УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 151, кн. 2 Физико-математические науки *2009*

УДК 519.714

О СЛОЖНОСТИ МУЛЬТИПЛЕКСОРНОЙ ФУНКЦИИ В КЛАССЕ π-СХЕМ

С.А. Ложкин, Н.В. Власов

Аннотация

Доказывается, что сложность реализации мультиплексорной функции порядка n в классе π-схем равна $2^{n+1}+\dfrac{2^n}{n}\pm O\left(\dfrac{2^n}{n\log n}\right)$, и, тем самым, для указанной сложности впервые устанавливаются так называемые асимптотические оценки высокой степени точности.

Ключевые слова: мультиплексорная функция, сложность, параллельно-последовательная схема, оценки высокой степени точности.

Введение

Рассматривается задача синтеза параллельно-последовательных схем (π-схем) для мультиплексорной функции алгебры логики (ФАЛ) порядка n, то есть для функции μ_n от $n+2^n$ булевых переменных (БП), где первые n переменных называются «адресными», оставшиеся 2^n – «информационными», а значение функции равно значению той её информационной переменной, номер которой поступил на адресные входы.

Сложность мультиплексорной ФАЛ изучалась в ряде работ. Известно (см., например, [1]), что сложность реализации ФАЛ μ_n, $n=1,2,\ldots$, как схемами из функциональных элементов (СФЭ), так и формулами в стандартном базисе $Б_0 = \{x\&y, x\vee y, \overline{x}\}$, асимптотически равна 2^{n+1}, а её глубина в указанном базисе равна $(n+2)$, если $2\leqslant n\leqslant 5$ или $n\geqslant 25$, при условии, что базисные функциональные элементы (ФЭ) «$\&$» и «$\vee$» имеют единичную глубину, а ФЭ «$\neg$» – нулевую (см. [2]). Кроме того, в [3] получена нижняя оценка вида $2^{n+1}+c_1\cdot 2^{n/2}-O\left(2^{n/4}\right)$ и верхняя оценка вида $2^{n+1}+c_2\cdot 2^{n/2}+O\left(2^{n/4}\right)$ для сложности реализации ФАЛ μ_n в классе СФЭ над базисом $Б_0$.

В данной работе приводится доказательство установленных в [4] асимптотических оценок высокой степени точности (см. [5]) для сложности реализации мультиплексорной ФАЛ в классе π-схем.

Напомним некоторые определения и факты, а также введём обозначения, связанные с реализацией ФАЛ в классах π-схем и формул в базисе $Б_0$. Те понятия, которые в данной работе не определяются, могут быть найдены, например, в [6].

Через $L(\Sigma)$ будем обозначать сложность π-схемы Σ, то есть число контактов в ней. Под рангом $R(\mathcal{F})$ формулы $\mathcal{F}$ будем понимать число вхождений БП в её запись, то есть число листьев связанного с ней дерева (см., например, [6, глава 2, § 5]). Формула, в которой все ФЭ «$\neg$» присоединены к входам, называется формулой с поднятыми отрицаниями. Известно, что любой π-схеме Σ можно сопоставить эквивалентную ей формулу $\mathcal{F}$ в стандартном базисе $Б_0$ с поднятыми отрицаниями такую, что $R(\mathcal{F})=L(\Sigma)$, и обратно.

Напомним, что сложностью ФАЛ f в классе π-схем называется величина $L^{\pi}(f)$, равная минимальной сложности π-схем, реализующих ФАЛ f, и сформулируем основную теорему.

Теорема. *Для мультиплексорной ФАЛ μ_n справедливы неравенства*[1]*:*

$$2^{n+1}\left(1+\frac{1}{2(n+1)}\right) \leqslant L^{\pi}(\mu_n) \leqslant 2^{n+1}\left(1+\frac{1}{2n}+O\left(\frac{1}{n\log n}\right)\right). \tag{1}$$

Следствие.

$$L^{\pi}(\mu_n) = 2^{n+1}\left(1+\frac{1}{2n}\pm O\left(\frac{1}{n\log n}\right)\right).$$

1. Верхняя оценка сложности мультиплексорной функции

Пусть $B=\{0,1\}$ и B^n – n-я декартова степень множества B – единичный n-мерный куб, являющийся областью определения ФАЛ f, $f: B^n \to B$, от БП $x=(x_1,\ldots,x_n)$.

Следуя [6], множество наборов δ, $\delta \subseteq B^q$, будем называть m-регулярным ($m \leqslant q$), если $|\delta| = 2^m$ и префиксы длины m для любых двух наборов из δ различны. Разбиение куба на m- регулярные компоненты называется m-регулярным.

Из результатов [6, глава 4, § 6] вытекает справедливость следующей леммы.

Лемма 1. *Для любой тройки натуральных чисел m, q, λ, где $q=m+\lambda$, и для произвольной системы ФАЛ $g=(g_1,\ldots,g_\lambda)$ от БП $x_1,\ldots,x_n$ существует m-регулярное разбиение $\Delta=(\delta_1,\ldots,\delta_{2^{q-m}})$ куба B^q от БП $x_1,\ldots,x_q$ такое, что произвольная ФАЛ g_i, $1\leqslant i\leqslant\lambda$, на произвольной компоненте δ_j, $1\leqslant j\leqslant 2^{q-m}$, совпадает либо с переменной x_{m+i}, либо с её отрицанием.*

Легко убедиться в том, что для ФАЛ μ_n справедливо представление:

$$\mu_n(x,y)=\bigvee_{\sigma\in B^n} K_\sigma(x) y_{\nu(\sigma)}, \tag{2}$$

где $x=(x_1,\ldots,x_n)$ – набор адресных БП, $y=(y_0,\ldots,y_{2^n-1})$ – набор информационных БП и для набора $\sigma=(\sigma_1,\ldots,\sigma_q)\in B^n$ формула[2] $K_\sigma(x)=x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}\ldots x_n^{\sigma_n}$ – элементарная конъюнкция от БП x, обращающаяся в 1 на наборе σ, а число $\nu(\sigma)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma_i 2^{n-i}$ – номер набора σ при лексикографическом упорядочении.

Из [1, 6] следует, что ФАЛ μ_n можно реализовать в базисе $Б_0$ бесповторной по информационным БП формулой $\widetilde{\mathcal{F}}_n$ с поднятыми отрицаниями, для которой

$$R(\widetilde{\mathcal{F}}_n) \leqslant 2^{n+1} + O\left(\frac{2^n}{n}\right). \tag{3}$$

Лемма 2. *В базисе $Б_0$ имеется формула с поднятыми отрицаниями $\mathcal{F}_n(x,y)$, которая реализует ФАЛ $\mu_n(x,y)$ и для которой*

$$R(\mathcal{F}_n) \leqslant 2^{n+1} + \frac{2^n}{n} + O\left(\frac{2^n}{n\log n}\right). \tag{4}$$

---

[1]Все логарифмы в данной работе берутся по основанию 2.

[2]Полагаем, как обычно, что $x^0=\overline{x}$ и $x^1=x$.

Доказательство. Выберем натуральные параметры m, s и t такие, что[3]

$$s \leqslant 2^m, t = \left\lceil \frac{2^m}{s} \right\rceil, \quad q = m + s \leqslant n, \tag{5}$$

а затем представим набор БП x в виде $x = (x', x'')$, где $x' = (x_1, \ldots, x_q)$, $x'' = (x_{q+1}, \ldots, x_n)$.

Для каждого j, $j \in [1, t]$ и каждого l, $l \in [1, s]$, определим ФАЛ φ_j и ψ_l от БП $x_1, \ldots, x_m$ как характеристические ФАЛ множества тех наборов γ куба B^m, для которых $\lfloor \nu(\gamma)/s \rfloor = j - 1$ и $\nu(\gamma) - \lfloor \nu(\gamma)/s \rfloor = l - 1$ соответственно. Заметим, что при этом для любого набора γ, $\gamma \in B^m$, найдутся числа j, $j \in [1, t]$, и l, $l \in [1, s]$, для которых $K_\gamma(x_1, \ldots, x_m) = \varphi_j \cdot \psi_l$.

Рассмотрим разбиение $\Delta = (\delta_1, \ldots, \delta_{2^{q-m}})$ куба B^q от БП x', построенное по лемме 1 для системы ФАЛ $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_s)$. Разобьём, далее, каждое множество δ_i, $i \in [1, 2^{q-m}]$, на подмножества $\delta_{i,1}, \ldots, \delta_{i,t}$, где $\delta_{i,j}$, $j \in [1, t]$, – множество всех тех наборов σ', $\sigma' \in B^q$, на которых ФАЛ φ_j обращается в единицу. Из отмеченных выше свойств ФАЛ φ_j, ψ_l и построения разбиения Δ следует, что $|\delta_{i,j}| \leqslant s$ и что для любого набора σ', $\sigma' \in \delta_{i,j}$, элементарная конъюнкция $K_{\sigma'}(x')$ совпадает на $\delta_{i,j}$ с ФАЛ вида $x_{m+l_{\sigma'}}^{\alpha_{\sigma'}}$ при некоторых $l_{\sigma'} \in [1, s]$ и $\alpha_{\sigma'} \in B$.

Таким образом, для ФАЛ $\mu_n(x, y)$ с учётом (2) имеет место следующее представление:

$$\mu_n(x, y) = \bigvee_{i=1}^{2^{q-m}} \bigvee_{j=1}^{t} \chi_{i,j}(x') \cdot \bigvee_{\sigma'' \in B^{n-q}} K_{\sigma''}(x'') \cdot \left(\bigvee_{\sigma' \in \delta_{i,j}} x_{l_{\sigma'}}^{\alpha_{\sigma'}} \cdot y_{\nu(\sigma', \sigma'')} \right),$$

где $\chi_{i,j}(x')$ – характеристическая ФАЛ множества $\delta_{i,j}$. Искомая формула $\mathcal{F}_n(x, y)$ получается из этого представления при реализации каждой ФАЛ $\chi_{i,j}(x')$ по её совершенной ДНФ, а ФАЛ μ_{n-q} от адресных БП x'' – с помощью формулы $\widetilde{\mathcal{F}}_{n-q}$. При этом для ранга формулы $\mathcal{F}_n$ с учётом (3) будут справедливы неравенства:

$$R(\mathcal{F}_n) \leqslant t \cdot 2^{q-m} \left(n^2 + 2^{n-q} + O\left(\frac{2^{n-q}}{n-q} \right) + 2s \cdot 2^{n-q} \right) \leqslant$$
$$\leqslant 2^{n+1} + \frac{2^n}{s} + O\left(s 2^{n-m} + \frac{2^n}{s(n-q)} + \frac{n^2 \cdot 2^q}{s} \right).$$

Если при $n \geqslant 32$ значения параметров выбрать так, что $m = \lceil 3 \log n \rceil$ и $s = \lceil n - 6 \log n \rceil$, то неравенства (5) будут выполнены, а из последней приведённой выше оценки следует (4). □

Следствие. *Сложность π-схемы Σ_n, моделирующей формулу $\mathcal{F}_n$, удовлетворяет верхней оценке* (1).

Замечание. Построение π-схемы, аналогичной π-схеме Σ_n, можно также выполнить на основе конструкции [7] для контактного $(1, 2^n)$- многополюсника, реализующего систему всех элементарных конъюнкций ранга n от n БП. Искомая π-схема требуемой сложности может быть получена путём присоединения к каждому из выходов этого многополюсника контакта информационной БП в соответствии с представлением (2).

[3] Через $\lceil a \rceil$ ($\lfloor a \rfloor$) обозначается ближайшее к a сверху (соответственно, снизу) целое число.

2. Нижняя оценка сложности мультиплексорной функции

Следуя [8], будем говорить, что непустое подмножество U БП ФАЛ f *забивает* её БП x, $x \notin U$, если подстановкой некоторых констант вместо БП множества U из ФАЛ f можно получить ФАЛ, не зависящую существенно от x. Множество X, состоящее из БП ФАЛ f, будем называть *незабиваемым*, если $|X| \geqslant 2$ и любая БП x, $x \in X$, не забивается множеством $X \setminus \{x\}$. Переменная, принадлежащая некоторому незабиваемому множеству БП ФАЛ f, считается *незабиваемой* переменной этой ФАЛ. Заметим, что информационные БП образуют незабиваемое множество переменных ФАЛ $\mu_n(x, y)$.

Из определений следует, что если U – незабиваемое множество БП ФАЛ f и $U' \subset U$, $|U'| \geqslant 2$, то при любой подстановке констант вместо БП из множества $U \setminus U'$ в ФАЛ f получается ФАЛ f', для которой множество U' является незабиваемым множеством БП.

Любую ФАЛ, которая получается из ФАЛ μ_n в результате некоторой подстановки констант вместо её информационных БП, будем называть *квазимультиплексорной ФАЛ* порядка n. Из сказанного выше следует, что все информационные БП такой ФАЛ, если их не меньше двух, образуют незабиваемое множество её БП и что она существенно зависит от всех своих БП.

Следуя обычным правилам (см, например, [6]), будем считать, что при подстановке на основе следующих стандартных тождеств

$$\overline{0} = 1, \quad \overline{1} = 0, \quad x \cdot 0 = 0, \quad x \vee 1 = 1, \quad x \cdot 1 = x, \quad x \vee 0 = x,$$

константы σ, $\sigma \in \{0, 1\}$, вместо некоторой БП x СФЭ Σ, реализующей ФАЛ f, выполняются (до тех пор, пока это возможно) эквивалентные преобразования исходной схемы. После завершения этих преобразований получается СФЭ Σ', реализующая ФАЛ f', являющуюся результатом указанной подстановки $x = \sigma$ в ФАЛ f. При этом СФЭ Σ' содержит по крайней мере на 2 ФЭ меньше, чем СФЭ Σ (см., например, [6]), если x – незабиваемая БП ФАЛ f, поступающая на вход хотя бы одного ФЭ φ, $\varphi \in \{\&, \vee\}$, в СФЭ Σ (имеющая *φ-вхождение* в Σ), а $\sigma = 0$ в случае $\varphi = \&$ и $\sigma = 1$ в противном случае. Указанную подстановку константы σ вместо БП x будем называть *стандартной* для СФЭ Σ. Подстановку в указанных случаях противоположных констант будем называть *инверсной*.

Будем рассматривать далее формулы-СФЭ с поднятыми отрицаниями в базисе $Б_0$, где ФЭ «$\&$» и «$\vee$» имеют вес 1, а ФЭ «$\neg$» – вес 0. Сложность такой формулы-СФЭ Σ, то есть число ФЭ «$\&$» и «$\vee$» в ней, будем обозначать через $L(\Sigma)$. Известно (см., например, [6]), что при этом $R(\Sigma) = L(\Sigma) + 1$. Будем говорить, что БП имеет *бесповторное* (*кратное*) вхождение в СФЭ Σ, если она или её отрицание встречаются в Σ только 1 раз (соответственно, более 1 раза).

Из введённых определений и отмеченных выше фактов следует, что если СФЭ Σ' получается из СФЭ Σ стандартной подстановкой константы вместо незабиваемой БП x ФАЛ f, то выполняется неравенство

$$L(\Sigma') \leqslant L(\Sigma) - 2,$$

причём более сильное неравенство

$$L(\Sigma') \leqslant L(\Sigma) - 3$$

выполняется для кратной БП x СФЭ Σ.

Пусть теперь СФЭ Σ реализует квазимультиплексорную ФАЛ порядка n. Назовём вхождение информационной переменной y_i, $1 \leqslant i \leqslant 2^n$, в СФЭ Σ *каноническим*, если она не имеет кратного вхождения в схему и подаётся на вход ФЭ типа

«$\&$» или «$\vee$», на другой вход которого подаётся некоторая адресная БП или её отрицание. Указанные ФЭ будем называть *входными* ФЭ СФЭ Σ, а соответствующие переменные – *связанными* друг с другом в схеме Σ.

Лемма 3. *Для любой формулы $\mathcal{F}$ с поднятыми отрицаниями в базисе $Б_0$, реализующей ФАЛ μ_n, $n \geqslant 2$, справедливо неравенство*

$$R(\mathcal{F}) \geqslant 2^{n+1} + \frac{2^n}{n+1}. \tag{6}$$

Доказательство. Достаточно доказать неравенство (6) для формулы $\mathcal{F}$ с поднятыми отрицаниями, реализующей ФАЛ μ_n и имеющей минимальный ранг среди всех таких формул.

Обозначим через Σ соответствующую $\mathcal{F}$ СФЭ в базисе $Б_0$ и последовательно подставим вместо всех информационных БП, имеющих кратное вхождение в СФЭ Σ, константы стандартным образом[4]. После завершения этого процесса получим СФЭ $\widehat{\Sigma}^{(1)}$, реализующую квазимультиплексорную ФАЛ $\widehat{\mu}_n^{(1)}$ и бесповторную по всем информационным БП.

Заметим, что если в СФЭ $\widehat{\Sigma}^{(1)}$ на один из входов элемента конъюнкции или дизъюнкции подаётся информационная БП, то на его второй вход подаётся ФАЛ, не зависящая существенно от информационных БП, так как обратная ситуация противоречила бы незабиваемости множества информационных БП. Заметим также, что все информационные БП входят в $\widehat{\Sigma}^{(1)}$ либо через элемент «$\&$», либо через элемент «$\vee$», но не через элемент отрицания, так как в противном случае квазимультиплексорная ФАЛ, реализуемая схемой, была бы антимонотонна по некоторой информационной БП.

Рассмотрим теперь те элементы конъюнкции и дизъюнкции СФЭ $\widehat{\Sigma}^{(1)}$, на один из входов которых подаётся информационная БП, а на другой вход – выход подсхемы, содержащей хотя бы один элемент конъюнкции или дизъюнкции. Аналогично предыдущему шагу последовательно подставим стандартным образом константы вместо информационных БП, подаваемых на входы указанных элементов, и выполним соответствующие операции приведения, каждая из которых уменьшает сложность схемы не менее чем на 3. Полученную СФЭ обозначим через $\widehat{\Sigma}^{(2)}$ и заметим, что все информационные БП в ней имеют каноническое вхождение.

Пусть, далее, информационная БП y' имеет φ-вхождение в схему $\widehat{\Sigma}^{(2)}$, где $\varphi \in \in \{\&, \vee\}$, и выход этого ФЭ φ подаётся на вход ФЭ такого же типа. Подставив вместо БП y' константу стандартным образом, удалим из СФЭ $\widehat{\Sigma}^{(2)}$ по крайней мере 3 ФЭ конъюнкции или дизъюнкции. Выполнив такие подстановки вместо всех информационных БП, обладающих необходимыми свойствами, получим в результате СФЭ $\widehat{\Sigma}^{(3)}$, для которой

$$L\left(\Sigma\right) \geqslant L\left(\widehat{\Sigma}^{(3)}\right) + 3S, \tag{7}$$

где S – число информационных БП исходной мультиплексорной ФАЛ μ_n, вместо которых были подставлены константы.

Далее рассмотрим максимальные по включению группы, состоящие из однотипных входных элементов, выходы которых являются листьями дерева, составленного из ФЭ другого типа. Такую группу будем называть группой типа «$\vee$» (типа «$\&$»), если дерево составлено из элементов дизъюнкции (соответственно,

[4] Если информационная БП имеет как $\&$-, так и $\vee$-вхождение, то подставим вместо неё произвольную константу.

конъюнкции) либо если в группу входит только один входной ФЭ типа «&» (соответственно, типа «$\vee$») – такие группы будем называть *вырожденными*. Обозначим через n_G число информационных переменных, поступающих на входы группы G.

Докажем, что $n_G \leqslant n$ при $n \geqslant 2$. Действительно, пусть найдётся адресная БП x_k, $1 \leqslant k \leqslant n$, такая, что либо она сама, либо её отрицание подаётся не менее чем на два входных ФЭ σ' и σ'' группы G, и пусть на их выходах реализуются соответственно функции $g'(x_k, y') = y' * x_k^{\alpha'}$ и $g''(x_k, y'') = y'' * x_k^{\alpha''}$, где $* \in \{\vee, \&\}$ и $\alpha', \alpha'' \in \{0, 1\}$. Рассмотрим следующие случаи.

Случай 1. Если $\alpha' = \alpha''$, выполним инверсную подстановку константы вместо информационной БП y' и заметим, что полученная после приведения СФЭ реализует ФАЛ, не зависящую существенно от информационной БП y'', так как в случае, если на адресные БП поступил номер информационной БП y'', то на выходе всей группы реализуется подставленная константа. Полученное противоречие доказывает невозможность рассматриваемого случая.

Случай 2. Если $\alpha' \neq \alpha''$, то подставим инверсным образом константы вместо информационных БП y' и y'' и заметим, что полученная после приведения СФЭ реализует ФАЛ, не зависящую существенно от любой другой информационной БП из исходной группы, что противоречит их незабиваемости. Таким образом, данный случай также невозможен.

Итак, в любую группу входит не более n информационных переменных, причём все они различны. Если выход группы типа φ, $\varphi \in \{\&, \vee\}$, подаётся на вход элемента другого типа, то выполним стандартную подстановку констант вместо всех n_G информационных переменных этой группы. Сложность соответствующей приведённой СФЭ будет меньше сложности исходной СФЭ на величину не менее чем $n_G + (n_G - 1) + 2 = 2n_G + 1$. Повторив эту операцию для всех таких групп, получим такую СФЭ $\widehat{\Sigma}^{(4)}$, что выход любой группы типа φ, $\varphi \in \{\&, \vee\}$, подаётся на вход ФЭ такого же типа и что

$$L\left(\widehat{\Sigma}^{(3)}\right) \geqslant L\left(\widehat{\Sigma}^{(4)}\right) + \sum_{k=1}^{N_G}(2n_{G_k} + 1) = L\left(\widehat{\Sigma}^{(4)}\right) + 2T + U, \tag{8}$$

где G_k, $1 \leqslant k \leqslant U$, – все те выделенные группы элементов СФЭ $\widehat{\Sigma}^{(3)}$, в которых были выполнены указанные стандартные подстановки, U – число таких групп, а T – общее число информационных БП, вместо которых были подставлены константы на данном шаге. Заметим, что в СФЭ $\widehat{\Sigma}^{(4)}$ на вход одного ФЭ не могут подаваться выходы двух разных групп, так как это противоречило бы их максимальности по включению.

В СФЭ $\widehat{\Sigma}^{(4)}$ будем рассматривать макрогруппы, состоящие из группы и ФЭ, на вход которого подаётся выход группы. Второй вход этого ФЭ будем считать единственным входом макрогруппы. Далее будем рассматривать максимальные по включению цепи, составленные из макрогрупп, выход каждой из которых, кроме последней, подаётся на вход другой макрогруппы. Такую цепь будем называть одновходовым макроэлементом. Его единственный вход совпадает со входом верхней макрогруппы в цепи, а выход – с выходом последней макрогруппы.

Не ограничивая общности, будем считать, что типы макрогрупп в макроэлементе чередуются. Этого всегда можно добиться, воспользовавшись максимальностью по включению исходных групп и тождествами ассоциативности, получив в результате эквивалентную схему требуемого вида без изменения сложности.

Рассмотрим цепи, идущие от листьев дерева к его корню и проходящие через макроэлементы, но не начинающиеся в них. Назовём такие цепи *стандартными* и докажем, что при $n \geqslant 2$ на входы всех макрогрупп, лежащих на одной такой цепи, подаётся не более $(n+1)$ информационной БП. Предположим противное и заметим, что тогда найдётся адресная БП x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, входящая, по доказанному, по крайней мере в две разные макрогруппы. Предположим, что это макрогруппы одного типа и в расположенную выше из них в цепи входят связанные БП x_i^α и y', а во вторую – связанные БП x_i^β и y''. Возможны два случая:

Случай 1. Пусть $\alpha = \beta$. Тогда, выполнив инверсную подстановку константы вместо БП y'', после приведения получим СФЭ, реализующую ФАЛ, не зависящую существенно от информационной БП y', что противоречит её незабиваемости и доказывает невозможность этого случая.

Случай 2. Пусть $\alpha \neq \beta$. В этом случае можно утверждать, что верхняя макрогруппа расположена первой среди макрогрупп в рассматриваемой цепи, так как иначе, выполнив соответствующие инверсные подстановки констант вместо БП y' и y'', мы получили бы СФЭ, реализующую ФАЛ, не зависящую существенно от любой другой информационной БП из макрогрупп, расположенных выше.

Если предположить, что адресная БП x_i входит в макрогруппы разных типов, то аналогично рассмотрим два случая.

Случай 1. Если $\alpha \neq \beta$, то, выполнив инверсную подстановку константы вместо БП y'', получим СФЭ, реализующую ФАЛ, не зависящую существенно от информационной БП y', а следовательно, данный случай невозможен.

Случай 2. Пусть $\alpha = \beta$. Тогда, аналогично, верхняя макрогруппа расположена первой в цепи, так как в противном случае полученная после инверсной подстановки констант вместо БП y' и y'' СФЭ реализовывала бы ФАЛ, не зависящую существенно от любой информационной БП из макрогрупп, расположенных выше.

Итак, если в макроэлементы, лежащие на одной стандартной цепи, входит более $(n+1)$ информационной БП, то каждая повторяющаяся адресная БП входит в верхнюю макрогруппу на этой цепи.

Докажем, что если адресная БП x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, имеет кратное вхождение в макроэлемент, то верхняя макрогруппа является вырожденной. Выполним доказательство от противного. Пусть в верхнюю макрогруппу входит по крайней мере две пары связанных БП. Обозначим их через x_i^α и y_1', x_j^β и y_2', $1 \leqslant j \leqslant n$. Пусть в некоторой другой макрогруппе имеется вхождение связанных БП $x_i^{\alpha'}$ и y_1'', причём $\alpha = \alpha'$ $(\alpha \neq \alpha')$ в случае, если макрогруппы имеют разный (одинаковый) тип. Подставим вместо БП y_1' и y_1'' соответствующие константы инверсным образом. Тогда ФАЛ, реализуемая приведённой СФЭ, не зависит существенно от информационной БП y_2', что противоречит её незабиваемости. Следовательно, среди адресных БП, входящих в макрогруппы, расположенные на одной стандартной цепи, только одна может иметь кратное вхождение.

Таким образом, при $n \geqslant 2$ в макроэлементы, лежащие на одной стандартной цепи, входит не более $(n+1)$ информационной БП.

Выделим все макроэлементы, ниже которых на стандартных цепях нет других макроэлементов. Для каждого такого макроэлемента рассмотрим подсхему, состоящую из него самого, из ФЭ, на вход которого подаётся выход данного макроэлемента, а также из всех остальных ФЭ исходной СФЭ, находящихся выше него. Заменим во всех таких подсхемах каждый одновходовой макроэлемент ребром и рассмотрим полученные в результате деревья. Ясно, что если в таком дереве J листьев, то в нём $(J-1)$ внутренняя вершина и в него входит, по доказанному, не более $(n+1)\cdot J$ информационных БП. Обозначим через R общее число полученных деревьев. Тогда в исходной СФЭ $\widehat{\Sigma}^{(4)}$ содержится ещё по крайней мере

$\sum\limits_{i=1}^{R}(J_i-1)+R-1=M-1$ дополнительных ФЭ, где J_i, $1\leqslant i\leqslant R$, – число листьев в дереве с номером i, а M – число стандартных цепей, проходящих через уникальную последовательность макроэлементов.

ФАЛ, реализуемая СФЭ $\widehat{\Sigma}^{(4)}$, зависит от 2^n-S-T информационных переменных, поэтому, учитывая способ вхождения всех информационных БП в данную СФЭ, получим:

$$L\left(\widehat{\Sigma}^{(4)}\right)\geqslant 2\cdot(2^n-S-T)+M-1,$$

что с учётом (8) даёт

$$L\left(\widehat{\Sigma}^{(3)}\right)\geqslant 2\cdot(2^n-S)+U+M-1.$$

Так как ни в макрогруппу, ни в одновходовой макроэлемент, ни в стандартную цепь не может входить более $(n+1)$ информационной БП, то в СФЭ $\widehat{\Sigma}^{(3)}$ не менее $\dfrac{2^n-S}{n+1}$ элементов таких типов, а значит

$$L\left(\widehat{\Sigma}^{(3)}\right)\geqslant 2\cdot(2^n-S)+\frac{2^n-S}{n+1}-1,$$

откуда в силу оценки (7) получаем:

$$L(\Sigma)\geqslant 2\cdot 2^n+\frac{2^n-S}{n+1}+S-1\geqslant 2^{n+1}+\frac{2^n}{n+1}-1$$

и, таким образом,

$$R(\mathcal{F})\geqslant 2^{n+1}+\frac{2^n}{n+1}.$$

□

Следствие.

$$L^{\pi}(\mu_n)\geqslant 2^{n+1}+\frac{2^n}{n+1}=2^{n+1}+\frac{2^n}{n}-O\left(\frac{2^n}{n^2}\right).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 09-01-00817).

Summary

S.A. Lozhkin, N.V. Vlasov. On Multiplexer Function Complexity in the π-schemes Class.

It is proven that n-th's order multiplexer realization complexity in π- schemes class is equal to $2^{n+1}+\dfrac{2^n}{n}\pm O\left(\dfrac{2^n}{n\log n}\right)$ and, thus, the so-called high-accuracy asymptotic bounds for the stated complexity are established for the first time.

Key words: multiplexer function, complexity, parallel-consecutive scheme, high-accuracy asymptotic bounds.

Литература

1. *Лупанов О.Б.* Асимптотические оценки сложности управляющих систем. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. – 137 с.

2. *Ложкин С.А., Власов Н.В.* О глубине мультиплексорной функции // Материалы IX Междунар. семинара «Дискретная математика и её приложения» (Москва, МГУ, 18–23 июня 2007 г.). – М.: Изд-во мех.-матем. фак. МГУ, 2007. – С. 102–105.

3. *Румянцев П.В.* О сложности реализации мультиплексорной функции схемами из функциональных элементов // Проблемы теоретической кибернетики: Тез. докл. XIV междунар. конф. (Пенза, 23–28 мая 2005 г.). – М.: Изд-во мех.-мат. фак. МГУ, 2005. – С. 133.

4. *Ложкин С.А., Власов Н.В.* О сложности мультиплексорной функции в классе π-схем // Проблемы теоретической кибернетики: Тез. докл. XV междунар. конф. (Казань, 2–7 июня 2008 г.). – Казань: Отечество, 2008. – С. 76.

5. *Ложкин С.А.* Оценки высокой степени точности для сложности управляющих систем из некоторых классов // Матем. вопр. кибернетики. – М.: Физматлит, 1996. – Вып. 6. – С. 189–214.

6. *Ложкин С.А.* Лекции по основам кибернетики. – М.: Изд. отдел фак. ВМиК МГУ, 2004. – 256 с.

7. *Липатова А.Е.* Об одном покрытии множества двоичных наборов и реализации конъюнкций контактными схемами. // Математические вопросы кибернетики. – М.: Физматлит, 1989. – Вып. 2. – С. 161–173.

8. *Алексеев В.Б., Ложкин С.А.* Элементы теории графов, схем и автоматов. – М.: Изд. отдел фак. ВМиК МГУ, 2000. – 58 с.

Поступила в редакцию
17.03.09

Ложкин Сергей Андреевич – доктор физико-математических наук, профессор факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

E-mail: *lozhkin@cs.msu.su*

Власов Никита Вадимович – студент факультета вычислительной математики и кибернетики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова.

E-mail: *mk@cs.msu.ru*