Межрегиональная предметная олимпиада КФУ
по предмету «Математика».
Очный тур. 2015–2016 учебный год

9 класс

1. В выражение $((-a^{-b})^{-c})^{-d}$ вместо a, b, c, d подставляются числа 1, 2, 3, 4 в некотором порядке (каждое — по одному разу). В каком случае значение полученного выражения будет максимальным, а в каком — минимальным? Чему равны эти максимальное и минимальное значения? (25 баллов)

2. Перед началом шахматного турнира участники были занумерованы. Каждый с каждым сыграл по разу. Во всех партиях, которые не закончились вничью, у победителя номер был меньше, чем у побеждённого. Петя победил Васю, но набрал по результатам турнира меньше очков, чем Вася. Каково наименьшее возможное число участников турнира? (Давали 1 очко за победу, 0,5 за ничью, 0 за поражение.) (25 баллов)

3. Через вершину C равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) с острым углом при вершине A провели перпендикуляр к BC и на этом перпендикуляре отметили точку P, лежащую с той же стороны от прямой BC, что и A, и с той же стороны от прямой AB, что и C. Точка D такова, что $ABPD$ — параллелограмм. M — точка пересечения прямой PC и отрезка AD. Найдите отношение DM/DA. (25 баллов)

4. Сколько существует пар натуральных чисел (m, n) таких, что $m, n \leqslant 100$ и выполнено неравенство $\dfrac{m}{n+1} < \sqrt{2} < \dfrac{m+1}{n}$? (25 баллов)

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ
по предмету «Математика».
Очный тур. 2015–2016 учебный год

9 класс

1. В выражение $((-a^{-b})^{-c})^{-d}$ вместо a, b, c, d подставляются числа 1, 2, 3, 4 в некотором порядке (каждое — по одному разу). В каком случае значение полученного выражения будет максимальным, а в каком — минимальным? Чему равны эти максимальное и минимальное значения? (25 баллов)

2. Перед началом шахматного турнира участники были занумерованы. Каждый с каждым сыграл по разу. Во всех партиях, которые не закончились вничью, у победителя номер был меньше, чем у побеждённого. Петя победил Васю, но набрал по результатам турнира меньше очков, чем Вася. Каково наименьшее возможное число участников турнира? (Давали 1 очко за победу, 0,5 за ничью, 0 за поражение.) (25 баллов)

3. Через вершину C равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) с острым углом при вершине A провели перпендикуляр к BC и на этом перпендикуляре отметили точку P, лежащую с той же стороны от прямой BC, что и A, и с той же стороны от прямой AB, что и C. Точка D такова, что $ABPD$ — параллелограмм. M — точка пересечения прямой PC и отрезка AD. Найдите отношение DM/DA. (25 баллов)

4. Сколько существует пар натуральных чисел (m, n) таких, что $m, n \leqslant 100$ и выполнено неравенство $\dfrac{m}{n+1} < \sqrt{2} < \dfrac{m+1}{n}$? (25 баллов)

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ
по предмету «Математика».
Очный тур. 2015–2016 учебный год

10 класс

1. Синус и косинус некоторого угла оказались различными корнями квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$. Докажите, что $b^2 = a^2 + 2ac$. (25 баллов)

2. 15 попарно взаимно простых натуральных чисел, больших единицы, не превосходят 2016. Доказать, что среди них есть хотя бы одно простое число. (25 баллов)

3. Сеть дорог соединяет n населенных пунктов. Из каждого пункта выходит не более 3 дорог. Если между какими-либо двумя пунктами нет дороги, то найдется третий пункт, соединенный дорогами с ними обоими. Каково максимальное возможное значение n? (25 баллов)

4. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. На гипотенузе AB отмечена ее середина M. На стороне BC выбрана точка K такая, что $BK : KC = 2$. Докажите, что $\angle KAB = \angle KMC$. (25 баллов)

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ
по предмету «Математика».
Очный тур. 2015–2016 учебный год

10 класс

1. Синус и косинус некоторого угла оказались различными корнями квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$. Докажите, что $b^2 = a^2 + 2ac$. (25 баллов)

2. 15 попарно взаимно простых натуральных чисел, больших единицы, не превосходят 2016. Доказать, что среди них есть хотя бы одно простое число. (25 баллов)

3. Сеть дорог соединяет n населенных пунктов. Из каждого пункта выходит не более 3 дорог. Если между какими-либо двумя пунктами нет дороги, то найдется третий пункт, соединенный дорогами с ними обоими. Каково максимальное возможное значение n? (25 баллов)

4. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. На гипотенузе AB отмечена ее середина M. На стороне BC выбрана точка K такая, что $BK : KC = 2$. Докажите, что $\angle KAB = \angle KMC$. (25 баллов)

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ
по предмету «Математика».
Очный тур. 2015–2016 учебный год

11 класс

1. Найдите хотя бы один корень уравнения $\sin(2\log_2 x)+\operatorname{tg}(3\log_2 x)=\sin 6+\operatorname{tg} 9$, меньший, чем $\frac{1}{2016}$. (25 баллов)

2. Окружность, проходящая через вершины B, C, D трапеции $ABCD$ ($AD\|BC$), пересекает сторону AB в точке E. Через точку B проведена прямая, параллельная DE. Эта прямая пересекает сторону CD в точке F. Докажите, что четырехугольник $ABFD$ — вписанный. (25 баллов)

3. Дана функция $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$. Вычислите сумму

$$f\left(\frac{0}{2016}\right)+f\left(\frac{1}{2016}\right)+f\left(\frac{2}{2016}\right)+\ldots+f\left(\frac{2015}{2016}\right)+f\left(\frac{2016}{2016}\right).$$

(25 баллов)

4. Стороны треугольника — последовательные целые числа. Какие натуральные значения может принимать радиус его вписанной окружности, если известно, что его площадь не превосходит 100? (25 баллов)

Межрегиональная предметная олимпиада КФУ
по предмету «Математика».
Очный тур. 2015–2016 учебный год

11 класс

1. Найдите хотя бы один корень уравнения $\sin(2\log_2 x)+\operatorname{tg}(3\log_2 x)=\sin 6+\operatorname{tg} 9$, меньший, чем $\frac{1}{2016}$. (25 баллов)

2. Окружность, проходящая через вершины B, C, D трапеции $ABCD$ ($AD\|BC$), пересекает сторону AB в точке E. Через точку B проведена прямая, параллельная DE. Эта прямая пересекает сторону CD в точке F. Докажите, что четырехугольник $ABFD$ — вписанный. (25 баллов)

3. Дана функция $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$. Вычислите сумму

$$f\left(\frac{0}{2016}\right)+f\left(\frac{1}{2016}\right)+f\left(\frac{2}{2016}\right)+\ldots+f\left(\frac{2015}{2016}\right)+f\left(\frac{2016}{2016}\right).$$

(25 баллов)

4. Стороны треугольника — последовательные целые числа. Какие натуральные значения может принимать радиус его вписанной окружности, если известно, что его площадь не превосходит 100? (25 баллов)

Межрегиональная предметная олимпиада
Казанского федерального университета
по предмету «Математика».
Очный тур. 2015–16 учебный год

9 класс. Решения задач

Задача 1

В выражение $((-a^{-b})^{-c})^{-d}$ вместо a, b, c, d подставляются числа 1, 2, 3, 4 в некотором порядке (каждое — по одному разу). В каком случае значение полученного выражения будет максимальным, а в каком — минимальным? Чему равны эти максимальное и минимальное значения?

Ответ. Минимальное значение равно $-\frac{1}{4096}$ и достигается, когда $\{a,b\} = \{2,4\}$, $\{c,d\} = \{1,3\}$. Максимальное значение S равно 1 и достигается при $a = 1$ и $\{b,c,d\} = \{2,3,4\}$.

Решение. Обозначим $S = ((-a^{-b})^{-c})^{-d}$. Преобразуем его: $S = (-a^{-b})^{cd} = (-1)^{cd} \cdot a^{-bcd}$. Заметим, что если среди чисел c, d есть хотя бы одно четное, то $S > 0$, а если оба они нечетны, то $S < 0$.

Следовательно, минимальное значение S отрицательно и достигается, когда пара чисел $\{c,d\}$ совпадает с парой $\{1,3\}$. В этом случае $cd = 3$, откуда $S = -a^{-3b}$. При $a = 2$, $b = 4$ имеем $S = -2^{-12}$, а при $a = 4$, $b = 2$ имеем $S = -4^{-6}$. Оба этих числа равны $-\frac{1}{4096}$.

Максимальное значение S будет положительно. Когда среди чисел c, d есть хотя бы одно четное, $S = a^{-bcd}$. Заметим, что если $a = 1$, то $S = 1$ при любых значениях b, c, d. Если же $a > 1$, то также $bcd > 1$. Тогда $S < 1$. Следовательно, максимальное значение S равно 1 и достигается при $a = 1$ и $\{b,c,d\} = \{2,3,4\}$.

Задача 2

Перед началом шахматного турнира участники были занумерованы. Каждый с каждым сыграл по разу. Во всех партиях, которые не закончились вничью, у победителя номер был меньше, чем у побеждённого. Петя победил Васю, но набрал по результатам турнира меньше очков, чем Вася. Каково наименьшее возможное число участников турнира? (Давали 1 очко за победу, 0,5 за ничью, 0 за поражение.)

Ответ. 5 участников.

Решение. Оценка. Пусть x человек победили Петю, Вася победил y человек. У этих x номера меньше, чем у Пети, и тем более, меньше, чем у Васи. А у этих y человек номера больше, чем у Васи. Значит, все эти люди различны. Число очков у игрока тем больше, чем больше у него разность между числом побед и числом поражений. У Пети разность $a \geqslant 1 - x$, у Васи разность $b \leqslant y - 1$, и по условию $a < b$. Значит, $1 - x < y - 1$, откуда $x + y > 2$. А всего у нас не меньше $x + y + 2 > 4$ игроков, то есть, не менее 5.

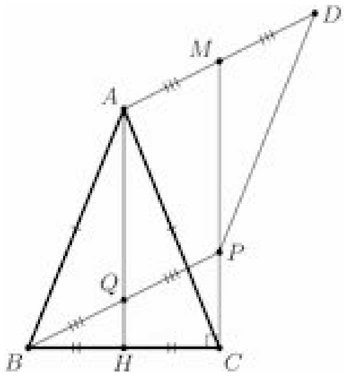
Пример на 5: Петя (номер 1) победил Васю (номер 2), Вася победил троих других, а остальные партии закончились вничью. Тогда Петя набрал 2.5 очка, Вася набрал 3 очка — больше, чем у Пети.

Задача 3

Через вершину C равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) с острым углом при вершине A провели перпендикуляр к BC и на этом перпендикуляре отметили точку P, лежащую с той же стороны от прямой BC, что и A, и с той же стороны от прямой AB, что и C. Точка D такова, что $ABPD$ — параллелограмм. M — точка пересечения прямой PC и отрезка AD. Найдите отношение DM/DA.

Ответ: $1/2$.

Решение. Пусть H — середина BC, а Q — точка пересечения AH и BP. Тогда AH параллельно CP. Прямая AH — средняя линия в $\triangle BCP$, ибо проходит через точку H. Отсюда $BQ = QP$. Четырехугольник $AMPQ$ — параллелограмм, следовательно, $AM = QP$. Но, поскольку по условию $BP = AD$, получаем, что $AM = MD$.



Задача 4

Сколько существует пар натуральных чисел (m, n) таких, что $m, n \leqslant 100$ и $\dfrac{m}{n+1} < \sqrt{2} < \dfrac{m+1}{n}$?

Ответ: 169 пар.

Решение. Проведем на координатной плоскости прямую ℓ с уравнением $y = \sqrt{2}x$. Пара (m, n) удовлетворяет неравенствам из условия в точности тогда, когда точка $(n+1, m)$ лежит выше прямой ℓ, а точка $(n, m+1)$ — ниже прямой ℓ. Это означает, что прямая ℓ пересекает клетку, нижний левый угол которой имеет координаты (n, m). Остается посчитать, сколько клеток она пересекает в квадрате $1 \leqslant x, y \leqslant 100$. Она пересекает 100 горизонтальных линий решетки ($y = 1$, $y = 2$, …, $y = 100$) и 70 вертикальных ($x = 1$, …, $x = [100/\sqrt{2}] = 70$). Итого, она пересекает 170 линий решетки. Поскольку ℓ не проходит через узлы решетки, кроме точки $(0, 0)$ (это следует из иррациональности числа $\sqrt{2}$), то она пересекает 169 клеток, у которых левый нижний угол принадлежит указанному квадрату. Самую первую клетку с углом (0,0) нам считать не нужно, так как m, n по условию натуральные.

Межрегиональная предметная олимпиада Казанского федерального университета по предмету «Математика» Очный тур. 2015–16 учебный год

10 класс. Решения задач

Задача 1

Синус и косинус некоторого угла оказались различными корнями квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$. Докажите, что $b^2 = a^2 + 2ac$.

Решение. Ясно, что $a \neq 0$. По теореме Виета имеем $\sin\alpha + \cos\alpha = -\frac{b}{a}$, $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{c}{a}$. Возведем первое равенство в квадрат:

$$1 + 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{b^2}{a^2}.$$

Подставим в него второе равенство:

$$1 + 2\frac{c}{a} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Умножим обе части на a^2 и получим $a^2 + 2ac = b^2$.

Задача 2

15 попарно взаимно простых натуральных чисел, больших единицы, не превосходят 2016. Доказать, что среди них есть хотя бы одно простое число.

Решение. Из условия следует, что все числа различны. Допустим обратное. Тогда все числа имеют хотя бы два простых делителя (возможно, одинаковых). Перенумеруем простые числа по возрастанию; тогда $p_{15} = 47$. Обозначим через $p(n)$ наименьший простой делитель n. По условию, для всех заданных чисел делители $p(n)$ различны. Пусть N есть число с наибольшим значением $p(N)$; тогда $p(N) \geqslant 47$. Поскольку число N не простое, то $N \geqslant p(N)^2 \geqslant 47^2 = 2209 > 2016$. Противоречие.

Задача 3

Сеть дорог соединяет n населенных пунктов. Из каждого пункта выходит не более 3 дорог. Если между какими-либо двумя пунктами нет дороги, то есть третий пункт, соединенный с ними обоими. Каково максимальное возможное значение n?

Ответ. 10.

Решение. Будем называть населенные пункты точками. Возьмем любую точку A. Она соединена не более, чем с тремя точками B, C, D. Любая другая точка X должна быть соединена с одной из точек B, C, D (поскольку она не соединена с A). Но каждая из них уже соединена с A, так что может быть соединена не более чем с двумя другими точками. Следовательно, общее число точек не более $1 + 3 + 3 \cdot 2 = 10$.

Пример, показывающий, что 10 точек возможно можно построить, например, так. Обозначим точки A, B, C, D, E, F, G, H, I, J. Проведем дороги AB, AC, AD, BE, BF, CG, CH, DI, DJ, EH, EJ, FG, FI, GJ и HI.

Задача 4

Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. На гипотенузе AB отмечена ее середина M. На стороне BC выбрана точка K такая, что $BK : KC = 2$. Докажите, что $\angle KAB = \angle KMC$.

Решение. Отразим точку A симметрично относительно точки C. Полученную точку обозначим A'. Ясно, что тогда BC — медиана в треугольнике $AA'B$. Так как точка пересечения медиан делит каждую из медиан в отношении $2 : 1$, то K является точкой пересечения медиан треугольника $AA'B$. Следовательно, медиана $A'M$ проходит через K. Так как медиана BC является одновременно и высотой, то треугольник $AA'B$ — равнобедренный. Следовательно, $\angle KAB = \angle KA'B$ (например, в силу симметрии). Наконец, заметим, что CM — средняя линия в треугольнике $AA'B$, а значит, параллельна $A'B$. Следовательно, углы $KA'B$ и KMC равны как накрест лежащие при секущей $A'M$.

Межрегиональная предметная олимпиада
Казанского федерального университета
по предмету «Математика»
Очный тур. 2015–16 учебный год

11 класс. Решения задач

Задача 1

Найдите хотя бы один корень уравнения $\sin(2\log_2 x) + \operatorname{tg}(3\log_2 x) = \sin 6 + \operatorname{tg} 9$, меньший, чем $\frac{1}{2016}$.

Ответ: $x = 2^{3+\pi k}$, $k \leqslant -5$.

Решение. Обозначим $y = \log_2 x$. Тогда уравнение перепишется в виде $\sin(2y) + \operatorname{tg}(3y) = \sin 6 + \operatorname{tg} 9$. Очевидно, что числа $y = 3 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ являются корнями этого уравнения. Тогда все числа $x = 2^{3+\pi k}$ будут решениями исходного уравнения.

Для того, чтобы $x < \frac{1}{2016}$, достаточно чтобы было выполнено $x \leqslant 2^{-11} = \frac{1}{2048}$. Отсюда $3 + \pi k \leqslant -11$, и $k \leqslant -\frac{14}{\pi}$. Это неравенство имеет место для всех целых $k \leqslant -5$.

Задача 2

Окружность, проходящая через вершины B, C, D трапеции $ABCD$ ($AD \| BC$), пересекает сторону AB в точке E. Через точку B проведена прямая, параллельная DE. Эта прямая пересекает сторону CD в точке F. Докажите, что четырехугольник $ABFD$ — вписанный.

Решение. Заметим, что из параллельности прямых DE и BF следует, что $\angle AED = \angle ABF = \alpha$ и $\angle EDC = \angle BFC = \beta$. Кроме того, углы CBF и EDA так же равны. Действительно, пусть L — точка пересечения прямых BC и DE. Тогда $\angle CBF = \angle CLD$ из параллельности прямых BF и DE, а $\angle CLD = \angle EDA$ из параллельности прямых BC и AD. Обозначим эти углы через γ.

Из условия следует, что четырехугольник $BCDE$ — вписанный, следовательно, $180^\circ = \angle CBE + \angle CDE = \alpha + \gamma + \beta$. С другой стороны, сумма противоположных углов четырехугольника $ABFD$ равна $\angle ABF + \angle ADF = \angle ABF + \angle ADE + \angle EDF = \alpha + \gamma + \beta = 180^\circ$. Следовательно, он вписанный.

Задача 3

Дана функция $f(x) = \dfrac{4^x}{4^x + 2}$. Вычислите сумму

$$f\left(\frac{0}{2016}\right) + f\left(\frac{1}{2016}\right) + f\left(\frac{2}{2016}\right) + \ldots + f\left(\frac{2015}{2016}\right) + f\left(\frac{2016}{2016}\right).$$

Ответ. $1008\frac{1}{2} = \frac{2017}{2}$.

Решение. Заметим, что выполнено равенство $f(x) + f(1-x) = 1$. Действительно,

$$f(x) + f(1-x) = \frac{4^x}{4^x + 2} + \frac{4^{1-x}}{4^{1-x} + 2} = \frac{4^x}{4^x + 2} + \frac{4}{4 + 2 \cdot 4^x} = \frac{4^x}{4^x + 2} + \frac{2}{2 + 4^x} = 1.$$

Отсюда следует, что

$$f\left(\frac{k}{2016}\right) + f\left(\frac{2016-k}{2016}\right) = 1$$

при всех $k = 0, 1, \ldots, 1007$. При $k = 1008$ имеем

$$f\left(\frac{1008}{2016}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4^{1/2}}{4^{1/2} + 2} = \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, искомая сумма равна $1008 + \frac{1}{2} = \frac{2017}{2}$.

Задача 4

Стороны треугольника — последовательные целые числа. Какие натуральные значения может принимать радиус его вписанной окружности, если известно, что его площадь не превосходит 100?

Ответ: 1 или 4.

Решение. Пусть стороны треугольника равны $a-1$, a, $a+1$. Тогда его периметр равен $3a$ и по формуле Герона его площадь равна $S = \sqrt{\frac{1}{2}a(\frac{1}{2}a-1)(\frac{1}{2}a+1)\frac{3}{2}a} = \frac{1}{4}a\sqrt{3(a^2-4)}$. Следовательно, радиус вписанной окружности равен $r = \dfrac{2S}{3a} = \frac{1}{6}\sqrt{3(a^2-4)}$. Кроме того, отсюда следует, что $a \geqslant 3$. Условие $S \leqslant 100$ эквивалентно тому, что $3a^2(a^2-4) \leqslant (4 \cdot 100)^2$. Решать это неравенство не обязательно, достаточно заметить, что левая его часть есть возрастающая функция от a^2 и при $a^2 = 304$ левая часть уже больше, чем $3 \cdot 300 \cdot 300 = 27 \cdot 100^2 > (4 \cdot 100)^2$. Поэтому можно считать, что $a^2 < 304$, откуда $a \leqslant 17$.

Выясним теперь, при каких целых a число $r = \frac{1}{6}\sqrt{3(a^2-4)}$ будет целым. Можно перебрать все a от 2 до 17, а можно сократить перебор, заметив, что поскольку квадратный корень из $3(a^2-4)$ должен извлекаться, то $3(a^2-4) = (3m)^2$, откуда $a^2 - 4 = 3m^2$ для целого m. Отсюда следует, что a не делится на 3. При этом $r = \frac{1}{2}m$, значит, m должно быть четным, тогда и a четно. Четных чисел, не делящихся на 3, в указанных пределах имеется пять штук: 4, 8, 10, 14, 16. Непосредственной проверкой можно убедиться, что подходят только $a = 4$ и $a = 14$. Радиус вписанной окружности тогда равен, соответственно, 1 и 4.