УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 150, кн. 1 Физико-математические науки *2008*

УДК 514.7

ОЧЕРК НАУЧНОЙ И ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ А.П. ШИРОКОВА

В.Е. Фомин, В.В. Шурыгин

Аннотация

Работа содержит краткую биографию выдающегося ученого-геометра заслуженного деятеля науки РСФСР профессора Казанского университета А.П. Широкова (1926–1998). Отражен вклад, внесенный А.П. Широковым и его учениками в развитие геометрии обобщенных биаксиальных пространств, теории многообразий над алгебрами, геометрии касательных расслоений и расслоений Вейля, геометрии Лагерра, геометрии бесконечномерных многообразий, теории связностей в расслоениях, геометрии неевклидовых пространств и других направлений исследований современной геометрии.

Ключевые слова: банахово многообразие, бесконечномерное многообразие, Вейля расслоение, касательное расслоение, Лагерра геометрия, Лобачевского пространство, многообразие над алгеброй, обобщенное бисиальное пространство, проективное пространство над алгеброй, связностей теория.

---

21 декабря 2006 года исполнилось 80 лет со дня рождения выдающегося ученого Казанского государственного университета заслуженного деятеля науки РСФСР профессора Александра Петровича Широкова (21.12.1926 – 29.09.1998), возглавлявшего в течение многих лет Казанскую геометрическую школу и внесшего существенный вклад в развитие геометрической науки и высшего образования в России.

А.П. Широков родился в Казани в семье выдающегося советского геометра, основателя кафедры геометрии Казанского университета, профессора Петра Алексеевича Широкова. Яркие математические способности проявились у Александра Петровича уже в школьном возрасте, и в развитии этих способностей и интереса к математике его отец сыграл немалую роль. Мать Александра Петровича, Широкова Наталья Александровна, работала в Институте научной организации труда. Впоследствии она защитила докторскую диссертацию по филологии и стала профессором кафедры русского языка и литературы Казанского университета.

В 1943 г., сдав экстерном экзамены за 10-й класс, Александр Петрович поступил на самолетостроительный факультет Казанского авиационного института. После второго курса он перевелся на физико-математический факультет Казанского университета. В 1944 г. скончался Петр Алексеевич Широков, у которого с осени 1943 года обострилось заболевание сердца. Заведовать кафедрой геометрии Казанского университета был приглашен из Новосибирска профессор А.П. Норден. На физмате Александр Петрович Широков, научные интересы которого сформировались под влиянием отца, специализируется по геометрии. В 1949 г. он окончил с отличием университет и поступил в аспирантуру на кафедру геометрии к профессору А.П. Нордену.

Кандидатская диссертация Александра Петровича «Геометрия обобщенных биаксиальных пространств», защищенная в 1952 г., посвящена геометрии бипланарного пространства эллиптического типа. Бипланарные пространства представляют собой многомерные обобщения биаксиальных пространств, дифференциальная геометрия которых была развита в работах А.П. Нордена [38, 39]. На гиперповерхностях бипланарного пространства индуцируются структуры комплексных аналитических многообразий, что потребовало изучения геометрии комплексных пространств аффинной связности, так называемых пространств A_{2n}. Результаты диссертации были опубликованы в работе [68]. Развитие идей кандидатской диссертации привело в дальнейшем к появлению теории многообразий над ассоциативными коммутативными алгебрами общего вида.

С 1 сентября 1952 г. Александр Петрович приступил к преподавательской работе на кафедре математического анализа, а затем на кафедре геометрии. В это время он руководит работой студенческих научных кружков, является председателем студенческого научного общества. В 1957 г. ему было присвоено ученое звание доцента.

После защиты кандидатской диссертации Александр Петрович продолжает исследования по геометрии обобщенных пространств, уделяя особое внимание пространствам с ковариантно постоянными аффинорными полями [69–71]. В это же время им была проделана большая работа по подготовке к публикации рукописей из архива Петра Алексеевича Широкова (см. [98]). По предложению А.П. Нордена на основе конспекта лекций П.А. Широкова Александром Петровичем была написана монография «Аффинная дифференциальная геометрия», опубликованная в 1959 г. в государственном издательстве физико-математической литературы [96]. В 1962 году она была переведена на немецкий язык [122] и, наряду с книгой В. Бляшке [107], оказала существенное влияние на дальнейшие исследования в русле аффинной дифференциальной геометрии (см. [123, с. 133]). Результаты и идеи, содержащиеся в этой книге, широко используются в современных исследованиях и учебниках по аффинной дифференциальной геометрии (см., например, [22, 50, 116, 123]). В 1966 г. вышло подготовленное Александром Петровичем к публикации второе издание монографии П.А. Широкова «Тензорное исчисление» (см. [97]).

В 1967 г. А.П. Широков защищает докторскую диссертацию «Пространства, определяемые алгебрами» [78], в которой он развил общую теорию дифференцируемых многообразий и пространств аффинной связности над коммутативными ассоциативными унитальными алгебрами.

С 1968 года А.П. Широков – профессор кафедры геометрии Казанского университета. В 1970 г. ему присвоено ученое звание профессора.

После защиты докторской диссертации Александр Петрович вместе с аспирантами продолжает исследование геометрии многообразий над алгебрами. Особое внимание уделяется приложениям общей теории в линейчатой геометрии, геометрии неевклидовых пространств и геометрии касательных расслоений. Обнаружение А.П. Широковым естественной структуры многообразия над алгеброй плюральных чисел $\mathbf{R}(\varepsilon^r)$ на касательном расслоении r-го порядка T^rM дифференцируемого многообразия M [83] позволило с единой точки зрения изложить теорию лифтов геометрических структур на касательные расслоения высших порядков. В работе [88] А.П. Широковым естественные структуры многообразий над локальными алгебрами были введены на расслоениях бесконечно близких точек в смысле А. Вейля [126], играющих важную роль в дифференциальной геометрии высшего порядка и теории естественных операций в дифференциальной геометрии [115]. Результаты, полученные А.П. Широковым и его учениками, частично вошли в книгу «Пространства над алгебрами» [8], написанную совместно с В.В. Вишневским и В.В. Шурыгиным.

Научная работа Александра Петровича нашла отражение и в его преподавательской работе. Им были прочитаны специальные курсы по теории дифференцируемых многообразий, теории групп Ли и расслоенных пространств, геометрии пространств над алгебрами, симплектической геометрии, теории спиноров, неевклидовым геометриям.

С 1970 по 1975 гг. А.П. Широков – заведующий кафедрой теории относительности и гравитации Казанского университета. С 1975 по 1980 гг. А.П. Широков – профессор, а с 1980 по 1993 гг. – заведующий кафедрой геометрии Казанского университета. Все это время он совмещал научные исследования с руководством многочисленными аспирантами и соискателями. Под его руководством защищено более 20-ти кандидатских диссертаций. Влияние научных трудов А.П. Широкова распространялось не только на его непосредственных учеников и исследователей, принадлежащих Казанской геометрической школе, но и на геометров других научных центров Советского Союза. Частично это влияние отражено в настоящей публикации.

Необходимо отметить вклад, внесенный А.П. Широковым в организацию подготовки специалистов высшей категории, не только как научного руководителя, но и как члена Советов по присуждению ученой степени доктора физико-математических наук по специальности «геометрия и топология», официального оппонента и рецензента ведущей организации по докторским и кандидатским диссертациям.

Широкий научный кругозор, глубокие познания в различных областях геометрии проявились в активном сотрудничестве А.П. Широкова с ВИНИТИ РАН. Александр Петрович являлся членом бюро Всесоюзного (позднее Всероссийского) геометрического семинара имени Г.Ф. Лаптева при ВИНИТИ, принимал участие в организации международных, Всесоюзных (Всероссийских) геометрических конференций и семинаров. Им было подготовлено большое количество рефератов по теории структур на многообразиях и геометрии пространств над алгебрами для реферативного журнала ВИНИТИ «Математика» и журнала «Zentralblatt für Mathematik». Для изданий ВИНИТИ серии «Итоги науки и техники» А.П. Широковым были написаны обзорные исследования, посвященные дифференциально-геометрическим структурам на дифференцируемых многообразиях [15, 81, 82], геометрии касательных расслоений и многообразий над алгебрами [88, 95], методу нормализации А.П. Нордена [90].

Вклад, внесенный А.П. Широковым в развитие науки и образования, был высоко оценен присвоением ему в 1980 г. почетного звания «Заслуженный деятель науки РСФСР».

В течение более четверти века (1971–1998 гг.) А.П. Широков являлся членом редколлегии журнала «Известия вузов. Математика». Под его редакцией вышло 12 выпусков Трудов геометрического семинара Казанского университета (вып. 11–22), два юбилейных сборника научных трудов, посвященных 200-летию со дня рождения Н.И. Лобачевского.

А.П. Широков принимал активное участие в подготовке и проведении геометрических конференций, проходивших в Казанском университете, в числе которых Международный геометрический семинар, посвященный 100-летию со дня рождения П.А. Широкова (1995 г.), и Международный семинар имени Лобачевского (1997 г.), он являлся членом международного жюри по присуждению Казанским университетом в 1992 и 1997 гг. медали имени Н.И. Лобачевского.

В 1996 г. Казанская геометрическая школа, возглавляемая А.П. Широковым, получила грант Государственной программы по поддержке ведущих научных школ России для выполнения научных исследований по теме «Геометрия и топология многообразий с алгебраическими структурами и расслоения» (см. [2, с. 104]). Научными исследованиями в рамках этого гранта Александр Петрович руководил до 29 сентября 1998 года, когда он скоропостижно скончался, возвращаясь домой с заседания геометрического семинара.

В 2007 г. журнал «Известия вузов. Математика» выпустил два номера (№ 9, 10), посвященные 80-летию со дня рождения А.П. Широкова. Еще один номер планируется к выходу в 2008 г. (№ 4). Памяти А.П. Широкова посвятили свои работы ученые из многих научных центров России, Израиля, Колумбии, Норвегии, США, Чехии.

Более подробные сведения о жизни и деятельности профессора Казанского университета Широкова Александра Петровича можно найти в посвященных ему публикациях [45, 46, 65–67]. Полный список научных публикаций А.П. Широкова содержится в издании [65], вышедшем в серии «Выдающиеся ученые Казанского университета» (см. также статью [66], содержащую список работ А.П. Широкова до 1997 года).

В следующих параграфах настоящей работы отражены основные этапы научных исследований А.П. Широкова и его учеников, а также отмечены работы других геометров, близкие по тематике к исследованиям А.П. Широкова или написанные под влиянием его работ.

1. Геометрия обобщенных биаксиальных пространств

Бипланарное пространство B_{2n+1} представляет собой вещественное проективное пространство P_{2n+1} нечетной размерности, в котором заданы две не пересекающиеся плоскости π_1 и π_2 размерности n, рассматриваемые как *абсолют*. Группой движений пространства B_{2n+1} является группа проективных преобразований, сохраняющих абсолютные плоскости π_1 и π_2. Если плоскости π_1 и π_2 являются вещественными, пространство B_{2n+1} называется бипланарным пространством *гиперболического* типа, если плоскости π_1 и π_2 комплексно сопряжены, пространство B_{2n+1} называется бипланарным пространством *эллиптического* типа. Бипланарные пространства являются многомерными обобщениями биаксиальных пространств, дифференциальная геометрия которых была развита в работах А.П. Нордена [38, 39].

Через каждую точку $\mathbf{x} \in B_{2n+1}$, не принадлежащую абсолюту, проходит единственная прямая $\ell = \ell(\mathbf{x})$, пересекающая обе плоскости π_1 и π_2. Всякая такая прямая называется *особой*. Пусть $\mathbf{y}_1 = \ell \cap \pi_1$, $\mathbf{y}_2 = \ell \cap \pi_2$, а $\widetilde{\mathbf{x}}$ – точка на прямой ℓ, составляющая с точками $\mathbf{y}_1$, $\mathbf{y}_2$ и $\mathbf{x}$ гармоническую четверку. Возникает (абсолютная) *инволюция* $g : \mathbf{x} \mapsto \widetilde{\mathbf{x}}$, $\widetilde{x}^\alpha = g^\alpha_\beta x^\beta$, $\alpha, \beta = 1, \ldots, 2n+2$. Основное внимание в работе [68] уделено бипланарному пространству эллиптического типа, для которого аффинор g^α_β удовлетворяет уравнению

$$g^\alpha_\sigma g^\sigma_\beta = -\delta^\alpha_\beta.$$

В случае адаптированного к структуре пространства B_{2n+1} репера, то есть такого, что плоскость π_1 оказывается натянутой на векторы $\mathbf{e}_a + \mathbf{e}_{n+a+1}$, $a = 1, \ldots, n+1$, а плоскость π_2 – на векторы $\mathbf{e}_a - \mathbf{e}_{n+a+1}$, $a = 1, \ldots, n+1$, матрица аффинора инволюции имеет вид

$$(g^\alpha_\beta) = \begin{pmatrix} 0 & E_{n+1} \\ -E_{n+1} & 0 \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где E_{n+1} – единичная матрица порядка $n+1$.

Инволюция (1) задает на векторном пространстве $\mathbf{V}_{2n+2}$, векторными прямыми которого моделируется проективное пространство B_{2n+1}, структуру $(n+1)$-мерного комплексного проективного пространства $\mathbf{V}^{\mathbf{C}}_{n+1}$. При этом особые прямые бипланарного пространства оказываются прямыми, порождаемыми векторными плоскостями, являющимися одномерными комплексными линейными подпространствами пространства $\mathbf{V}^{\mathbf{C}}_{n+1}$. Таким образом, на множестве особых прямых пространства B_{2n+1} эллиптического типа индуцируется структура n-мерного комплексного проективного пространства $P_n^{\mathbf{C}}$. Возникает сюръективное отображение

$$B_{2n+1} \ni \mathbf{x} \mapsto \ell(\mathbf{x}) \in P_{n+1}^{\mathbf{C}}, \tag{2}$$

представляющее собой локально тривиальное расслоение, слоями которого являются особые прямые (топологические окружности). Расслоения такого типа называют сейчас расслоениями Хопфа (см. [36])

Основной целью изучения в работе [68] является геометрия гиперповерхностей бипланарного пространства. Гиперповерхность M_{2n} в пространстве B_{2n+1} задается уравнением $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, \dots, u^{2n})$. Предполагается, что касательная плоскость гиперповерхности не содержит особую прямую, то есть гиперповерхность является (локальным) сечением расслоения (2). В этом случае $\mathbf{R}$-линейная оболочка касательной плоскости к M_{2n} в векторном пространстве V_{2n+2} является n-мерным комплексным подпространством пространства $V_{n+1}^{\mathbf{C}}$, дополнительным к одномерной комплексной линейной оболочке вектора $\mathbf{x}$, представляющей собой особую прямую $\mathbf{P}_1$ пространства B_{2n+1}. Гиперповерхность M_{2n} порождает пучок поверхностей $M_{2n}(a+bi)$, заданных уравнениями $\mathbf{z} = (a+bi)\mathbf{x}(u^1, \dots, u^{2n})$. Касательные подпространства к гиперповерхностям пучка пересекаются по комплексной «гиперпрямой», представляющей собой особую $(2n-1)$-мерную плоскость $\mathbf{P}_{2n-1}$ пространства B_{2n+1}. Выбор плоскости $\mathbf{P}_1$ в качестве нормали первого рода, а плоскости $\mathbf{P}_{2n-1}$ в качестве нормали второго рода позволяет применить метод нормализации А.П. Нордена [40] для построения индуцированной на M_{2n} аффинной (линейной) связности ∇. Коэффициенты Γ_{ji}^k связности ∇ определяются уравнениями нормализованной поверхности [40]

$$\nabla_j \mathbf{y}_i = l_j \mathbf{y}_i + p_{ji}\mathbf{x} + b_{ji}\widetilde{\mathbf{x}},$$

где $\widetilde{\mathbf{x}} = i\mathbf{x}$, $\mathbf{y}_k = \partial_k \mathbf{x} - l_k \mathbf{x}$. В индуцированной связности ∇ аффинор g_k^i, являющийся ограничением аффинора инволюции на гиперповерхность, ковариантно постоянен, и гиперповерхность оказывается комплексным аналитическим многообразием, снабженным аффинной связностью без кручения, сохраняющей аффинор комплексной структуры, так называемым пространством A_{2n}. Установленный факт вызвал необходимость изучить соответствия между вещественными и комплексными тензорами и объектами связности пространств A_{2n}, выяснить строение вещественных тензоров и объектов связности, реализующих комплексные тензоры и объекты связности, а также рассмотреть различные специальные классы пространств A_{2n}.

В числе других, были доказаны следующие теоремы:

1. *Связность пространства A_{2n} является реализацией комплексной аналитической связности тогда и только тогда, когда ее тензор кривизны является чистым тензором относительно аффинора комплексной структуры.*

2. *На аналитических комплексных геодезических пространства A_{2n} индуцируется связность Вейля.*

3. *Для того, чтобы в пространстве A_{2n} через каждую комплексную одномерную площадку проходила комплексная аналитическая геодезическая, необходимо и достаточно, чтобы комплексная связность пространства A_{2n} была проективна комплексной аналитической связности.*

Последний результат был распространен В.В. Шурыгиным [99] на случай связностей на многообразиях над произвольными ассоциативными коммутативными алгебрами.

Основным результатом, касающимся геометрии гиперповерхностей бипланарного пространства эллиптического типа, является следующая теорема:

Связность, индуцируемая на гиперповерхности M_{2n} *пространства* B_{2n+1}, *является реализацией комплексной (не обязательно аналитической) проективно-евклидовой связности и удовлетворяет соотношению*

$$R^m_{ijk}\, g^k_m = 0. \tag{3}$$

Обратно, всякая связность, являющаяся реализацией комплексной проективно-евклидовой связности и удовлетворяющая соотношению (3), может быть осуществлена на гиперповерхности пространства B_{2n+1}.

Связность, индуцируемая на гиперповерхности M_{2n}, *является реализацией аналитической связности тогда и только тогда, когда она является эквиаффинной.*

Также было выяснено, что *связность, индуцируемая на гиперповерхности* M_{2n}, *является евклидовой тогда и только тогда, когда* M_{2n} *– гиперплоскость*, а *единственные гиперповерхности пространства* B_{2n+1}, *являющиеся симметрическими пространствами, суть гиперквадрики типа бицилиндров.*

В дальнейшем [76, 84] А.П. Широковым изучалось проективное пространство $P_n^{\mathbf{A}}$ над общего вида ассоциативной коммутативной унитальной алгеброй $\mathbf{A}$ размерности m. Была построена интерпретация (модель) пространства $P_n^{\mathbf{A}}$ как конгруэнции особых $(m-1)$-мерных плоскостей вещественного проективного пространства P_{mn-1} размерности $mn-1$. Конгруэнция особых плоскостей в случае произвольной алгебры имеет фокальные многообразия, но открытое подмногообразие P_{mn-1}, получаемое удалением указанных фокальных подмногообразий, расслаивается над $P_n^{\mathbf{A}}$, образуя аналог расслоения Хопфа. Геометрия пространства m-пар голоморфных подпространств пространства $P_n^{\mathbf{A}}$ изучалась аспиранткой А.П. Широкова Е.М. Кузнецовой [31]. Геометрия трехмерного проективного пространства с вырожденным автополярно нормализованным абсолютом и ее конформная интерпретация Пуанкаре в плоскости дуального переменного изучались ученицей Александра Петровича С.Ю. Петропавловской [43].

2. Многообразия над алгебрами

Обобщая теорию комплексных аналитических многообразий, А.П. Широков развил общую теорию дифференцируемых многообразий и пространств аффинной связности над ассоциативными коммутативными унитальными алгебрами [72–75, 77, 79, 80].

Пусть $\mathbf{A}$ – ассоциативная коммутативная унитальная алгебра размерности m над полем вещественных чисел $\mathbf{R}$ и $\{e_a\}$, $a = 1, 2, \ldots, m$, – некоторый базис в $\mathbf{A}$. Операция умножения в $\mathbf{A}$, представляющая собой билинейное отображение

$$\circ : \mathbf{A} \times \mathbf{A} \ni (\alpha, \beta) \mapsto \sigma = \alpha \circ \beta \in \mathbf{A},$$

в базисе $\{e_a\}$ определяется структурными константами – коэффициентами γ^c_{ab}, $a, b, c = 1, 2, \ldots, m$, разложений

$$e_a e_b = \gamma^c_{ab}\, e_c \tag{4}$$

произведений элементов базиса по этому же базису. При этом $\sigma^c = \gamma^c_{ab}\alpha^a\beta^b$. Пусть $\mathbf{A}^n = \mathbf{A} \times \mathbf{A} \times \ldots \times \mathbf{A}$ (n сомножителей) – стандартный $\mathbf{A}$-модуль размерности n, элементами которого являются строки, состоящие из n элементов алгебры $\mathbf{A}$. Дифференцируемое (класса C^∞) отображение $F : U \ni X \to Y = F(X) \in \mathbf{A}^k$, $Y^{i'} = F^{i'}(X^i)$, $i = 1, \ldots n$, $i' = 1, \ldots k$, область определения U которого является открытым подмножеством в $\mathbf{A}^n$, называется $\mathbf{A}$*-дифференцируемым (дифференцируемым над* $\mathbf{A}$*) в смысле Шефферса* [121], если касательное отображение

$$T_X F : T_X U \equiv \mathbf{A}^n \to T_{F(X)}\mathbf{A}^k \equiv \mathbf{A}^k$$

является $\mathbf{A}$-линейным.

В локальных координатах $(x^{ia}, y^{i'a})$, $i = 1, \dots n$, $i' = 1, \dots k$, определяемых разложениями $X^i = x^{ia}e_a$, $Y^{i'} = y^{i'a}e_a$, касательное отображение $T_X F$ задается матрицей Якоби $(\partial F^{i'a}/\partial x^{ib})$, и условия $\mathbf{A}$-дифференциемости отображения F принимают вид

$$\partial_{id}F^{i'c}\gamma^d_{ab} = \gamma^c_{ad}\partial_{ib}F^{i'd} \Longleftrightarrow \partial_{ia}F^{i'c} = \gamma^c_{ad}\delta^g\partial_{ig}F^{i'd},$$

где $\partial_{id}F^{i'c} = \partial F^{i'c}/\partial x^{id}$, $\delta = \delta^a e_a$ – единица алгебры $\mathbf{A}$. $\mathbf{A}$*-дифференцируемым многообразием размерности* n называется (вещественное) дифференцируемое многообразие M_{mn} размерности mn, снабженное (максимальным) атласом Φ, состоящим из карт $h_A : U \to U^* \subset \mathbf{A}^n$, функции склейки которого $h_A \circ h_B^{-1}$ являются $\mathbf{A}$-дифференцируемыми диффеоморфизмами. Многообразие M_{mn} со структурой $\mathbf{A}$-дифференцируемого многообразия обозначим $M_n^{\mathbf{A}}$. Касательное пространство $T_X M_n^{\mathbf{A}}$ в произвольной точке $X \in M_n^{\mathbf{A}}$ несет структуру $\mathbf{A}$-модуля, изоморфного $\mathbf{A}^n$. Это позволяет построить дуальный $\mathbf{A}$-модуль $T_X^* M_n^{\mathbf{A}}$ и $\mathbf{A}$-модули $T_X^{(p,q)} M_n^{\mathbf{A}}$ тензоров типа (p,q) и затем рассматривать на многообразии $M_n^{\mathbf{A}}$ $\mathbf{A}$-дифференцируемые тензорные поля и $\mathbf{A}$-дифференцируемые $\mathbf{A}$-линейные связности. Вещественное дифференцируемое многообразие M_{mn} называется реализацией $\mathbf{A}$-дифференцируемого многообразия $M_n^{\mathbf{A}}$. А.П. Широковым было установлено следующее:

Элементам алгебры $w \in \mathbf{A}$ *соответствуют на многообразии* M_{mn} *поля* w^α_β, $\alpha, \beta = 1, \dots, mn$, *тензоров типа* $(1,1)$ *(структурных аффиноров).*

$\mathbf{A}$*-дифференцируемые тензорные поля, заданные на* $M_n^{\mathbf{A}}$*, реализуются полями чистых тензоров того же типа на многообразии* M_{mn}*, то есть полями тензоров, свертка которых со структурным аффинором* w^α_β *дает один и тот же результат, независимо от того, по какому индексу свертка осуществляется.*

$\mathbf{A}$*-линейная связность реализуется линейной связностью на многообразии* M_{mn}*, в которой структурные аффиноры ковариантно постоянны.*

Тензорные поля, реализующие ковариантно постоянные $\mathbf{A}$*-дифференцируемые тензорные поля, ковариантно постоянны в реализующей связности.*

$\mathbf{A}$*-линейная связность на одномерном многообразии реализуется локально плоской связностью тогда и только тогда, когда она* $\mathbf{A}$*-дифференцируема.*

Аспирантка Александра Петровича И.С. Григорьева изучала линейные связности на одномерных многообразиях над алгебрами, объекты связности которых задаются функциями $f : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ такими, что $\mathbf{A}$-значная линейная форма $b(X) = \mathrm{d}f(X) - \mathrm{d}f(1) \cdot X$ является дифференцированием алгебры [10, 11].

Аспирантом В.И. Евсеевым в кандидатской диссертации, посвященной линейчатой геометрии [12–14], исследовались вопросы наличия тензорных структур на многообразиях k-мерных плоскостей различных типов, принадлежащих евклидову, псевдоевклидову или гиперболическому пространствам размерности n $(n \geq k \geq 1)$. В зависимости от значения k и типа плоскостей, на многообразиях k-плоскостей возникают различные алгебраические структуры (дуальная, почти комплексная, почти произведения, почти двойная).

В работе [79] многообразия с почти алгебраическими структурами, соответствующими m-кратно регулярным представлениям унитальной ассоциативной алгебры $\mathbf{A}$, были включены А.П. Широковым в общую схему теории G-структур на дифференцируемых многообразиях.

Пусть $\mathbf{A}$ – m-мерная ассоциативная алгебра, M_{mn} – mn-мерное дифференцируемое многообразие, G_1 и G_2 – группы невырожденных матриц из левого и правого n-кратно регулярных матричных представлений алгебры $\mathbf{A}$, а G – группа невырожденных матриц из n-кратного матричного представления первой производной алгебры $\mathbf{A}$, то есть наименьшей алгебры, содержащей алгебру $\mathbf{A}$ и противоположную алгебру $\mathbf{A}^*$ [44] в качестве подалгебр. Почти алгебраическая структура (соответствующая алгебре $\mathbf{A}$) определяется как редукция

$$E(M_{mn}, G_1), \quad E(M_{mn}, G_2) \quad \text{или} \quad E(M_{mn}, G) \tag{5}$$

расслоения реперов $L(M_{mn})$ многообразия M_{mn} к одной из подгрупп G_1, G_2 или G. Почти алгебраическая структура называется интегрируемой, если соответствующее главное расслоение (5) допускает локальные сечения, представляющие собой натуральные поля реперов. Связности в расслоениях (5) индуцируют линейные связности на многообразии M_{mn}, коэффициенты которых относительно реперов, принадлежащих этим расслоениям, имеют, соответственно, вид

$$\Gamma^{ia}_{jb\,kc} = \Gamma^{ip}_{jkc}\gamma^a_{bp}, \quad \Gamma^{ia}_{jb\,kc} = \Gamma^{ip}_{jkc}\gamma^a_{pb} \quad \text{и} \quad \Gamma^{ia}_{jb\,kc} = \Gamma^{ipq}_{jkc}\gamma^d_{bp}\gamma^a_{qd},$$

где $i, j, k = 1, \ldots, n$, $a, b, c = 1, \ldots, m$, а γ^a_{bc} – структурные константы алгебры $\mathbf{A}$.

В случае коммутативной алгебры $\mathbf{A}$ все три главных расслоения (5) совпадают, и многообразие с интегрируемой почти алгебраической структурой оказывается реализацией n-мерного $\mathbf{A}$-дифференцируемого многообразия $M_n^{\mathbf{A}}$. При этом связность в расслоении (5) оказывается реализацией $\mathbf{A}$-линейной связности на многообразии $M_n^{\mathbf{A}}$, коэффициенты которой в картах, принимающих значения в $\mathbf{A}$-модуле $\mathbf{A}^n$, выражаются следующим образом через коэффициенты $\Gamma^{ia}_{jb\,kc}$:

$$\Gamma^i_{jk} = \Gamma^{ia}_{jb\,kc}e_a\delta^b\delta^c.$$

Элементам базиса $\{e_a\}$ алгебры $\mathbf{A}$ соответствуют базисные структурные аффиноры $\underset{a}{f}{}^\alpha_\beta$ на многообразии M_{mn}. Для коммутативной алгебры $\mathbf{A}$, используя эти аффиноры, А.П. Широков построил на M_{mn} поля тензоров типа $(2,1)$

$$\underset{ab}{N}{}^\gamma_{\alpha\beta} = \underset{a}{f}{}^\sigma_\alpha\partial_\sigma \underset{b}{f}{}^\gamma_\beta - \underset{b}{f}{}^\sigma_\beta\partial_\sigma \underset{a}{f}{}^\gamma_\alpha - \underset{a}{f}{}^\gamma_\sigma\partial_\alpha \underset{b}{f}{}^\sigma_\beta + \underset{b}{f}{}^\gamma_\sigma\partial_\beta \underset{a}{f}{}^\sigma_\alpha, \tag{6}$$

обобщающие тензорное поле Нейенхейса аффинорной структуры на многообразии, и показал, что обращение в нуль полей (6) является необходимым, а в ряде случаев и достаточным, условием интегрируемости почти алгебраической структуры. Позже Г.И. Кручковичем [27] было доказано, что обращение в нуль тензоров (6) является достаточным условием интегрируемости (регулярной) почти алгебраической структуры, определяемой всякой коммутативной алгеброй $\mathbf{A}$.

Изучение геометрии и топологии многообразий над алгебрами, начатое А.П. Широковым, было продолжено в работах В.В. Вишневского [3] (о вкладе В.В. Вишневского в развитие геометрии многообразий над алгебрами см. [48]), Г.И. Кручковича [27, 28], И. Ванжуры [125], Н.В. Талантовой [55, 57], А.С. Подковырина [47], В.В. Шурыгина [101, 102], М.А. Малахальцева [32, 33], М.А. Микенберга [35], А.В. Бояршиновой [1], Т.И. Гайсина [9] и других исследователей (см. обзорные работы [5, 88, 95, 102] и книгу [8]).

3. Касательные расслоения и расслоения Вейля

Касательное расслоение r-го порядка T^rM дифференцируемого многообразия M представляет собой объединение $\bigcup\limits_{x\in M} T^r_xM$ пространств T^r_xM r-струй j^r_xf

ростков гладких отображений $f : (\mathbf{R}, 0) \to (M, x)$. Имеется естественная проекция $\pi : T^r M \ni j^r_x f \mapsto x \in M$. Локальные координаты x^i на области $U \subset M$ индуцируют на $\pi^{-1}(U)$ локальные координаты

$$x^{(\alpha)i} = \frac{1}{\alpha!}\left[\frac{d^\alpha(x^i \circ f)}{dt^\alpha}\right]_{t=0}, \quad \alpha = 0, 1, \ldots, r, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{7}$$

где $t \in \mathbf{R}$, $x^{(0)i} = x^i$. Координаты (7) определяют на расслоении $T^r M$ структуру дифференцируемого многообразия. Расслоение $T^r M$ является частным случаем расслоения (m, r)-скоростей Эресмана [110, 111]. Геометрия касательных расслоений изучалась в работах К. Яно и Ш. Кобаяси [129], А. Моримото [117, 118], Ч. Ху и Ш. Ишихары [112], К. Яно и Ш. Ишихары [128].

А.П. Широков ввел на области $\pi^{-1}(U)$ координаты

$$X^i = x^{(0)i} + x^{(1)i}\varepsilon + \ldots + x^{(r)i}\varepsilon^r, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{8}$$

принимающие значения в алгебре $\mathbf{R}(\varepsilon^r)$ плюральных чисел $a^0 + a^1\varepsilon + \ldots + a^r\varepsilon^r$, умножение которых определяется соотношениями $\varepsilon^p \cdot \varepsilon^q = \varepsilon^{p+q}$, $\varepsilon^{r+1} = 0$. Если на пересечении $U \cap U'$ координатных окрестностей на многообразии M имеет место преобразование координат $x^{i'} = \varphi^{i'}(x^i)$, то на пересечении $\pi^{-1}(U) \cap \pi^{-1}(U') \subset$ $\subset T^r M$ индуцированные $\mathbf{R}(\varepsilon^r)$-значные координаты преобразуются по закону $X^{i'} = \Phi^{i'}(X^i)$, где $\Phi^{i'}(X^i)$ – продолжения функций $\varphi^{i'}(x^i)$ в алгебру $\mathbf{R}(\varepsilon^r)$, являющиеся дифференцируемыми функциями над алгеброй $\mathbf{R}(\varepsilon^r)$ в смысле Г. Шефферса [121]. В результате, на касательном расслоении $T^r M$ возникает естественная структура n-мерного дифференцируемого многообразия над алгеброй $\mathbf{R}(\varepsilon^r)$.

В классе дифференцируемости C^ω продолжение $\Phi(X^i)$ вещественной функции $\varphi(x^i)$ в алгебру $\mathbf{R}(\varepsilon^r)$ получается из функции $\varphi(x^i)$ подстановкой в степенной ряд, представляющий функцию $\varphi(x^i)$, переменных (8), принадлежащих алгебре $\mathbf{R}(\varepsilon^r)$, вместо соответствующих вещественных переменных x^i. Использование локальных координат позволяет для любой дифференцируемой функции $\varphi : M \to \mathbf{R}$ построить ее продолжение $\Phi : T^r M \to \mathbf{R}(\varepsilon^r)$, являющееся $\mathbf{R}(\varepsilon^r)$-дифференцируемой функцией на расслоении $T^r M$. Разложение функции $\Phi : T^r M \to \mathbf{R}(\varepsilon^r)$ по базису алгебры $\mathbf{R}(\varepsilon^r)$ имеет вид

$$\Phi = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)}\varepsilon + \ldots + \varphi^{(r)}\varepsilon^r, \tag{9}$$

где коэффициенты разложения

$$\varphi^{(\lambda)}(j^r_x f) = \frac{1}{\lambda!}\left[\frac{d^\lambda(\varphi \circ f)}{dt^\lambda}\right]_{t=0}, \quad \lambda = 0, 1, \ldots, r, \tag{10}$$

оказываются так называемыми λ-лифтами [112] функции φ.

Использование построенной структуры $\mathbf{R}(\varepsilon^r)$-дифференцируемого многообразия на расслоении $T^r M$ и естественных продолжений геометрических объектов, заданных на многообразии M, до $\mathbf{R}(\varepsilon^r)$-дифференцируемых объектов на расслоении $T^r M$ позволило с единой точки зрения изложить (см. [8, 15]) теорию лифтов геометрических структур с многообразий на касательные расслоения высших порядков [117, 118].

Произвольная $\mathbf{R}(\varepsilon^r)$-дифференцируемая функция $\Psi : T^r M \to \mathbf{R}(\varepsilon^r)$ имеет вид

$$\Psi = \overset{0}{\Phi} + \overset{1}{\Phi}\varepsilon + \ldots + \overset{r}{\Phi}\varepsilon^r, \tag{11}$$

где $\overset{\lambda}{\Phi}$ – продолжение некоторой вещественной функции $\overset{\lambda}{\varphi} : M \to \mathbf{R}$ в алгебру $\mathbf{R}(\varepsilon^r)$. В частности, в случае алгебры дуальных чисел $\mathbf{R}(\varepsilon)$ произвольная $\mathbf{R}(\varepsilon)$-дифференцируемая функция $\Phi : \mathbf{R}(\varepsilon)^n \to \mathbf{R}(\varepsilon)$ имеет вид

$$\Phi(X^i) = \overset{0}{\varphi}(x^{(0)i}) + \varepsilon \left(\frac{\partial \overset{0}{\varphi}}{\partial x^{(0)j}} x^{(1)j} + \overset{1}{\varphi}(x^{(0)i}) \right), \tag{12}$$

а продолжение вещественной функции $\overset{0}{\varphi} : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ в алгебру $\mathbf{R}(\varepsilon)$ имеет вид

$$\Phi(X^i) = \overset{0}{\varphi}(x^{(0)i}) + \varepsilon \left(\frac{\partial \overset{0}{\varphi}}{\partial x^{(0)j}} x^{(1)j} \right). \tag{13}$$

Следуя терминологии Э. Штуди [124], который называл функции вида (12) синектическими, А.П. Широков назвал $\mathbf{R}(\varepsilon^r)$-дифференцируемые функции общего вида *синектическими расширениями естественных продолжений вещественных функций*. Геометрические объекты (векторные и тензорные поля, линейные связности) на расслоении T^rM, порождаемые $\mathbf{R}(\varepsilon^r)$-дифференцируемыми геометрические объектами общего вида, он назвал *синектическими расширениями естественных лифтов геометрических объектов* с базового многообразия M на расслоение T^rM. Например, синектическое расширение полного лифта метрического тензора $g_{ij}(x^k)$ на касательное расслоение TM в матричной записи имеет вид

$$\begin{pmatrix} x^{(1)m}\partial_m g_{ij}(x^{(0)k}) + a_{ij}(x^{(0)k}) & g_{ij}(x^{(0)k}) \\ g_{ij}(x^{(0)k}) & 0 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

где $a_{ij}(x^k)$ – произвольное симметрическое тензорное поле на многообразии M. Полный лифт метрического тензора $g_{ij}(x^k)$ получается при $a_{ij}(x^k) = 0$. А.П. Широковым было доказано [91], что метрика (14) эквивалентна метрике полного лифта на расслоении TM, рассматриваемом как дифференцируемое многообразие над алгеброй $\mathbf{R}(\varepsilon)$, тогда и только тогда, когда $a_{ij} = \mathcal{L}_v g_{ij}$ для некоторого векторного поля v на M, где $\mathcal{L}_v$ – производная Ли в направлении векторного поля v. Этот результат был распространен В.В. Шурыгиным [100] на случай $\mathbf{A}$-дифференцируемых геометрических объектов на расслоении $\mathbf{A}$-скоростей Вейля $T^{\mathbf{A}}M$.

Для аффинных связностей на касательном расслоении T^rM А.П. Широковым была доказана следующая теорема:

Произвольная $\mathbf{R}(\varepsilon^r)$-дифференцируемая связность на расслоении T^rM задается коэффициентами

$$\widetilde{\Gamma}^i_{jk}(X^\ell) = \Gamma^i_{jk}(X^\ell) + \varepsilon \overset{1}{H}{}^i_{jk}(X^\ell) + \ldots + \varepsilon^r \overset{r}{H}{}^i_{jk}(X^\ell), \tag{15}$$

где $\Gamma^i_{jk}(X^\ell)$ – продолжения в алгебру $\mathbf{R}(\varepsilon^r)$ коэффициентов $\Gamma^i_{jk}(x^\ell)$ некоторой аффинной связности, заданной на базе M, а $\overset{1}{H}{}^i_{jk}(X^\ell), \ldots, \overset{r}{H}{}^i_{jk}(X^\ell)$ – $\mathbf{R}(\varepsilon^r)$-продолжения некоторых тензорных полей $\overset{1}{H}{}^i_{jk}(x^\ell), \ldots, \overset{r}{H}{}^i_{jk}(x^\ell)$, заданных на базе M.

Связность (15) реализуется вещественной аффинной связностью на T^rM, коэффициенты которой имеют следующий вид:

$$\widetilde{\Gamma}^{i\lambda}_{j\mu\ k\nu}(x^{\ell\kappa}) = (\Gamma^i_{jk})^{(\lambda-\mu-\nu)} + (\overset{1}{H}{}^i_{jk})^{(\lambda-\mu-\nu-1)} + \ldots + (\overset{\lambda-\mu-\nu}{H}{}^i_{jk})^{(0)}, \tag{16}$$

где $(\overset{\sigma}{F}{}^i_{jk})^{(\tau)}$ *означает* τ*-лифт (10) функции* $\overset{\sigma}{F}{}^i_{jk}$.

В дальнейшем указанные результаты были распространены А.Я. Султановым [54] на случай расслоения $T^{\mathbf{A}}M$ бесконечно близких точек в смысле А. Вейля [126].

В работах [85–87] и других А.П. Широковым был разработан метод применения теории касательных расслоений в линейчатой геометрии аффинных и неевклидовых пространств, заключающийся в отнесении ориентированной прямой пространства некоторого элемента касательного расслоения индикатрисы (гиперповерхности рассматриваемого пространства).

Изучение геометрии касательных расслоений, снабженных полными лифтами геометрических объектов и их синектическими расширениями, было продолжено в работах учеников А.П. Широкова: В.Г. Подольским [49] изучались инфинитезимальные преобразования в касательном расслоении с метрикой полного лифта и метрикой Сасаки, Е.В. Назаровой [37] изучались инвариантные синектические связности в касательных расслоениях групп Ли, Т.В. Капустиной [25] исследовались голоморфно-конформные соответствия между касательными расслоениями первого и второго порядка риманова многообразия M, снабженными синектическими расширениями полных лифтов метрических тензоров, Х. Шадыевым [63] изучались проективные преобразования касательных расслоений с синектическими расширениями полных лифтов линейных связностей, С.Я. Нусь [41] изучались синектические метрики в касательном расслоении евклидова пространства. Е.П. Шустова в своей кандидатской диссертации для n-мерного гладкого многообразия M_n с линейной связностью ∇ построила канонический изоморфизм локально тривиальных расслоений между касательным расслоением второго порядка T^2M_n и суммой Уитни двух касательных расслоений первого порядка $TM_n \oplus TM_n$. Были найдены необходимые и достаточные условия совпадения полных лифтов линейной связности ∇, заданной на многообразии M_n, на расслоения T^2M_n и $TM_n \oplus TM_n$. В последующем аналогичный диффеоморфизм был построен между расслоениями T^3M_n и $TM_n \oplus TM_n \oplus TM_n$ [104].

В работах [42, 92, 93] Александра Петровича и его ученицы Н.Н. Переломовой изучалась геометрия касательных расслоений 1-го и 2-го порядков комплексной проективной прямой $\mathbf{C}P^1$ в связи с геометрией трехмерного пространства Лобачевского $\mathcal{L}_3$. Если z^1 – локальная неоднородная проективная координата на $\mathbf{C}P^1$, а (z^1, z^2) – индуцированные локальные координаты в $T(\mathbf{C}P^1)$, то каждому ненулевому касательному вектору с координатами (z^1, z^2), $z^2 \neq 0$ можно поставить в соответствие орисферу в пространстве $\mathcal{L}_3$. Если E_3 – трехмерное вещественное евклидово пространство с прямоугольными координатами (ξ, η, θ), а в полупространстве $\theta > 0$ задана модель Пуанкаре пространства Лобачевского $\mathcal{L}_3$, то уравнение орисферы будет иметь вид:

$$|z - z^1|^2 + \theta^2 - \theta|z^1| = 0, \tag{17}$$

где $z = \xi + i\eta$.

Уравнение

$$z^2 = p(z^1)^2 + 2qz^1 + r, \tag{18}$$

где $p, q, r \in \mathbf{C}$ – константы, задает в $\mathcal{L}_3$ 2-параметрическое (роль вещественных параметров выполняют вещественная и мнимая части координаты z^1) семейство орисфер. При переходе от z^1 к новой локальной проективной координате $\hat{z}^1$ вид уравнения (18) не меняется, более того, сохраняется дискриминант $pr - q^2$. В случае $pr - q^2 \neq 0$ за счет выбора новой координаты $\hat{z}^1$ семейство (18) можно привести к виду

$$\hat{z}^2 = 2\hat{q}\hat{z}^1, \tag{19}$$

а при $pr - q^2 = 0$ – к виду
$$\hat{z}^2 = \hat{r}. \tag{20}$$
Огибающая семейства орисфер (20) является также орисферой, а огибающей семейства орисфер (19) является цилиндр радиуса $\ln\sqrt{|\hat{p}\hat{r} - \hat{q}^2|} = \ln|\hat{q}|$.

Преобразование проективной координаты $z^1 \to \hat{z}^1$ и индуцированное преобразование координаты касательного вектора $z^2 \to \hat{z}^2$ можно записать в виде одной формулы, вводя комплексно-дуальную координату $z = z^1 + \varepsilon z^2$, $\varepsilon^2 = 0$. Тогда координаты $\hat{z} = \hat{z}^1 + \varepsilon\hat{z}^2$ и z связаны следующим образом:
$$\hat{z} = \frac{az + b}{cz + d}, \tag{21}$$
где $a, b, c, d \in \mathbf{C}$ и $ad - bc \neq 0$.

Если рассмотреть более общие преобразования координат, считая в (21) коэффициенты a, b, c, d комплексно-дуальными числами, то в многообразии орисфер пространства $\mathcal{L}_3$ возникает 12-параметрическая группа преобразований. При этом семейство орисфер (18), как и выше, переходит в аналогичное семейство орисфер. Но в этом случае семейство, имеющее огибающую, являющуюся эквидистантным цилиндром, может перейти в семейство с огибающим эквидистантным цилиндром другого радиуса, в частности, в прямую или орисферу. Эти преобразования являются пространственными аналогами орициклических преобразований Лагерра в плоскости Лобачевского $\mathcal{L}_2$ [93].

Касательное расслоение $T^r M_n$ n-мерного многообразия представляет собой многообразие над алгеброй плюральных чисел $\mathbf{R}(\varepsilon^r)$, моделируемое $\mathbf{R}(\varepsilon^r)$-модулем $\mathbf{R}(\varepsilon^r)^n$ размерности n (над $\mathbf{R}(\varepsilon^r)$). В.В. Вишневским были построены и исследованы так называемые *полукасательные* расслоения над ступенчато расслоенными многообразиями, несущие интегрируемые структуры нерегулярных представлений алгебры плюральных чисел [4]. В частности, им и его учениками была построена теория лифтов проектируемых тензорных полей и линейных связностей с многообразия на его полукасательное расслоение (см. [4, 6, 7]).

В работе [88] А.П. Широковым было показано, что естественные структуры многообразий над алгебрами возникают на расслоениях бесконечно близких точек в смысле А. Вейля [126]. Расслоения Вейля играют важную роль в дифференциальной геометрии высшего порядка и теории естественных операций в дифференциальной геометрии [115], что, в частности, связано с тем, что к расслоениям Вейля приводят расслоенные функторы, сохраняющие произведение (см. [113, 115]). Геометрии расслоений Вейля посвящено много исследований (см., например, работы Л.-Н. Паттерсона [120], А. Моримото [119], И. Коларжа [114]; подробную библиографию можно найти в [8, 88, 115]).

Конечномерная коммутативная ассоциативная унитальная алгебра $\mathbf{A}$ называется локальной в смысле А. Вейля, если она обладает единственным максимальным идеалом $\mathfrak{m}$ и факторалгебра $\mathbf{A}/\mathfrak{m}$ изоморфна алгебре вещественных чисел $\mathbf{R}$. Пусть M – гладкое многообразие, а $C^\infty(M)$ – алгебра гладких функций на M. $\mathbf{A}$-точкой, близкой к $x \in M$, называется гомоморфизм $x' : C^\infty(M) \to \mathbf{A}$ такой, что вещественная часть элемента $x'(f) \in \mathbf{A}$ совпадает со значением $f(x)$. Множество $T^{\mathbf{A}}M$ всех $\mathbf{A}$-близких точек многообразия M является гладким многообразием, расслоенным над M, называемым *расслоением Вейля* [115, 126]. Образ $x'(f)$ гладкой функции определяется ее значениями в как угодно малой окрестности точки x, поэтому имеют смысл значения $X^i = x'(h^i)$ гомоморфизма x' на координатных функциях $h^i : U \ni x \mapsto x^i \in \mathbf{R}$. Отображения $H^i : \pi^{-1}(U) \ni x' \mapsto X^i \in \mathbf{A}$, где $\pi : T^{\mathbf{A}}M \ni x' \mapsto x \in M$ – естественная проекция, определяют $\mathbf{A}$-значные координатные функции на $\pi^{-1}(U)$, а преобразования $\mathbf{A}$-значных координат $X^{i'} = \Phi^{i'}(X^i)$ оказываются естественными продолжениями преобразований координат $x^{i'} = \varphi^{i'}(x^i)$ на многообразии M. Наличие структуры многообразия над алгеброй $\mathbf{A}$ на расслоении Вейля $T^{\mathbf{A}}M$ позволило построить теорию лифтов геометрических структур с базового многообразия M на расслоение Вейля $T^{\mathbf{A}}M$ на основе использования естественных продолжений вещественных дифференцируемых функций в алгебру $\mathbf{A}$. В частности, был получен ответ на вопрос [108], почему возникают проблемы с построением лифтов тензорных полей определенных типов на расслоение $T^{\mathbf{A}}M$: построение полного лифта тензорного поля как однозначной реализации $\mathbf{A}$-продолжения этого поля возможно только в случае фробениусовой алгебры $\mathbf{A}$.

В дальнейшем расслоения Вейля в Казанском университете изучались В.В. Шурыгиным, Л.Б. Смоляковой, Г.Н. Бушуевой [101], [51, 103, 109]. В работах [101], [103] исследовался вопрос о критериях эквивалентности многообразия над локальной алгеброй $\mathbf{A}$ некоторому расслоению Вейля, в работе [109] изучалась геометрия расслоений Вейля, зависящих от параметров. Работа [51] посвящена построению синектических лифтов в смысле А.П. Широкова геометрических объектов на обобщенные расслоения Вейля слоеных многообразий.

4. Другие направления исследований (геометрия Лагерра, бесконечномерные многообразия, проектирование связностей в расслоениях, геометрия Лобачевского)

Предложив своему дипломнику В.Е. Фомину заняться дифференциальной геометрией бесконечномерных многообразий, А.П. Широков инициировал появление нового направления научных исследований на кафедре геометрии. Примерами бесконечномерных многообразий являются поверхности в топологических векторных пространствах (пространствах Банаха, Гильберта и Фреше), грассмановы многообразия замкнутых векторных подпространств банахова пространства, допускающих топологические дополнения, а также многообразие $C(X, Y)$ гладких отображений компактного многообразия X в многообразие Y и различные подмногообразия этого многообразия. Интересно, что функтор $F_X : Y \to C(X, Y)$ позволяет перенести различные структуры, заданные на Y (линейная связность, риманова метрика и т. п.), на многообразие $C(X, Y)$. Многие свойства конечномерных многообразий сохраняются и в случае бесконечномерных многообразий. С другой стороны, бесконечномерные многообразия имеют и существенные отличия от конечномерных. Так, например, пара римановых метрик Леви-Чивита на одном и том же конечномерном дифференцируемом многообразии M определяет на этом многообразии линейные связности, имеющие общие геодезические. Но для бесконечномерного многообразия M это может не иметь места [59].

В.Е. Фоминым было определено понятие банахова многообразия над банаховой алгеброй, в качестве одного из примеров рассмотрено банахово многообразие $\mathcal{M}$ поточечно конформных римановых структур на конечномерном компактном многообразии M_n класса C^r. Многообразие $\mathcal{M}$ будет голоморфным над банаховой алгеброй $\mathcal{F}(M_n)$ функций класса C^r на M_n. На $\mathcal{M}$ определяется $\mathcal{F}$-голоморфная риманова метрика, найдены геодезические линии этого риманова многообразия [62]. Ученик В.Е. Фомина К.Б. Игудесман в своей кандидатской диссертации [23] изучал многообразия типа Фреше над алгебрами Фреше и, в частности, предыдущий пример многообразия поточечно конформных римановых структур, где все объекты имеют класс дифференцируемости C^∞. На таком многообразии, как и в конечномерной ситуации, возникают естественные слоения, порождаемые данной структурой. Для доказательства простоты указанных слоений пришлось построить основы теории многообразий типа Фреше над алгебрами и теории слоений на таких многообразиях [24].

Аспирант А.П. Широкова Е.Н. Сосов в своей кандидатской диссертации занимался вопросами релятивной линейчатой геометрии [52], используя установленную Александром Петровичем связь между линейчатой геометрией аффинных и неевклидовых пространств и геометрией касательных расслоений гиперповерхностей этих пространств [85, 86, 89]. В дальнейшем Е.Н. Сосов занялся изучением геометрии метрических пространств [53] и, в частности, бесконечномерных пространств Лобачевского.

Другому своему ученику К.М. Егиазаряну Александр Петрович предложил заняться исследованием вопросов проектирования линейных связностей, заданных на тотальном пространстве дифференцируемого расслоения, на базу этого расслоения. Ранее в частном случае слоения с одномерными слоями проектирование связностей было рассмотрено в работе К. Яно и Ш. Ишихары [127]. Метод проектирования, разработанный К.М. Егиазаряном в [17, 20] для главных расслоений, заключается в следующем.

Пусть $\lambda = (\mathcal{E}, \pi, \mathcal{B}, G)$ – главное расслоение с тотальным пространством $\mathcal{E}$, базой $\mathcal{B}$, проекцией $\pi : \mathcal{E} \to \mathcal{B}$ и структурной группой Ли G. Если γ – инфинитезимальная связность на λ, ∇ – линейная связность на $\mathcal{E}$, инвариантная относительно действия G, то на $\mathcal{B}$ возникает линейная связность $\overset{*}{\nabla}$ (Γ*-проекция* или *проекция связности* ∇ *по Егиазаряну*): для любых векторных полей X, Y на $\mathcal{B}$ и любой точки $x \in \mathcal{B}$

$$(\overset{*}{\nabla}_X Y)(x) = T_z\pi[(\nabla_{X'}Y')(z)],$$

где X', Y' – горизонтальные лифты векторных полей X, Y соответственно, а $z \in \in \pi^{-1}(x)$ – произвольная точка слоя.

Обратно, по всякой линейной связности $\overset{*}{\nabla}$ на базе $\mathcal{B}$, $\dim \mathcal{B} = n$, единственным образом определяется линейная связность ∇ (*канонический лифт связности* $\overset{*}{\nabla}$) на тотальном пространстве $\mathcal{E}$ главного расслоения λ с инфинитезимальной связностью γ, инвариантная относительно G, $\dim G = m$, проекцией которой является $\overset{*}{\nabla}$. А именно, пусть $\{e_i\}$, $i = 1, \ldots, n$, – поле реперов на открытом множестве $U \subset \mathcal{B}$ и

$$\overset{*}{\nabla}_{e_i} e_j = \overset{*}{\Gamma}{}^k_{ij} e_k, \quad i, j, k = 1, \ldots, n.$$

Пусть, далее, E_i, $i = 1, \ldots, n$, – горизонтальные лифты векторных полей e_i на $\pi^{-1}(U) \subset \mathcal{E}$, а $\{E_\alpha\}$, $\alpha = n+1, \ldots, n+m$, – набор фундаментальных векторных полей на $\mathcal{E}$, соответствующий некоторому базису алгебры Ли структурной группы G. Тогда линейная связность ∇ на $\pi^{-1}(U)$ определяется равенствами:

$$\nabla_{E_\alpha} E_\beta = \nabla_{E_\alpha} E_j = \nabla_{E_i} E_\beta = 0, \ \ \nabla_{E_i} E_j = \Gamma^k_{ij} E_k, \ i, j = 1, \ldots, n, \ \ \alpha, \beta = n+1, \ldots, n+m,$$

где

$$\Gamma^k_{ij}(z) = \overset{*}{\Gamma}{}^k_{ij}(\pi(z)), \quad z \in \pi^{-1}(U).$$

Это определение не зависит ни от выбора локального поля реперов $\{e_i\}$, ни от выбора фундаментальных векторных полей E_α, поэтому связность ∇ определяется на $\mathcal{E}$ глобально.

С помощью метода проектирования К.М. Егиазаряном был получен целый класс линейных связностей на грассмановых многообразиях [21], включающий в себя локально проективно плоские связности. Метод проектирования линейных связностей был распространен В.Е. Фоминым и Р.Р. Юльметовым на бесконечномерные банаховы многообразия [60] и многообразия Фреше [61]. А.П. Широковым метод проектирования был применен при введении линейной связности на p-параметрической конгруэнции $\mathcal{P}$ n-мерных подпространств $n(p+1)$-мерного вещественного векторного пространства $L_{n(p+1)}$ [19]. При этом пространство $L_{n(p+1)}$ рассматривалось как вещественная модель $(p+1)$-мерного модуля $L_{p+1}(\mathbf{A}_n)$ над ассоциативной коммутативной унитальной алгеброй $\mathbf{A}_n$, а конгруэнция $\mathcal{P}$ состояла из n-мерных подпространств, соответствующих 1-мерным подмодулям модуля $L_{p+1}(\mathbf{A}_n)$. В этой связи следует отметить также работы К.М. Егиазаряна [16, 18], посвященные геометрии многообразий над алгебрами и касательных расслоений.

В работе [26] аспирантки Александра Петровича Л.М. Кресс были построены линейные связности $\overset{*}{\nabla}$ на трехмерном проективном пространстве $\mathbf{R}P^3$ методом Г-проектирования линейной связности ∇, заданной на четырехмерном векторном пространстве L^4, на котором действует четырехмерная группа Ли G линейных операторов, сохраняющих пучок билинейных невырожденных форм на L^4, причем ∇ инвариантна относительно действия G. Рассмотрены примеры таких групп Ли G, найдены коэффициенты связностей ∇ и $\overset{*}{\nabla}$.

Понятие Г-проектируемой связности на тотальном пространстве главного расслоения с инфинитезимальной связностью является обобщением понятия проектируемой связности. Б.Н. Шапуковым [64], изучавшим проектируемые связности, в числе других результатов, были получены необходимые и достаточные условия, при выполнении которых проектируемая связность будет Г-проектируемой.

Александр Петрович и его ученики получили много интересных результатов, связанных с переносом и обобщением геометрии Лагерра евклидовой плоскости на пространство Лобачевского.

Пусть $\mathcal{M}$ – множество всех ориентированных прямых в евклидовой плоскости E_2. Это множество можно биективно отобразить на комплексную проективную прямую $\mathbf{C}P^1$, на которой действует шестимерная группа Ли G_6 комплексных проективных преобразований. Структура гладкого многообразия на $\mathbf{C}P^1$ и действие группы G_6 переносятся на $\mathcal{M}$. Эта группа G_6, действуюшая на $\mathcal{M}$, называется *группой Лагерра*, а свойства объектов в $\mathcal{M}$, сохраняющиеся при действии G_6, составляют содержание *геометрии Лагерра евклидовой плоскости* E_2 [106]. Александр Петрович построил аналог этой геометрии, взяв вместо E_2 плоскость Лобачевского $\mathcal{L}_2$, а в качестве $\mathcal{M}$ – множество всех ориентированных орициклов (ортогональных траекторий пучков параллельных прямых) в $\mathcal{L}_2$. Так как $\mathcal{M}$ биективно дуальной проективной прямой $\mathbf{R}(\varepsilon)P^1$ ($\mathbf{R}(\varepsilon)$ – алгебра дуальных чисел), то на $\mathcal{M}$ с $\mathbf{R}(\varepsilon)P^1$ переносится структура гладкого многообразия и действие группы Ли G_6 дуальных проективных преобразований, которую называют *группой Лагерра плоскости Лобачевского.* Группа G_6 изоморфна группе параллельных переносов биаксиального пространства параболического типа и локально изоморфна группе движений трехмерного псевдоевклидова пространства [56]. В работах А.П. Широкова и Н.В. Талантовой [58, 93] и в кандидатских диссертациях и статьях учеников Александра Петровича М.А. Микенберга [34] и К.П. Шустовой [105] были получены многочисленные результаты, относящиеся к геометрии Лагерра плоскости и n-мерного пространства Лобачевского.

В работе [94] Александр Петрович установил любопытные связи между четырехмерным пространством Лобачевского и алгеброй кватернионов.

В вещественном пятимерном проективном пространстве $\mathbf{R}P^5$ рассматривается гиперквадрика Σ с уравнением

$$(x^1)^2+(x^2)^2+(x^3)^2+(x^4)^2+(x^5)^2-(x^1)^2=0$$

относительно проективного репера $\{E_1, \ldots, E_6, E\}$. На Σ задается автополярная нормализация с нормалями 1-го рода, образующими связку прямых с центром в E_4. С помощью стереографической проекции из точки $N(0:0:0:0:1:1)$ на гиперплоскость $x^6 = 0$ на Σ вводятся локальные координаты (u^1, u^2, u^3, u^4). При этом проективные координаты любой точки из $\Sigma \backslash \{N\}$ следующим образом выражаются через криволинейные:

$$2u^1 : 2u^2 : 2u^3 : 2u^4 : \left(1 - \sum_{i=1}^{4} (u^i)^2\right) : \left(1 + \sum_{i=1}^{4} (u^i)^2\right).$$

Внутренняя геометрия нормализованной гиперквадрики Σ совпадает с внутренней геометрией автополярно нормализованной гиперплоскости H_4, заданной уравнением $x^4 = 0$, поляритетом которой является $\Sigma \cap H_4$, а нормалями 1-го рода являются прямые связки с центром в E_4. При этом на H_4 возникает следующая параметризация:

$$2u^1 : 2u^2 : 2u^3 : 0 : \left(1 - \sum_{i=1}^{4} (u^i)^2\right) : \left(1 + \sum_{i=1}^{4} (u^i)^2\right).$$

Из деривационных уравнений полярно нормализованной гиперплоскости H_4 находятся координаты метрического тензора g_{ij} пространства H_4:

$$g_{ij} = \frac{1}{(u^4)^2} \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4,$$

и коэффициенты соответствующей римановой связности ∇.

Пусть теперь $\mathbf{H}$ – алгебра кватернионов с каноническим базисом $\{i, j, k, 1\}$. Точке $u \in H_4$ с криволинейными координатами (u^1, u^2, u^3, u^4) поставим в соответствие кватернион $U = u^1 i + u^2 j + u^3 k + u^4$. В силу линейности этого соответствия вектору $v \in T_u H_4 \equiv H_4$ с координатами (v^1, v^2, v^3, v^4) будет соответствовать кватернион $V = v^1 i + v^2 j + v^3 k + v^4 \in T_U \mathbf{H} \equiv \mathbf{H}$. Тогда, если $v = v(u) = (v^i(u^1, \ldots, u^4))$, $w = w(u) = (w^i(u^1, \ldots, u^4))$, $i, j = 1, 2, 3, 4$, – векторные поля на H_4, а $V = V(U)$, $W = W(U)$ – соответствующие поля кватернионов на $\mathbf{H}$, то векторному полю $\nabla_w v$ будет соответствовать поле кватернионов

$$(\nabla_W V)(U) = DV_U(W(U)) - \frac{1}{2\mathrm{Re}\, U}(V(U) \cdot W(U) + W(U) \cdot V(U)),$$

где DV_U – дифференциал в точке U отображения $V : U \in \mathbf{H} \to V(U) \in \mathbf{H}$, $\mathrm{Re}\, U = u^4$ – вещественная часть кватерниона U.

Симметрии в гиперплоскостях и инверсии в гиперсферах в пространстве H_4 представляются как инволютивные преобразования кватернионной переменной

$$U \longrightarrow \tilde{U} = \frac{-A\bar{U}A + 2bA}{\|A\|^2},$$

$$U \longrightarrow \tilde{U} = B + (p + \|B\|^2) \frac{U - B}{\|U - B\|^2},$$

где $b, p \in \mathbf{R}$, $A, B \in \mathbf{H}$ – вещественные и кватернионные параметры, $\bar{U} = -u^1 i - u^2 j - u^3 k + u^4$ – сопряженный к U кватернион, $\|A\|^2 = A \cdot \bar{A}$ – квадрат нормы кватерниона A.

Конформные преобразования и движения пространства H_4 можно также представлять как преобразования пространства $\mathbf{H}$. Особенно просто это проявляется в формулах для соответствующих инфинитезимальных преобразований – векторных полей на $\mathbf{H}$.

В круг научных интересов Александра Петровича входили и вопросы механики неевклидовых пространств [74], а один из его первых аспирантов М.С. Крюков занимался изучением движения тела по инерции в пространстве Лобачевского [29], [30].

Summary

V.E. Fomin, V.V. Shurygin. An Essay on Scientific and Pedagogical Biography of A.P. Shirokov.

The article contains a brief biography of professor A.P. Shirokov (1926–1998), an eminent Kazan geometrician, Honoured Science Worker of the Russian Federation. It reflects the contribution that has been made by A.P. Shirokov and his disciples to the geometry of generalized biaxial spaces, theory of manifolds over algebras, geometry of tangent bundles and Weil bundles, Laguerre geometry, geometry of infinite dimensional manifolds, theory of connections in fiber bundles, geometry of non-Euclidean spaces and other areas of research in modern geometry.

Key words: Banach manifold, connection theory, generalized biaxial space, Laguerre geometry, Lobachevskii space, infinite-dimensional manifold, manifold over algebra, projective space over algebra, tangent bundle, Weil bundle.

Литература

1. *Бояршинова А.В.* О пространстве существенных инфинитезимальных деформаций // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 8. – С. 3–12.
2. Ведущие научные школы России. Вып. 1. – М.: «Янус–К», 1998. – 624 с.
3. *Вишневский В.В.* Пространства над алгебрами, определяемые аффинорами: Дис. . . . д-ра физ.-матем. наук. – Казань, 1972. – 345 с.
4. *Вишневский В.В.* Многообразия над плюральными числами и полукасательные структуры // Проблемы геометрии (Итоги науки и техники ВИНИТИ). – М., 1988. – Т. 20. – С. 35–75.
5. *Вишневский В.В.* Интегрируемые аффинорные структуры и их плюральные интерпретации // Современная математика и ее приложения (Итоги науки и техники ВИНИТИ). – Т. 73. – М., 2002. – С. 6–64.
6. *Вишневский В.В.* Лифты дифференциально-геометрических структур в полукасательные расслоения высших порядков // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 5. – С. 16–24.
7. *Вишневский В.В., Пантелеева Т.А.* Голоморфные продолжения объектов в полукасательное расслоение второго порядка // Изв. вузов. Математика. – 1985. – № 9. – С. 3–10.
8. *Вишневский В.В., Широков А.П., Шурыгин В.В.* Пространства над алгебрами. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1984. – 264 с.
9. *Гайсин Т.И.* Комплекс Спенсера для многообразий над алгебрами // Труды геом. семинара. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1997. – Вып. 23. – С. 33–41.
10. *Григорьева И.С.* Мера множества гиперплоскостей в E^n // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Межвузовский сб. – Калининград. – 1982. – Вып. 13. – С. 27–29.
11. *Григорьева И.С.* Обобщенно-голоморфные функции над алгебрами и их геометрические приложения: Дис. . . . канд. физ.-матем. наук. – Казань, 1986. – 98 с.

12. *Евсеев В.И.* Об однородных пространствах, порожденных прямыми пространств $\mathbf{R}_n$ и ${}^l\mathbf{R}_n$ // Учен. зап. Казан. гос. пед. ин-та. – 1971. – Вып. 90. – С. 207–226.

13. *Евсеев В.И.* О геометрии пространств, порожденных прямыми в ${}^{l+1}\mathbf{R}_{n+1}$ // Учен. зап. Казан. гос. пед. ин-та. – 1971. – Вып. 90. – С. 241–253.

14. *Евсеев В.И.* О геометрии многообразий гиперпрямых в ${}^l\mathbf{R}_n$ // Труды геом. семинара. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1974. – Вып. 7. – С. 36–42.

15. *Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях // Проблемы геометрии (Итоги науки и техники ВИНИТИ). – М., 1979. – Т. 9. – 247 с.

16. *Егиазарян К.М.* Об одном классе пространств над алгебрами // Изв. вузов. Математика. – 1978. – № 7. – С. 97–101.

17. *Егиазарян К.М.* О проектировании инвариантных связностей на главных расслоенных пространствах // Изв. вузов. Математика. – 1978. – № 7. – С. 97–101.

18. *Егиазарян К.М.* О структуре аффинных связностей и тензорных полей на касательном расслоении высшего порядка // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 246, № 4. – С. 797–801.

19. *Егиазарян К.М., Широков А.П.* Проектирование связностей в расслоениях и его приложения к геометрии пространств над алгебрами // Дифференциальная геометрия. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1979. – Вып. 4. – С. 132–140.

20. *Егиазарян К.М.* Спроектированные инвариантные аффинные связности // Труды геом. семинара. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980. – Вып. 12. – С. 27–37.

21. *Егиазарян К.М.* Аффинные связности на грассмановом многообразии // Изв. вузов. Математика. – 1980. – № 5. – С. 76–78.

22. *Зудина Т.В., Степанов С.Е., Шандра И.Г.* Эквиаффинные отображения // Изв. вузов. Математика. – 2007. – № 8. – С. 27–37.

23. *Игудесман К.Б.* Дифференциальная геометрия бесконечномерных многообразий над алгебрами: Дис. ... канд. физ.-матем. наук. – Казань, 2000. – 66 с.

24. *Игудесман К.Б.* Слоение на многообразии поточечно конформных структур // Новые проблемы теории поля. Тр. междунар. конф. «Волга – 10'98» по проблемам современной теоретической и математической физики. – Казань, 1998. – С. 128–137.

25. *Капустина Т.В.* Голоморфно-конформное соответствие в касательных расслоениях риманова пространства // Труды геом. семинара. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1981. – Вып. 13. – С. 39–48.

26. *Кресс Л.М.* Об аффинных связностях, допускающих четырехчленные группы инфинитезимальных преобразований // Труды геом. семинара. – Казань: Казан. гос. ун-т, 1989. – Вып. 19. – С. 60–70.

27. *Кручкович Г.И.* Условия интегрируемости регулярной гиперкомплексной структуры // Укр. геом. сборн. – 1970. – Вып. 9. – С. 67–75.

28. *Кручкович Г.И.* Гиперкомплексные структуры на многообразиях. I. // Труды семинара по вект. и тенз. анализу. – М.: Моск. гос. ун-т, 1972. – Вып. 16. – С. 174–201.

29. *Крюков М.С.* Движение твердого тела по инерции в плоскости Лобачевского // Учен. зап. Казан. ун-та. – 1963. – Т. 123, кн. 1. – С. 103–127.

30. *Крюков М.С.* О движении стержня в пространстве Лобачевского // Изв. вузов. Математика. – 1964. – № 4. – С. 86–98.

31. *Кузнецова Е.М.* О геометрии пространства m-пар голоморфных подпространств n-мерного проективного пространства P_n над алгеброй A // Труды геом. семинара. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1986. – Вып. 17. – С. 29–37.

32. *Малахальцев М.А.* (X, G)-слоения // Изв. вузов. Математика. – 1996. – № 7. – С. 55–65.

33. *Малахальцев М.А.* Классы Годбийона и Вея одномерного многообразия над локальной алгеброй // Труды геом. семинара. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1997. – Вып. 23. – С. 29–37.

34. *Микенберг М.А.* Геометрия Лагерра и ее аналог: Дис. ... канд. физ.-матем. наук. – Казань, 1986. – 159 с.

35. *Микенберг М.А.* Некоторые топологические свойства многообразий над локальной алгеброй, допускающих голоморфные вложения // Изв. вузов. Математика. – 2002. – № 11. – С. 52–54.

36. *Мищенко А.С.* Векторные расслоения и их применения. – М.: Наука, 1984. – 208 с.

37. *Назарова Е.В.* К геометрии касательных расслоений групп Ли // Труды геом. семинара. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1979. – Вып. 11. – С. 70–78.

38. *Норден А.П.* Внутренняя геометрия поверхностей пространства биаксиальной группы // Докл. АН СССР. – 1947. – Т. 58. – С. 1597–1600.

39. *Норден А.П.* Пространство линейной конгруэнции // Матем. сб. – 1949. – Т. 24, № 66. – С. 429–455.

40. *Норден А.П.* Пространства аффинной связности. – М.: Наука, 1976. – 432 с.

41. *Нусь С.Я.* Об одном свойстве синектических метрик в касательном расслоении евклидова пространства // Труды геом. семинара. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1986. – Вып. 17. – С. 37–43.

42. *Переломова Н.Н., Широков А.П.* Касательное расслоение второго порядка проективной прямой и геометрия Лобачевского // Труды геом. семинара. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1990. – Вып. 20. – С. 73–85.

43. *Петропавловская С.Ю.* Конформная интерпретация Пуанкаре одной вырожденной геометрии в плоскости дуального переменного и теория нормализации Нордена // Труды геом. семинара. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1997. – Вып. 23. – С. 85–98.

44. *Пирс Р.* Ассоциативные алгебры. – М.: Мир, 1986. – 544 с.

45. Подборка воспоминаний о А.П. Широкове // Журнал «Казань». – 1999. – № 12. – С. 63–76.

46. Подборка воспоминаний о А.П. Широкове // Журнал «Казань». – 2007. – № 4. – С. 55–63.

47. *Подковырин А.С.* Гиперповерхности унитарного пространства. I. // Изв. вузов. Математика. – 1967. – № 8. – С. 41–52.

48. *Подковырин А.С., Салимов А.А., Шурыгин В.В.* Очерк научной и педагогической деятельности В.В. Вишневского (к 75-летию со дня рож.) // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2005. – Т. 147, кн. 1. – С. 26–36.

49. *Подольский В.Г.* Инфинитезимальные преобразования в касательном расслоении с метрикой полного лифта и метрикой Сасаки // Изв. вузов. Математика. – 1976. – № 9. – С. 128–132.

50. *Симон У.* К аффинной теории гиперповерхностей: калибровочно инвариантные структуры // Изв. вузов. Математика. – 2004. – № 11. – С. 53–81.

51. *Смолякова Л.Б., Шурыгин В.В.* Лифты геометрических объектов на расслоение Вейля $T^{\mu}M$ слоеного многообразия, определяемое эпиморфизмом μ алгебр Вейля // Изв. вузов. Математика. – 2007. – № 10. – С. 76–89.

52. *Сосов Е.Н.* Замечание о релятивной линейчатой геометрии // Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Межвузовский сб. – Калининград, 1982. – Вып. 13. – С. 91–94.

53. *Сосов Е.Н.* Наилучшее приближение в метрике Хаусдорфа выпуклого компакта шаром // Матем. заметки. – 2004. – Т. 76, Вып. 2. – С. 226–236.

54. *Султанов А.Я.* Продолжения тензорных полей и связностей в расслоения Вейля // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 9. – С. 81–90.

55. *Талантова Н.В.* Биаксиальное пространство параболического типа // Изв. вузов. Математика. – 1959. – № 3. – С. 214–228.

56. *Талантова Н.В.* Классификация подгрупп движений биаксиального пространства параболического типа // Учен. зап. Казан. ун-та. – 1968. – Т. 128, кн. 3. – С. 99–114.

57. *Талантова Н.В., Широков А.П.* Замечания об одной метрике в касательном расслоении // Изв. вузов. Математика. – 1975. – № 6. – С. 143–146.

58. *Талантова Н.В., Широков А.П.* Об одном подходе к группе преобразований Лагерра // Пространства над алгебрами и некоторые вопросы теории сетей. – Уфа, 1985. – С. 3–11.

59. *Фомин В.Е.* Пара бесконечномерных пространств Леви – Чивита может не иметь общих геодезических // Труды геом. семинара. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1986. – Вып. 17. – С. 79–83.

60. *Фомин В.Е.* Проектирование линейных связностей в расслоениях банахова типа // Труды геом. семинара. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1988. – Вып. 18. – С. 95–117.

61. *Фомин В.Е., Юльметов Р.Р.* Линейные связности и геодезические кривые на многообразиях Фреше // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 7. – С. 78–90.

62. *Фомин В.Е.* Элементы дифференциальной геометрии над банаховыми алгебрами // Труды геом. семинара. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1997. – Вып. 23. – С. 149–164.

63. *Шадыев Х.* Проективные преобразования синектической связности в касательном расслоении // Труды геом. семинара. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1988. – Вып. 18. – С. 126–139.

64. *Шапуков Б.Н.* Проектируемость тензорных полей и связностей в расслоениях // Труды геом. семинара. – Казань: Казан. гос. ун-т, 1986. – Вып. 17. – С. 84–100.

65. *Шапуков Б.Н.* Александр Петрович Широков, 1926–1998. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2003. – 24 с.

66. *Шапуков Б.Н., Кайгородов В.Р.* Широков Александр Петрович (К семидесятилетию со дня рождения) // Труды геом. семинара. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1997. – Вып. 23. – С. 231–244.

67. *Шапуков Б.Н., Фомин В.Е.* Александр Петрович Широков // Механико-математический факультет Казанского университета. Очерки истории, 1960–2000. – Казань: Унипресс, 2000. – С. 138–140.

68. *Широков А.П.* Геометрия обобщенных биаксиальных пространств // Учен. зап. Казан. ун-та. – 1954. – Т. 114, кн. 2. – С. 123–166.

69. *Широков А.П.* Об одном свойстве ковариантно постоянных аффиноров // Докл. АН СССР. – 1955. – Т. 102, Вып. 3. – С. 461–464.

70. *Широков А.П.* Проективная интерпретация конформно-евклидовых симметрических пространств // Учен. зап. Казан. ун-та. – 1956. – Т. 116, кн. 1. – С. 15–19.

71. *Широков А.П.* Некоторые аналоги вещественных реализаций унитарных пространств // Учен. зап. Казан. ун-та. – 1957. – Т. 117, кн. 9. – С. 25–29.

72. *Широков А.П.* Об одном классе пространств над алгебрами // Изв. вузов. Математика. – 1961. – № 1. – С. 163–170.

73. *Широков А.П.* О некоторых вещественных реализациях пространств над алгебрами // Изв. вузов. Математика. – 1961. – № 5. – С. 117–127.

74. *Широков А.П.* Винтовая регулярная прецессия в пространстве Лобачевского // Учен. зап. Казан. ун-та. – 1963. – Т. 123, кн. 1. – С 196–207.

75. *Широков А.П.* Пространства над ассоциативными унитальными алгебрами // Учен. зап. Казан. ун-та. – 1963. – Т. 123, кн. 1. – С. 222–247.

76. *Широков А.П.* О вещественных реализациях проективных пространств над алгебрами // Учен. зап. Казан. ун-та. – 1963. – Т. 123, кн. 1. – С. 248–254.

77. *Широков А.П.* О симметрических пространствах, определяемых алгебрами // Изв. вузов. Математика. – 1963. – № 6. – С. 159–171.

78. *Широков А.П.* Пространства, определяемые алгебрами: Дис. ... д-ра физ.-матем. наук. – Казань, 1966. – 258 с.

79. *Широков А.П.* Об одном типе G-структур, определяемых алгебрами // Труды геом. семинара. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1966. – Т. 1. – С. 425–456.

80. *Широков А.П.* К вопросу о чистых тензорах и инвариантных подпространствах в многообразиях с почти алгебраической структурой // Труды семинара каф. геометрии. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1966. – Вып. 2. – С. 81–89.

81. *Широков А.П.* Структуры на дифференцируемых многообразиях // Алгебра. Топология. Геометрия. 1967. (Итоги науки и техники. ВИНИТИ АН СССР). – М., 1969. – С. 127–188.

82. *Широков А.П.* Структуры на дифференцируемых многообразиях. // Алгебра. Топология. Геометрия. Т. 11. (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР). – М., 1974. – С. 153–207.

83. *Широков А.П.* Замечание о структурах в касательных расслоениях // Труды геом. семинара. – М.: ВИНИТИ АН СССР, 1974. – Т. 5. – С. 311–318.

84. *Широков А.П.* Метод нормализации Нордена и вещественные модели проективных пространств над алгебрами // Труды геом. семинара. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1975. – Вып. 8. – С. 145–152.

85. *Широков А.П.* К вопросу о релятивной линейчатой геометрии // Дифференциальная геометрия. – Саратов, 1977. – Вып. 3. – С. 69–81.

86. *Широков А.П.* Об одной модели для линейчатой геометрии пространства Лобачевского // Труды геом. семинара. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980. – Вып. 12. – С. 111–117.

87. *Широков А.П.* О касательных расслоениях и линейчатой геометрии неевклидовых пространств // Труды геом. семинара. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1981. – Вып. 13. – С. 101–108.

88. *Широков А.П.* Геометрия касательных расслоений и пространства над алгебрами // Проблемы геометрии. (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР). – М., 1981. – Т. 12. – С. 61–95.

89. *Широков А.П.* О специальных метриках и связностях в касательных расслоениях гиперповерхностей аффинных и неевклидовых пространств // Труды геом. семинара. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1982. – Вып. 14. – С. 108–114.

90. *Широков А.П.* Пространства аффинной связности (некоторые аспекты метода нормализации А.П. Нордена) // Проблемы геометрии. (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР). – М., 1985. – Т. 17. – С. 131–151.

91. *Широков А.П., Шурыгин В.В.* Структуры в касательных расслоениях, определяемые локальными алгебрами // Всесоюз. геометр. шк. «Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях и их приложения». – Черновцы, 1991. – С. 156–164. – Деп. в ВИНИТИ 05.02.91, № 562-В91.

92. *Широков А.П.* К геометрии орисфер пространства Лобачевского // Труды геом. семинара. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1991. – Вып. 21. – С. 118–124.

93. *Широков А.П.* Аналоги преобразований Лагерра в плоскости и в пространстве Лобачевского // Сб. «Памяти Лобачевского посвящается». – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1992. – Т. 2. – С. 107–118.

94. *Широков А.П.* Пространство H_4 и алгебра кватернионов // Труды геом. семинара. – Казань: Казан. гос. ун-т, 1997. – Вып. 23. – С. 187–198.

95. *Широков А.П.* Пространства над алгебрами и их применения // Современная математика и ее приложения (Итоги науки и техники ВИНИТИ). – М., 2002. – Т. 73. – С. 135–161.

96. *Широков П.А., Широков А.П.* Аффинная дифференциальная геометрия. – М.: ГИФМЛ, 1959. – 320 с.

97. *Широков П.А.* Тензорное исчисление. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1961. – 448 с.

98. *Широков П.А.* Избранные работы по геометрии. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1966. – 432 с.

99. *Шурыгин В.В.* Обобщение одной теоремы // Труды геом. семинара. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1979. – Вып. 11. – С. 120–124.

100. *Шурыгин В.В.* Проектируемые геометрические объекты на расслоении А-струй // Труды геом. семинара. – Казань: Казан. гос. ун-т, 1990. – Вып. 20. – С. 120–126.

101. *Шурыгин В.В.* Многообразия над алгебрами и их применение в геометрии расслоений струй // Успехи матем. наук. – 1993. – Т. 48, Вып. 2. – С. 75–106.

102. *Шурыгин В.В.* Гладкие многообразия над локальными алгебрами и расслоения Вейля // Современная математика и ее приложения (Итоги науки и техники ВИНИТИ). – М., 2002, – Т. 73. – С. 162–235.

103. *Шурыгин В.В.* О строении полных многообразий над алгебрами Вейля // Изв. вузов. Математика. – 2003. – № 11. – С. 88–97.

104. *Шустова Е.П.* О взаимосвязи геометрий касательного расслоения третьего порядка и суммы Уитни // Труды геом. семинара. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1997. – Вып. 23. – С. 211–221.

105. *Шустова К.П.* О преобразованиях Лагерра в трехмерном псевдоевклидовом пространстве и их аналогах в идеальной области пространства Лобачевского // Труды геом. семинара. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2003. – Вып. 24. – С. 187–194.

106. *Яглом И.М.* Комплексные числа и их применение в геометрии // Матем. просвещение. – 1961. – № 6. – С. 61–106.

107. *Blaschke W.* Vorlesungen über Differentialgeometrie II. Affine Differentialgeometrie. – Berlin: Springer, 1923. – 272 S.

108. *Bowman R.H.* Concerning a problem of Yano and Kobayashi // Tensor. – 1972. – V. 25. – P. 105–112.

109. *Bushueva G.N., Shurygin V.V.* On the higher order geometry of Weil bundles over smooth manifolds and over parameter-dependent manifolds // Lobachevskii J. of Math. – 2005. – V. 18. – P. 53–105.

110. *Ehresmann C.* Les prolongements d'une variété différentiable. I. Calcul des jets, prolongement principal // C. R. Acad. Sci. – 1951. – T. 233, F. 11. – P. 598–600.

111. *Ehresmann C.* Les prolongements d'une variété différentiable. II. L'espace des jets d'ordre r de V_n dans V_m // C. R. Acad. Sci. – 1951. – T. 233, F. 15. – P. 777–779.

112. *Houh Ch.-S., Ishihara Sh.* Tensor fields and connections on a cross-section in the tangent bundle of order r // Kodai Math Semin. Repts. – 1972. – V. 24, No 2. – P. 234–250.

113. *Kainz G., Michor P.* Natural transformations in differential geometry // Czech. Math. J. – 1987. – V. 37. – P. 584–607.

114. *Kolář I.* Covariant approach to natural transformations of Weil functors // Comment. Math. Univ. Carolinae. – 1986. – V. 27. – P. 723–729.

115. *Kolář I., Michor P.W., Slovák J.* Natural Operations in Differential Geometry. – Springer, 1993. – 434 p.

116. *Li A.M., Simon U., Zhao G.* Global affine differential geometry of hypersurfaces. – Berlin, New York: De Gruyter, 1993. – 328 p.

117. *Morimoto A.* Prolongation of G-structures to tangent bundles of higher order // Nagoya Math. J. – 1970. – V. 38. – P. 153–179.

118. *Morimoto A.* Prolongation of connections to tangent bundles of higher order // Nagoya Math. J. – 1970. – V. 40. – P. 99–120.

119. *Morimoto A.* Prolongation of connections to bundles of infinitely near points // J. Different. Geom. – 1976. – V. 11, No 4. – P. 479–498.

120. *Patterson L.-N.* Connexions and prolongations // Canad. J. Math. – 1975. – V. 27, No 4. – P. 766–791.

121. *Scheffers G.* Verallgemeinerung der Grundlagen der gewöhnlichen komplexen Funktionen // Berichte Sächs. Akad. Wiss. – 1893. – Bd. 45. – S. 828–842.

122. *Schirokov P.A., Schirokov A.P.* Affine Differentialgeometrie. – Leipzig: Teubner, 1962.

123. *Simon U., Schwenk-Schellschmidt A., Viesel H.* Introduction to the affine differential geometry of hypersurfaces. Lecture Notes. – Science Univeresity of Tokyo, 1991. – 162 p.

124. *Study E.* Geometrie der Dynamen. – Lepzig, 1902. – 603 S.

125. *Vanžura J.* On the geometry and topology of manifolds over algebras // Weiterbildungszentr. Math. Kybern. und Rechentechn. Sect. Math. – 1978. – V. 28. – P. 133–136.

126. *Weil A.* Théorie des points proches sur les variététes différentiables // Colloque internat. centre nat. rech. sci. – Strasbourg, 1953. – V. 52. – P. 111–117.

127. *Yano K., Ishihara S.* Fibred spaces with projectable Riemannian metric // J. Diff. Geom. – 1967. – No 1. – P. 71–88.

128. *Yano K., Ishihara S.* Tangent and cotangent bundles. – N. Y.: Marcel Dekker, 1973. – 423 p.

129. *Yano K., Kobayashi S.* Prolongations of tensor fields and connections to tangent bundles. I. General theory // J. Math. Soc. Japan. – 1966. – V. 18, No 2. – P. 194–210.

Поступила в редакцию
22.11.07

Фомин Виктор Егорович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры геометрии Казанского государственного университета.

E-mail: *Victor.Fomin@ksu.ru*

Шурыгин Вадим Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой геометрии Казанского государственного университета.

E-mail: *Vadim.Shurygin@ksu.ru*