Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет"

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ Им. Н.И. Лобачевского

КАФЕДРА ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ПРИБЛИЖЕНИЙ

Направление: 01.03.01 - Математика

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

(Бакалаврская работа)

Неравенства типа Харди с логарифмическим весом

Работа завершена:

"____"________________2015 г. ________________М.Ф. Миннегулова

Работа проверена:

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук,

"____"________________2015 г. ________________Р.Г. Насибуллин

Заведующий кафедрой теории функций и приближений,
доктор физико-математических наук, профессор

"____"________________2015 г. ________________Ф.Г. Авхадиев

Казань - 2015 г.

Оглавление

Введение

Выпускная работа посвящена неравенствам типа Харди с логарифмическими весами. В данной работе мы рассмотрим одномерные логарифмические неравенства и используя метод Ф.Г. Авхадиева распространим одномерные неравенства на случай выпуклых областей. Неравенства Харди являются важным инструментом при решении задач математики и математической физики и применяются в теории интегральных и дифференциальных уравнений, в нелинейном анализе. Примеры использования неравенств типа Харди можно увидеть в работах С.Л. Соболева [6], Ф.Г. Авхадиева [3], А. Лаптева и Т. Вейдла [8]. Неравенства типа Харди получили широкое развитие и обобщились в различных направлениях, например, такими авторами как Дж. Таленти, Дж. Томаселли, Б. Макенхоупт, В.Г. Мазья, В.Д. Степанов, В. Левин, Ф.Г. Авхадиев, К.-Й. Виртц, Ю.А. Дубинский, Д.В. Прохоров.

Стоит отметить, что рассматриваемые неравенства в одномерном случае связывают функцию и её производную, а в многомерном случае функцию и ее модуль градиента.

Для начала приведем неравенство типа Харди в дискретном случае (см. [7]). Верна

Теорема A. *Если $p > 1$, $a_n \geq 0$ и $A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, то*

$$\sum \left(\frac{A_n}{n}\right)^p < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum a_n^p,$$

кроме одного случая, когда все $a = 0$. Константа $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ – наилучшая.

В интегральном случае справедливо следующее утверждение (см. [7]).

Теорема В. *Если* $p > 1$, $f(x) \geq 0$ *и*

$$F(x) = \int\limits_0^\infty f(t)dt,$$

то

$$\int\limits_0^\infty \left(\frac{F}{x}\right)^p dx < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int\limits_0^\infty f^p dx \tag{0.0.1}$$

кроме одного случая, когда $f \equiv 0$. *Константа* $\left(\frac{p}{p-1}\right)^p$ *– наилучшая.*

Добавим, что из сходимости интеграла в (0.0.1) стоящего справа следует сходимость интеграла стоящего слева.

Теперь рассмотрим более общее одномерное неравенство Харди, когда весовая функция находится и в правой и в левой части неравенства:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{|u(t)|^p}{t^s}dt \leq \left(\frac{p}{|s-1|}\right)^p \int\limits_0^{+\infty} \frac{|u'(t)|^p}{t^{s-p}}dt,$$

где $p \geq 1$, $s \in \mathbb{R}$, $s \neq 1$, и любой абсолютно непрерывной функции u : $[0, \infty) \to \mathbb{R}$, $u'/t^{s/p-1} \in L^p(0, \infty)$, такой, как $u(0) = 0$ в случае $s > 1$ и $u(+\infty) = 0$ в случае $s < 1$.

В случае когда $p = 1$ для любых допустимых монотонных функций u имеет место равенство в неравенстве типа Харди, если $p > 1$ и $u \not\equiv 0$, то равенство не достигается, однако постоянная $(p/|s-1|)^p$ точна.

Широкое распространение получили неравенства Харди в многомерном случае.

Положим Ω – область в $\mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, а $C_0^1(\Omega)$ – семейство непрерывно дифференцируемых функций с компактным носителем в Ω. Кроме того, постоянная Харди $c_p(s, \Omega) \in (0, \infty]$ определяется как наименьший из возможных положительных величин в неравенстве:

$$\int\limits_\Omega \frac{|f|^p}{\delta^s}dx \leq c_p(s,\Omega) \int\limits_\Omega \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{s-p}}dx, f \in C_0^1(\Omega),$$

где $\delta := dist(x, \partial\Omega)$ – функция расстояния до границы области, а $\partial\Omega$ – граница Ω. Оказывается при $p \in [1, \infty)$ и $s \in (n, \infty)$ выполнено следующее неравенство, доказанное Ф.Г. Авхадиевым в [1] :

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta^s} dx \leq \left(\frac{p}{s-n} \right)^p \int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{s-p}} dx, f \in C_0^1(\Omega). \tag{0.0.2}$$

В неравенстве (0.0.2) постоянная $p^p(s-n)^{-p}$ точна для ряда областей Ω, т.е. в общем случае ее нельзя улучшить.

Мы видим, что неравенство (0.0.2) при $s = n$ теряет смысл. Оказывается, что этого можно избежать с помощью логарифмического веса (см. [1], [4], [5], [7]). Например, в [1] автор Ф.Г. Авхадиев для открытого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, который удовлетворяет ограничению

$$\delta_0 := sup\{\delta(x, \Omega) : x \in \Omega\} < \infty,$$

доказал следующее неравенство

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta^n (\ln(\delta_0 e/\delta))^2} dx \leq p \int\limits_{\Omega} \frac{|f|^{p-1} |\nabla f|}{\delta^{n-1}} dx, f \in C_0^1(\Omega). \tag{0.0.3}$$

В неравенстве (0.0.3) можно заменить логарифмический множитель на множитель $(\ln(e\delta_0/\delta))^\beta/(\beta-1)$ для $\forall\, \beta \in (1, \infty)$. Предельный случай, когда $\beta \to 1$, не приводит к неравенству (0.0.3) (см. [1]).

Справедливо также следующее неравенство с оптимальной весовой функцией в интеграле:

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta^n \ln(\delta_0 e/\delta)} dx \leq p \int\limits_{\Omega} \frac{|f|^{p-1} |\nabla f|}{\delta^{n-1}} \ln\ln(\delta_0 e/\delta) dx, f \in C_0^1(\Omega),$$

где $n \geq 1$ и $1 \leq p < \infty$. (подробнее см. [1])

В случае $-\infty < s < n$, Авхадиев Ф.Г. и Насибуллин Р.Г. в [4] для произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с конечным внутренним радиусом $\delta_0(\Omega)$ доказали следующее неравенство

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta^s} dx \leq \left(\frac{p}{n-s} \right)^p \delta_0(\Omega)^{p(n-s)} \int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{s-p+(n-s)p}} dx, f \in C_0^1(\Omega). \qquad (0.0.4)$$

Аналог неравенства (0.0.4) в случае выпуклых областей примет более простой вид. А именно, справедлива

Теорема C. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *– открытое множество, компоненты которого являются выпуклыми множествами, с конечным внутренним радиусом* $\delta_0(\Omega)$ *и пусть* $\delta := dist(x, \Omega)$. *Если* $p \in [1, \infty)$, $s \in (-\infty, 1)$, *то*

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta^s} dx \leq \left(\frac{p}{1-s} \right)^p \delta_0(\Omega)^{p(1-s)} \int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{s-sp}} dx, f \in C_0^1(\Omega). \qquad (0.0.5)$$

Ясно, что при $s = 1$ неравенство (0.0.5) теряет смысл. Авторы [4] также с помощью логарифмического веса получили аналог неравенства (0.0.5) при $s = 1$. Верна

Теорема D. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *открытое множество, компоненты которого есть выпуклые множества, с конечным внутренним радиусом* $\delta_0(\Omega)$ *и пусть* $\delta := dist(x, \Omega)$. *Тогда при* $1 \leq p < \infty$ *выполнено неравенство*

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta} dx \leq p^p \int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{1-p}} \left(\ln \frac{\delta_0}{\delta} \right)^p dx, f \in C_0^1(\Omega). \qquad (0.0.6)$$

Существуют ли другие весовые функции, для которых верен аналог неравенства (0.0.6) при $s = 1$?

В данной выпускной работе мы попытаемся ответить на этот вопрос. Так как мы используем подход из [4], то в первой главе приведем подробное изложение этой статьи. Во второй главе рассмотрим основные результаты данной работы. Докажем одномерные логарифмические неравенства и используя метод Ф.Г. Авхадиева из [1], [2] распространим одномерные неравенства на случай выпуклых областей. А именно, докажем следующие теоремы.

Теорема 1. *Положим* $0 < b - a < \infty$, f *: [a,b] – абсолютно непрерывная функция удовлетворяющая граничным условиям* $f(a) = f(b) = 0$, $\delta(x) =$

$\min\{x-a, b-x\}$. *Тогда при* $\beta \geq 0$, $\alpha \leq \beta$, $f \not\equiv 0$ *и* $f'(x) \ln\ln \frac{\delta_0 e}{\delta} / \delta^\beta \in L^1(a,b)$, *верно неравенство*

$$\int\limits_a^b \frac{|f(x)|}{\delta^{\alpha+1} \ln \frac{\delta_0 e}{\delta}} dx \leq \int\limits_a^b \frac{|f'(x)|}{\delta^\beta} \ln\ln \frac{\delta_0 e}{\delta} dx.$$

Теорема 2. *Положим* Ω *– произвольное открытое множество в* $\mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$. *Если* $1 \leq p < \infty$, *то*

$$\int\limits_\Omega \frac{|f|^p}{\delta \ln \frac{\delta_0 e}{\delta}} dx \leq p^p \int\limits_\Omega \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{1-p} (\ln \frac{\delta_0 e}{\delta})^{1-p}} \left(\ln\ln \frac{\delta_0 e}{\delta} \right)^p dx.$$

Глава 1

Об одном результате Ф.Г. Авхадиева и Р.Г. Насибуллина

§1.1 Одномерные неравенства типа Харди.

Авторам [4] для доказательства основных результатов понадобилась следующая теорема.

Теорема 3. *Предположим* $0 < b - a < \infty$, $\delta(x) = min\{x - a, b - x\}$, *и пусть* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *абсолютно непрерывная функция, которая удовлетворяет граничным условиям* $f(a) = f(b) = 0$. *Если* $\nu \in [1, \infty)$, $\sigma \in (-\infty, \nu)$, $f \not\equiv 0$ *и* $f'/\delta(x)^{\nu-1} \in L^1(a, b)$, *то выполнено неравенство*

$$\int\limits_a^b \frac{|f(x)|}{\delta(x)^\sigma}dx < M(\sigma,\nu)\left(\frac{b-a}{2}\right)^{\nu-\sigma}\int\limits_a^b \frac{|f'(x)|}{\delta(x)^{\nu-1}}dx,$$

где

$$M(\sigma,\nu) := \begin{cases} (1-\sigma)^{-1}, & \text{если } \nu = 1, \\ (\nu-1)^{-1}e^{-1}, & \text{если } \sigma = 1, \\ (\nu-\sigma)^{-1}((\nu-1)/(\nu-\sigma))^{(\nu-1)/(1-\sigma)}, & \nu \neq 1, \sigma \neq 1. \end{cases}$$

При этом для всех отрезков $[a, b]$ *и всех допустимых* σ *и* ν *постоянная* $M(\sigma, \nu)$ *точна.*

Для доказательства Теоремы 3 нужна (см. [4])

Лемма 1. *Предположим* $\rho > 0$, $g : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ – *абсолютно непрерывная функция, которая удовлетворяет граничному условию* $g(0) = 0$. *При* $\nu \in [1, \infty)$, $\sigma \in (-\infty, \nu)$, $g \not\equiv 0$ *и* $g'/t^{\nu-1} \in L^1(0, 1)$, *верно* *следующее неравенство*

$$\int_0^\rho \frac{|g(t)|}{t^\sigma}dt < M(\sigma,\nu)\rho^{\nu-\sigma}\int_0^\rho \frac{|g'(t)|}{t^{\nu-1}}dt, \qquad (1.1.1)$$

при этом для всех допустимых значений параметров σ и ν – $M(\sigma,\nu)$ точная.

Доказательство Леммы 1: Оказывается, достаточно доказать неравенство (1.1.1) при $\rho = 1$. Используя известное неравенство

$$|g(t)| \le \int_0^t |g'(x)|dx,$$

получаем

$$\int_0^1 \frac{|g(t)|}{t^\sigma} \le \int_0^1 \frac{dt}{t^\sigma}\int_0^1 |g'(x)|dx.$$

Меняя порядок интегрирования в повторных интегралах, имеем

$$\int_0^1 \frac{|g(t)|}{t^\sigma}dt \le \int_0^1 \frac{dt}{t^\sigma}\int_0^t |g'(x)|dx = \int_0^1 |g'(x)|\int_x^1 \frac{dt}{t^\sigma}dx, \qquad (1.1.2)$$

где

$$T_{\sigma,\nu}(x) = x^{\nu-1}\int_x^1 \frac{dt}{t^\sigma}.$$

В итоге

$$\int_x^1 \frac{dt}{t^\nu} = \frac{T_{\sigma,\nu}(x)}{x^{\nu-1}}. \qquad (1.1.3)$$

Из (1.1.3) и (1.1.2) следует

$$\int_0^1 |g'(x)|\int_x^1 \frac{dt}{t^\sigma}dx = \int_0^1 \frac{|g'(x)|}{x^{\nu-1}}T_{\sigma,\nu}(x)dx.$$

Далее найдем экстремумы функции $T_{\sigma,\nu}(x)$. Рассмотрим три случая: $\sigma < \nu = 1$, $\sigma \ne 1 < \nu$, $\sigma = 1 < \nu$.

Первый случай $\sigma < \nu = 1$:

$$T_{\sigma,\nu}(x) = x^{1-1} \int\limits_x^1 \frac{dt}{t^\sigma} = \left(\frac{t^{1-\sigma}}{1-\sigma} \Big|_x^1 \right) =$$

$$\frac{1^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{x^{1-\sigma}}{1-\sigma} = \frac{1}{1-\sigma}\left(1 - x^{1-\sigma}\right).$$

Найдем производную полученного выражения:

$$\left(\frac{1-x^{1-\sigma}}{1-\sigma} \right)' = -\frac{1}{1-\sigma}(1-\sigma)x^{1-\sigma-1} = -x^{-\sigma}.$$

Приравниваем полученный результат нулю $-x^{-\sigma} = 0$. Получаем, что $x = 0$.

Теперь рассмотрим второй случай, т.е. $\sigma \neq 1 < \nu$. Имеем

$$T_{\sigma,\nu}(x) = x^{\nu-1} \int\limits_x^1 \frac{1}{t^\sigma} dt = x^{\nu-1} \, \frac{1}{1-\sigma} t^{1-\sigma} \Big|_x^1 = \frac{x^{\nu-1}}{\sigma-1}(x^{1-\sigma}-1).$$

Найдем производную полученного выражения относительно x.

$$\left(\frac{x^{\nu-1}}{\sigma-1}(x^{1-\sigma}-1) \right)' = \left(\frac{x^{\nu-1}}{\sigma-1} x^{1-\sigma} - \frac{x^{\nu-1}}{\sigma-1} \right)' =$$

$$= \frac{x^{\nu-2}}{\sigma-1}(\nu-1)x^{1-\sigma} + \frac{x^{\nu-1}}{\sigma-1}(1-\sigma)x^{-\sigma} - \frac{x^{\nu-2}}{\sigma-1}(\nu-1) =$$
$$= \frac{1}{\sigma-1}\frac{x^\nu}{x}\left(\frac{\nu-1}{x^\sigma} + \frac{1-\sigma}{x^\sigma} - \frac{\nu-1}{x} \right).$$

Приравниваем полученный результат нулю

$$\frac{1}{\sigma-1}\frac{x^\nu}{x}\left(\frac{\nu-1}{x^\sigma} + \frac{1-\sigma}{x^\sigma} - \frac{\nu-1}{x} \right) = 0.$$

Решая уравнение при $\sigma \neq 1 < \nu$, получаем

$$x = \left(\frac{\nu-1}{\nu-\sigma} \right)^{\frac{1}{1-\sigma}}.$$

Далее рассмотрим последний случай: $\sigma = 1 < \nu$. Имеем

$$T_{\sigma,\nu}(x) = x^{\nu-1} \int\limits_x^1 \frac{dt}{t} = -x^{\nu-1} \ln x.$$

Найдем производную полученного выражения относительно x.

$$(-x^{\nu-1}\ln x)' = -(\nu-1)x^{\nu-2}\ln x + (-x^{\nu-1})\frac{1}{x} =$$

$$= (1-\nu)\frac{x^\nu}{x^2}\ln x - \frac{x^\nu}{x^2} = \frac{x^\nu}{x^2}((1+\nu)\ln x - 1).$$

Приравниваем полученный результат нулю

$$\frac{x^\nu}{x^2}((1+\nu)\ln x - 1) = 0.$$

Решая уравнение при $\sigma \neq 1 < \nu$, получим

$$x = e^{\frac{1}{1-\nu}}.$$

Видим, что функция $T_{\sigma,\nu}(x)$ имеет единственный строгий максимум, который достигается в точке $x(\sigma,\nu) \in [0,1)$, где

$$x(\sigma,\nu) := \begin{cases} 0, & \text{если } \sigma < \nu = 1, \\ ((\nu-1)/(\nu-\sigma))^{1/(1-\sigma)}, & \text{если } \sigma \neq 1 < \nu, \\ \exp(1/(1-\nu)), & \text{если } \sigma = 1 < \nu, \end{cases}$$

причем

$$T_{\sigma,\nu}(x(\sigma,\nu)) = M(\sigma,\nu).$$

При $\rho = 1$ известно, что $T_{\sigma,\nu}(x) < M(\sigma,\nu)$ и из доказательства леммы получаем строгое неравенство (1.1.1). Доказательство точности постоянной $M(\sigma,\nu)$, можно посмотреть в статье [4].

Доказательство Теоремы 3: Применим Лемму 1 с $\rho = (b-a)/2$ к двум функциям, которые определяются как

$$g(t) = f(t+a), g(t) = f(b-t).$$

Получим

$$\int\limits_a^{(a+b)/2} \frac{|f(x)|}{(x-a)^\sigma}dx < M(\sigma,\nu)\left(\frac{b-a}{2}\right)^{\nu-\sigma} \int\limits_a^{(a+b)/2} \frac{|f'(x)|}{(x-a)^{\nu-1}}dx,$$

$$\int\limits_{(a+b)/2}^{b} \frac{|f(x)|}{(b-x)^{\sigma}} dx < M(\sigma,\nu) \left(\frac{b-a}{2}\right)^{\nu-\sigma} \int\limits_{(a+b)/2}^{b} \frac{|f'(x)|}{(b-x)^{\nu-1}} dx.$$

Сложение этих двух неравенств, дает утверждение теоремы 3.

§1.2 Неравенства в многомерном случае

Далее авторы [4] доказывают неравенства в многомерном случае. Верна следующая теорема.

Теорема 4. *Положим $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – произвольная область с конечным внутренним радиусом $\delta_0(\Omega) := \sup\{dist(x, \partial\Omega) : x \in \Omega : x \in \Omega\}$, $n \geq 1$. Если при $p \in [1, \infty)$, $s \in (-\infty, n)$, то верно неравенство*

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta^s} dx \leq \left(\frac{p}{n-s}\right)^p \delta_0(\Omega)^{p(n-s)} \int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{s-p+(n-s)p}} dx, f \in C_0^1(\Omega). \tag{1.2.1}$$

Доказательство Теоремы 4: Достаточно доказать неравенство (1.2.1), когда $p = 1$, т.е. неравенство

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|f|}{\delta^s} dx \leq \frac{\delta_0^{n-s}}{n-s} \int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla f|}{\delta^{n-1}} dx, f \in C_0^1(\Omega). \tag{1.2.2}$$

Действительно, пусть $p \in (1, \infty)$, $f \in C_0^1(\Omega)$ – фиксированные и $g = |f|^p \in C_0^1(\Omega)$. Используя

$$|f|^p = p|f|^{p-1}|\nabla f|,$$

из (11) получим

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta^s} dx \leq \frac{\delta_0^{n-s}}{n-s} p \int\limits_{\Omega} \frac{|f|^{p-1}|\nabla f|}{\delta^{n-s}} dx.$$

Далее к правой части последнего соотношения применим неравенство Гёльдера с показателями $p/(p-1)$ и p. Имеем

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta^s} dx \leq \frac{\delta_0^{n-s}}{n-s} p \int\limits_{\Omega} \frac{|f|^{p-1}|\nabla f|}{\delta^{n-s}} dx \leq$$

$$\leq \frac{p\delta_0^{n-s}}{n-s}\left(\int\limits_\Omega \frac{|f|^p}{\delta^s}dx\right)^{1-1/p}\left(\int\limits_\Omega \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{s-p+(n-s)p}}dx\right)^{1/p}.$$

Элементарными преобразованиями легко показать, что

$$\int\limits_\Omega \frac{|f|^p}{\delta^s}dx \leq \frac{p\delta_0^{n-s}}{n-s}\left(\int\limits_\Omega \frac{|f|^p}{\delta^s}dx\right)^{1-1/p}\left(\int\limits_\Omega \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{s-p+(n-s)p}}dx\right)^{1/p} =$$

$$= \frac{p\delta_0^{n-s}}{n-s}\left(\int\limits_\Omega \frac{|f|^p}{\delta^s}dx\right)\left(\int\limits_\Omega \frac{|f|^p}{\delta^s}dx\right)^{1/p}\left(\int\limits_\Omega \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{s-p+(n-s)p}}dx\right)^{1/p}.$$

Полученное неравенство возводим в степень p:

$$\left(\int\limits_\Omega \frac{|f|^p}{\delta^s}dx\right)^p \leq$$

$$\leq \left(\frac{p}{n-s}\right)^p \delta_0^{p(n-s)}\left(\int\limits_\Omega \frac{|f|^p}{\delta^s}dx\right)^p\left(\int\limits_\Omega \frac{|f|^p}{\delta^s}dx\right)\left(\int\limits_\Omega \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{s-p+(n-s)p}}dx\right)$$

Легко следует утверждение теоремы:

$$\int\limits_\Omega \frac{|f|^p}{\delta^s}dx \leq \left(\frac{p}{n-s}\right)^p \delta_0(\Omega)^{p(n-s)}\int\limits_\Omega \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{s-p+(n-s)p}}dx.$$

При $n = 1$, $p = 1$ Теорема 4 является следствием Теоремы 3. Действительно, пусть Ω – конечное или счетное объединение не пересекающихся интервалов (a_m, b_m), где m натуральное число. Полудлины не превосходят $\delta_0(\Omega)$ и пусть $f \in C_0^1(\Omega)$. То есть нужно доказать неравенство

$$\int\limits_{a_m}^{b_m} \frac{|f(x)|}{\delta^s}dx \leq M(s,1)\left(\frac{b_m - a_m}{2}\right)^{1-s}\int\limits_{a_m}^{b_m}|f'(x)|dx \leq$$

$$\leq \frac{\delta_0(\Omega)^{1-s}}{1-s}\int\limits_{a_m}^{b_m}|f'(x)|dx. \tag{1.2.3}$$

Очевидно, что неравенство (1.2.3) является следствием утверждения Теоремы 3.

Далее рассмотрим случай $p = 1$, $n \geq 2$. Доказательство этого случая состоит из трех этапов.

На первом этапе авторы [4] рассматривают области составленные из кубиков (или квадратов) одинакового размера с ребрами, которые параллельны осям координат. Отметим, что здесь рассматривается стандартное покрытие $\mathbb{R}^n$ кубиками $Q_{\varepsilon,w} = [0,\varepsilon]^n + \varepsilon w$, где $w \in \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$. Конечное множество индексов определяется следующим образом

$$\mathbb{Z}^n(\Omega, \varepsilon) = \{w \in \mathbb{Z}^n : Q_{\varepsilon,w} \subset \Omega \cap \{v \in \mathbb{R}^n : |v| < 1/\varepsilon\}\},$$

а аппроксимация $\Omega : \Omega(\varepsilon) = int \bigcup\limits_{w \in \mathbb{Z}^n(\Omega,\varepsilon)} Q_{\varepsilon,w} \subset \Omega.$

На втором этапе, пользуясь аппроксимацией множества Ω кубами, Ф.Г. Авхадиев показал достаточность доказательства неравенств в множестве

$$K(S) = \{x \in \overline{\Omega(1)} : \exists y \in S : \delta(x, \partial\Omega(1)) = |x - y|\},$$

где $\Omega(1)$ – разбиение Ω и S – (n - k)-мерная грань куба $Q_{1,w_j} \subset \overline{\Omega(1)}$. Известно, что $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, причем $\overline{\Omega(1)} = \bigcup K(S)$, и для любой функции $g \in C(\overline{\Omega}(1))$

$$\int\limits_{\Omega(1)} g(x)dx = \sum_{S \subset \partial\Omega(1)} \int\limits_{K(S)} g(x)dx.$$

На третьем этапе доказывается неравенство (1.2.2) для каждого множества $K(S) \neq \emptyset$ отдельно, а далее суммируются.

Когда находим интеграл по множеству $K(S)$ с переменной $r = \delta(x', \Omega(1))$, вводится новая система координат с заменой переменных $x' = A(x - x_0)$, где $x_0 \in S$. Таким образом, переходя к соответствующим интегралам получаем следующие формулы, содержащие функции $\varphi_{n-k}(y, \omega) = \varphi_{n-k}(y, \omega; S, \Omega_1) \in [0, \delta_0(\Omega(1))]$, $r = \delta$:

(i) если $dimS = n-1$, то

$$\int\limits_{K(S)} g(x)dx = \int\limits_{S} dy \int\limits_{0}^{\varphi_{n-1}(y,\omega_0)} g(y+r\omega_0)dr, \qquad (1.2.4)$$

(ii) если $dimS = n-k$ и $k \in [2, n-1]$, то

$$\int\limits_{K(S)} g(x)dx = \int\limits_{S} dy \int\limits_{S_+^k} d\omega \int\limits_{0}^{\varphi_{n-k}(y,\omega)} g(y+r\omega)r^{k-1}dr, \qquad (1.2.5)$$

(iii) если $dimS = 0$, то

$$\int\limits_{K(S)} g(x)dx = \int\limits_{S_+^n} d\omega \int\limits_{0}^{\varphi_0(x_0,\omega)} g(y+r\omega)r^{n-1}dr, \qquad (1.2.6)$$

где $\mathbb{R}_+^k = \{(t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^k : t_1 \geq 0, \ldots, t_k \geq 0\}$, $S_+^k = \{t \in \mathbb{R}_+^k : |t| = 1\}$. Применим к внутренним интегралам в (1.2.4) - (1.2.6) Лемму 1. Пусть $g(x) = f(x)/r^\sigma$, где $\sigma = s-k+1$ и $\nu = n-k+1$, $k = \overline{1,n}$. Принимая во внимание неравенства

$$\left|\frac{\partial f}{\partial r}\right| \leq |\nabla f|, M(\sigma,\nu) \leq \frac{1}{\nu-\sigma},$$

$$0 \leq \varphi_{n-k}(y,w) = \varphi_{n-k}(y, w : S, \Omega_1) \leq \delta_0(\Omega(1)),$$

получаем

$$\int\limits_{K(S)} \frac{|f|}{\delta^s}dx \leq \frac{\delta_0(\Omega(1))^{n-s}}{n-s} \int\limits_{K(S)} \frac{|\nabla f|}{\delta^{n-1}}dx.$$

Этим и завершается доказательство Теоремы 4.

Далее применяя следующую лемму, авторы [4] получили более общее утверждение.

Лемма 2. *Пусть* Ω *– область в евклидовом пространстве* $\mathbb{R}^n$*,* $n \geq 1$*. Если* $J : C_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ *– функционал и* $f \in C_0^1(\Omega)$*, то верно*

$$J(f) + \int\limits_{\Omega} |f|w_1 dx \leq c \int\limits_{\Omega} |\nabla f|w_2 dx$$

для $1 < p < \infty$, $1 \le l \le p$ *и любой* $f \in C_0^1(\Omega)$, *получаем*

$$lJ(|f|^p) + \int\limits_\Omega |f|^p w_1 dx \le (cp)^l \int\limits_\Omega |f|^{p-1}|\nabla f|^l w_1^{1-l} w_2^l dx,$$

где $w_1 = w_1(x) > 0$, $w_2 = w_2(x) \ge 0$ *на* Ω, *для* $1 \le l \le p$ *функция* $w_1[w_2/w_1]^l$ *– локально интегрируема в области* Ω.

Верна

Теорема 5. *Положим* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *– открытое множество,* $\delta_0(\Omega) < \infty$. *Если* $-\infty < s < n$ *и* $f \in C_0^1$, *то верно неравенство*

$$\int\limits_\Omega \frac{|f|^p}{\delta^s} dx \le \left(\frac{p\delta_0^{n-s}}{n-s}\right)^l \int\limits_\Omega \frac{|f|^{p-l}|\nabla f|^l}{\delta^{s+l(n-1-s)}} dx,$$

где $1 \le p \le \infty$, $1 \le l \le p$.

§1.3 Случай выпуклых областей

Далее Авхадиев Ф.Г. и Насибуллин Р.Г. в [4] рассматривают неравенства Харди в выпуклых областях. Справедливо следующее утверждение:

Теорема 6. *Предположим* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *– произвольное открытое множество, компоненты* Ω *выпуклые множества, с* $\delta_0(\Omega)$ *– конечным внутренним радиусом. Если* $p \in [1, \infty)$, $s \in (-\infty, 1)$, *то*

$$\int\limits_\Omega \frac{|f|^p}{\delta^s} dx \le \left(\frac{p}{1-s}\right)^p \delta_0(\Omega)^{p(1-s)} \int\limits_\Omega \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{s-sp}} dx, f \in C_0^1(\Omega). \qquad (1.3.1)$$

Легко заметить, что при $s = 1$ неравенство теоремы 6 теряет смысл. Этого недостаток устраняется с помощью логарифмического веса.(см. [4]) Верна

Теорема 7. *Предположим* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *– открытое множество, компоненты которого есть выпуклые множества, с конечным внутренним радиусом* $\delta_0(\Omega)$ *и предположим* $\delta := dist(x, \Omega)$. *Если*

$1 \leq p < \infty$, *то*

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta} dx \leq p^p \int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{1-p}} \left(\ln \frac{\delta_0}{\delta}\right)^p dx, f \in C_0^1(\Omega).$$

Для доказательства Теоремы 7 авторы [4] воспользовались следующей леммой.

Лемма 3. *Предположим $\rho > 0$ и $g : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ абсолютно непрерывная функция, которая удовлетворяет граничному условию $g(0) = 0$. Тогда при $\beta \geq 0$, $\alpha \leq \beta$, $g \not\equiv 0$ и $g'(t) \ln \frac{\rho}{t} / t^\beta \in L^1(0, \rho)$, верно неравенство*

$$\int\limits_0^\rho \frac{|g(t)|}{t^{\alpha+1}} dt < \rho^{\beta-\alpha} \int\limits_0^\rho \frac{|g'(t)|}{t^\beta} \ln \frac{\rho}{t} dt.$$

Доказательство Леммы 3 : Используя следующее неравенство

$$|g(t)| \leq \int\limits_0^t |g'(x)| dx,$$

получаем

$$\int\limits_0^\rho \frac{|g(t)|}{t^{\alpha+1}} dt \leq \int\limits_0^\rho \frac{dt}{t^{\alpha+1}} \int\limits_0^t |g'(x)| dx.$$

Далее, изменяем порядок интегрирования в повторных интегралах. Имеем

$$\int\limits_0^\rho \frac{|g(t)|}{t^{\alpha+1}} dt \leq \int\limits_0^\rho |g'(x)| \int\limits_x^\rho \frac{dt}{t^{\alpha+1}} dx = \int\limits_0^\rho \frac{|g'(x)|}{x^\alpha} T(x) dx,$$

где

$$T(x) = x^\alpha \int\limits_x^\rho \frac{dt}{t^{\alpha+1}} = \int\limits_1^{\rho/x} \frac{dt}{t^{\alpha+1}}.$$

Далее приведем оценку $T(x)$. Для этого рассмотрим два случая: $\alpha < 0$ и $\alpha \geq 0$. Если $\frac{x}{\rho} \leq 1$ и $\beta - \alpha \geq 0$, то при $\alpha < 0$ получаем

$$T(x) \leq \int\limits_1^{\rho/x} \frac{t^{-\alpha} dt}{t} \leq \left(\frac{\rho}{x}\right)^{-\alpha} \int\limits_1^{\rho/x} \frac{dt}{t} \leq \left(\frac{\rho}{x}\right)^{\beta-\alpha} \ln \frac{\rho}{x},$$

а при $\alpha \geq 0$ имеем

$$T(x) \leq \int\limits_1^{\rho/x} \frac{1}{t^\alpha}\frac{1}{t}dt \leq \int\limits_1^{\rho/x} \frac{dt}{t} = \ln\frac{\rho}{x} \leq \left(\frac{\rho}{x}\right)^{\beta-\alpha} \ln\frac{\rho}{x}.$$

Из этих двух оценок $T(x)$, при $\alpha \leq \beta$ в итоге получаем

$$T(x) = \left(\frac{\rho}{x}\right)^{\beta-\alpha} \ln\frac{\rho}{x}.$$

Этим завершается доказательство Леммы 3.

Пользуясь Леммой 3 при $\alpha = \beta = 0$ и вышеприведенными рассуждениями для распространения одномерного неравенства на многомерный случай, получаем Теорему 7.

Глава 2

Неравенства типа Харди в выпуклых областях

§2.1 Одномерные неравенства

В этом параграфе докажем одномерные неравенства с логарифмическими весами, которые будут нужны для получения неравенств в многомерном случае.

Теорема 8. *Положим* $0 < b-a < \infty$, f *: [a,b] – абсолютно непрерывная функция удовлетворяющая граничным условиям* $f(a) = f(b) = 0$, $\delta(x) = \min\{x-a, b-x\}$. *Тогда при* $\beta \geq 0$, $\alpha \leq \beta$, $f \not\equiv 0$ *и* $f'(x)\ln\ln\frac{\delta_0 e}{\delta}/\delta^\beta \in L^1(a,b)$, *выполнено неравенство*

$$\int\limits_a^b \frac{|f(x)|}{\delta^{\alpha+1}\ln\frac{\delta_0 e}{\delta}}dx \leq \int\limits_a^b \frac{|f'(x)|}{\delta^\beta}\ln\ln\frac{\delta_0 e}{\delta}dx. \tag{2.1.1}$$

Для доказательстве теоремы 8 нам понадобится

Лемма 4. *Предположим* $\rho > 0$ *и* $g : [0,\rho] \to \mathbb{R}$ *абсолютно непрерывная функция, которая удовлетворяет граничному условию* $g(0) = 0$. *При* $\beta \geq 0$, $\alpha \leq \beta$, $g \not\equiv 0$ *и* $g'\ln\ln\frac{\rho e}{t}/t^\beta \in L^1(0,\rho)$, *верно неравенство*

$$\int\limits_0^\rho \frac{|g(t)|}{t^{\alpha+1}\ln\frac{\rho e}{t}}dt \leq \rho^{\beta-\alpha}\int\limits_0^\rho \frac{|g'(t)|}{t^\beta}\ln\ln\frac{\rho e}{t}dt.$$

Доказательство Леммы 4: Известно, что

$$|g(t)| \leq \int\limits_0^t |g'(x)|dx.$$

Проделаем следующие выкладки

$$\int\limits_0^\rho \frac{|g(t)|}{t^{\alpha+1}\ln\frac{\rho e}{t}}dt \le \int\limits_0^\rho \frac{dt}{t^{\alpha+1}\ln\frac{\rho e}{t}} \int\limits_0^t |g'(x)|dx.$$

Далее, изменяем порядок интегрирования в повторных интегралах. Откуда получаем

$$\int\limits_0^\rho \frac{|g(t)|}{t^{\alpha+1}\ln\frac{\rho e}{t}}dt \le$$

$$\le \int\limits_0^\rho |g'(x)| \int\limits_x^\rho \frac{dt}{t^{\alpha+1}\ln\frac{\rho e}{t}}dx = \int\limits_0^\rho \frac{|g'(x)|}{x^\alpha}T(x)dx,$$

где

$$T(x) = x^{\alpha-1}\int\limits_x^\rho \frac{dt}{t^\alpha \ln\frac{\rho e}{t}} = x^{\alpha-1}\int\limits_x^\rho \frac{xdy}{yx^\alpha \ln\frac{\rho e}{yx}} = \int\limits_1^{\rho/x} \frac{dy}{y\ln\frac{\rho e}{yx}}.$$

Используя, что

$$\left(\ln\ln\frac{\rho e}{yx}\right)' = -\frac{1}{\ln\frac{\rho e}{yx}}\frac{1}{\frac{\rho e}{xy}}\frac{\rho e}{xy^2} = -\frac{1}{\ln\frac{\rho e}{xy}y},$$

получим

$$\int\limits_1^{\rho/x} \frac{dy}{y\ln\frac{\rho e}{yx}} = -\int\limits_1^{\rho/x} d\ln\ln\frac{\rho e}{yx} = -\ln\ln\frac{\rho e}{\frac{\rho}{x}x} + \ln\ln\frac{\rho e}{x} =$$

$$= -\ln\ln e + \ln\ln\frac{\rho e}{x} = \ln\ln\frac{\rho e}{x}.$$

Отсюда следует

$$\int\limits_0^\rho \frac{|f|}{x^\alpha \ln\frac{\rho e}{x}}dx \le \int\limits_0^\rho \frac{f'}{x^\alpha}\ln\ln\frac{\rho e}{x}dx. \tag{2.1.2}$$

Этим завершается доказательство Леммы (4).

Доказательство Теоремы 8: Применяя неравенство (2.1.2) с $\rho = (b-a)/2$ к двум функциям, которые определяются равенствами

$$g(t) = f(t+a), g(t) = f(b-t),$$

получаем

$$\int\limits_a^{(a+b)/2} \frac{|f(x)|}{(x-a)^\alpha \ln \frac{\rho e}{x-a}} dx \leq \int\limits_a^{(a+b)/2} \frac{|f'(x)|}{(x-a)^\beta} \ln\ln \frac{\rho e}{(x-a)} dx,$$

$$\int\limits_{(a+b)/2}^{b} \frac{|f(x)|}{(b-x)^\alpha \ln \frac{\rho e}{(b-x)}} dx \leq \int\limits_{(a+b)/2}^{b} \frac{|f'(x)|}{(b-x)^\beta} \ln\ln \frac{\rho e}{(b-x)} dx.$$

Если сложить эти два неравенства, то имеем неравенство (2.1.1). Этим завершается доказательство Теоремы (8).

§2.2 Неравенства в многомерном случае

В этом параграфе пользуясь методом Ф.Г. Авхадиева из статьи [4], распространим одномерные неравенства на случай выпуклых областей.

Теорема 9. *Положим Ω – произвольное открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$. Если $1 \leq p < \infty$, то*

$$\int\limits_\Omega \frac{|f|^p}{\delta \ln \frac{\delta_0 e}{\delta}} dx \leq p^p \int\limits_\Omega \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{1-p} (\ln \frac{\delta_0 e}{\delta})^{1-p}} \left(\ln\ln \frac{\delta_0 e}{\delta} \right)^p. \qquad (2.2.1)$$

Доказательство Теоремы 9: Далее используем подход Ф.Г. Авхадиева. Оказывается достаточно доказать неравенство (2.2.1) при $p = 1$. То есть неравенство

$$\int\limits_\Omega \frac{|g|}{\delta \ln \frac{\delta_0 e}{\delta}} dx \leq \int\limits_\Omega |\nabla g| \ln\ln \frac{\delta_0 e}{\delta} dx. \qquad (2.2.2)$$

Действительно, пусть $p \in (1, \infty)$, $f \in C_0^1(\Omega)$ – фиксированные и $g = |f|^p \in C_0^1(\Omega)$. Используя, что

$$|f|^p = p|f|^{p-1} |\nabla f|,$$

верно неравенство

$$\int\limits_\Omega \frac{|f|^p}{\delta \ln \frac{\delta_0 e}{\delta}} dx \leq p \int\limits_\Omega |f|^{p-1} |\nabla f| \ln\ln \frac{\delta_0 e}{\delta}.$$

Оценим интеграл в правой части полученного соотношения. Используя неравенство Гёльдера с показателями $p/(p-1)$, p, получим

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta \ln \frac{\delta_0 e}{\delta}} dx \leq p \int\limits_{\Omega} |f|^{p-1} |\nabla f| \ln \ln \frac{\delta_0 e}{\delta} dx \leq$$

$$\leq p \left(\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta \ln \frac{\delta_0 e}{\delta}} dx \right)^{(p-1)/p} \left(\int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{1-p} (\ln \frac{\delta_0 e}{\delta})^{1-p}} \ln \ln \frac{\delta_0 e}{\delta} dx \right)^{1/p}.$$

При $n = 1$ и $p = 1$ неравенство теоремы (9) очевидным образом следует из (2.2.2). Остается доказать неравенство при $n \geq 2$, $p = 1$. Так как Ω – выпуклая, то достаточно воспользоваться формулой (1.2.4) (см. подробнее [4]). Нам достаточно доказать неравенство вида:

$$\int\limits_{0}^{\varphi_{n-1}(y,\omega_0)} \frac{|f(x)|}{\delta^{\alpha+1} \ln \frac{\delta_0 e}{\delta}} dx \leq \int\limits_{0}^{\varphi_{n-1}(y,\omega_0)} \frac{|f'(x)|}{\delta^{\beta}} \ln \ln \frac{\delta_0 e}{\delta} dx.$$

Ясно, что это неравенство следует из теоремы (8). Этим завершается доказательство теоремы (9).

Лемма 2 и неравенство (2.2.2) приведет к следующему утверждению.

Теорема 10. *Положим* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ – открытое множество, $\delta_0(\Omega) < \infty$ и $p \in [1, +\infty)$, $l \in [1, p]$. Для любой $f \in C_0^1(\Omega)$ верно неравенство

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta \ln \frac{\delta_0 e}{\delta}} dx \leq p^l \int\limits_{\Omega} \frac{1}{\left(\delta \ln \frac{\delta_0 e}{\delta}\right)^{1-l}} \left(\ln \ln \frac{\delta_0 e}{\delta} \right)^l.$$

Заключение

В данной выпускной работе найдены новые неравенства Харди с логарифмическими весами. Подробно разобрана работа авторов Ф.Г.Авхадиева и Н.Г.Насибуллина [4]. Доказаны новые одномерные неравенства и получены многомерные случаи. При доказательстве многомерных аналогов мы используем метод Ф.Г. Авхадиева [4]. Получили более общую L^p версию неравенства в многомерном случае.

Литература

[1] Авхадиев, Ф.Г. *Неравенства типа Харди в плоских и пространственных открытых множествах* / Ф.Г. Авхадиев // Тр. МИАН. - 2006. - Т. 255. - С. 8–18.

[2] Авхадиев, Ф.Г. *Введение в геометрическую теорию функций*: учебное пособие / Ф.Г. Авхадиев - Казань: Казан. ун-т. - 2012. - 140 с.: ил. 19

[3] Авхадиев, Ф.Г. *Решение обобщенной задачи Сен-Венана* / Ф.Г. Авхадиев // Матем. сборник. - 1998. - Т. 189. - № 12. - С. 3–12.

[4] Авхадиев Ф.Г., *Неравенства типа Харди в произвольных областях с конечным внутренним радиусом*/ Ф.Г. Авхадиев, Р.Г. Насибуллин // Сибирский математический журнал. Март-Апрель, 2014. - Том 55, - №2 - С. 239–250.

[5] Насибуллин Р.Г. *Неравенства типа Харди с весами, имеющими степенные и логарифмические особенности*/ Р.Г. Насибуллин // Казань - 2013. - С. 4–32.

[6] Соболев, Л.С. *Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщенных производных* / Л.С. Соболев. - М.: Наука, 1989. - 254 С. ISBN 5-02-000052-3.

[7] Hardy, G.H. *Inequalities* / G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Polya. - Cambridge University Press, Cambridge, 1973.

[8] Laptev, A. *Hardy inequalities for magnetic Dirichlet forms* / A. Laptev, T. Weidl // Operator Theory: Advances and Applications. - 1999. - V. 108. - P. 299–305