УДК 517.98

О ГРАДУИРОВКАХ C^*-АЛГЕБРЫ, ПОРОЖДЁННОЙ ОТОБРАЖЕНИЕМ И АЛГЕБРОЙ МУЛЬТИПЛИКАТОРОВ

Е.В. Патрин

Аннотация

В работе рассмотрена операторная алгебра, порождённая отображением на счётном множестве и алгеброй мультипликаторов. Заданное отображение индуцирует семейство частичных изометрий, которые вместе с мультипликаторами и являются образующими. Показано, что помимо $\mathbb{Z}$-градуировки на исследуемой алгебре можно ввести градуировку, согласованную с действием бесконечномерного тора.

Ключевые слова: C^*-алгебра, частичная изометрия, мультипликатор, действие группы на C^*-алгебре, неподвижная подалгебра.

Введение

В [1] была рассмотрена C^*-алгебра $\mathfrak{M}_\varphi$, порождённая отображением и мультипликаторами, и изучены её основные свойства. Было показано, что алгебра $\mathfrak{M}_\varphi$ является ядерной $\mathbb{Z}$-градуированной алгеброй, причём подалгебра $\mathfrak{M}_{\varphi,0}$ является индуктивным пределом лиминальных C^*-алгебр. В [2] рассматривалось действие единичной окружности на $\mathfrak{M}_\varphi$ и было установлено, что на ней можно ввести структуру скрещенного произведения. В настоящей работе предложена связанная с действием бесконечномерного тора $\mathbb{T}^\infty$ динамическая система, с помощью которой получена другая градуировка алгебры $\mathfrak{M}_\varphi$. Проведено также сравнение неподвижных (под действиями единичной окружности и тора) подалгебр.

1. Необходимые сведения

Приведем основные сведения, которые нам понадобятся в дальнейшем. Их более подробное изложение можно найти в [1, 3, 4]. Обозначим, как обычно, через $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{C}$ множества натуральных, целых и комплексных чисел соответственно.

Пусть задано отображение $\varphi : X \to X$ счётного множества X в себя, удовлетворяющее условиям: конечности прообразов $\operatorname{card}(\varphi^{-1}[x]) < \infty$ для любого $x \in X$, и отсутствия *циклических* элементов, то есть $\varphi^n(x) \neq x$ для всех $n \in \mathbb{N}$, $x \in X$. Тогда в гильбертовом пространстве $l^2(X)$ функций на X со стандартным скалярным произведением $\langle f, g\rangle = \sum\limits_{x\in X} f(x)\overline{g(x)}$ и ортонормированным базисом $\{\delta_x : X \to \mathbb{C}\}_{x\in X} :\ \delta_x(y) = \delta_{xy}$ (δ_{xy} – символ Кронекера) возникает оператор $T_\varphi : l^2(X) \to l^2(X)$, $T_\varphi(f) := f\circ\varphi$ *обратного образа отображения* φ. На базисных векторах δ_x справедлива формула

$$T_\varphi(\delta_x) = \begin{cases} \sum\limits_{y\in\varphi^{-1}[x]} \delta_y, & \varphi^{-1}[x] \neq \varnothing, \\ 0, & \varphi^{-1}[x] = \varnothing. \end{cases}$$

Здесь $\varphi^{-1}[x]$ – полный прообраз точки x. Оператор T_φ, вообще говоря, неограничен, но замыкаем [4].

Для сопряжённого оператора T_φ^* имеем

$$T_\varphi^*(f)(x) = \begin{cases} \sum\limits_{y\in\varphi^{-1}[x]} f(y), & \varphi^{-1}[x] \neq \varnothing, \\ 0, & \varphi^{-1}[x] = \varnothing, \end{cases} \qquad T_\varphi^*(\delta_x) = \delta_{\varphi(x)}.$$

Непосредственными вычислениями можно также получить следующие соотношения:

$$(T_\varphi^* T_\varphi)(f)(x) = \mathrm{card}(\varphi^{-1}[x])f(x), \quad (T_\varphi^* T_\varphi)(\delta_x) = \mathrm{card}(\varphi^{-1}[x])\delta_x,$$
$$(T_\varphi T_\varphi^*)(f)(x) = \sum_{y\in\varphi^{-1}[\varphi(x)]} f(y), \quad (T_\varphi T_\varphi^*)(\delta_x) = \sum_{y\in\varphi^{-1}[\varphi(x)]} \delta_y.$$

Операторы $T_\varphi^* T_\varphi$ и $T_\varphi T_\varphi^*$ замыкаемы, являются существенно самосопряжёнными и имеют одинаковые спектры, являющиеся дискретными. Они индуцируют разложения пространства $l^2(X)$ в прямые суммы своих инвариантных подпространств. Множество X представляется в виде дизъюнктного объединения подмножеств $X_k := \{x \in X : \mathrm{card}(\varphi^{-1}[x]) = k\}$. Инвариантное подпространство $\{f \in l^2(X) : (T_\varphi^* T_\varphi)(f) = kf\}$, отвечающее собственному значению k, изоморфно $l^2(X_k)$. Таким образом, гильбертово пространство $l^2(X)$ изоморфно прямой сумме взаимно ортогональных подпространств: $l^2(X) \approx \bigoplus\limits_{k\in\mathbb{Z}_+} l^2(X_k)$. Здесь $l^2(\varnothing) := \{0\}$. Для оператора $T_\varphi T_\varphi^*$ инвариантное подпространство l_k^2, отвечающее собственному ненулевому значению k, имеет вид

$$l_k^2 = \{f \in l^2(X) : \mathrm{supp}(f) \subset \varphi^{-1}[X_k] \ \& \ \forall\, x \in X_k,\ f|_{\varphi^{-1}[x]} = \mathrm{const}\}.$$

Оно обладает естественным базисом $\left\{e_x := \dfrac{1}{\sqrt{k}} \sum\limits_{x\in\varphi^{-1}[x]} \delta_y\right\}_{x\in X_k}$. Положив по определению $l_0^2 := \left(\bigoplus\limits_{k\in\mathbb{N}} l_k^2\right)^\perp$, здесь $l_k^2 := \{0\}$, если соответствующее $X_k = \varnothing$, окончательно получим нужное разложение $l^2(X) = \bigoplus\limits_{k\in\mathbb{Z}_+} l_k^2$.

Приведённые разложения позволяют ввести семейство операторов частичных изометрий $\{U_k : l^2(X) \to l^2(X)\}_{k\in\mathbb{N}}$, определив U_k на базисных векторах:

$$U_k(\delta_x) := \begin{cases} e_x, & x \in X_k, \\ 0, & x \notin X_k \end{cases}$$

и далее продолжив их по линейности.

Для сопряжённых операторов U_k^* имеем $U_k^*(e_x) = \begin{cases} \delta_x, & x \in X_k, \\ 0, & x \notin X_k. \end{cases}$

Оператор обратного образа T_φ может быть выражен следующей формулой: $T_\varphi = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \sqrt{k}\, U_k$. Имеют место соотношения $U_k U_l^* = 0$ при $k \neq l$. Пусть $\mathfrak{A}_\varphi$ – C^*-алгебра, порождённая семейством частичных изометрий $\{U_k\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$. Эта алгебра была введена и изучена С.А. Григоряном и А.Ю. Кузнецовой работах [3–6].

Теперь расширим алгебру $\mathfrak{A}_\varphi$ с помощью коммутативной C^*-алгебры ограниченных функций $l^\infty(X)$ (см. [1]). Для этого рассмотрим отображение $M : l^\infty(X) \to B(l^2(X))$, $l^\infty(X) \ni f \mapsto M_f : l^2(X) \to l^2(X)$, $M_f(g) := fg$ для всех $g \in l^2(X)$.

Для отображения M выполнены соотношения $M_{f+g} = M_f + M_g$, $M_{f\,g} = M_f\, M_g$, ${M_f}^* = M_{\overline{f}}$, то есть оно является точным *-представлением, сохраняющим норму, $\|M_f\| = \|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in X\}$. Обозначим через $\mathcal{M}(X)$ C^*-алгебру, порождённую всеми операторами вида M_f, и будем называть её *алгеброй мультипликаторов.*

Через $\mathfrak{M}_\varphi$ обозначим C^*-подалгебру алгебры $B(l^2(X))$, порождённую семейством операторов частичной изометрии $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ и алгеброй $\mathcal{M}(X)$.

Для образующих $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ и $\{M_f\}_{f\in l^\infty(X)}$ справедливы соотношения

$$U_k M_f = M_{T_\varphi(f)} U_k \quad \text{и} \quad U_k^* M_f U_k = M_{\frac{1}{k}\, T_\varphi{}^*(f)\chi_{X_k}}.$$

Здесь χ_{X_k} – индикатор множества X_k. В [1] было показано, что алгебра $\mathcal{M}(X)$ является *максимальной коммутативной подалгеброй алгебр* $B(l^2(X))$ *и* $\mathfrak{M}_\varphi$.

2. Структура множества мономов алгебры $\mathfrak{M}_\varphi$

Элементарным мономом алгебры $\mathfrak{M}_\varphi$ назовём любой элемент из множества

$$\{M_f\}_{f\in l^\infty(X)} \bigcup \{U_k\}_{k\in\mathbb{N}} \bigcup \{U_k^*\}_{k\in\mathbb{N}}.$$

Мономом алгебры $\mathfrak{M}_\varphi$ назовём любое конечное произведение элементарных мономов. Обозначим через Mon_φ множество всех мономов, оно образует полугруппу относительно умножения.

Напомним [6] понятие *индекса мономов* $\mathrm{ind} : \mathrm{Mon}_\varphi \to \mathbb{Z}$. Для элементарных мономов он определяется следующим образом: $\mathrm{ind}(M_f) := 0$, $\mathrm{ind}(U_k) := 1$, $\mathrm{ind}({U_k}^*) := -1$. Индекс $\mathrm{ind}(V)$ ненулевого монома V полагается равным сумме индексов элементарных мономов, участвующих в его представлении. Индекс нулевого монома полагается равным нулю. Если V_1 и V_2 – два монома и $V_1V_2 \neq 0$, то $\mathrm{ind}(V_1V_2) = \mathrm{ind}(V_1) + \mathrm{ind}(V_2)$. Из-за наличия соотношений на образующие алгебры $\mathfrak{M}_\varphi$ мономы не имеют однозначного представления через образующие. *Длиной* $\mathrm{d}(V)$ монома V назовём наименьшее число операторов частичной изометрии (элементарных мономов из множества $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}} \bigcup \{U_k^*\}_{k\in\mathbb{N}}$), участвующих в его представлении.

Лемма 1 [6, лемма 2.2]. *Индекс монома не зависит от его конкретного представления в виде произведения.*

Через $\mathrm{Mon}_{\varphi,n}$ обозначим *множество мономов индекса* $n \in \mathbb{Z}$, тогда $\mathrm{Mon}_\varphi = \coprod_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Mon}_{\varphi,n}$. Множество $\mathrm{Mon}_{\varphi,0}$ является полугрупппой и состоит из мономов чётной длины. Используя индекс монома, мы можем ввести градуировку алгебры $\mathfrak{M}_\varphi$. Напомним, что *операторным пространством* называют замкнутое подпространство C^*-алгебры. Обозначим через $\mathfrak{M}_{\varphi,n}$ операторное пространство в алгебре $\mathfrak{M}_\varphi$, порождённое мономами индекса n.

Лемма 2 [1, лемма 3.3]. *Алгебра* $\mathfrak{M}_\varphi$ *является* $\mathbb{Z}$*-градуированной алгеброй:* $\mathfrak{M}_\varphi = \overline{\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Mon}_{\varphi,n}}$.

В [2] было показано, что данная градуировка согласована с действием $\alpha : \mathbb{T} \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{M}_\varphi)$, $\alpha(z)(V) := z^{\mathrm{ind}(V)}V$, для всех $V \in \mathrm{Mon}_\varphi$, где $\mathbb{T}$ – одномерная унитарная группа, и операторное пространство $\mathfrak{M}_{\varphi,n}$ является n-м спектральным подпространством. Было отмечено, что указанное действие является полунасыщенным, то есть алгебра $\mathfrak{M}_\varphi$ как C^*-алгебра порождается с помощью неподвижной подалгебры $\mathfrak{M}_{\varphi,0}$ и первого спектрального подпространства $\mathfrak{M}_{\varphi,1}$.

В настоящей работе мы укажем ещё одну градуировку алгебры $\mathfrak{M}_\varphi$. Для этого проведём более детальный анализ полугруппы мономов. Назовём моном V *правым делителем* монома W, если $W = V'V$, где V' – некоторый моном. Как и в [7], моном W будем называть *положительно определённым*, если найдётся такое его представление в виде произведения элементарных мономов, что индекс любого его правого делителя неотрицателен.

В данном параграфе при доказательстве некоторых утверждений будем использовать следующий результат из [7] для алгебры $\mathfrak{A}_\varphi$.

Лемма 3 [7, лемма 2.1]. *Пусть W – положительно определённый моном нулевого индекса. Тогда W – положительный оператор с конечным спектром и множество векторов $\{\delta_x\}_{x\in X}$ является подмножеством собственных векторов оператора W.*

Это утверждение справедливо лишь для мономов, в представлении которых участвуют только операторы частичной изометрии.

Пусть Mon_φ^+ – подполугруппа полугруппы Mon_φ, состоящая из нулевого монома и всех положительно определённых мономов, и $\mathrm{Mon}_{\varphi,0}^+$ – подполугруппа полугруппы , Mon_φ^+, состоящая из нулевого монома и всех положительно определённых мономов индекса нуль.

Рассмотрим $C_0(\mathbb{N},\mathbb{Z})$ – группу всех отображений из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{Z}$ с конечным носителем относительно поточечного сложения. Каждое отображение $\mathfrak{n} \in C_0(\mathbb{N},\mathbb{Z})$ имеет вид $\mathfrak{n} = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mathfrak{n}(k)\delta_k$, где $\delta_k : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $\quad \delta_k(l) := \delta_{k\,l}$. Определим *мультииндекс монома* как отображение $\text{m-ind} : \mathrm{Mon}_\varphi \to C_0(\mathbb{N},\mathbb{Z})$, полагая для элементарных мономов $\text{m-ind}(U_k) := \delta_k$ и $\text{m-ind}(U_k^*) := -\delta_k$, мультииндексы нулевого монома и элементарных мономов из $\{M_f\}_{f\in l^\infty(X)}$ положим равными нулю. Как и раньше, определим $\text{m-ind}(V)$ монома V как сумму мультииндексов элементарных мономов, участвующих в его представлении.

Предложение 1. *Пусть $V \in \mathrm{Mon}_{\varphi,0}^+$ и у него существует представление вида $\left(\prod\limits_{k=1}^{n} M_{g_{1_k}} U_{i_k} M_{g_{2_k}}\right)^* \prod\limits_{k=1}^{n} M_{f_{1_k}} U_{i_k} M_{f_{2_k}}$, g_i, $f_i \in l^\infty(X)$, тогда для любого базисного вектора δ_x справедливо равенство $V(\delta_x) = c_V\delta_x$, где $c_V \in \mathbb{C}$ – константа (возможно, равная нулю).*

Доказательство. Допустим, что V – моном вида W^*W, где $W = \prod\limits_{k=1}^{n} U_{i_k}$. Из свойств оператора U_k и леммы 3 следует, что такой моном является проектором и либо $V(\delta_x) = \delta_x$, либо $V(\delta_x) = 0$. Но любой моном V вида $\left(\prod\limits_{k=1}^{n} g_{1_k} U_{i_k} g_{2_k}\right)^* \prod\limits_{k=1}^{n} f_{1_k} U_{i_k} f_{2_k}$ из-за соотношений на образующие можно записать как $V = W^* M_f\, W$, где $f \in l^\infty(X)$, для которого доказываемое утверждение, очевидно, выполняется. $\square$

Из предложения 1 вытекает

Лемма 4. *Пусть $V \in \mathrm{Mon}_{\varphi,0}^+$. Тогда* $\text{m-ind}(V) = 0$.

Доказательство. Доказательство проведём методом математической индукции по длине монома. В рассматриваемом случае длина монома – чётное число. Для мономов длины два утверждение очевидно. Рассмотрим мономы длины $2n+2$. Для простоты в записи представления монома опустим элементарные мономы вида M_f, $f \in l^\infty(X)$, поскольку они имеют индекс 0 и не влияют на доказательство. Запишем произведение $V = \prod\limits_{k=1}^{2n+2} U'_{j_k}$, где $U'_{j_k} \in \{U_{j_k}, U^*_{j_k}\}$. Заметим, что

$U'_{j_{2n+2}} = U_{j_{2n+2}}$ и по определению *положительной определённости,* $\mathrm{ind}(V_l) \geq 0$ для любого $V_l = \prod\limits_{k=l}^{2n+2} U'_{j_k}$. Предположим, что для некоторого $l > 1$ выполняется $\mathrm{ind}(V_l) = 0$. Тогда $W_l = \prod\limits_{k=1}^{l-1} U'_{j_k}$ – положительно определённый моном нулевого индекса. По предположению $\text{m-ind}(V) = \text{m-ind}(W_l) + \text{m-ind}(V_l) = 0$.

Допустим, что для всех $l > 1$ (исключая $l = 2n+2$) справедливо равенство $\mathrm{ind}(V_l) > 0$. Тогда $U'_{j_1} = U^*_{j_1}$, иначе V не будет положительно определённым. Пусть δ_x – такой базисный элемент, что $V(\delta_x) \neq 0$. Тогда $\langle V(\delta_x), \delta_x\rangle \neq 0$, что следует из свойств элементарных мономов и положительной определённости монома V. Отсюда $\langle (U_{j_1}{}^* W' U_{j_{2n+2}})(\delta_x), \delta_x\rangle = \langle (W' U_{j_{2n+2}})(\delta_x), U_{j_1}(\delta_x)\rangle$, где $W' = \prod\limits_{k=2}^{2n+1} U'_{j_k}$ также положительно определённый моном длины n. Но $\langle V(\delta_x), \delta_x\rangle \neq 0$, откуда вытекает $U_{j_{2n+2}} = U_{j_1}$. Но по предположению $\text{m-ind}(W') = 0$, следовательно, $\text{m-ind}(V) = 0$. □

Чтобы доказать корректность определения мультииндекса, сформулируем ещё одну лемму, которая обобщает предыдущее предложение.

Лемма 5. *Пусть V – такой моном, что для него найдётся базисный элемент δ_x, для которого $\langle V(\delta_x), \delta_x\rangle \neq 0$. Тогда* $\text{m-ind}(V) = 0$.

Доказательство. Доказательство снова проведём методом математической индукции по длине монома. Отметим, что моном V обязательно имеет чётную длину и $\mathrm{ind}(V) = 0$, иначе $\langle V(\delta_x), \delta_x\rangle = 0$ автоматически. Если рассмотреть два монома, в представлении одного из которых участвуют только операторы частичной изометрии, а в представлении другого – мультипликаторы и те же частичные изометрии в том же порядке относительно друг друга, то соответствующие скалярные произведения будут пропорциональными друг другу. Поэтому для простоты снова можно считать, что в представлении монома участвуют только операторы частичной изометрии. Для мономов длины два утверждение очевидно. Предположим, что оно выполняется для мономов длины $2n$. Рассмотрим мономы длины $2n+2$.

Предположим, что моном V длины $2n+2$ имеет вид $V'U_k$, где V' – моном длины $2n+1$. Представим V в виде V_1V_2, где V_2 – положительный моном нулевого мультииндекса вида W^*W (как в начале доказательства предложения 1), а V_1 – моном нулевого индекса. Минимальная возможная длина V_2 равна 2 ($V_2 = U^*_k U_k$), другой крайний случай – сам моном V имеет вид W^*W. Такой моном V_2 всегда существует, это следует из свойств операторов $\{U_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ и соотношений на образующие. Тогда, используя утверждение 3, получаем $\langle V(\delta_x), \delta_x\rangle = \langle (V_1V_2)(\delta_x), \delta_x\rangle = c_{V_2}\langle V_1(\delta_x), \delta_x\rangle \neq 0$. Но длина V_1 не превосходит $2n$, следовательно, $\text{m-ind}(V_1) = 0$, отсюда $\text{m-ind}(V) = 0$.

Теперь рассмотрим моном $V = V'U^*_k$. Допустим, что $V = U_jV''U^*_k$, где V'' – моном нулевого индекса длины $2n$. Тогда из равенств

$$\langle V(\delta_x), \delta_x\rangle = \langle (U_jV''U^*_k)(\delta_x), \delta_x\rangle = \langle (V''U^*_k)(\delta_x), U^*_j(\delta_x)\rangle \neq 0$$

следует $j = k$, иначе скалярное произведение будет равно нулю. Следовательно, из свойств операторов частичной изометрии U^*_k, имеем $\langle V''(\delta_{\varphi(x)}), \delta_{\varphi(x)}\rangle \neq 0$, ибо $U^*_k(\delta_x) = \dfrac{1}{\sqrt{k}}\,\delta_{\varphi(x)}$. Но длина U'' равна $2n$, значит, $\text{m-ind}(U'') = \text{m-ind}(V) = 0$.

Если же моном V имеет вид $V = U^*_jV''U_k{}^*$, опять представим его в виде V_1V_2, где уже V_1 – моном нулевого мультииндекса вида W^*W из предложения 3, а V_2 –

моном нулевого индекса. Минимальная возможная длина V_1 равна двум, следовательно, длина монома V_2 не больше $2n$. Тогда

$$\langle V(\delta_x), \delta_x\rangle = \langle (V_1V_2)(\delta_x), \delta_x\rangle = \langle V_2(\delta_x), V_1(\delta_x)\rangle = \bar{c}_{V_1}\langle V_2(\delta_x), \delta_x\rangle \neq 0,$$

поэтому $\text{m-ind}(V_2) = \text{m-ind}(V) = 0$. □

Теорема 1. *Отображение* $\text{m-ind} : \text{Mon}_\varphi \to C_0(\mathbb{N}, \mathbb{Z})$ *не зависит от представления монома и удовлетворяет условиям*

$$\text{m-ind}(VW) = \begin{cases} \text{m-ind}(V) + \text{m-ind}(W), & \textit{если } \ VW \neq 0, \\ 0, & \textit{если } \ VW = 0. \end{cases}$$

Доказательство. Доказательство проведём от противного. Предположим, что существуют два представления W_1 и W_2 монома $W \neq 0$ с различными мультииндексами. Тогда найдутся такие элементы δ_x и δ_y, что $\langle W_1(\delta_x), \delta_y\rangle \neq 0$ и $\langle W_2(\delta_x), \delta_y\rangle \neq 0$. Отсюда

$$\langle W_1(\delta_x), W_2(\delta_x)\rangle = \langle ({W_2}^* W_1)(\delta_x), \delta_x\rangle \neq 0.$$

Таким образом, по лемме 5 $\text{m-ind}({W_2}^*W_1) = 0$, что противоречит нашему предположению. Теперь уже свойство «гомоморфности» отображения m-ind следует из его определения. □

Для каждого $\mathfrak{n} \in C_0(\mathbb{N}, \mathbb{Z})$ определим $\text{Mon}_{\varphi,\mathfrak{n}} := \{V \in \text{Mon}_\varphi : \text{m-ind}(V) = \mathfrak{n}\}$. Из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *Полугруппа мономов* Mon_φ *разбивается на непересекающиеся множества* $\text{Mon}_{\varphi,\mathfrak{n}}$: $\text{Mon}_\varphi = \coprod\limits_{\mathfrak{n}\in C_0(\mathbb{N},\mathbb{Z})} \text{Mon}_{\varphi,\mathfrak{n}}$.

Следствие 2. *Полугруппа* $\text{Mon}_{\varphi,\mathfrak{o}}$ *совпадает с полугруппой* $\text{Mon}^+_{\varphi,0}$ *и является коммутативной подполугруппой* Mon_φ.

Доказательство. Доказательство следует из предложения 4 и леммы 3. □

Операторное пространство, порождённое элементами из множества $\text{Mon}_{\varphi,\mathfrak{n}}$, обозначим через $\mathfrak{M}_{\varphi,\mathfrak{n}}$.

3. Действие бесконечномерного тора на $\mathfrak{M}_\varphi$

Рассмотрим компактную группу $\mathbb{T}^\infty := C(\mathbb{N}, \mathbb{T})$ характеров дискретной группы $C_0(\mathbb{N}, \mathbb{Z})$. Заметим, что $\mathbb{T}^\infty$ является счётным декартовым произведением единичных окружностей с топологией Тихонова (бесконечномерный тор). По теореме Понтрягина $C_0(\mathbb{N}, \mathbb{Z})$ изоморфна группе характеров $\mathbb{T}^\infty$.

Обозначим через $\chi^\mathfrak{n}$ характер группы $\mathbb{T}^\infty$, соответствующий элементу $\mathfrak{n} \in C_0(\mathbb{N}, \mathbb{Z})$. Тогда $\chi^\mathfrak{n}(z) = z(\mathfrak{n}) = \prod\limits_{k\in\mathbb{N}} z(k)^{\mathfrak{n}(k)}$, $z \in \mathbb{T}^\infty$.

Рассмотрим C^*-алгебру $C(\mathbb{T}^\infty, \mathfrak{M}_\varphi)$ относительно поточечных операций сложения и умножения с равномерной нормой, $\|f\|_\infty := \sup\{\|f(z)\| : z \in \mathbb{T}^\infty\}$, и естественной инволюцией $f^*(z) := f(z)^*$. Каждую функцию $f \in C(\mathbb{T}^\infty, \mathfrak{M}_\varphi)$ можно однозначно представить в виде формального ряда Фурье $f = \sum\limits_{\mathfrak{n}\in C_0(\mathbb{N},\mathbb{Z})} A_\mathfrak{n}(f)\chi^\mathfrak{n}$ с коэффициентами $A_\mathfrak{n}(f) = \int\limits_{\mathbb{T}^\infty} f(z)\chi^{-\mathfrak{n}}(z)\mathrm{d}\mu(z)$, где μ – нормированная мера

Хаара на $\mathbb{T}^\infty$. Для каждого монома $V\in\mathfrak{M}_\varphi$ определим $\mathfrak{M}_\varphi$-значную функцию $\widetilde{V}:\mathbb{T}^\infty\to\mathfrak{M}_\varphi$, полагая $\widetilde{V}(z):=\chi^{\text{m-ind}(V)}(z)\,V$ для всех $z\in\mathbb{T}^\infty$. Пусть $\widetilde{\mathfrak{M}}_\varphi$ – C^*-подалгебра алгебры $C(\mathbb{T}^\infty,\mathfrak{M}_\varphi)$, порождённая полугруппой $\{\widetilde{V}\}_{V\in\mathrm{Mon}_\varphi}$.

Предложение 2. *Пусть функция* $f\in\widetilde{\mathfrak{M}}_\varphi$ *и* $A_{\mathfrak{n}}(f)$ *– её* $\mathfrak{n}$*-й коэффициент ряда Фурье. Тогда* $A_{\mathfrak{n}}(f)\in\mathfrak{M}_{\varphi,\mathfrak{n}}$.

Доказательство. Поскольку линейные комбинации элементов множества $\{\widetilde{V}\}_{V\in\mathrm{Mon}_\varphi}$ плотны в алгебре $\widetilde{\mathfrak{M}}_\varphi$, то функцию f можно взять в виде $f=\sum\limits_{j=1}^{s}c_j\widetilde{V}_j$. Тогда

$$A_{\mathfrak{n}}(f)=\int\limits_{\mathbb{T}^\infty}\sum_{j=1}^{s}c_j\widetilde{V}_j(z)\chi^{-\mathfrak{n}}(z)\mathrm{d}\mu(z)=\sum_{j=1}^{s}c_j\int\limits_{\mathbb{T}^\infty}\widetilde{V}_j(z)\chi^{-\mathfrak{n}}(z)\,\mathrm{d}\mu(z)=$$

$$=\sum_{j=1}^{s}c_j\int\limits_{\mathbb{T}^\infty}\chi^{\text{m-ind}(V_j)}(z)V_j\chi^{-\mathfrak{n}}(z)\,\mathrm{d}\mu(z)=\sum_{j=1}^{s}c_j\int\limits_{\mathbb{T}^\infty}\chi^{\text{m-ind}(V_j)-\mathfrak{n}}(z)V_j\,\mathrm{d}\mu(z)=$$

$$=\sum_{j:\text{m-ind}(V_j)=\mathfrak{n}}c_jV_j\in\mathfrak{M}_{\varphi,\mathfrak{n}}.$$

□

Предложение 3. *Алгебра* $\widetilde{\mathfrak{M}}_\varphi$ *изоморфна алгебре* $\mathfrak{M}_\varphi$.

Доказательство. Рассмотрим отображение «вычисление в единице группы» $ev_{\mathbb{1}}:\widetilde{\mathfrak{M}}_\varphi\to\mathfrak{M}_\varphi$, $ev_{\mathbb{1}}(f):=f(\mathbb{1})$, где $\mathbb{1}$ – единица группы $\mathbb{T}^\infty$. Тогда $ev_{\mathbb{1}}(f_1+f_2)=ev_{\mathbb{1}}(f_1)+ev_{\mathbb{1}}(f_2)$, $ev_{\mathbb{1}}(f_1f_2)=ev_{\mathbb{1}}(f_1)\,ev_{\mathbb{1}}(f_2)$, $ev_{\mathbb{1}}(f^*)=ev_{\mathbb{1}}(f)^*$. По построению отображение $ev_{\mathbb{1}}$ сюрьективно и, кроме того, имеет нулевое ядро. Действительно, пусть найдётся функция $f\in\ker(ev_{\mathbb{1}})$, $f\neq0$. Представим её в виде ряда Фурье $f=\sum\limits_{\mathfrak{n}\in C_0(\mathbb{N},\mathbb{Z})}A_{\mathfrak{n}}(f)\chi^{\mathfrak{n}}$ и пусть δ_x – произвольный базисный вектор в $l^2(X)$. Тогда $ev_{\mathbb{1}}(f)(\delta_x)=\sum\limits_{\mathfrak{n}\in C_0(\mathbb{N},\mathbb{Z})}A_{\mathfrak{n}}(f)(\delta_x)=0$. Но все $A_{\mathfrak{n}}(f)(\delta_x)$ взаимно ортогональны, что вытекает из следствия 1, значит, $A_{\mathfrak{n}}(f)(\delta_x)=0$ для любого $x\in X$. Поэтому $A_{\mathfrak{n}}(f)=0$, то есть $f=0$. Следовательно, $ev_{\mathbb{1}}$ – изоморфизм. □

Зададим действие $\widetilde{\tau}$ группы $\mathbb{T}^\infty$ на алгебре $C(\mathbb{T}^\infty,\mathfrak{M}_\varphi)$ её автоморфизмами следующим образом: $\widetilde{\tau}:\mathbb{T}^\infty\to\mathrm{Aut}(C(\mathbb{T}^\infty,\mathfrak{M}_\varphi))$, $\widetilde{\tau}(z_1)(f)(z_2):=f(z_1z_2)$.

Предложение 4. *Алгебра* $\widetilde{\mathfrak{M}}_\varphi$ *инвариантна относительно действия* $\widetilde{\tau}$.

Доказательство. Действительно, образующие $\{\widetilde{V}\}_{V\in\mathrm{Mon}_\varphi}$ алгебры $\widetilde{\mathfrak{M}}_\varphi$ являются собственными векторами для операторов $\widetilde{\tau}(z)$: $\widetilde{\tau}(z)(\widetilde{V})=\chi^{\text{m-ind}(V)}(z)\widetilde{V}$ для всех $z\in\mathbb{T}^\infty$.

Определив операторы $\tau(z):=ev_{\mathbb{1}}\circ\widetilde{\tau}(z)\circ ev_{\mathbb{1}}{}^{-1}$ для всех $z\in\mathbb{T}^\infty$, получим представление $\tau:\mathbb{T}^\infty\to\mathrm{Aut}(\mathfrak{M}_\varphi)$, вычисляемое на мономах по правилу $\tau(z)(V)=\chi^{\text{m-ind}(V)}(z)V$. (Здесь $ev_{\mathbb{1}}{}^{-1}(V)=\widetilde{V}$). Следующая диаграмма иллюстрирует вышеприведенные рассуждения:

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{\mathfrak{M}}_\varphi \arrow[r, "\widetilde{\tau}(z)"] \arrow[d, "ev_{\mathbb{1}}"'] & \widetilde{\mathfrak{M}}_\varphi \arrow[d, "ev_{\mathbb{1}}"] \\
\mathfrak{M}_\varphi \arrow[r, "\tau(z)"] & \mathfrak{M}_\varphi .
\end{tikzcd}$$

□

Таким образом, справедлива

Теорема 2. *Существует такое непрерывное представление $\tau : \mathbb{T}^\infty \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{M}_\varphi)$, что операторное пространство в алгебре $\mathfrak{M}_\varphi$, порождённое мономами мультииндекса $\mathfrak{n}$, определяется действием группы $\mathbb{T}^\infty$, то есть*

$$\mathfrak{M}_{\varphi,\mathfrak{n}} = \left\{ A \in \mathfrak{M}_\varphi : A = \int\limits_{\mathbb{T}^\infty} \tau(z)(A)\chi^{-\mathfrak{n}}(z)\,\mathrm{d}\mu(z) \right\}.$$

Суммируя все вышесказанное, сформулируем

Следствие 3. *На C^*-алгебре $\mathfrak{M}_\varphi$ можно задать ковариантную систему $(\mathfrak{M}_\varphi, \mathbb{T}^\infty, \tau)$.*

Таким образом, на алгебре $\mathfrak{M}_\varphi$ помимо $\mathbb{Z}$-градуировки можно задать и $C_0(\mathbb{N},\mathbb{Z})$-градуировку, которая порождается действием бесконечномерного тора, то есть

$$\mathfrak{M}_\varphi = \overline{\bigoplus_{\mathfrak{n}\in C_0(\mathbb{N},\mathbb{Z})} \mathfrak{M}_{\varphi,\mathfrak{n}}}.$$

4. Неподвижные подалгебры алгебры $\mathfrak{M}_\varphi$

Изучим структуру неподвижной подалгебры $\mathfrak{M}_{\varphi,0}$. Рассмотрим, как соотносятся подалгебры $\mathfrak{M}_{\varphi,0}$ и $\mathfrak{M}_{\varphi,\mathfrak{o}}$. По построению $\mathfrak{M}_{\varphi,\mathfrak{o}} \subset \mathfrak{M}_{\varphi,0}$. Рассмотрим случай, когда эти две неподвижные подалгебры совпадают.

Условием совпадения рассматриваемых подалгебр является следующее: любой моном нулевого индекса может быть записан в виде

$$\prod_{k=n}^{1} M_{f_k} U_{j_k}{}^* M_{g_k} \prod_{k=1}^{n} M_{f'_k} U_{j_k} M_{g'_k},$$

или

$$\prod_{k=1}^{n} M_{f_k} U_{j_k} M_{g_k} \prod_{k=n}^{1} M_{f'_k} U_{j_k}{}^* M_{g'_k},$$

или произведения таких мономов, то есть иметь нулевой мультииндекс. Все положительно определённые мономы обладают этим свойством (см. предложение 4). Поэтому рассмотрим мономы нулевого индекса, не являющиеся положительно определёнными.

Отображение φ на множестве X задает частичный порядок. Будем говорить, что $x \prec y$, если найдётся такое $n \in \mathbb{N}$, что $\varphi^n(y) = x$. Распространим этот порядок на базис $\{\delta_x\}_{x\in X}$ гильбертова пространства $l^2(X)$, полагая $\delta_x \prec \delta_y$, если $x \prec y$. Цепь $\delta_x = \delta_{x_0} \prec \delta_{x_1} \prec \delta_{x_2} \prec \cdots \prec \delta_{x_n} = \delta_y$ назовём *неуплотнимой*, если из условия $\delta_x \prec \delta_z \prec \delta_y$ следует, что найдётся такое $k,\ 0 \le k \le n$, что $\delta_z = \delta_{x_k}$.

Лемма 6. *Пусть $\delta_x \prec \delta_y$. Тогда существует единственная неуплотнимая цепь $\delta_x = \delta_{x_0} \prec \delta_{x_1} \prec \delta_{x_2} \prec \cdots \prec \delta_{x_n} = \delta_y$ с началом δ_x и концом δ_y.*

Доказательство. Пусть $x = \varphi^k(y)$. Множество $\{x_0 = x, \varphi^{k-1}(y), \varphi^{k-2}(y), \ldots, y\}$ определяет неуплотнимую цепь $\delta_x = \delta_{x_0} \prec \delta_{x_1} \prec \delta_{x_2} \prec \cdots \prec \delta_{x_k} = \delta_y$, где $x_j = \varphi^{k-j}(y)$. Если $\delta_x \prec \delta_z \prec \delta_y$, то $z = \varphi^l(y)$, $l \le k$. Отсюда следует, что $\delta_z = \delta_{x_l}$. □

Напомним, что для любого фиксированного $k \in \mathbb{N}$ гильбертово пространство $l^2(X)$ представляется в виде прямой суммы конечномерных подпространств

$l^2(\varphi^{-k}[x])$, $x \in X$. Здесь $\varphi^{-k}[x] := \{y \in X : \varphi^k(y) = x\}$ – полный прообраз k-й степени точки x. Зафиксируем произвольный базисный элемент δ_x и некоторое k. Рассмотрим все неуплотнимые цепи с началом в δ_x, которые заканчиваются на элементах множества $\{\delta_y\}_{y\in\varphi^{-k}[x]}$. Будем называть k *длиной* неуплотнимой цепи. С каждой неуплотнимой цепью с началом в δ_x и концом в δ_{y_l}, $1 \le l \le \operatorname{card}(\varphi^{-k}[x])$, свяжем такой набор натуральных чисел $\left(j_1^{(l)}, j_2^{(l)}, \ldots, j_k^{(l)}\right)$, что

$$\left(U_{j_1^{(l)}}{}^* U_{j_2^{(l)}}{}^* \cdots U_{j_k^{(l)}}{}^*\right)(\delta_{y_l}) = \frac{1}{\sqrt{j_1^{(l)} j_2^{(l)} \cdots j_k^{(l)}}}\delta_x.$$

Если неподвижные подалгебры совпадают, то, очевидно, всем неуплотнимым цепям с началом в δ_x и концом в δ_y, $y \in \varphi^{-k}[x]$, соответствует единственный набор $(j_1, j_2, \ldots, j_k)$. В противном случае существовал бы такой моном

$$V = U_{j_1^{(m)}} U_{j_2^{(m)}} \cdots U_{j_1^{(l)}}{}^* U_{j_2^{(l)}}{}^* \cdots U_{j_k^{(l)}}{}^*,$$

что $\operatorname{ind}(V) = 0$ и $\text{m-ind}(V) \ne 0$, а это противоречит нашему предположению. Отсюда следует

Предложение 5. *Если для любого $x \in X$ и любого $k \in \mathbb{N}$ существует единственный набор $(j_1, j_2, \ldots, j_k)$, соответствующий всем неуплотнимым цепям с началом в δ_x и концом в $\{\delta_y\}_{y\in\varphi^{-k}[x]}$, то $\mathfrak{M}_{\varphi,\mathfrak{o}} = \mathfrak{M}_{\varphi,0}$.*

Заметим, что при выполнении этого условия подалгебра $\mathfrak{M}_{\varphi,\mathfrak{o}}$ может обладать коммутативной подалгеброй, порождённой мономами нулевого индекса, в представлении которых участвуют только операторы частичных изометрий, то есть операторы из $\mathfrak{A}_{\varphi,0}$.

Будем говорить, что точки $x, y \in X$ *φ-эквивалентны в k-м порядке,* если $\varphi^k(x) = \varphi^k(y)$, и назовём точку x *начальной,* если её прообраз пуст.

Предложение 6. *Пусть $\mathfrak{M}_{\varphi,\mathfrak{o}} = \mathfrak{M}_{\varphi,0}$. Тогда подалгебра $\mathfrak{A}_{\varphi,0}$ коммутативна тогда и только тогда, когда любой элемент из X, φ-эквивалентный в каком-либо порядке начальному элементу, сам является начальным.*

Доказательство. Доказательство основывается на предложении 5. Достаточно лишь показать, что будут коммутировать мономы вида $V = \prod_{k=m}^{1} U_{j_k}^* \prod_{k=1}^{m} U_{j_k}$ и $V' = \prod_{k=1}^{n} U_{j_k} \prod_{k=n}^{1} U_{j_k}^*$. Рассмотрим базисный элемент δ_x, на котором оба монома не равны нулю. По лемме 3 имеем $V(\delta_x) = \delta_x$. Непосредственно вычислив, получим, что

$$V'\left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{card}(\varphi^{-1}[\varphi(x)])}} \sum_{y\in\varphi^{-1}[\varphi(x)]} \delta_y\right) = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{card}(\varphi^{-1}[\varphi(x)])}} \sum_{y\in\varphi^{-1}[\varphi(x)]} \delta_y,$$

то есть $V'(\delta_{\varphi(x)}) = \delta_{\varphi(x)}$. Можно показать, что моном $V' = \prod_{k=1}^{n} U_{j_k} \prod_{k=n}^{1} U_{j_k}^*$ в условиях предложения 5 является проектором на подпространство, порождённое векторами e_y, $y \in \varphi^{-(n-1)}[\varphi^n(x)]$.

Все неуплотнимые цепи (любой длины), начинающиеся на элементе $\delta_{\varphi(x)}$, совпадают (имеют одинаковый набор). Если один из элементов $\varphi^{-1}[\varphi(x)]$ – начальный, то и все остальные тоже начальные. Это верно для любого $\varphi^{-k}[\varphi^n(x)]$ для любых k (и, вообще говоря, n). Отсюда получаем, что проекторы V и V' коммутируют.

Из коммутативности $\mathfrak{A}_{\varphi,0}$ следует, что любой элемент, эквивалентный начальному, сам является начальным. Действительно, пусть $x_0 \in \varphi^{-1}[\varphi(x)]$ – единственный начальный элемент. Тогда для любого V вида $\prod\limits_{k=m}^{1} U^*_{j_k} \prod\limits_{k=1}^{m} U_{j_k}$, $V(\delta_{x_0}) = 0$, но найдётся такой моном W, что $W(\delta_{x_s}) = \delta_{x_s}$ для $x_s \in \varphi^{-1}[\varphi(x)]$, что противоречит предположению о коммутативности $\mathfrak{A}_{\varphi,0}$. □

Из предложения 6 следует, что неподвижная подалгебра $\mathfrak{M}_{\varphi,0}$ (как и $\mathfrak{M}_{\varphi,\mathfrak{o}}$) не может быть коммутативной, если отображение φ не является инъекцией. Это видно хотя бы из того, что проекторы $U_k U_k^*$ (простейший пример проектора на подпространство, порождённое векторами e_y) не содержатся в $\mathcal{M}(X)$. Таким образом, если выполнены условия предложения 6, то подалгебра $\mathfrak{M}_{\varphi,0}$ порождается с помощью двух некоммутирующих коммутативных подалгебр: $\mathfrak{A}_{\varphi,0}$ – подалгеброй, порождённой мономами индекса нуль, содержащими только частичные изометрии, и коммутативной алгеброй мультипликаторов $\mathcal{M}(X)$.

Следствие 4. *Следующие утверждения эквивалентны:*
1) *отображение* φ *– инъекция;*
2) *подалгебра* $\mathfrak{M}_{\varphi,0}$ *является коммутативной.*

Доказательство. Достаточно заметить, что если для любого $x \in X$ мощность $\mathrm{card}(\varphi^{-1}[x])$ равна единице (или, возможно, нулю), то любой моном нулевого индекса будет лежать в $\mathcal{M}(X)$. □

Обратимся теперь к случаю, когда $\mathfrak{M}_{\varphi,\mathfrak{o}} \subset \mathfrak{M}_{\varphi,0}$. Определим отображение

$$\Psi : C_0(\mathbb{N}, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}, \qquad \text{полагая} \quad \Psi(\delta_k) = 1, \quad \Psi\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \mathfrak{n}(k)\delta_k\right) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathfrak{n}(k).$$

Поэтому из следствия 3 вытекает, что подалгебра $\mathfrak{M}_{\varphi,0}$ является $\ker(\Psi)$-градуированной, то есть

$$\mathfrak{M}_{\varphi,0} = \overline{\bigoplus_{\mathfrak{n}\in\ker(\Psi)} \mathfrak{M}_{\varphi,\mathfrak{n}}}.$$

Summary

E.V. Patrin. On Gradings of the Operator Algebra Generated by Mapping and Multipliers.

The operator algebra generated by mapping on a countable set and multipliers is considered. The defined mapping induces a family of partial isometries satisfying some relations. These isometries, as well as the multipliers, are the generators of the investigated algebra. We equip the algebra with a torus action and consider the corresponding covariant system.

Keywords: C^*-algebra, partial isometry, multiplier, group action on C^*-algebra, fixed-point subalgebra.

Литература

1. *Кузнецова А.Ю., Патрин Е.В.* Об одном классе C^*-алгебр, порожденных частичными изометриями и мультипликаторами // Изв. вузов. Матем. – 2012. – № 6. – С. 44–55.

2. *Kuznetsova A.Yu., Patrin E.V.* On the structure of C^*-algebra generated by a family of partial isometries and multipliers // Armen. J. Math. – 2015. – V. 7, No 1. – P. 50–58.

3. *Григорян С.А., Кузнецова А.Ю.* C^*-алгебры, порожденные отображениями // Матем. заметки. – 2010. – Т. 87, № 5. – С. 694–703.

4. *Кузнецова А.Ю.* Об одном классе C^*-алгебр, порожденных счетным семейством частичных изометрий // Изв. НАН Армении. Матем. – 2010. – Т. 45, № 16. – С. 51–62.

5. *Grigoryan S., Kuznetsova A.* C^*-algebras generated by mappings // Lobachevskii J. Math. – 2008. – V. 29, No 1. – P. 5–8.

6. *Grigoryan S., Kuznetsova A.* On a class of nuclear C^*-algebras // An Operator Theory Summer: Proc. 23rd Int. Conf. on Operator Theory. – Bucharest: Theta Foundation, 2012. – P. 39–50.

7. *Григорян С.А., Кузнецова А.Ю., Патрин Е.В.* Об одном критерии неприводимости алгебры $C^*_\varphi(X)$ // Изв. НАН Армении. Матем. – 2014. – Т. 49, № 1. – С. 75–82.

Поступила в редакцию
27.08.15

Патрин Евгений Владимирович – ассистент кафедры теории относительности и гравитации, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *evgeniipatrin@mail.ru*