



**КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**ИНСТИТУТ ФИЗИКИ**

*Кафедра физики твердого тела*

**РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА**



**Казань – 2019**

УДК 539.164  
ББК 22.38

*Печатается по решению  
Редакционно-издательского совета  
ФГАУ ВПО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»  
Учебно-методической комиссии Института физики  
Протокол № 9 от 21 июня 2018 г.  
Заседания кафедры физики твердого тела  
Протокол № 3 от 7 февраля 2018 г.*

*Авторы:*  
**Дулов Е.Н., Абдуллин А.Ф., Воронина Е.В., Иванова А.Г.**

*Рецензент:*  
**Назипов Р.А., к.т.н., с.н.с. Казанского национального научно-исследовательского технологического института.**

Дулов Е.Н., *Распределение Пуассона*. Учебное пособие к  
общефизическому практикуму, раздел ядерной физики / Дулов Е.Н.,  
Абдуллин А.Ф., Воронина Е.В., Иванова А.Г. – Казань: Издательство  
Казанского федерального университета, 2019. – 15 с.: 1 илл.

Аннотация:

Методическое пособие общего физического практикума предназначено для студентов Института физики, Института геологии и нефтяных технологий, курс «Физика частиц и атомного ядра», «Ядерная физика» и «Физика».

© Дулов Е.Н.,  
Абдуллин А.Ф.,  
Воронина Е.В.,  
Иванова А.Г.

© Казанский федеральный университет, 2019

## **Содержание**

Введение	4
Экспериментальная установка	8
Проведение эксперимента	9
Самотестирование	13
Литература	14
Приложение А	15

## Введение

Метод подсчёта числа частиц, зарегистрированных детектором, широко используется в экспериментальной ядерной физике. В зависимости от задач этот метод может дать различную информацию об исследуемом излучении и об источнике этого излучения. Это может быть спектральный состав, характер взаимодействия частиц с веществом, закономерности ядерных реакций и т. д. Энергии ядерных преобразований достаточно велики ( $> 10$  кэВ), что даёт возможность регистрации отдельных частиц через продукты их взаимодействия с веществом. В то же время часто приходится работать с источниками с низкой активностью. В этом случае статистический характер радиоактивного распада становится фактором, определяющим точность эксперимента. Стохастический характер ядерных преобразований приводит к невозможности определения времени, в которое происходит процесс распада для одного из ядер источника. Мы можем говорить только о вероятности распада за определенный промежуток времени  $dt$ . При малых значениях  $dt$  вероятность распада одного ядра будет линейно зависеть от  $dt$ :

$$dP_d = \lambda dt, \quad (1)$$

где  $dP_d$  – вероятность распада,  $\lambda$  – постоянная распада.

В случае большого количества радиоактивных ядер  $N$  можно говорить о среднем числе  $dN$  ядер, распадающихся за время  $dt$ :

$$dN = \lambda N dt. \quad (2)$$

Интегрирование этого уравнения приводит к известному закону радиоактивного распада. В ансамбле  $N$  радиоактивных ядер вероятность события распада в течение короткого времени  $dt$ :

$$dP = \lambda N dt = p dt, \quad (3)$$

где  $p = \lambda N$  - плотность вероятности по времени возникновения события распада. Найдем распределение вероятностей, которому подчиняется число частиц, зарегистрированных детектором (*число отсчетов*) за время  $t$ . Число событий регистрации частиц прямо пропорционально числу ядерных

преобразований в радиоактивном источнике; следовательно, по аналогии с (3), мы можем ввести плотность вероятности по времени  $p$  появления события регистрации. Мы рассматриваем интенсивность источника, не изменяющуюся во время измерения. Введем разбиение на малые интервалы  $dt$  на интервале времени  $t$ . Число сегментов разбиения  $t/dt$  обозначим через  $m$ . В этом случае вероятность  $P(n, t)$  наблюдения  $n$  распадов за время  $t$  будет подчиняться биномиальному распределению:

$$P(n, t) = C_m^n \cdot (pdt)^n \cdot (1 - pdt)^{m-n}. \quad (4)$$

При  $dt \rightarrow 0$  получим известную формулу для распределения Пуассона:

$$\begin{aligned} P(n, t) &= \lim_{dt \rightarrow 0} \left[ \frac{m!}{n!(m-n)!} \cdot (pdt)^n \cdot (1 - pdt)^{m-n} \right] = \\ &= \lim_{dt \rightarrow 0} \left[ \frac{m^n}{n!} \cdot \left( pt \cdot \frac{1}{m} \right)^n \cdot (1 - pdt)^{\frac{1}{pdt} m - pdt} \right], \\ P(n, t) &= \frac{(pt)^n}{n!} e^{-pt}. \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, случайное значение числа частиц  $n$ , зарегистрированных детектором в течение времени  $t$ , подчиняется распределению Пуассона.

Замечательной особенностью распределения Пуассона является то, что математическое ожидание  $M[n]$  и дисперсия  $D[n]$  случайной величины  $n$  одинаковы (подробности вывода см. в Приложении А):

$$M[n] = D[n] = pt. \quad (6)$$

Вводя среднее значение  $\langle n \rangle = M[n] = pt$  числа зарегистрированных частиц мы можем переписать (5):

$$P(n, \langle n \rangle) = \frac{\langle n \rangle^n}{n!} e^{-\langle n \rangle}. \quad (7)$$

На рис. 1 показано распределение Пуассона для некоторых значений  $\langle n \rangle$ .

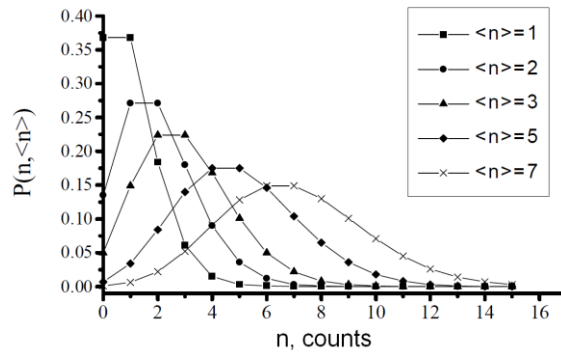


Рис. 1. Распределение Пуассона для некоторых средних значений

Равенство (6) обеспечивает простой способ оценки статистической ошибки в экспериментах с помощью стандартного отклонения  $\sigma$  :

$$\sigma[n] = \sqrt{D[n]} = \sqrt{pt} \approx \sqrt{n}. \quad (8)$$

При малых значениях  $\langle n \rangle$  распределение сильно асимметрично. Для больших  $\langle n \rangle$  распределение асимптотически стремится к гауссовому распределению, что можно доказать с помощью центральной предельной теоремы теории вероятностей (здесь доказательство не приводится):

$$P(n, \langle n \rangle) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(n - \langle n \rangle)^2}{2\sigma^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi \langle n \rangle}} \exp\left[-\frac{(n - \langle n \rangle)^2}{2\langle n \rangle}\right]. \quad (9)$$

Если мы попытаемся показать распределение Пуассона (7) и соответствующее гауссовское приближение (9) для  $\langle n \rangle > 100$  так, как показано на рисунке 1, то мы не сможем увидеть различия между ними.

Такое асимптотическое поведение позволяет применять правила, известные для распределения Гаусса. Например, так называемое “1-2-3 sigma rule” для нормального распределения, или “68-95-99.7 rule”, применимо во многих экспериментах с регистрацией ионизирующего излучения путем подсчета частиц. Это простое мнемоническое правило определяет соотношение между доверительным интервалом, измеренным в единицах  $\sigma$ , и доверительной вероятностью. Таким образом, интервал  $1\sigma$  соответствует доверительной вероятности  $\sim 68\%$ ,  $2\sigma - \sim 95\%$ , и  $3\sigma - \sim 99.7\%$ .

Теперь мы можем делать простую полуколичественную оценку на практике. Например, если бы мы проводили измерение в каком-то эксперименте (представим себе, что мы измеряем активность  $A$  радиоактивного источника на калиброванной установке), и это измерение основано на числе  $n = 10000$  зарегистрированных частиц, мы можем судить об измеренной величине (в нашем случае это активность) с ошибкой, имеющей статистический характер и приближённо равной:

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta n}{n} = \frac{\sqrt{\langle n \rangle}}{n} \cong \frac{\sqrt{n}}{n} = 0.01. \quad (10)$$

Таким образом, в этом примере относительная ошибка будет оцениваться как 1% для доверительного интервала  $1\sigma$ .

## Экспериментальная установка

### *Внимание:*

*Окно торцевого счетчика Гейгера (12-15  $\mu\text{т}$  слюды) легко может быть повреждено механически. Если окно повреждено, счётчик становится непригодным для работы.*

*Не прикасайтесь к слюдяному окну счётчика Гейгера. Окно счетчика защищено пластиковой крышкой. Снимайте защитную крышку только для проведения измерений. При снятии защитной крышки не сдавливайте её и не закрывайте отверстие для доступа воздуха.*

Установка для эксперимента состоит из торцевого счетчика Гейгера, цифрового блока сбора данных CassyLab2 (с надписью Cassy Sensors 2), персонального компьютера (ноутбук) и блока экранированного и коллимированного радиоактивного источника  $^{90}\text{Sr}$  с активностью 45 кБк\*.

Счетчик Гейгера можно перемещать вручную относительно источника.

---

\* - при использовании радиоактивного источника другого типа все значения при проведении эксперимента могут отличаться от приведённых в настоящем описании ориентировочных значений; преподаватель или лаборант сообщит о замене источника, если она имеет место.



## Проведение эксперимента

### Подготовка

Перед работой убедитесь, что все блоки лабораторной установки доступны и правильно подключены.

- Переместите счетчик Гейгера к радиоактивному источнику как можно ближе. Пластиковая крышка детектора может слегка коснуться выходного окна источника.

- Включите ноутбук, цифровой блок сбора данных CassyLab2.

- Убедитесь, что блок сбора данных CassyLab2 распознан и подключен правильно. Зеленый индикатор USB-интерфейса на блоке CassyLab2 является признаком правильного соединения.

- Запустите CassyLab2 щелчком по иконке на рабочем столе.

- В окне “CASSYs” выберите измерительный канал (“measurements channel”) выделением символического изображения узла счётчика Гейгера в верхней правой половине изображения-схемы CassyLab2. Так активируется аппаратный модуль счетчика Гейгера CassyLab2. Зеленый светодиод рядом с модулем счетчика Гейгера укажет на правильную активацию. После этого в программном обеспечении CassyLab2 для ПК должно появиться окно зарегистрированных событий. Вы должны видеть возрастающее число событий, если все части установки работают правильно.

- Закройте окно “CASSYs”.

- Загрузите файл настроек для этой работы через “Main Menu” → “Help” → “Experiment Examples” → “Physics” → “Poisson distribution” → “Load Settings”. Далее должно появиться окно, которое предложит сохранить текущие настройки. Не сохраняйте текущие настройки.

- Закройте окно “CASSYs” снова.

- Убедитесь, что вкладки “Standard” и “Frequency distribution” появились, и окно скорости счета “Rate  $R_{A1}$ ” показывает значение в диапазоне 100-500 [1/s].

## Эксперимент

- В дереве настроек “Settings” в правой части главного окна выберите набор параметров для входа A1. (вход счетчика Гейгера, “Settings” → “CASSYs” → “Input A<sub>1</sub> (Geiger-Müller counter tube S, 5240331)” → “Rate R<sub>A1</sub>”).  
Задайте следующую комбинацию параметров: Gate Time = 1s; Meas. Time – оставьте это поле пустым, пустое поле означает измерение до прерывания пользователем; Запись – автоматическая. Поместите в поле “Range, 1/s” значение, превышающее наблюдаемую среднюю скорость счета в 1.5 – 2.5 раза.
- Запустите измерение через “Main Menu” → “Measurement” → “Start/Stop” или нажатием клавиши <F9>.
- Переключаясь между вкладками “Standard” и “Frequency distribution”, убедитесь, что последовательные измерения выполняются, и сбор данных происходит корректно.
- Выполняйте измерения до тех пор, пока максимальное количество событий на вкладке “Frequency distribution” не достигнет 50. Это потребует приблизительно 40 минут для скорости счета 350 [1/s] и Gate Time = 1s. Соответствующее количество последовательных односекундных измерений можно увидеть на вкладке “Standard”, и оно должно быть равно приблизительно 2000. График на вкладке “Standard” демонстрирует статистические колебания односекундных измерений.
- Остановите измерение через “Main Menu” → “Measurement” → “Start/Stop” или нажатием клавиши <F9>.
- Сохраните результаты из через “Main Menu” → “File” → “Save” или нажатием клавиши <F2>.
- Увеличьте расстояние между источником и счетчиком Гейгера примерно до 10 см, так что средняя скорость счета будет примерно равна 10[1/s].
- Повторите измерение для этой новой средней скорости счета. Не забудьте установить параметр “Range, 1/s” для нового более низкого значения. Этот параметр влияет на представление результатов в графике на вкладке

“Standard”. Оценка требуемого времени для выполнения этой части эксперимента составляет 10-20 мин.

- Сохраните результат для низкой скорости счета в отдельном файле.

### **Оценка и результаты**

Обработайте измеренные данные для обоих значений скорости счета.

Откройте файл и сначала сделайте масштабирование данных. Вы можете сделать это, щелкнув правой кнопкой мыши по каждой оси графика. В появившемся всплывающем окне установите минимальное и максимальное значение для отображения или нажмите “Find Minimum and Maximum”. Выполните эти шаги для каждой вкладки, “Standard” и “Frequency distribution”.

Откройте вкладку “Frequency distribution” и обработайте экспериментальную гистограмму, аппроксимируя её сначала распределением Пуассона, а затем распределением Гаусса. Для этого выполните следующие действия:

- щелкните правой кнопкой мыши над графиком и перейдите в меню в всплывающем окне: “Other evaluations” → “Calculate Poisson distribution” / “Calculate Gauss distribution”;

- выберите область подгонки, удерживая нажатой левую кнопку мыши и перемещая мышью;

- запишите результаты обработки, которые показаны в нижней части главного окна. Среднее значение распределения и стандартного отклонения обозначаются здесь как  $\mu$  и  $\sigma$ , соответственно.

Результатом оценок должно быть четыре пары значений:  $\mu$  и  $\sigma$  для двух средних скоростей счета и двух распределений.

### **Представление результатов**

Обработайте данные любым подходящим программным обеспечением.

Постройте графики экспериментального распределения Пуассона с наложенными поверх результатами обработки распределениями Пуассона и Гаусса. Обратите внимание, если нет никакой заметной разницы между распределением Гаусса и распределением Пуассона.

Покажите значение сигмы в графиках, используя отрезок.

На графиках последовательных одnoseкундных измерений покажите “1-2-3 *sigma rule*” с использованием отрезка (как обычно обозначаются доверительные интервалы). Убедитесь, что соответствующая доверительная вероятность согласуется с Вашим построенным экспериментальным доверительным интервалом. Например, около 68% экспериментальных точек должны располагаться внутри  $1\sigma$  экспериментального доверительного интервала.

Представьте результаты в печатной форме, включая все оценки и графики.

### **Указания по безопасности**

**Самостоятельное вскрытие или другие манипуляции с источником радиоактивного излучения запрещены и являются нарушением законодательства РФ в области радиационной безопасности.**

**Доступ к радиоактивному источнику имеет только персонал лаборатории, относящийся к группе «А»**

## Самотестирование

1. Дозиметр на основе счетчика Гейгера оценивает мощность дозы путем подсчета зарегистрированных частиц. В среднем он подсчитывает 10 частиц при одном измерении за 30 секунд при естественном радиационном фоне (0.1 мкЗв/ч). Какова статистическая погрешность измерения естественного радиационного фона с помощью этого дозиметра? Какова точность дозиметра при 100 мкЗв/ч?

2. Активность радиоактивного источника была измерена за время 1 час на калиброванной установке со статистической погрешностью 10%. Какое время требуется для достижения статистической погрешности 1% на той же самой установке? Не принимайте во внимание любые другие экспериментальные ошибки.

3. Реальные детекторы частиц имеют параметр *мертвого времени*, что означает невозможность двух событий регистрации со временем между ними менее *мертвого времени*. Таким образом, реальное распределение счетных частиц является биномиальным, а распределение Пуассона является довольно удобным приближением. Предполагая, что *мертвое время* для счетчика Гейгера равно 100 мкс, найти качество этого приближения. Сделайте с пуассоновским и биномиальным распределением оценки вероятности регистрации 10 частиц при математическом ожидании, равном 10 частицам.

4. В пироге содержится в среднем 5 изюминок. Рассчитайте вероятность нахождения в нем ровно одной изюминки.

## Литература

1. Povh, B. Particles and Nuclei [Text] / B. Povh, K. Rith, C. Scholz, F. Zetsche. – Springer, 2006 – p. 391.
2. Martin, B.R. Nuclear and particle physics. [Text] / B.R. Martin. – Wiley, 2006. – 411 p.
3. Мухин, К.Н. Экспериментальная ядерная физика. В 3-х тт. Т. 1. Физика атомного ядра [Электронный ресурс]: учеб. – Электрон. дан. – Санкт-Петербург: Лань, 2009. – 384 с.
4. Мухин, К.Н. Экспериментальная ядерная физика. В 3-х тт. Т. 2. Физика ядерных реакций [Электронный ресурс]: учеб. – Электрон. дан. – Санкт-Петербург: Лань, 2009. – 326 с.
5. Капитонов, И.М. Введение в физику ядра и частиц [Электронный ресурс]: учеб. – Электрон. дан. – Москва: Физматлит, 2010. – 512 с.

## Приложение А. Дисперсия и матожидание распределения Пуассона

Распределение Пуассона:

$$P(n, t) = \frac{(pt)^n}{n!} e^{-pt}. \quad (\text{A.1})$$

Отметим, что вероятность получить любое количество событий  $n$ , от 0 до  $\infty$ , равно 1, т.е.:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P(n, t) = 1. \quad (\text{A.2})$$

Среднее значение распределения  $M[n] = \langle n \rangle$ :

$$M[n] = \sum_{n=0}^{\infty} n P(n, t) = \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{(pt)^n}{n!} e^{-pt} = pt \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(pt)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-pt} = pt \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(pt)^k}{k!} e^{-pt} = pt. \quad (\text{A.3})$$

Здесь  $k = n - 1$ .

Дисперсия  $D[n]$ :

$$\begin{aligned} D[n] &= M[(n - \langle n \rangle)^2] = \sum_{n=0}^{\infty} (n - pt)^2 P(n, t) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \frac{(pt)^n}{n!} e^{-pt} - 2(pt)^2 + (pt)^2 = \\ &= pt \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{(pt)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-pt} - (pt)^2 = pt \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \frac{(pt)^k}{k!} e^{-pt} - (pt)^2 = pt(pt+1) - (pt)^2, \\ D[n] &= pt. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Таким образом, среднее и дисперсия распределения Пуассона равны друг другу.