

УДК 519.63

doi: 10.26907/2541-7746.2019.3.377-392

## ОДНОРОДНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ СОПРЯЖЕННЫХ ЗАДАЧ ГИДРОДИНАМИКИ И УПРУГОСТИ

*И.П. Цыгвинцев<sup>1</sup>, А.Ю. Круковский<sup>1</sup>, Ю.А. Повещенко<sup>1,2</sup>,  
В.А. Гасилов<sup>1,2</sup>, Д.С. Бойков<sup>1</sup>, С.Б. Попов<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,  
г. Москва, 125047, Россия*

<sup>2</sup>*Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ,  
г. Москва, 115409, Россия*

### Аннотация

В работе построена конечно-разностная аппроксимация упругих сил на разнесённых лагранжевых сетках, основанная на методе опорных операторов. Для векторов смещений на нерегулярных сетках, на топологическую и геометрическую структуру которых наложены минимальные разумные ограничения, применительно к разностным схемам для задач теории упругости построены аппроксимации операций векторного анализа в плоской и цилиндрической геометрии. С учетом энергетического баланса среды построены семейства интегрально согласованных аппроксимаций операций векторного анализа, достаточные для дискретного моделирования этих процессов с учетом кривизны пространства, вызванной цилиндрической геометрией системы. Рассматриваются схемы, как использующие тензор напряжений в явном виде, так и разделяющие его на шаровую и сдвиговую компоненты (давление и девиатор). Подобное разделение используется для построения однородных уравнений, применимых как для твёрдого тела, так и для испарённой фазы. При построении аппроксимации используется линейная теория упругости. В явном виде приведены результирующие силы в двумерных  $xy$ - и  $rz$ -геометриях для сетки, состоящей из треугольных и четырёхугольных ячеек. Обобщение методики на нелинейный тензор деформации, на область неприменимости закона Гука или на трёхмерную геометрию может быть проведено по аналогии, но в настоящей работе подробно не рассматривается. На модельной задаче проведено сравнение различных временных аппроксимаций для построенной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В частности, рассмотрены полностью неявная аппроксимация, консервативная неявная аппроксимация и явная аппроксимация, аналогичная методу с перешагиванием (“leap-frog”). Из анализа дисбаланса полной энергии и сравнения вычислительной стоимости сделан вывод о преимуществе последней. Эффективность использования различных аппроксимаций проанализирована в вычислительных экспериментах.

**Ключевые слова:** конечно-разностная схема, тензор деформации, метод опорных операторов, лагранжева сетка «разнесенного» типа

### Введение

В основе настоящей работы лежит идея построения численной методики для сквозного расчёта совокупности процессов, возникающих при воздействии на вещество, которое находится первоначально в конденсированном состоянии, высокоинтенсивным потоком энергии, переносимой излучением. Такого рода методики востребованы в области физики высоких плотностей энергии. Например, взаимодействие лазерного излучения с материалом твердой мишени может протекать

в различных режимах в зависимости от интенсивности воздействия и общей поглощённой энергии. Если интенсивность лазерного импульса достаточно велика, чтобы ионизовать испарённое вещество, над поверхностью мишени возникает слой плазмы – «корона» или «подушка», в которой поглощается основная доля лазерной мощности. Перенос энергии в плотное вещество мишени происходит за счёт процессов электронной и лучистой теплопроводности, а также из-за импульса отдачи аблированной плазмы. По веществу распространяется ударная волна, амплитуда которой уменьшается по мере продвижения вглубь мишени. На некотором расстоянии от поверхности вещества температура и давление за фронтом ударной волны оказываются недостаточными, чтобы осуществить фазовый переход, и вещество остаётся в твёрдом состоянии. В этом случае для корректного описания динамики мишени необходим учёт упругих сил и сдвиговых напряжений.

В настоящей работе мы рассматриваем несколько различных реализаций основанной на методе опорных операторов дискретной модели упругих сил [1–7] для двумерных плоской и цилиндрической сеток, состоящих из четырёхугольных ячеек. Обобщение метода на полностью трёхмерный случай и на произвольные сетки здесь не рассматривается.

### 1. Физические приближения

Движение вещества определяется уравнением неразрывности и уравнениями Эйлера. В интегральной форме в эйлеровых переменных  $r = (x, y, z)$  они записываются следующим образом [8]:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{O(t)} \rho dV &= 0, \\ \frac{d}{dt} \int_{O(t)} \rho \mathbf{v}^i dV &= \int_{\partial O(t)} \sigma^{ij} d\mathbf{S}^j = - \int_{\partial O(t)} P d\mathbf{S}^i + \int_{\partial O(t)} \tilde{\sigma}^{ij} d\mathbf{S}^j. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $t$  – время,  $\rho$  – плотность вещества,  $\mathbf{v} = \partial \mathbf{r} / \partial t$  – вектор скорости,  $\sigma$  – тензор напряжений,  $P = -1/3 \cdot \text{Tr}(\sigma)$  – гидродинамическое давление,  $\tilde{\sigma} = \sigma - 1/3 \cdot \text{Tr}(\sigma) \delta$  – сдвиговая компонента (девиатор) тензора напряжений,  $\delta$  – символ Кронекера,  $dV$  и  $d\mathbf{S}$  – элемент произвольного жидкого объёма  $O(t)$  и внешняя нормаль к его поверхности  $\partial O(t)$ .  $\text{Tr}()$  – след тензора, по повторяющемуся индексу ведётся суммирование.

Уравнение, отвечающее закону сохранения энергии, в тех же обозначениях имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{O(t)} \rho \left( \frac{\mathbf{v}^2}{2} + \varepsilon \right) dV &= - \int_{\partial O(t)} P \mathbf{v}^i d\mathbf{S}^i + \\ &+ \int_{\partial O(t)} \mathbf{v}^i \tilde{\sigma}^{ij} d\mathbf{S}^j - \int_{\partial O(t)} \mathbf{W}^i d\mathbf{S}^i + \int_{O(t)} G dV, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\varepsilon$  – удельная внутренняя энергия,  $\mathbf{W}$  – поток тепла,  $G$  – объёмная плотность мощности сторонних источников.

Приведение тензора напряжения к виду  $\sigma = \tilde{\sigma} - P\delta$  является необходимым шагом для построения однородной разностной схемы, применимой как для твёрдого вещества, где вклады от диагонального и недиагонального членов (отвечающих за

объемные и сдвиговые деформации соответственно) сравнимы, так и для плазмы, где сдвиговые напряжения отсутствуют, но для корректного описания зависимости давления от плотности необходимо использование сложных моделей, например, [9]. Это вызвано тем, что вклады сдвиговой деформации аппроксимируются на недеформированной сетке  $\mathbf{r}_s$  [10], то есть используются следующие приближённые равенства:

$$\int_{\partial O(t)} \sigma^{ij} d\mathbf{S}^j \approx \int_{\partial O(t)} \sigma^{ij} d\mathbf{S}_s^j, \quad \int_{\partial O(t)} \sigma^{ij} d\mathbf{S}^j \approx - \int_{\partial O(t)} P d\mathbf{S}^i + \int_{\partial O(t)} \tilde{\sigma}^{ij} d\mathbf{S}_s^j.$$

Первое из них верно лишь в условиях малых деформаций ( $O(t) \approx O$ , твёрдое тело) и не позволяет провести сквозной расчёт. Второе – либо в условиях малой деформации, либо в условиях отсутствия сдвиговой компоненты, что покрывает всю область параметров для типичного вещества.

Для замыкания системы уравнений (1)–(2) определим тензор деформации  $\sigma$  и внутреннюю энергию  $\varepsilon$  как функции вектора смещения  $\mathbf{U} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_s$  и параметров вещества с помощью закона Гука [10]:

$$\begin{aligned} T^{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{U}^j}{\partial \mathbf{r}_s^i} + \frac{\partial \mathbf{U}^i}{\partial \mathbf{r}_s^j} + \frac{\partial \mathbf{U}^k}{\partial \mathbf{r}_s^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^k}{\partial \mathbf{r}_s^j} \right), \\ \sigma &= \lambda \text{Tr}(T)\delta + 2\mu T = K \text{Tr}(T)\delta + 2\mu \left( T - \frac{1}{3} \text{Tr}(T)\delta \right), \\ \varepsilon &= \frac{K}{2\rho_s} \text{Tr}(T)^2 + \frac{\mu}{\rho_s} \left( T - \frac{1}{3} \text{Tr}(T)\delta \right)^2 = \frac{1}{2\rho_s} T^{ij} \sigma^{ij}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $T$  – тензор деформации Грина, записанный в лагранжевых переменных,  $\mu$  – модуль сдвига,  $\lambda$  – первый параметр Ламе, связанный с адиабатическим модулем всестороннего сжатия  $K$  соотношением  $K = \lambda + 2\mu/3$ ,  $\rho_s$  – плотность недеформированного вещества.

Далее мы будем рассматривать адиабатические деформации в рамках линейной теории упругости. В этом случае квадратичными членами в тензоре  $T$  можно пренебречь, и после выделения сдвиговой части тензора деформации переписать (3) в виде

$$\begin{aligned} T^{ij} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{U}^j}{\partial \mathbf{r}_s^i} + \frac{\partial \mathbf{U}^i}{\partial \mathbf{r}_s^j} \right), \quad \tilde{\sigma} = 2\mu \left( T - \frac{1}{3} \text{Tr}(T)\delta \right), \\ P &= K \left( 1 - \frac{\rho_s}{\rho} \right), \quad \varepsilon = \frac{T^{ij} \tilde{\sigma}^{ij}}{2\rho_s} + \frac{K}{2\rho_s} \left( 1 - \frac{\rho_s}{\rho} \right)^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Нетрудно убедиться в выполнении термодинамического тождества

$$-\frac{\partial \varepsilon}{\partial(1/\rho)} = -\frac{1}{2} \frac{K}{\rho_s} \frac{\partial}{\partial(1/\rho)} \left( 1 - \frac{\rho_s}{\rho} \right)^2 = K \left( 1 - \frac{\rho_s}{\rho} \right) = P.$$

В общем случае для сквозного расчёта необходимо заменить давление и шаровую часть внутренней энергии на уравнение состояния, покрывающее рассматриваемую область параметров, и уточнить зависимость сдвиговой компоненты от параметров вещества.

Запишем теорему Остроградского–Гаусса для вектора  $\sigma^{ij} \delta \mathbf{U}^i$

$$\int_O \delta \mathbf{U}^i \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial \mathbf{r}^j} dV_s + \int_O \frac{\partial \delta \mathbf{U}^i}{\partial \mathbf{r}^j} \sigma^{ij} dV_s = \int_{\partial O} \delta \mathbf{U}^i \sigma^{ij} d\mathbf{S}_s^j.$$

Первое слагаемое в левой части этого выражения равно изменению кинетической энергии жидкого объёма  $O$  при изменении его координат на  $\delta\mathbf{U}$ , второе – изменению внутренней энергии; справа стоит работа внешних сил на границе  $\partial O$ . Таким образом, в случае адиабатических деформаций (отсутствия внешних источников тепла, теплопроводности и вязкости) закон сохранения энергии (2) удовлетворяется тождественно.

Закон Гука (3) применим в области относительно небольших деформаций:  $|T^{ij}| \ll 1$ , вследствие чего  $|1 - \rho_s/\rho| \ll 1$ . Отметим, что пренебрежение квадратичными членами в формуле для тензора деформации в (4) требует учета более сильного ограничения  $|\partial\mathbf{U}^i/\partial\mathbf{r}_s^j| \ll 1$ , которое выполняется только при отсутствии вращения и только для тел, размеры которых во всех направлениях сравнимы [10]. Таким образом, существует класс задач, в которых сила зависит от тензора деформации линейным образом, но при вычислении самого тензора деформации необходим учёт квадратичных членов. В настоящей работе окончательные формулы будут выведены для линейного тензора деформации, но сам подход к дискретизации упругих сил может быть обобщён и на нелинейный случай.

## 2. Дискретизация и конечно-разностная схема

Мы рассматриваем класс лагранжевых схем второго порядка точности по шагу пространственной сетки с аппроксимацией скоростей  $\mathbf{v}$ , координат  $\mathbf{r}$  и сил  $\mathbf{F}$  в узлах, а параметров вещества (плотности  $\rho$ , давления  $P$ , коэффициентов  $K$  и  $\mu$ ) в ячейках разностной сетки [8]. Массы сеточных элементов  $M$  определяются как для ячеек, так и для узлов (в последнем случае выделяются индексом  $M^*$ ).

Далее для записи сеточных величин по возможности используется безындексная нотация:  $f = f(t_n, \mathbf{r}_l(t_n))$ ,  $\hat{f} = f(t_{n+1}, \mathbf{r}_l(t_{n+1}))$ ,  $f^{(\alpha)} = \alpha\hat{f} + (1 - \alpha)f$ ,  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ . Здесь индекс  $n$  указывает на временной слой, индекс  $i$  – на узел пространственной сетки.

В этих обозначениях разностная схема, аппроксимирующая систему (1), имеет вид

$$\frac{\hat{\mathbf{r}} - \mathbf{r}}{\Delta t} = \mathbf{v}^{(\alpha)}, \quad M^* \frac{\hat{\mathbf{v}} - \mathbf{v}}{\Delta t} = \mathbf{F}^{(\beta)}. \quad (5)$$

Параметры  $(\alpha, \beta)$  характеризуют явность разностной схемы. В случае, когда  $\alpha \cdot \beta = 0$ , уравнения (4) разделяются, и расчёт можно проводить сквозным образом. Однако для гидродинамической схемы с аппроксимациями [11] в плоском случае предпочтительной является схема (0.5, 0.5), так как для неё работа сил давления в ячейке в точности соответствует термодинамическому соотношению  $dE = -PdV + TdS$ , что обеспечивает полную консервативность схемы. Таким образом, при построении однородной разностной схемы необходимо рассматривать и неявные по времени аппроксимации. Схемы с выделением диагональной компоненты далее будем обозначать  $(\alpha, \beta)^*$ .

Необходимым и достаточным условием консервативности схемы (5) при  $\Delta t \rightarrow 0$  является следующее соотношение между силой и потенциальной энергией:

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial \mathbf{r}}. \quad (6)$$

Если энергия деформации является квадратичной формой координат, то схема (0.5, 0.5) полностью консервативна и для аппроксимации упругих сил [12, 13]. В противном случае, для схемы (0.5, 0.5) дисбаланс полной энергии на шаге имеет третий порядок малости по  $\Delta t$ , а полный дисбаланс за фиксированное время – второй порядок малости по  $\Delta t$ .

### 3. Аппроксимация упругих сил

Для вычисления упругих сил и ассоциированной с ними энергии деформации существует два подхода: аппроксимация непосредственно сил с последующим восстановлением энергии деформации либо аппроксимация энергии с вычислением сил по соотношению (6). «Силовой» подход сложнее обобщить на нелинейный случай либо увеличить порядок аппроксимации по шагу пространственной сетки. С другой стороны, «энергетический» подход неприменим для аппроксимации непотенциальных сил (например, сил вязкого трения), хотя в дифференциальных выражениях для силы трения используются те же операторы, что и для силы упругости в линейном приближении.

В настоящей работе мы опишем построение аппроксимации упругих сил, полученной в работах [7, 12–14], в рамках второго подхода с использованием аппроксимации энергии [7] как отправной точки.

В соответствии с методикой [7], тензоры деформации  $T_l^{ij}$  и напряжений  $\sigma_l^{ij}$  аппроксимируются в базисе  $l$  из трёх (двух в двумерном случае) рёбер, сходящихся в одном узле  $n \in l$  и погружённых в ячейку  $m \supseteq l$ . Потенциальная энергия деформированного тела аппроксимируется как

$$E_{\text{def}} = \int_{O(t)} \rho \frac{1}{2\rho_s} T^{ij} \sigma^{ij} dV = \frac{1}{2} \int_O T^{ij} \sigma^{ij} dV_s = \frac{1}{2} \sum_m \sum_{l \subseteq m} T_l^{ij} \sigma_l^{ij} (V_s)_l, \quad (7)$$

где  $(V_s)_l$  – недеформированный базисный объём. Упругие коэффициенты полагаются постоянными в ячейке  $m$ , и закон Гука (3) имеет вид

$$\sigma_l^{ij} = K_m T_l^{kk} \delta^{ij} + 2\mu_m \left( T_l^{ij} - \frac{1}{3} T_l^{kk} \delta^{ij} \right).$$

Массы сеточных элементов складываются из масс базисных объёмов и остаются неизменными в течение расчёта

$$M_m = (\rho_s)_m \sum_{l \subseteq m} (V_s)_l, \quad M_n^* = \sum_{l:m \in l} (V_s)_l (\rho_s)_m.$$

С учётом линейности закона Гука применение соотношения (6) для аппроксимации энергии (7) приводит к выражению

$$\mathbf{F}_n^i = -\frac{\partial E_{\text{def}}}{\partial \mathbf{r}_n^i} = -\sum_m \sum_{l \subseteq m} \sigma_l^{jk} (V_s)_l \frac{\partial T_l^{jk}}{\partial \mathbf{r}_n^i}. \quad (8)$$

До сих пор мы не конкретизировали ни структуру ячейки, ни вид тензора деформации, ни даже размерность рассматриваемой сетки: область применимости выражения (8) ограничена только областью применимости закона Гука (4).

Далее мы рассмотрим сетку, состоящую из четырёхугольных ячеек, в плоской геометрии. Обозначим вершины произвольной ячейки 0, 1, 2, 3 (рис. 1) и введём обозначения для векторов её рёбер: в текущий момент времени  $\mathbf{d}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{jn}$ , на недеформированной сетке  $\mathbf{h}_{ij} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)|_s$ . В предположении однородной деформации базиса 301 эти вектора связаны соотношением  $\mathbf{d}_{i0} = M\mathbf{h}_{i0}$ , где

$$M = \frac{1}{\mathbf{h}_{10}^x \mathbf{h}_{30}^y - \mathbf{h}_{10}^y \mathbf{h}_{30}^x} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{10}^x & \mathbf{d}_{30}^x \\ \mathbf{d}_{10}^y & \mathbf{d}_{30}^y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{h}_{30}^y & -\mathbf{h}_{30}^x \\ -\mathbf{h}_{10}^y & \mathbf{h}_{10}^x \end{pmatrix}.$$

Координаты при этом преобразуются по формуле

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + M(\mathbf{r}|_s - \mathbf{r}_0|_s) = (\mathbf{r}_0 - M\mathbf{r}_0|_s) + M\mathbf{r}|_s = \mathbf{A} + M\mathbf{r}|_s.$$

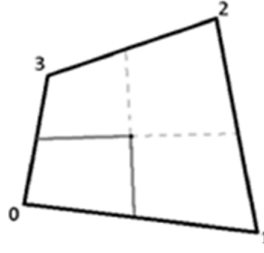


Рис. 1. Разбиение четырёхугольной ячейки на приузловые объёмы. Серым выделена граница приузловых объёмов узла 0

Вектор  $\mathbf{A}$  отвечает за параллельный перенос ячейки как целого, а матрица  $M$  — за деформацию и поворот. Эти величины определяются однозначно и не зависят от выбора нумерации узлов. Выражения для производной вектора деформации по координате недеформированного тела и для тензора деформации имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{U}^i}{\partial \mathbf{r}_s^j} = \frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial \mathbf{r}_s^j} - \delta^{ij} = M^{ij} - \delta^{ij},$$

$$T^{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{U}^j}{\partial \mathbf{r}_s^i} + \frac{\partial \mathbf{U}^i}{\partial \mathbf{r}_s^j} + \frac{\partial \mathbf{U}^k}{\partial \mathbf{r}_s^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}^k}{\partial \mathbf{r}_s^j} \right) = \frac{1}{2} (M^{ki} M^{kj} - \delta^{ij}),$$

$$T^{ij} \approx \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{U}^j}{\partial \mathbf{r}_s^i} + \frac{\partial \mathbf{U}^i}{\partial \mathbf{r}_s^j} \right) = \frac{1}{2} (M^{ij} + M^{ji}) - \delta^{ij}.$$

Вклад базиса 301 в энергию деформации равен

$$\delta E_{\text{def}} = \frac{1}{2} V_s \sigma^{ij} T^{ij}, \quad (9)$$

где  $V_s = \frac{1}{4} |\mathbf{h}_{10} \times \mathbf{h}_{30}| = \frac{1}{4} |\mathbf{h}_{10}^x \mathbf{h}_{30}^y - \mathbf{h}_{10}^y \mathbf{h}_{30}^x|$ . Поскольку тензор деформации в базисе 301 зависит только от координат вершин 3, 0 и 1, в соответствии с (8) данный базис даёт вклады только в силы  $\delta \mathbf{F}_3$ ,  $\delta \mathbf{F}_0$ ,  $\delta \mathbf{F}_1$ . При этом из трансляционной инвариантности следует закон сохранения импульса

$$\delta \mathbf{F}_3^k + \delta \mathbf{F}_0^k + \delta \mathbf{F}_1^k = -V_s \sigma^{ij} \left( \frac{\partial T^{ij}}{\partial \mathbf{r}_3^k} + \frac{\partial T^{ij}}{\partial \mathbf{r}_0^k} + \frac{\partial T^{ij}}{\partial \mathbf{r}_1^k} \right) = 0.$$

Используя линейное приближение (4), после раскрытия скобок и приведения подобных, можно получить окончательные выражения для вклада базиса 301 в силы, действующие на узлы

$$\delta \mathbf{F}_0 = \frac{1}{4} \sigma \begin{pmatrix} y_1^s - y_3^s \\ -x_1^s + x_3^s \end{pmatrix},$$

$$\delta \mathbf{F}_1 = \frac{1}{4} \sigma \begin{pmatrix} y_3^s - y_0^s \\ -x_3^s + x_0^s \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$\delta \mathbf{F}_3 = \frac{1}{4} \sigma \begin{pmatrix} cy_0^s - y_1^s \\ -x_0^s + x_1^s \end{pmatrix}.$$

Формулы (10) выведены с использованием предположения  $\mathbf{h}_{10}^x \mathbf{h}_{30}^y - \mathbf{h}_{10}^y \mathbf{h}_{30}^x > 0$ , при ином порядке обхода следует изменить знак. Для вычисления полных сил, действующих на узлы, целесообразно вычислять парциальные вклады (10) в цикле, обходя ячейку 0123 по вершинам (парам базисных рёбер). При этом в базисе

301 вычисляется тензор  $\sigma_{301}$  и его вклады в силы  $\delta\mathbf{F}_0$ ,  $\delta\mathbf{F}_1$  и  $\delta\mathbf{F}_3$ , в базисе 123 – тензор  $\sigma_{123}$  и его вклады в силы  $\delta\mathbf{F}_1$ ,  $\delta\mathbf{F}_2$  и  $\delta\mathbf{F}_3$  и т. д.

При выделении диагональной компоненты тензора напряжений, её вклад вычисляется по формуле  $\delta\mathbf{F}^{(\beta)} = P^{(\beta)}(\partial V/\partial\mathbf{r})^{(\beta)}$  [8]. Вклад девиатора тензора напряжений  $\tilde{\sigma}$  в силы и внутреннюю энергию вычисляются аналогично формулам (9), (10).

Для построения аппроксимации в  $rz$ -геометрии, рассмотрим аксиально симметричную деформацию без вращения:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(r_s, z_s) \cos \phi_s \\ r(r_s, z_s) \sin \phi_s \\ z(r_s, z_s) \end{pmatrix}.$$

Тензор деформации (в линейном приближении) есть:

$$T = \begin{pmatrix} \cos^2 \phi_s \frac{\partial r}{\partial r_s} + \sin^2 \phi_s \frac{r}{r_s} - 1 & \sin \phi_s \cos \phi_s \left( \frac{\partial r}{\partial r_s} - \frac{r}{r_s} \right) & \frac{\cos \phi_s}{2} \left( \frac{\partial z}{\partial r_s} + \frac{\partial r}{\partial z_s} \right) \\ \sin \phi_s \cos \phi_s \left( \frac{\partial r}{\partial r_s} - \frac{r}{r_s} \right) & \sin^2 \phi_s \frac{\partial r}{\partial r_s} + \cos^2 \phi_s \frac{r}{r_s} - 1 & \frac{\sin \phi_s}{2} \left( \frac{\partial z}{\partial r_s} + \frac{\partial r}{\partial z_s} \right) \\ \frac{\cos \phi_s}{2} \left( \frac{\partial z}{\partial r_s} + \frac{\partial r}{\partial z_s} \right) & \frac{\sin \phi_s}{2} \left( \frac{\partial z}{\partial r_s} + \frac{\partial r}{\partial z_s} \right) & \frac{\partial z}{\partial z_s} - 1 \end{pmatrix}.$$

Его след и след его квадрата вычисляются по формулам

$$T^{ii} = \left( \frac{\partial r}{\partial r_s} - 1 \right) + \left( \frac{\partial z}{\partial z_s} - 1 \right) + \left( \frac{r}{r_s} - 1 \right) = T_{2 \times 2}^{ii} + f(r),$$

$$\begin{aligned} T^{ij}T^{ji} &= \left( \frac{\partial r}{\partial r_s} - 1 \right)^2 + \left( \frac{\partial z}{\partial z_s} - 1 \right)^2 + \\ &+ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial z}{\partial r_s} + \frac{\partial r}{\partial z_s} \right)^2 + \left( \frac{r}{r_s} - 1 \right)^2 = T_{2 \times 2}^{ij}T_{2 \times 2}^{ji} + f^2(r), \end{aligned}$$

где  $T_{2 \times 2}$  – двумерный тензор, вычисляемый аналогично плоскому случаю:

$$T_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial r_s} - 1 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial z}{\partial r_s} + \frac{\partial r}{\partial z_s} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial z}{\partial r_s} + \frac{\partial r}{\partial z_s} \right) & \frac{\partial z}{\partial z_s} - 1 \end{pmatrix},$$

а  $f(r) = (r/r_s - 1)$ . Отметим, что для нелинейного тензора деформации эти выражения приводятся к такой же форме, но тензор  $T_{2 \times 2}$  вычисляется в нелинейном приближении и  $f(r) = 0.5 (r^2/r_s^2 - 1)$ .

Таким образом, внутренняя энергия равна

$$\begin{aligned} \rho_s \varepsilon &= \frac{1}{2} T^{ij} \sigma^{ij} = \frac{1}{2} \lambda T^{ii} T^{jj} + \mu T^{ij} T^{ji} = \\ &= \frac{1}{2} \lambda \left[ T_{2 \times 2}^{ii} T_{2 \times 2}^{jj} + 2f(r) T_{2 \times 2}^{ii} + f^2(r) \right] + \mu T_{2 \times 2}^{ij} T_{2 \times 2}^{ji} + \mu f^2(r) = \\ &= \frac{1}{2} \lambda T_{2 \times 2}^{ii} T_{2 \times 2}^{jj} + \mu T_{2 \times 2}^{ij} T_{2 \times 2}^{ji} + \lambda f(r) T_{2 \times 2}^{ii} + \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) f^2(r) = \\ &= \frac{1}{2} T_{2 \times 2}^{ij} \sigma_{2 \times 2}^{ij} + \lambda f(r) T_{2 \times 2}^{ii} + \frac{1}{2} (\lambda + 2\mu) f^2(r), \end{aligned}$$

где  $\sigma_{2 \times 2}^{ij} = \lambda T_{2 \times 2}^{kk} \delta^{ij} + 2\mu T_{2 \times 2}^{ij}$  – аналог двумерного тензора напряжений.

В рамках подхода [7] интеграл по объёму заменяется на сумму постоянных значений плотности внутренней энергии, определённых в базисных объёмах. Выражение  $f(r) = f(r_0) = f_0$  при этом вычисляется в вершине каждого базисного объёма и полагается тождественно равным нулю на оси в силу аксиальной симметрии. В результате во вкладе базиса 301 в энергию деформации появляются дополнительные члены

$$\delta E_{\text{def}} = \frac{1}{2} V_s T_{2 \times 2}^{ij} \left[ \sigma_{2 \times 2}^{ij} + 2\lambda \left( \frac{r_0}{r_0^s} - 1 \right) \delta^{ij} \right] + \frac{1}{2} V_s (\lambda + 2\mu) \left( \frac{r_0}{r_0^s} - 1 \right)^2, \quad (11)$$

а вклады в силу модифицируются следующим образом:

$$\delta \mathbf{F}_n^i = -V_s \left[ \sigma_{2 \times 2}^{ij} + \lambda f_0 \delta^{ij} \right] \frac{\partial T_{2 \times 2}^{ij}}{\partial \mathbf{r}_n^i} - V_s \left[ (\lambda + 2\mu) f_0 + \lambda T_{2 \times 2}^{ii} \right] \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{r}_k^i}.$$

Первое слагаемое в этом выражении имеет тот же вид, что и для плоского случая, но содержит дополнительный вклад в диагональную компоненту тензора напряжений, эквивалентный изменению модуля всестороннего сжатия. Второе слагаемое вызвано изменением объёма при сдвиге в радиальном направлении. Оно вносит вклад в радиальную компоненту силы и отлично от нуля только в вершинном узле базиса.

Из-за отсутствия трансляционной инвариантности при переносах в радиальном направлении не сохраняется радиальная компонента импульса:

$$\delta \mathbf{F}_3^r + \delta \mathbf{F}_0^r + \delta \mathbf{F}_1^r = -\frac{V_s}{r_0^s} \left[ (\lambda + 2\mu) f_0 + \lambda T_{2 \times 2}^{ii} \right],$$

$$\delta \mathbf{F}_3^z + \delta \mathbf{F}_0^z + \delta \mathbf{F}_1^z = 0.$$

Выбор выражения для базисного объёма произволен, но ограничен требованием сохранения объёма: сумма всех базисных объёмов в ячейке должна равняться объёму ячейки. На практике хорошо зарекомендовала себя аппроксимация объёмов [14]:

$$V_{301} = r_{0123} S_{301} = \frac{r_{0123}}{4} |(r_1 - r_0)(z_3 - z_0) - (z_1 - z_0)(r_3 - r_0)|,$$

где  $r_{0123}$  определяется из требования  $r_{0123}(S_{012} + S_{123} + S_{301} + S_{230}) = V_{0123}$ . В этом случае окончательные выражения для вклада базиса 301 в силы имеют вид

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \delta \mathbf{F}_0^r \\ \delta \mathbf{F}_0^z \end{pmatrix} &= \frac{r_{0123}^s}{4} \left[ \sigma_{2 \times 2} + \lambda \left( \frac{r_0}{r_0^s} - 1 \right) \delta \right] \begin{pmatrix} z_1^s - z_3^s \\ -r_1^s + r_3^s \end{pmatrix} - \\ &\quad - \frac{(V_s)_{301}}{r_0^s} \left[ (\lambda + 2\mu) \left( \frac{r_0}{r_0^s} - 1 \right) + \lambda (T_{2 \times 2}^{rr} + T_{2 \times 2}^{zz}) \right] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \delta \mathbf{F}_1^r \\ \delta \mathbf{F}_1^z \end{pmatrix} &= \frac{r_{0123}^s}{4} \left[ \sigma_{2 \times 2} + \lambda \left( \frac{r_0}{r_0^s} - 1 \right) \delta \right] \begin{pmatrix} z_3^s - z_0^s \\ -r_3^s + r_0^s \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \delta \mathbf{F}_3^r \\ \delta \mathbf{F}_3^z \end{pmatrix} &= \frac{r_{0123}^s}{4} \left[ \sigma_{2 \times 2} + \lambda \left( \frac{r_0}{r_0^s} - 1 \right) \delta \right] \begin{pmatrix} z_0^s - z_1^s \\ -r_0^s + r_1^s \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (12)$$

Тензор  $T_{2 \times 2}$  в  $rz$ -геометрии вычисляется аналогично тензору  $T$  в  $xy$ -геометрии, что позволяет реализовать обе рассмотренные двумерные геометрии в одной программе. Основные различия при этом состоят в формулах для вычисления элементов объёма и площадей и наличие дополнительных членов в выражениях (11) и (12).



#### 4. Тестирование методики

В качестве базовых тестов, позволяющих сделать вывод о корректности рассматриваемой аппроксимации упругих сил, были рассмотрены следующие динамические и статические задачи: распространение плоской продольной и поперечной звуковых волн, частичное отражение звуковой волны от границы сред, деформация тела под воздействием внешних сил. В последнем случае для получения статического решения в схему была добавлена вязкость.

Рассматриваемая модель все эти тесты прошла успешно. Когда точным решением является однородная деформация, численное решение выходит на точное значение с произвольной точностью по мере затухания колебаний; в противном случае погрешность зависит от шага сетки.

Для исследования таких свойств рассматриваемых явных и неявных схем, как устойчивость и консервативность, было проведено моделирование нескольких задач, не имеющих точного аналитического решения: распространение звуковых волн в двумерной прямоугольной пластине вследствие удара, колебания пластины вследствие сдвиговой деформации или деформации изгиба. Во всех этих случаях для вещества использовались параметры алюминия:  $\rho_s = 2.7 \text{ г/см}^3$ ,  $\mu = 26.1 \text{ ГПа}$  и  $K = 72.9 \text{ ТПа}$ . Соответствующие значения скоростей продольного и поперечного звука составляют  $c_p = \sqrt{(K + 4/3\mu)/\rho_s} = 6.3$  и  $c_s = \sqrt{\mu/\rho_s} = 3.1 \text{ км/с}$ .

Задача о распространении волны в плоской пластине рассматривалась в следующей постановке:  $x \in [0; 5]$ ,  $y \in [0; 2.6]$ ,  $v_x(t = 0) = 0$ ,  $v_y(t = 0) = v_0 e^{-4y - x^2}$ . Здесь координаты выражены в сантиметрах; амплитуда волны  $v_0 = 20 \text{ м/с}$  много меньше скорости звука в алюминии. В начальный момент времени вещество предполагалось недеформированным, на левой границе (на оси в  $rz$ -геометрии) ставилось условие отражения, на остальных границах – условие отсутствия внешних сил. Динамика мишени, полученная в расчётах с  $xy$ - и  $rz$ -геометриями, представлена на рис. 2.

Для анализа вызванных лазерным воздействием гидродинамических и упруговолновых процессов важна численная информация об обмене импульсом и энергией между испарённой и неиспарённой частями мишени. Для проверки качества методики в этом отношении проводился анализ динамики интегральных внутренней, кинетической и полной энергии, полученной в расчётах на сетке  $500 \times 260$  (шаг  $0.01 \text{ см}$ ).

Размах осцилляций полной энергии в расчёте по явной схеме составляет  $\sim 1\%$  её начального значения и не имеет тенденции к нарастанию (рис. 3). Он не зависит от шага пространственной сетки и прямо пропорционален шагу по времени  $\Delta t$ .

Отметим, что схема  $(0, 1)$  эквивалентна методу второго порядка “leap-frog” со значениями скорости, сдвинутыми на  $0.5\Delta t$  по времени. Поэтому если в качестве полной энергии для данной явной схемы рассматривать комбинацию  $\hat{E}_{\text{int}} + E_{\text{kin}}^{(0.5)}$ , то размах осцилляций существенно меньше ( $\sim 0.02\%$ ) и с дроблением шага по времени уменьшается как  $\Delta t^2$  (рис. 4).

Ограничение на шаг по времени, связанное с условием Куранта, в данном случае составляет порядка 16 нс. Использование простых итераций для численного решения уравнений (5) усиливает это ограничение примерно в 2 раза. Численный эксперимент такую оценку подтверждает: ограничение шага для схем  $(1, 1)$  и  $(1, 1)^*$  составляет 7 нс, для схемы  $(0.5, 0.5)$  – 11 нс, для схемы  $(0.5, 0.5)^*$  – 13 нс, для схемы  $(0, 1)$  – 14 нс и для схемы  $(0, 1)^*$  – 15 нс. Превышение шага для неявных схем приводит к расходимости (или недостаточно быстрой сходимости) итераций, для явных – к экспоненциальному нарастанию энергии со временем.

Ввиду этих ограничений для сравнения различных схем расчёты проводились с шагом по времени 5 нс. На рис. 5 представлен модуль относительного отклонения

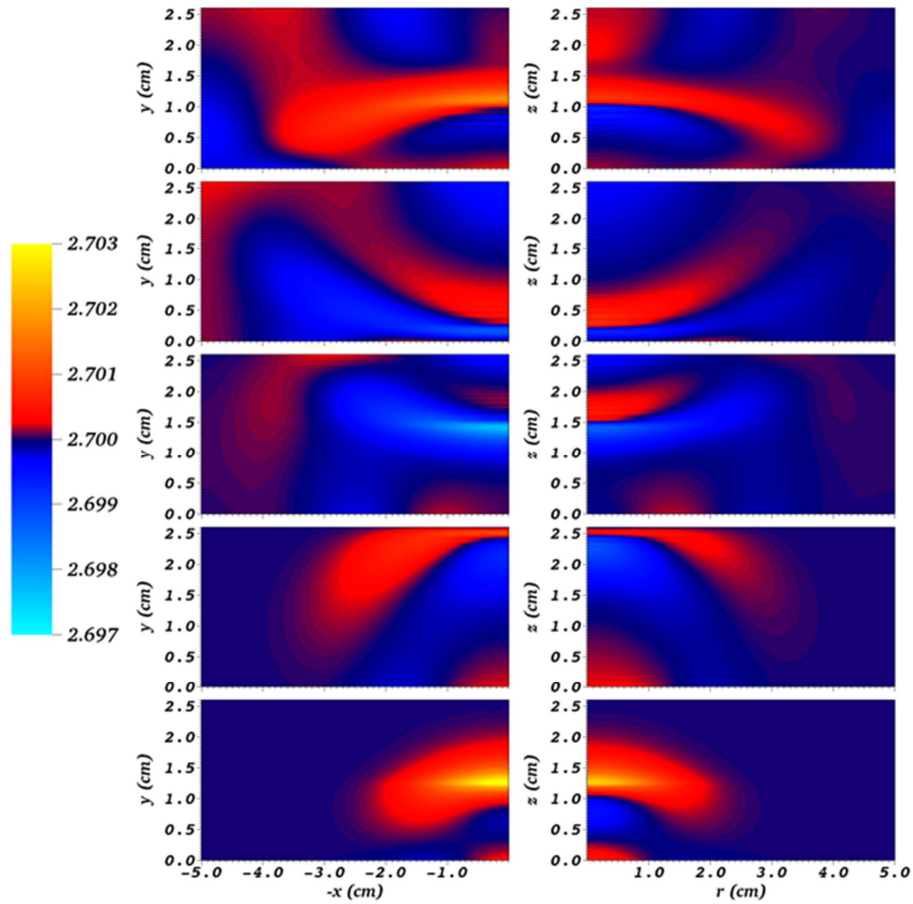


Рис. 2. Динамика плотности на моменты (снизу вверх) 2, 4, 6, 8 и 10 мкс в  $xy$ -геометрии (слева) и  $rz$ -геометрии (справа)

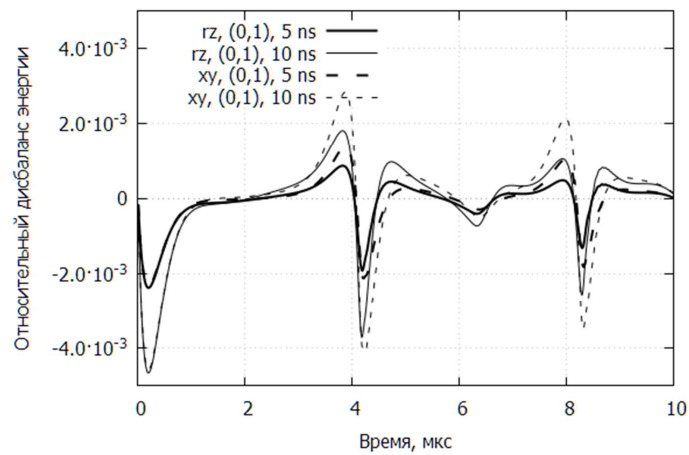


Рис. 3. Дисбаланс энергии  $[(\hat{E}_{\text{int}} + \hat{E}_{\text{kin}})/E_0 - 1]$  в расчётах по явной схеме (0,1) с различным шагом по времени в  $xy$ - и  $rz$ -геометриях

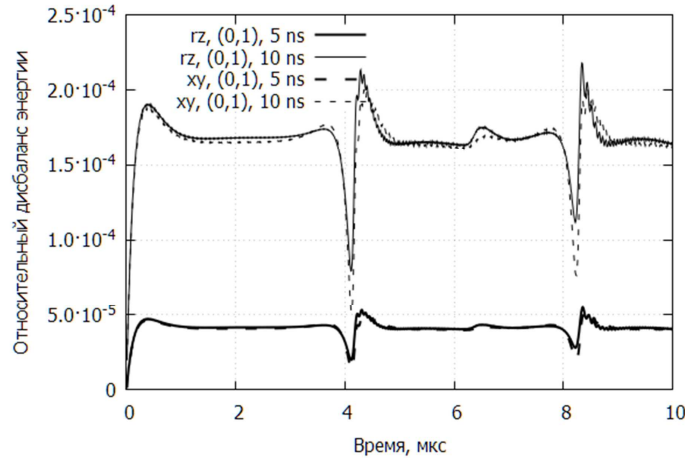


Рис. 4. Дисбаланс энергии  $[(\hat{E}_{\text{int}} + E_{\text{kin}}^{(0.5)})/E_0 - 1]$  в расчётах по явной схеме (0,1) с различным шагом по времени в  $xy$ - и  $rz$ -геометриях

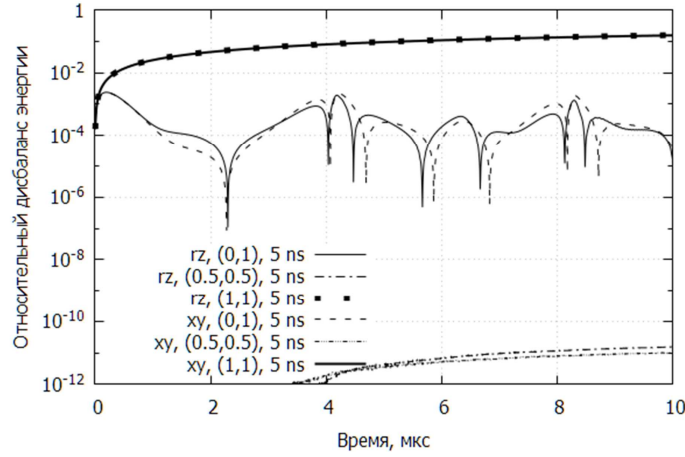


Рис. 5. Дисбаланс энергии  $|(\hat{E}_{\text{int}} + \hat{E}_{\text{kin}})/E_0 - 1|$  в расчётах по схемам (0,1), (0.5,0.5), (1,1)

полной энергии от её начального значения  $E_0$ . Как видно из графика, неявные схемы (1,1) обладают значительной численной вязкостью: полная энергия монотонно убывает со временем, за 10 мкс расчёта (2000 шагов) уменьшаясь на 15%. Дисбаланс в схемах (0.5,0.5) обусловлен только ограниченной точностью численного решения разностных уравнений (4): в данных расчётах итерации прекращались либо по достижению абсолютной погрешности  $10^{-9}$  м/с, либо по выполнению 10 итераций. Выделение диагональной компоненты на результаты не влияет, как и ожидалось ввиду малости деформации.

Из сравнения результатов расчётов можно сделать вывод, что явная схема (0,1) (метод “leap-frog”) является оптимальной по соотношению скорости и качества расчёта. Использование неявной схемы (0.5,0.5) обеспечивает полную консервативность, но существенно замедляет вычисления: в расчёте с шагом 10 нс для достижения относительной погрешности  $10^{-10}$  требуется до 20 простых итераций на шаг. Использование метода Ньютона [15] для решения системы уравнений (4)

позволяет ускорить сходимость, но существенно усложняет алгоритм. При этом заметных различий между расчётами по схемам  $(0, 1)$  и  $(0.5, 0.5)$  в распределениях плотности и скорости не наблюдается в течение всего расчёта. Использование полностью неявной схемы  $(1, 1)$  не рекомендуется ввиду присущей ей высокой схемной вязкости.

### Литература

1. Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. Операторные разностные схемы // Дифференц. уравнения. – 1981. – Т. 17, № 7. – С. 1317–1327.
2. Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. О представлении разностных схем математической физики в операторной форме // Докл. АН СССР. – 1981. – Т. 258, № 5. – С. 1092–1096.
3. Коршия Т.К., Тишкин В.Ф., Самарский А.А., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. Вариационно-операторные разностные схемы для уравнений математической физики. – Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1983. – 143 с.
4. Денисов А.А., Колдоба А.В., Повещенко Ю.А. О сходимости разностных схем метода опорных операторов для уравнения Пуассона на обобщенных решениях // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1989. – Т. 29, № 3. – С. 371–381.
5. Денисов А.А., Колдоба А.В., Повещенко Ю.А. О сходимости разностных схем метода опорных операторов для осесимметричного уравнения Пуассона на обобщенных решениях // Журн. вычисл. матем. и матем. физики.. – 1990. – Т. 30, № 10. – С. 1477–1486.
6. Самарский А.А., Колдоба А.В., Повещенко Ю.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П. Разностные схемы на нерегулярных сетках. – Минск: Критерий, 1996. – 273 с.
7. Колдоба В.А., Повещенко Ю.А., Гасилова И.В., Дорофеева Е.Ю. Разностные схемы метода опорных операторов для уравнений теории упругости // Матем. моделирование. – 2012. – Т. 24, № 12. – С. 86–96.
8. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. – М.: Наука, 1992. – 424 с.
9. Никифоров А.Ф., Новиков В.Г., Уваров В.Б. Квантово-статистические модели высокотемпературной плазмы. – М.: Физматлит, 2000. – 400 с.
10. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. – М.: Наука, 1987. – 248 с.
11. Головизнин В.М., Самарский А.А., Фаворский А.П. Вариационный подход к построению конечно-разностных математических моделей в гидродинамике // Докл. АН СССР. – 1977. – Т. 235, № 6. – С. 1285–1288.
12. Гасилов В.А., Круковский А.Ю., Новиков В.Г., Романов И.В., Цыгвинцев И.П. Численное моделирование токопрохождения в вакуумном диоде с лазерным поджигом // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. – 2013. – № 78. – 20 с.
13. Гасилов В.А., Круковский А.Ю., Повещенко Ю.А., Цыгвинцев И.П. Однородные разностные схемы для решения сопряжённых задач гидродинамики и упругости // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. – 2018. – № 13. – 17 с.
14. Повещенко Ю.А., Гасилов В.А., Ладонкина М.Е., Подрыга В.О., Насекин И.С. Разностные схемы метода опорных операторов для уравнений теории упругости в цилиндрической геометрии // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. – 2018. – № 142. – 22 с.

15. Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 532 с.

Поступила в редакцию  
12.06.19

---

**Цыгвинцев Илья Павлович**, кандидат физико-математических наук, научный сотрудник

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН  
Миусская пл., д. 4, г. Москва, 125047, Россия  
E-mail: *IliaTsygvintsev@gmail.com*

**Круковский Александр Юрьевич**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН  
Миусская пл., д. 4, г. Москва, 125047, Россия  
E-mail: *Alexander-krukovskiy@yandex.ru*

**Повещенко Юрий Андреевич**, доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник; профессор

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН  
Миусская пл., д. 4, г. Москва, 125047, Россия  
Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ  
Каширское ш., д. 31, г. Москва, 115409, Россия  
E-mail: *hecon@mail.ru*

**Гасилов Владимир Анатольевич**, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник; профессор

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН  
Миусская пл., д. 4, г. Москва, 125047, Россия  
Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ  
Каширское ш., д. 31, г. Москва, 115409, Россия  
E-mail: *vgasilov@gmail.com*

**Бойков Дмитрий Сергеевич**, младший научный сотрудник

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН  
Миусская пл., д. 4, г. Москва, 125047, Россия  
E-mail: *boykovds@gmail.com*

**Попов Сергей Борисович**, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН  
Миусская пл., д. 4, г. Москва, 125047, Россия  
E-mail: *popovsb@yandex.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.  
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI  
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2019, vol. 161, no. 3, pp. 377–392

doi: 10.26907/2541-7746.2019.3.377-392

**Homogeneous Difference Schemes  
for the Coupled Problems of Hydrodynamics and Elasticity**

*I.P. Tsygvintsev<sup>a\*</sup>, A.Yu. Krukovskiy<sup>a\*\*</sup>, Yu.A. Poveshchenko<sup>a,b\*\*\*</sup>,  
V.A. Gasilov<sup>a,b\*\*\*\*</sup>, D.S. Boykov<sup>a\*\*\*\*\*</sup>, S.B. Popov<sup>a\*\*\*\*\*</sup>*

<sup>a</sup>*Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences,  
Moscow, 125047 Russia*

<sup>b</sup>*National Research Nuclear University MEPhI (Moscow Engineering Physics Institute),  
Moscow, 115409 Russia*

E-mail: \* *IlyaTsygvintsev@gmail.com*, \*\* *Alexander-krukovskiy@yandex.ru*, \*\*\* *hecon@mail.ru*,  
\*\*\*\* *vgasilov@gmail.com*, \*\*\*\*\* *boykovds@gmail.com*, \*\*\*\*\* *popovsb@yandex.ru*

Received June 12, 2019

**Abstract**

Finite-difference approximations of elastic forces on the staggered moving grid were constructed. For the displacement vectors at the irregular grids in which topological and geometrical structures are subjected to minimal reasonable restrictions, with regard to the finite-difference schemes of the elasticity theory problems, approximations of the vector analysis operators in plane and cylindrical geometries were constructed. Taking into account the energy balance of the medium, the families of integral consistent approximations of the vector analysis operators, which are sufficient for the discrete modeling of these processes considering the space curvature caused by the cylindrical geometry of the system, were built. The schemes, both using a stress tensor in the full form and dividing it into volumetric and deviator components, were studied. This separation is used to construct homogeneous equations that are applicable for solid body and vaporized phase. The linear theory of elasticity was used. The resulting expressions for the elastic forces were presented in the explicit form for two-dimensional flat and axisymmetric geometries for a mesh consisting of triangular and quadrangular cells. Generalization of the method for other cases (non-linear strain tensor, non-Hookean relation between strain and stress, full 3D geometry, etc.) can be performed by analogy, but this was not a subject of the current paper. Using the model problem, comparison between different temporal discretizations for the obtained ordinary differential equations system was carried out. In particular, we considered fully implicit approximation, conservative implicit approximation (Crank–Nicolson method), and explicit approximation, which is similar to the “leap-frog” method. The analysis of full energy imbalance and calculation costs showed that the latter is more advantageous. The analysis of the effectiveness of various temporal approximations was performed via numerical experiments.

**Keywords:** finite-difference scheme, strain tensor, support-operator method, Lagrange staggered grid

**Figure Captions**

Fig. 1. Splitting a quadrangular cell into nodal volumes. Gray color indicates the boundary of the node volume of node 0.

Fig. 2. Density dynamics for moments (from bottom to top) 2, 4, 6, 8, and 10  $\mu\text{s}$  for  $xy$ -geometry (on the left) and  $rz$ -geometry (on the right).

Fig. 3. Energy imbalance  $[(\hat{E}_{\text{int}} + \hat{E}_{\text{kin}})/E_0 - 1]$  in calculations on the explicit scheme (0,1) for different time steps and for  $xy$ - and  $rz$ -geometries.

Fig. 4. Energy imbalance  $[(\hat{E}_{\text{int}} + E_{\text{kin}}^{(0.5)})/E_0 - 1]$  in calculations on the explicit scheme (0,1) for different time steps and for  $xy$ - and  $rz$ -geometries.

Fig. 5. Energy imbalance  $|(\hat{E}_{\text{int}} + \hat{E}_{\text{kin}})/E_0 - 1|$  in calculations with the help of schemes (0,1), (0.5,0.5), (1,1).

### References

1. Samarskii A.A., Tishkin V.F., Favorskii A.P., Shashkov M.Yu. Operator difference schemes. *Differ. Uravn.*, 1981, vol. 17, no. 7, pp. 1317–1327. (In Russian)
2. Samarskii A.A., Tishkin V.F., Favorskii A.P., Shashkov M.Yu. Representation of difference schemes of mathematical physics in operator form. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1981, vol. 258, no. 5, pp. 1092–1096. (In Russian)
3. Korshiya T.K., Tishkin V.F., Samarskii A.A., Favorskii A.P., Shashkov M.Yu. *Variatsionno-operatornye raznostnye skhemy dlya uravnenii matematicheskoi fiziki* [Variational Operator Difference Schemes for Equations of Mathematical Physics]. Tbilisi, Izd. Tbilis. Univ., 1983. 143 p. (In Russian)
4. Denisov A.A., Koldoba A.V., Poveshchenko Yu.A. The convergence to generalized solutions of difference schemes of the reference-operator method for Poisson's equation. *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1989, vol. 29, no. 2, pp. 32–38. doi: 10.1016/0041-5553(89)90005-0.
5. Denisov A.A., Koldoba A.V., Poveshchenko Yu.A. Convergence of difference schemes of the reference-operator method to generalized solutions of the axisymmetric Poisson equation. *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1990, vol. 30, no. 5, pp. 140–147. doi: 10.1016/0041-5553(90)90172-O.
6. Samarskii A.A., Koldoba A.V., Poveshchenko Yu.A., Tishkin V.F., Favorskii A.P. *Raznostnye skhemy na neregulyarnykh setkakh* [Difference Schemes on Irregular Grids]. Minsk, Kriterii, 1996. 273 p. (In Russian)
7. Koldoba A.V., Poveshchenko Yu.A., Gasilova I.V., Dorofeeva E.Yu. Numerical schemes of the support operators method for elasticity theory equations. *Mat. Model.*, 2012, vol. 24, no. 12, pp. 86–96. (In Russian)
8. Samarskii A.A., Popov Yu.P. *Raznostnye metody resheniya zadach gazovoi dinamiki* [Difference Methods for Solving Gas Dynamics Problems]. Moscow, Nauka, 1992. 424 p. (In Russian)
9. Nikiforov A.F., Novikov V.G., Uvarov V.B. *Kvantovo-statisticheskie modeli vysokotemperaturnoi plazmy* [Quantum-Statistical Models of High-Temperature Plasma]. Moscow, Fizmatlit, 2000. 400 p. (In Russian)
10. Landau L.D., Lifshits E.M. *Theory of Elasticity. Course of Theoretical Physics*. Vol. 7. Oxford, Pergamon Press, 1970. 165 p.
11. Goloviznin V.M., Samarskii A.A., Favorskii A.P. A variational approach to the construction of finite-difference mathematical models in hydrodynamics. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1977, vol. 235, no. 6, pp. 1285–1288. (In Russian)
12. Gasilov V.A., Krukovskii A.Yu., Novikov V.G., Romanov I.V., Tsygvintsev I.P. Numerical simulation of current flow in a vacuum diode with laser ignition. *Keldysh Inst. Prepr.*, 2013, no. 78. 20 p. (In Russian)

13. Gasilov V.A., Krukovskii A.Yu., Poveshchenko Yu.A., Tsygvintsev I.P. Homogeneous difference schemes for solving related problems of hydrodynamics and elasticity. *Keldysh Inst. Prepr.*, 2018, no. 13. 17 p. (In Russian)
14. Poveshchenko Yu.A., Gasilov V.A., Ladonkina M.E., Podryga V.O., Nasekin I.S. Difference schemes of the support operator method for equations of the theory of elasticity in cylindrical geometry. *Keldysh Inst. Prepr.*, 2018, no. 142. 22 p. (In Russian)
15. Samarskii A.A., Nikolaev E.S. *Numerical Methods for Grid Equations*. Vol. 2: Iterative methods. Basel, Boston, Berlin, Birkhauser Verlag, 1989. 502 p.

---

*Для цитирования:* Цыгвинцев И.П., Круковский А.Ю., Повещенко Ю.А., Гасилов В.А., Бойков Д.С., Попов С.Б. Однородные разностные схемы для сопряженных задач гидродинамики и упругости // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2019. – Т. 161, кн. 3. – С. 377–392. – doi: 10.26907/2541-7746.2019.3.377-392.

*For citation:* Tsygvintsev I.P., Krukovskiy A.Yu., Poveshchenko Yu.A., Gasilov V.A., Boykov D.S., Popov S.B. Homogeneous difference schemes for the coupled problems of hydrodynamics and elasticity. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2019, vol. 161, no. 3, pp. 377–392. doi: 10.26907/2541-7746.2019.3.377-392. (In Russian)