_{\|x\|\leq 1} |\langle (A - S_Y\overline{A}T_X)x, y^*\rangle| \leq$$
$$\leq \sup_{\|x\|\leq 1} \|(A - S_Y\overline{A}T_X)x\| \cdot \|y^*\|.$$

Второе неравенство проверяется точно так же.

Рассмотрим теперь последовательность операторов $\overline{A}^{(n)}$, аппроксимирующих оператор A. Сходимость $\overline{A}^{(n)}$ к A можно понимать и как ST-, и как TS-сходимость [4]. Непосредственно из утверждения VI для любого типа сходимости следует

VII. *Если $\overline{A}^{(n)} \to A$ при $n \to \infty$, то ${\overline{A}^{(n)}}^* \to A^*$ при $n \to \infty$.*

Если $\overline{A^*} \neq \overline{A}^*$, то при оценке близости операторов $\overline{A^*}$ и $\overline{A}^*$ нужно учитывать, что они были построены на основе двух различных аппроксимаций: оператора A оператором $\overline{A}$ и оператора A^* оператором $\overline{A^*}$. Имеет место неравенство

$$\|(\overline{A^*} - \overline{A}^*)y^*\| \leq \|(\overline{A^*} - S_X^*A^*T_Y^*)y^*\| + \|(S_X^*A^*T_Y^* - \overline{A}^*)y^*\|. \tag{7}$$

Первое слагаемое справа показывает, как точно аппроксимирован оператор A^* оператором $\overline{A^*}$, а второе зависит от точности аппроксимации оператора A оператором $\overline{A}$ (утверждение VI). Из неравенства (7) следует, что справедливо

VIII. *Если $\overline{A}^{(n)} \to A$ и ${\overline{A^*}}^{(n)} \to A^*$ при $n \to \infty$, то ${\overline{A^*}}^{(n)} - {\overline{A}^{(n)}}^* \to 0$ при $n \to \infty$.*

6. Интегральные уравнения Фредгольма 2-го рода

Рассмотрим в качестве примера одномерное интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода на отрезке

$$(Ax)(t) \equiv x(t) + \int_a^b x(\tau)k(\tau,t)d\tau = y'(t), \quad t \in [a,b].$$

Пусть точные пространства $X = Y' = C([a,b])$. Покажем, что утверждение II действительно имеет место, и это утверждение не очевидное.

Выберем на $[a,b]$ узлы $t_1,\dots,t_n$ и зададим оператор аппроксимации $T : x(\cdot) \mapsto \overline{x}$ так, что $\overline{x}_j = x(t_j)$, $j = 1,\dots,n$. Пусть $\overline{X} = \overline{Y'} = R^n$. С помощью квадратурной формулы

$$\int_a^b f(t)dt \approx \sum_{j=1}^n r_j f(t_j)$$

построим аппроксимацию в виде системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом механических квадратур:

$$(\overline{A}\overline{x})_k \equiv \overline{x}_k + \sum_{j=1}^n \overline{x}_j r_j k(t_j,t_k) = \overline{y}'_k, \quad k = 1,\dots,n.$$

Пусть $Y = X' = C([a,b])$. Уравнение

$$(A'y)(t) \equiv y(t) + \int_a^b y(\tau)k(t,\tau)d\tau = x'(t), \quad t \in [a,b],$$

является двойственным к исходному уравнению относительно билинейной формы (2). СЛАУ с транспонированной матрицей

$$(\overline{A'}\overline{y})_k = (\overline{A}'\overline{y})_k \equiv \overline{y}_k + \sum_{j=1}^n \overline{y}_j r_k k(t_k,t_j) = \overline{x}'_k, \quad k = 1,\dots,n,$$

вообще говоря, не совпадает с системой уравнений

$$(\overline{A'}\overline{y})_k = (\overline{A}'\overline{y})_k \equiv \overline{y}_k + \sum_{j=1}^n \overline{y}_j r_j k(t_k,t_j) = \overline{x}'_k, \quad k = 1,\dots,n,$$

которая аппроксимирует двойственное уравнение. Но эти системы сводятся друг к другу, достаточно в первой из них переобозначить $\overline{y}_k/r_k$ как $\overline{y}_k$.

В работе [7] показано, что при аппроксимации интегралов по формуле трапеций для кубических норм

$$\|(\overline{A} - TAS)\overline{x}\| \le (b-a)\omega(k(\cdot,\cdot),\delta) \cdot \|\overline{x}\|,$$

где

$$\omega(x(\cdot),\delta) = \max_{|t'-t''|<\delta} |x(t') - x(t'')|, \quad 0 < \delta < b-a \quad (t',t'' \in [a,b]),$$

— модуль непрерывности функции. Легко видеть, что для двойственных операторов

$$\|(\overline{A}' - S'A'T')\overline{x}'\| \le (b-a)\omega(k(\cdot,\cdot),\delta) \cdot \|\overline{x}'\|,$$

что согласуется с утверждением VI.

Литература

[1] Михлин С.Г. *Лекции по линейным интегральным уравнениям.* – М.: Физматгиз, 1959. – 232 с.

[2] Треногин В.А. *Функциональный анализ.* – М.: Наука, 1980. – 496 с.

[3] Эдвардс Р. *Функциональный анализ. Теория и приложения.* — М.: Мир, 1969. – 1072 с.

[4] Плещинский Н.Б. *К абстрактной теории приближенных методов решения линейных операторных уравнений* // Изв. вузов. Математика. – 2000. – № 3. – С. 39–47.

[5] Мухутдинов Р.Ш. *Об аппроксимации задач линейного программирования* // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 32. Матем. моделирование и матем. физика. – Казань: Изд-во Казанск. матем. об-ва, 2005. – С. 31–40.

[6] Ашманов С.А. *Линейное программирование.* – М.: Наука, 1981. – 304 с.

[7] Плещинский Н.Б. *Абстрактная теория приближенных методов решения линейных задач* // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Т. 13. Числ. методы решения линейных и нелин. задач. – Казань: Изд-во “ДАС”, 2001. – С.54–75.

Р.Ш. Мухутдинов

младший научный сотрудник, отдел прикладной математической физики
НИИММ им. Н.Г. Чеботарева, Казанский государственный университет,
420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, д. 1/37

Н.Б. Плещинский

профессор, кафедра прикладной математики, Казанский государственный университет,
420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 18,

`e-mail:` pnb@ksu.ru

R.Sh. Mukhutdinov

Junior Researcher, Department of Applied Mathematical Physics,
Chebotaryov Institute of Mathematics and Mechanics,
Kazan State University,
1/37 Professor Nuzhin str., Kazan, 420008 Russia

N.B. Pleshchinskii

Professor, Chair of Applied Mathematics, Kazan State University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

`e-mail:` pnb@ksu.ru