

УДК 539.3

**ДВУМЕРНЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ВОЛНЫ
В ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОМ ШАРЕ***В.А. Вестяк¹, Д.В. Тарлаковский^{1,2}*¹*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, 125993, Россия*²*НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва, 119192, Россия***Аннотация**

В изотропном шаре изучается процесс распространения заданных на его поверхности нестационарных кинематических или электромагнитных возмущений. Наряду с уравнениями Максвелла и линеаризованным законом Ома рассматриваются линейные уравнения движения упругого шара, в правую часть которых в качестве массовой силы входит сила Лоренца. Радиальные и тангенциальные составляющие искомым величин раскладываются в ряды по полиномам Лежандра и Гегенбауэра соответственно. Поставленная начально-краевая задача решается посредством интегрального преобразования Лапласа по времени и разложения коэффициентов рядов в степенные ряды по малому параметру, связывающему механические и электромагнитные характеристики среды. Разложение в степенной ряд позволяет построить рекуррентную последовательность краевых задач относительно искомым компонент механического и электромагнитного полей. Каждая отдельная задача решается с помощью обобщенных сверток искомым функций, соответствующих предыдущим членам рекуррентной последовательности, с функциями Грина. В качестве последних для электромагнитного поля используются квазистатические аналогии, а для механического поля применяется явный вид объёмных функций Грина, найденных с помощью методов компьютерной алгебры и комплексного анализа.

Ключевые слова: нестационарные волны, электромагнитоупругий шар, осевая симметрия, связанные электромагнитные и механические поля, метод малого параметра, преобразование Лапласа, функции Грина

Введение

В настоящее время в различных технических задачах несомненную актуальность приобретают вопросы учета взаимодействия сопряжённых полей механической и другой, в том числе электромагнитной, природы.

Помимо температурных связанных задач наиболее исследованными являются вопросы о взаимодействии электрического и упругого полей. Методы решения такого рода задач не ограничиваются численными решениями, для которых (см., например, [1]) даже строго доказаны теоремы существования и единственности. Так в [2] представление решения в виде ряда Лорана по параметру преобразования Лапласа в окрестности бесконечно удаленной точки позволило получить фундаментальное решение для пространства на начальном промежутке времени для одномерной задачи. В [3] достаточно полно изложены основные принципы построения фундаментальных решений применительно к задачам нестационарной линейной электроупругости. Подход, основанный на построении аналитических решений применительно к пьезоэлектрической сфере, изложен, например, в работе [4].

Постановки нестационарных задач электромагнитоупругости даны в [5]. Естественными необходимыми составляющими при этом являются решения соответствующих несвязанных задач. В статье [6] исследованы двумерные нестационарные электромагнитные поля, возбуждаемые заданным полем перемещений в шаре. В работе [7] изучен нестационарный процесс осесимметричного деформирования упругого шара под действием объёмных сил. Развитие результатов последних двух работ применительно уже к электромагнитоупругому шару предложено в настоящей статье, когда механические и электромагнитные поля связаны посредством силы Лоренца, выступающей в качестве объёмной силы в уравнениях движения, и обобщённого закона Ома [8]. Эта задача имеет также и практические приложения при исследовании электромагнитных и механических полей, например, в задачах дефектоскопии, а также при разработке электронных устройств с использованием проводников и проводящих покрытий, находящихся в экстремальных условиях эксплуатации.

1. Постановка задачи

Рассматривается однородный изотропный проводящий шар радиуса r_1 с центром в точке O , на границе которого заданы кинематические или электромагнитные условия (r, θ, ϑ – сферическая система координат, где $r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi, -\pi < \vartheta \leq \pi$):

$$u|_{r=r_1} = U_1(\tau, \theta), \quad v|_{r=r_1} = V_1(\tau, \theta), \quad E_\theta|_{r=r_1} = e_{01}(\tau, \theta). \quad (1)$$

К ним добавляется условие ограниченности компонентов напряженно-деформированного состояния среды и электромагнитного поля. Предполагается, что начальное электромагнитное поле является стационарным, радиальным и удовлетворяет условиям $E_{0r} = E_0(r), E_{0\theta} \equiv 0, H_0 \equiv 0$ (здесь и далее нулевыми индексами обозначается начальное состояние). Считаем, что шар в начальный момент времени находится в невозмущенном состоянии, а значит (точками обозначены производные по времени):

$$u|_{\tau=0} = \dot{u}|_{\tau=0} = v|_{\tau=0} = \dot{v}|_{\tau=0} = 0, \\ E_r|_{\tau=0} = \dot{E}_r|_{\tau=0} = E_\theta|_{\tau=0} = \dot{E}_\theta|_{\tau=0} = H|_{\tau=0} = \dot{H}|_{\tau=0} = 0,$$

где u и v, E_r и E_θ – радиальные и тангенциальные перемещения и компоненты векторов напряженности электрического поля; H – ненулевая компонента вектора напряженности магнитного поля.

Вытекающая из уравнений движения, уравнений Максвелла и обобщённого закона Ома в предположении осесимметричного движения замкнутая связанная система уравнений имеет вид [5]

$$\ddot{u} = \left(1 - \frac{1}{\eta^2}\right) \frac{\partial I_1}{\partial r} + \frac{1}{\eta^2} \left\{ \Delta u - \frac{2}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v \sin \theta) + u \right] \right\} + F_r, \\ \ddot{v} = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{1}{\eta^2}\right) \frac{\partial I_1}{\partial \theta} + \frac{1}{\eta^2} \left[\Delta v + \frac{1}{r^2} \left(2 \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{\sin^2 \theta} \right) \right] + F_\theta; \\ \eta_e^2 \left(\ddot{H} + \gamma \dot{H} \right) = \Delta \dot{H} - \frac{\dot{H}}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{\eta_e^2}{r} \left[\frac{\partial (r \rho_{e0} \dot{v})}{\partial r} - \frac{\partial (\rho_{e0} \dot{u})}{\partial \theta} \right]; \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial (rH)}{\partial r} = \eta_e^2 \left(\gamma j_\theta + \dot{E}_\theta \right), \quad \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (H \sin \theta)}{\partial \theta} = \eta_e^2 \left(\gamma j_r + \dot{E}_r \right); \\ j_r = E_r + H_0 \dot{v} + \rho_{e0} \dot{u} / \gamma, \quad j_\theta = E_\theta - H_0 \dot{u} + \rho_{e0} \dot{v} / \gamma; \\ \dot{\rho}_e + \gamma \rho_e = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \rho_{e0} \dot{u})}{\partial r} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\rho_{e0} \dot{v} \sin \theta)}{\partial \theta}.$$

Здесь и далее использованы следующие безразмерные величины (их размерные аналоги в необходимых случаях обозначены штрихами):

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{c_1 t}{L}, \quad r = \frac{r'}{L}, \quad r_1 = \frac{R}{L}, \quad u = \frac{u'}{L}, \quad v = \frac{v'}{L}, \quad H = \frac{H' \mu_e c_1}{c E_*}, \quad \rho_e = \frac{4\pi \rho'_e L}{\varepsilon E_*}, \\ F'_k &= \frac{F_k L}{\rho c_1^2}, \quad k = r, \theta, \quad E_r = \frac{E'_r}{E_*}, \quad E_\theta = \frac{E'_\theta}{E_*}, \quad j_r = \frac{j'_r}{\sigma E_*}, \quad j_\theta = \frac{j'_\theta}{\sigma E_*}, \\ \eta_e^2 &= \frac{\mu_e \varepsilon c_1^2}{c^2}, \quad \gamma = \frac{4\pi \sigma L}{\varepsilon c_1}, \quad \eta = \frac{c_1}{c_2}, \quad \alpha = \frac{\varepsilon E_*^2}{4\pi(\lambda + 2\mu)}, \end{aligned}$$

где t – время; j_r и j_θ – радиальные и тангенциальные плотности тока; ρ_e – плотность поверхностных зарядов; F_k – ненулевые радиальные и тангенциальные компоненты силы Лоренца; c , c_1 и c_2 – скорости света, распространения волн растяжения-сжатия и сдвига; λ и μ – упругие постоянные Ламе; ε и μ_e – коэффициенты диэлектрической и магнитной проницаемостей; σ – коэффициент электропроводности; L и E_* – характерные линейный размер и напряженность электрического поля.

2. Разложение в ряды по углу

Искомые функции представляем в виде рядов по полиномам Лежандра $P_n(x)$ и Гегенбауэра $C_{n-1}^{3/2}(x)$ [9, 10]:

$$\begin{pmatrix} u \\ E_r \\ \rho_e \\ F_r \\ j_r \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} u_n \\ E_{rn} \\ \rho_n \\ F_{rn} \\ j_{rn} \end{pmatrix} P_n(\cos \theta), \quad \begin{pmatrix} v \\ E_\theta \\ H \\ F_\theta \\ j_\theta \end{pmatrix} = \sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} \begin{pmatrix} v_n \\ E_{\theta n} \\ H_n \\ F_{\theta n} \\ j_{\theta n} \end{pmatrix} C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta). \quad (3)$$

Принимая в качестве основных неизвестных функций перемещения и напряженность магнитного поля, после использования преобразования Лапласа по времени τ (s – его параметр; индекс “ L ” указывает на изображение) получаем следующую систему разрешающих уравнений относительно ограниченных изображений коэффициентов рядов (3):

$$\begin{aligned} s_e^2 \eta_e^2 H_n^L &= \Delta_n H_n^L + \eta_e^2 s l_H(u_n^L, v_n^L), \quad n \geq 1, \quad s_e = \sqrt{s(s + \gamma)} \\ s^2 u_n^L &= l_{11n}(u_n^L) + l_{12n}(v_n^L) + \alpha g_u(E_{rn}^L, \rho_n^L), \quad n \geq 0, \\ s^2 v_n^L &= l_{21n}(u_n^L) + l_{22n}(v_n^L) + \alpha g_v(E_{\theta n}^L, H_n^L), \quad n \geq 1, \end{aligned} \quad (4)$$

где

$$g_u(E, \rho) = \rho_{e0} E + E_0 \rho \quad (n \geq 0), \quad g_v(E, H) = \rho_{e0} E - \gamma E_0 H, \quad (n \geq 1),$$

$$\Delta_n = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) - \frac{n(n+1)}{r^2}, \quad l_H(u, v) = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r \rho_{e0} v)}{\partial r} + \rho_{e0} u \right],$$

$$l_{11n}(u) = \frac{1}{r^2} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) - [\eta^{-2} n(n+1) + 2] u \right\},$$

$$l_{21n}(u) = -\frac{1}{r^2} \left[(1 - \eta^{-2}) \frac{\partial (ru)}{\partial r} + (1 + \eta^{-2}) u \right],$$

$$l_{12n}(v) = -n(n+1) \left[l_{21n}(v) + (3 + \eta^{-2}) \frac{v}{r^2} \right],$$

$$l_{22n}(v) = \frac{1}{r^2} \left[\eta^{-2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v}{\partial r} \right) - n(n+1)v \right].$$

Использование разложений

$$U_1 = \sum_{n=0}^{\infty} U_{1n} P_n(\cos \theta), \quad V_1 = \sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} V_{1n} C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta),$$

$$e_{01}(\tau, \theta) = \sin \theta \sum_{n=1}^{\infty} e_{01n} C_{n-1}^{3/2}(\cos \theta)$$
(5)

правых частей равенств (1) приводит к следующим граничным условиям для каждой из систем уравнений (4):

$$v_n^L|_{r=r_1} = V_{1n}^L(s),$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r H_n^L)}{\partial r} \Big|_{r=r_1} = -\eta_e^2 h_0^L [V_{1n}^L(s), e_{01n}^L(s)] \Big|_{r=r_1}, \quad n \geq 1;$$

$$u_n^L|_{r=r_1} = U_{1n}^L(s), \quad n \geq 0.$$
(6)

Соответствующие изображения коэффициентов рядов (3) для остальных компонент электромагнитного поля в соответствии с (2) определяются по формулам:

$$\eta_e^2(s + \gamma) E_{\theta n}^L = -\frac{1}{r} \frac{\partial (r H_n^L)}{\partial r} - \eta_e^2 s \rho_{e0} v_n^L, \quad n \geq 1,$$

$$\eta_e^2(s + \gamma) E_{rn}^L = \frac{n(n+1)}{r} H_n^L - \eta_e^2 s \rho_{e0} u_n^L;$$

$$(s + \gamma) \rho_n^L = -s l_{n\rho} (u_n^L, v_n^L), \quad l_{n\rho}(u, v) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \rho_{e0} u)}{\partial r} + \frac{n(n+1)}{r} \rho_{e0} v.$$
(7)

Как показано в [11], даже в одномерном случае решение краевой задачи (4), (6) содержит функции Бесселя, индекс которых зависит от параметра преобразования Лапласа, поэтому, очевидно, найти аналитически оригиналы невозможно. В связи с этим представляем искомые функции в виде степенных рядов по малому параметру α :

$$u_n = \sum_{m=0}^{\infty} u_{nm}(r, \tau) \alpha^m, \quad v_n = \sum_{m=0}^{\infty} v_{nm}(r, \tau) \alpha^m, \quad H_n = \sum_{m=0}^{\infty} H_{nm}(r, \tau) \alpha^m,$$

$$\rho_n = \sum_{m=0}^{\infty} \rho_{nm}(r, \tau) \alpha^m, \quad E_{rn} = \sum_{m=0}^{\infty} E_{rnm}(r, \tau) \alpha^m, \quad E_{\theta n} = \sum_{m=0}^{\infty} E_{\theta nm}(r, \tau) \alpha^m.$$
(8)

Подстановка этих рядов в (4), (6), (7) приводит к рекуррентной по m последовательности систем уравнений относительно ограниченных функций

$$s^2 u_{00}^L = l_{110}(u_{00}^L);$$

$$s^2 u_{0m}^L = l_{110}(u_{0m}^L) + g_u(E_{r0,m-1}^L, \rho_{0,m-1}^L), \quad n = 0, \quad m \geq 1;$$

$$s_e^2 E_{r0m}^L = -s^2 \rho_{e0} u_{0m}^L; \quad (s + \gamma) \rho_{0m}^L = -\frac{s}{r^2} \frac{\partial (r^2 \rho_{e0} u_{0m}^L)}{\partial r}, \quad n = 0, \quad m \geq 0;$$

$$s_e^2 \eta_e^2 H_{nm}^L = \Delta_n H_{nm}^L + \eta_e^2 s l_H(u_{nm}^L, v_{nm}^L);$$
(9)

$$s^2 u_{n0}^L = l_{11n} (u_{n0}^L) + l_{12n} (v_{n0}^L), \quad s^2 v_{n0}^L = l_{21n} (u_{n0}^L) + l_{22n} (v_{n0}^L); \quad (11)$$

$$s^2 u_{nm}^L = l_{11n} (u_{nm}^L) + l_{12n} (v_{nm}^L) + g_u (E_{rn,m-1}^L, \rho_{n,m-1}^L),$$

$$s^2 v_{nm}^L = l_{21n} (u_{nm}^L) + l_{22n} (v_{nm}^L) + g_v (E_{\theta n,m-1}^L, H_{n,m-1}^L), \quad n \geq 1, \quad m \geq 1;$$

$$\eta_e^2 (s + \gamma) E_{\theta nm}^L = -\frac{1}{r} \frac{\partial (r H_{nm}^L)}{\partial r} - \eta_e^2 s \rho_{e0} v_{nm}^L, \quad (12)$$

$$\eta_e^2 (s + \gamma) E_{rnm}^L = \frac{n(n+1)}{r} H_{nm}^L - \eta_e^2 \rho_{e0} u_{nm}^L;$$

$$(s + \gamma) \rho_{nm}^L = -sl_{n\rho} (u_{nm}^L, v_{nm}^L), \quad n \geq 1, \quad m \geq 1 \quad (13)$$

со следующими граничными условиями:

$$u_{n0}^L|_{r=r_1} = U_{1n}^L (s), \quad n \geq 0, \quad v_{n0}^L|_{r=r_1} = V_{1n}^L (s), \quad n \geq 1; \quad (14)$$

$$u_{nm}^L|_{r=r_1} = v_{nm}^L|_{r=r_1} = 0, \quad n \geq 0, \quad m \geq 1, \quad v_{nm}^L|_{r=r_1} = 0, \quad n \geq 1, \quad m \geq 1;$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r H_{n0}^L)}{\partial r} \Big|_{r=r_1} = -\eta_e^2 h_0^L [V_{1n}^L (s), e_{01n}^L (s)]|_{r=r_1}, \quad n \geq 1; \quad (15)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r H_{nm}^L)}{\partial r} \Big|_{r=r_1} = 0, \quad n \geq 1, \quad m \geq 1, \quad h_0^L (v, e) = s \rho_{e0} v + (s + \gamma) e. \quad (16)$$

3. Интегральное представление решений

Следуя работе [6], решения краевых задач (10), (15), (16) при известных правых частях, а также функции $E_{\theta nm}^L$ и E_{rnm}^L в (12) записываем так:

$$H_{nm} (r, \tau) = -\eta_e^2 \int_0^{r_1} \rho_{e0} (\xi) [G_{Hun}^c (r, \xi) \dot{u}_{nm} (\xi, \tau) + G_{Hvn}^c (r, \xi) \dot{v}_{nm} (\xi, \tau)] d\xi, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} E_{rnm} (r, \tau) &= \\ &= -\frac{n(n+1)}{r} \int_0^{r_1} \rho_{e0} (\xi) [G_{Hun}^c (r, \xi) u_{nms} (\xi, \tau) + G_{Hvn}^c (r, \xi) v_{nms} (\xi, \tau)] d\xi, \end{aligned} \quad (18)$$

$$E_{\theta nm} (r, \tau) = \rho_{e0} (r) v_{nms} (r, \tau) +$$

$$+ \int_0^{r_1} \rho_{e0} (\xi) [\Gamma_{Hun}^c (r, \xi) u_{nms} (\xi, \tau) + \Gamma_{Hvnr}^c (r, \xi) v_{nms} (\xi, \tau)] d\xi.$$

Здесь

$$G_{Hun}^c (r, \xi) = \xi \left[\tilde{G}_{Hn}^c (r, \xi) H (\xi - r) + \tilde{G}_{Hn}^c (\xi, r) H (r - \xi) \right],$$

$$G_{Hvn}^c (r, \xi) = \xi [G_{Hvn1}^c (r, \xi) H (\xi - r) + G_{Hvn2}^c (r, \xi) H (r - \xi)],$$

$$\Gamma_{Hunr}^c (r, \xi) = \Gamma_{Hun1}^c (r, \xi) H (\xi - r) + \Gamma_{Hun2}^c (r, \xi) H (r - \xi),$$

$$\Gamma_{Hvnr}^c (r, \xi) = \Gamma_{Hvn1}^c (r, \xi) H (\xi - r) + \Gamma_{Hvn2}^c (r, \xi) H (r - \xi),$$

где

$$\Gamma_{Hun1}^c (r, \xi) = -\frac{\beta_n (r_1, \xi) r^{n-1}}{(2n+1) \xi^n r_1^{2n+1}}, \quad \Gamma_{Hun2}^c (r, \xi) = \frac{n \xi^{n+1} \alpha_n (r_1, r)}{(2n+1) r_1^{2n+1} r^{n+2}},$$

$$\begin{aligned}
 G_{Hvn1}^c(r, \xi) &= -\frac{nr^n \alpha_n(r_1, \xi)}{(2n+1)r_1^{2n+1}\xi^{n+1}}, & G_{Hvn2}^c(r, \xi) &= \frac{\beta_n(r_1, r)\xi^n}{(2n+1)r^{n+1}r_1^{2n+1}}, \\
 \Gamma_{Hvn1}^c(r, \xi) &= -\frac{n(n+1)r^{n-1}\alpha_n(r_1, \xi)}{(2n+1)r_1^{2n+1}\xi^n}, & \Gamma_{Hvn2}^c(r, \xi) &= -\frac{n(n+1)\xi^{n+1}\alpha_n(r_1, r)}{(2n+1)r_1^{2n+1}r^{n+2}}, \\
 \tilde{G}_{Hn}^c(r, \xi) &= -\frac{\beta_n(r_1, \xi)}{(n+1)(2n+1)\xi^{n+1}r_1^{2n+1}}r^n, \\
 \alpha_n(x, y) &= x^{2n+1} - y^{2n+1}, & \beta_n(x, y) &= (n+1)x^{2n+1} + ny^{2n+1}.
 \end{aligned}$$

В формулах (17), (18) и далее $H(\xi)$ – функция Хевисайда, а дополнительный нижний индекс “s” соответствует результату применения к ней оператора (звездочка обозначает свертку по времени)

$$f_s(\tau) = f(\tau) - \gamma e^{-\gamma\tau} * f(\tau).$$

Отметим, что ядра этих интегральных представлений получены в квазистатистическом приближении ($\eta_e = 0$).

Поскольку задачи (9), (11), (14) подробно исследованы в работах [6] и [12], то далее в граничных условиях (1) положим, что

$$U_1(\theta, \tau) \equiv 0, \quad V_1(\theta, \tau) \equiv 0.$$

Тогда эти задачи становятся однородными. Следовательно, их решения тривиальные:

$$u_{n0}(r, \tau) \equiv 0, \quad v_{n0}(r, \tau) \equiv 0, \quad n \geq 0.$$

При этом решение «механической» части задач (9)–(16) при известных правых частях в соответствии с результатами работы [7] также представляем в интегральном виде:

$$u_{nm}(r, \tau) = \int_0^{r_1} G_{uun}(r, \xi, \tau) * f_{un,m-1}(\xi, \tau) d\xi + \int_0^{r_1} G_{uvn}(r, \xi, \tau) * f_{vn,m-1}(\xi, \tau) d\xi, \tag{19}$$

$$v_{nm}(r, \tau) = \int_0^{r_1} G_{vun}(r, \xi, \tau) * f_{un,m-1}(\xi, \tau) d\xi + \int_0^{r_1} G_{vvn}(r, \xi, \tau) * f_{vn,m-1}(\xi, \tau) d\xi;$$

$$\dot{u}_{nm}(r, \tau) = \int_0^{r_1} \Pi_{uun}(r, \xi, \tau) * f_{un,m-1}(\xi, \tau) d\xi + \int_0^{r_1} \Pi_{uvn}(r, \xi, \tau) * f_{vn,m-1}(\xi, \tau) d\xi, \tag{20}$$

$$\dot{v}_{nm}(r, \tau) = \int_0^{r_1} \Pi_{vun}(r, \xi, \tau) * f_{un,m-1}(\xi, \tau) d\xi + \int_0^{r_1} \Pi_{vvn}(r, \xi, \tau) * f_{vn,m-1}(\xi, \tau) d\xi,$$

где

$$\begin{aligned}
 f_{un,m-1}(\xi, \tau) &= \rho_{e0}(\xi) E_{rn,m-1}(\xi, \tau) + E_0(\xi) \rho_{n,m-1}(\xi, \tau), \\
 f_{vn,m-1}(\xi, \tau) &= \rho_{e0}(\xi) E_{\theta n,m-1}(\xi, \tau) - \gamma E_0(\xi) H_{n,m-1}(\xi, \tau), \\
 \Pi_{uun}(r, \xi, \tau) &= \dot{G}_{uun}(r, \xi, \tau), & \Pi_{uvn}(r, \xi, \tau) &= \dot{G}_{uvn}(r, \xi, \tau), \\
 \Pi_{vun}(r, \xi, \tau) &= \dot{G}_{vun}(r, \xi, \tau), & \Pi_{vvn}(r, \xi, \tau) &= \dot{G}_{vvn}(r, \xi, \tau).
 \end{aligned} \tag{21}$$

Явный вид ядер в (19) указан в [7]. Здесь он не приводится в силу громоздкости.

Входящая в (21) функция ρ_{nm} согласно (13) определяется так:

$$\rho_{nm}(r, \tau) = -\rho'_{e0}(r) u_{nms}(r, \tau) - \rho_{e0} \chi_{nms}(r, \tau),$$

где

$$\chi_{nm}(r, \tau) = \int_0^{r_1} X_{un}(r, \xi, \tau) * f_{un, m-1}(\xi, \tau) d\xi + \int_0^{r_1} X_{vn}(r, \xi, \tau) * f_{vn, m-1}(\xi, \tau) d\xi,$$

$$X_{un}(r, \xi, \tau) = \chi_n(G_{uun}, G_{vun}), \quad X_{vn}(r, \xi, \tau) = \chi_n(G_{uvn}, G_{vvn}),$$

$$\chi_n(u_n, v_n) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 u_n)}{\partial r} + \frac{n(n+1)}{r}.$$

Введенная здесь функция $\chi_n(u, v)$ имеет смысл коэффициента разложения в ряды по полиномам Лежандра коэффициента объемного расширения для поля перемещений с компонентами u и v .

Соотношения (17)–(20) являются рекуррентной по m последовательностью соотношений относительно коэффициентов рядов (3) и (8) для перемещений, напряженностей магнитного и электрического полей, а также плотности зарядов. Начальными условиями для нее, как следует из работы [6], являются следующие равенства:

$$\begin{aligned} u_{n0}(r, \tau) &\equiv 0, \quad v_{n0}(r, \tau) \equiv 0, \quad n \geq 0; \quad \rho_{n0}(r, \tau) \equiv 0, \\ H_{n0}(r, \tau) &= -\eta_e^2 G_{Hn1}^c(r) [\gamma e_{01n}(\tau) + \dot{e}_{01n}(\tau)], \\ E_{rn0}(r, \tau) &= -\frac{n(n+1)}{r} G_{Hn1}^c(r) e_{01n}(\tau), \\ E_{\theta n0}(r, \tau) &= \Gamma_{Hn1}^c(r) e_{01n}(\tau), \quad n \geq 1, \end{aligned} \tag{22}$$

где

$$G_{Hn1}^c(r) = \frac{r^n}{(n+1)r_1^{n-1}}, \quad \Gamma_{Hn1}^c(r) = \frac{r^{n-1}}{r_1^{n-1}}.$$

По полученным компонентам поля перемещений и электромагнитного поля могут быть найдены координаты вектора плотности тока с использованием (2).

4. Пример

Рассмотрим шар радиуса $r_1 = 2$, материал которого характеризуется следующими безразмерными параметрами:

$$\eta = 2.04; \quad \eta_e = 0.111 \cdot 10^{-4}; \quad \gamma = 5.06; \quad \alpha = 0.0806.$$

Начальные параметры электрического поля следующие: $E_0 = 1$, $\rho_{0e} = 2/r$. На границе полости напряженность электрического поля имеет вид: $e_{01} = -\tau_+ \sin \theta$, $\tau_+ = \tau H(\tau)$, а значит, коэффициенты разложения в ряды (5) вычисляются по формулам $e_{001} = -\tau_+$, $e_{00n} \equiv 0$, $n \geq 2$. Следовательно, отличными от нуля являются только коэффициенты рядов (3) с номером $n = 1$, поэтому на рис. 1–4 представлены только они.

Расчеты проводились по соотношениям (17)–(22) с учетом членов рядов (8) порядка α^3 . Интегралы в рекуррентных соотношениях находились численно. На рис. 1–4 представлены зависимости от радиуса r коэффициентов рядов (3)

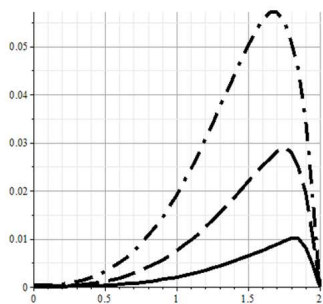


Рис. 1. Изменение u_1 по радиусу r

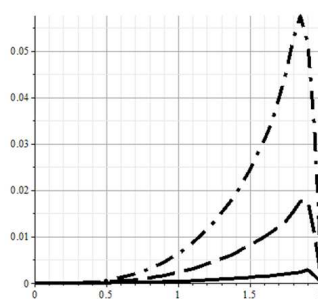


Рис. 2. Изменение v_1 по радиусу r

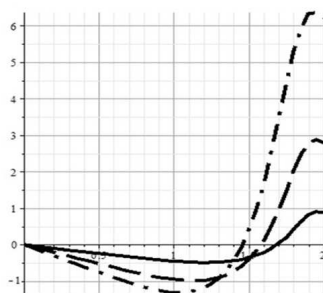


Рис. 3. Изменение $H_1 \cdot 10^{11}$ по радиусу r

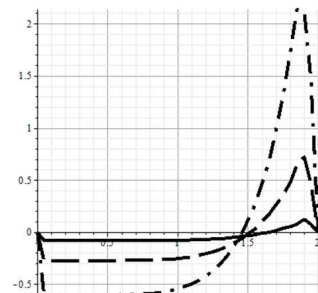


Рис. 4. Изменение $E_{\theta 1}$ по радиусу r

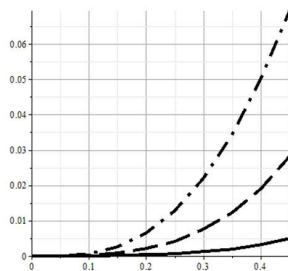


Рис. 5. Изменение u_1 во времени τ

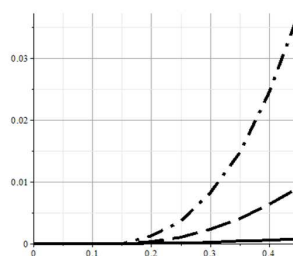


Рис. 6. Изменение v_1 во времени τ

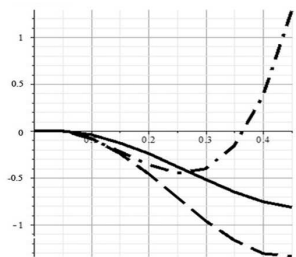


Рис. 7. Изменение $H_1 \cdot 10^{11}$ во времени τ

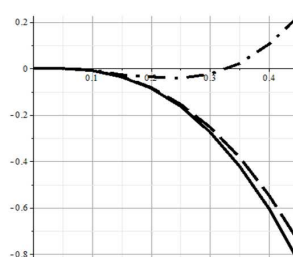


Рис. 8. Изменение $E_{\theta 1}$ во времени τ

с номером $n = 1$ для перемещений и компонент электромагнитного поля (им соответствуют ординаты): сплошные линии отвечают моменту времени $\tau = 0.2$, штриховые – $\tau = 0.3$, а штрихпунктирные – $\tau = 0.4$. Заметно увеличение индуцирова-

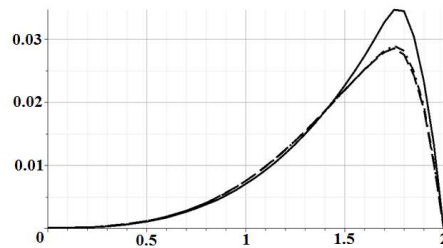


Рис. 9. Сходимость рядов по малому параметру

ние искомым механических и электромагнитных составляющих задачи с течением времени при приближении к внешней поверхности шара, а также индуцирование магнитного поля на самой поверхности шара.

Аналогичные зависимости, но уже от времени τ , изображены на рис. 5–8: сплошные линии отвечают точке $r = 0.5$, штриховые — $r = 1$, а штрихпунктирные — $r = 1.5$. Здесь также заметен рост искомым величин задачи при подходе к внешней границе шара.

Обоснованием учета только членов рядов (8) порядка α^3 является рис. 9, на котором продемонстрированы графики первых трех частичных сумм для функции $u_1(r, \tau)$ при $\tau = 0, 3$: сплошная кривая отвечает за $u_{11}\alpha$, штриховая — за $u_{11}\alpha + u_{12}\alpha^2$, а штрих-пунктирная — за $u_{11}\alpha + u_{12}\alpha^2 + u_{13}\alpha^3$. Из рисунка видно, что графики компонент, построенные с учетом двух и трех членов ряда, практически не различаются.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-08-00788).

Литература

1. Мельник В.Н. Теоремы существования и единственности обобщенного решения для одного класса нестационарных задач связанной электроупругости // Изв. вузов. Матем. — 1991. — № 4. — С. 24–32.
2. Aouadi M. Electromagneto-thermoelastic fundamental solutions in a two-dimensional problem for short time // Acta Mech. — 2005. — V. 174, No 3–4. — P. 223–240. — doi: 10.1007/s00707-004-0201-3
3. Ватумьян А.О. Фундаментальные решения в нестационарных задачах электроупругости // Прикл. матем. и механика. — 1996. — Т. 60, № 2. — С. 309–312.
4. Бабаев А.Э., Савин В.Г., Джуминский А.В. Аналитический метод решения задачи излучения нестационарных волн сферическим пьезопреобразователем // Теор. и прикл. мех. — 2003. — № 37. — С. 195–199, 213.
5. Tarlakovskii D.V., Vestyak V.A., Zemskov A.V. Dynamic processes in thermo-ectromagneto-elastic and thermo-elasto-diffusive media // Encyclopedia of Thermal Stresses. V. 2 — Dordrecht, Heidelberg, New York, London: Springer, 2014. — P. 1064–1071.
6. Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Нестационарное осесимметричное электромагнитное поле в движущемся шаре // Докл. РАН. — 2015. — Т. 464, № 5. — С. 544–547.
7. Vestyak V.A., Tarlakovskiy D.V. Elastic ball under non-stationary axially symmetrical volume forces // Z. Angew. Math. Mech. — 2017. — V. 97, No 1. — P. 25–37. — doi: 10.1002/zamm.201500292.
8. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1971. — 248 с.

9. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям: с формулами, графиками и математическими таблицами. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
10. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.
11. *Вестяк В.А., Лемешев В.А., Тарлаковский Д.В.* Распространение нестационарных радиальных возмущений от сферической полости в электро-магнитоупругом пространстве // Докл. РАН. – 2010. – Т. 434, № 2. – С. 186–188.
12. *Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В.* Нестационарная аэрогидроупругость тел сферической формы. – М.: Наука, 1990. – 264 с.

Поступила в редакцию
05.06.17

Вестяк Владимир Анатольевич, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Прикладные программные средства и математические методы»

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
Волоколамское шоссе, д. 4, г. Москва, 125993, Россия
E-mail: v.a.vestyak@mail.ru

Тарлаковский Дмитрий Валентинович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией динамических испытаний; заведующий кафедрой «Сопротивление материалов, динамика и прочность машин»

НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова
Мичуринский проспект, д. 1, г. Москва, 119192, Россия
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
Волоколамское шоссе, д. 4, г. Москва, 125993, Россия
E-mail: tdvhome@mail.ru

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2017, vol. 159, no. 3, pp. 306–317

Two-Dimensional Unsteady Waves in an Electromagnetoelastic Sphere

V.A. Vestyak^{a}, D.V. Tarlakovskii^{a,b**}*

^a*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, 125993 Russia*

^b*Research Institute of Mechanics, Moscow State University, Moscow, 119192 Russia*

E-mail: ^{*}v.a.vestyak@mail.ru, ^{**}tdvhome@mail.ru

Received June 5, 2017

Abstract

The propagation of unsteady kinematic or electromagnetic perturbations in an isotropic ball given on its surface has been studied. Along with the Maxwell equations and the linearized Ohm's law, we have studied the linear equations of motion for an elastic ball, the right side of which includes the Lorentz force as the body force. The radial and tangential

components of the unknown quantities expand into series of the Legendre and Gegenbauer polynomials. The initial-boundary value problem is solved by means of the Laplace transform by time and the expansion of the series coefficients into power series in a small parameter connecting the mechanical and electromagnetic characteristics of the continuum. The expansion in the power series allows to construct a recurrent sequence of boundary value problems with respect to the unknown components of the mechanical and electromagnetic fields. Each individual problem is solved by means of generalized convolutions of Green's functions with the unknown functions corresponding to the preceding terms of the recurrent sequence. The quasi-static analogs have been used as Green's functions for the electromagnetic field. For the mechanical field, the explicit form of Green's bulk functions found using computer algebra and complex analysis methods has been used.

Keywords: unsteady waves, electromagnetoelastic sphere, axial symmetry, coupled electromagnetic and mechanical fields, small parameter method, Laplace transform, Green's functions

Acknowledgments. The study was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 15-08-00788).

Figure Captions

- Fig. 1. Variation of u_1 by radius r .
- Fig. 2. Variation of v_1 by radius r .
- Fig. 3. Variation of $H_1 \cdot 10^{11}$ by radius r .
- Fig. 4. Variation of E_{θ_1} by radius r .
- Fig. 5. Variation of u_1 in time τ .
- Fig. 6. Variation of v_1 in time τ .
- Fig. 7. Variation of $H_1 \cdot 10^{11}$ by radius τ .
- Fig. 8. Variation of E_{θ_1} by radius τ .
- Fig. 9. Series convergence by the small parameter.

References

1. Mel'nik V.N. Existence and uniqueness theorems for a generalized solution of a class of nonstationary problems of coupled electroelasticity. *Sov. Math. (Izv. VUZov)*, 1991, vol. 35, no. 4, pp. 23–30.
2. Aouadi M. Electromagneto-thermoelastic fundamental solutions in a two-dimensional problem for short time. *Acta Mech.*, 2005, vol. 174, nos. 3–4, pp. 223–240. doi: 10.1007/s00707-004-0201-3.
3. Vatulian A.O. Fundamental solutions of non-stationary problems of electrodynamics. *Prikl. Mat. Mekh.*, 1996, vol. 60, no. 2, pp. 309–312. (In Russian)
4. Babaev A.E., Savin V.G., Dzhulinskii A.V. Analytical method for solving the problem of non-stationary wave radiation spherical piezoelectric transducer. *Teor. Prikl. Mekh.*, 2003, no. 37, pp. 195–199, 213. (In Russian)
5. Tarlakovskii D.V., Vestyak V.A., Zemskov A.V. Encyclopedia of Thermal Stresses. *Dynamic Processes in Thermo-Electro-Magneto-Elastic and Thermo-Elasto-Diffusive Media*. Vol. 2. Dordrecht, Heidelberg, New York, London, Springer, 2014, pp. 1064–1071.
6. Vestyak V.A., Tarlakovskii D.V. A nonstationary axially symmetric electromagnetic field in a moving sphere. *Dokl. Phys.*, 2015, vol. 60, no. 10, pp. 433–436. doi: 10.1134/S1028335815100079.
7. Vestyak V.A., Tarlakovskiy D.V. Elastic ball under non-stationary axially symmetrical volume forces. *Z. Angew. Math. Mech.*, 2017, vol. 97, no. 1, pp. 25–37. doi: 10.1002/zamm.201500292.

8. П'юшин А.А. Continuum Mechanics. Moscow, Izd. Mosk. Univ., 1971. 248 p. (In Russian)
9. Abramowitz M., Stigan I. Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. Moscow, Nauka, 1979. 832 p. (In Russian)
10. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M. Table of Integrals, Series, and Products. Moscow, Nauka, 1971. 1108 p. (In Russian)
11. Vestyak V.A., Lemeshev V.A., Tarlakovsky D.V. The propagation of time-dependent radial perturbations from a spherical cavity in an electromagnetoelastic space. *Dokl. Phys.*, 2010, vol. 55, no. 9, pp. 468–470. doi: 10.1134/S1028335810090119.
12. Gorshkov A.G., Tarlakovskii D.V. Nonstationary Aerohydroelasticity of Spherical Bodies. Moscow, Nauka, 1990. 264 p. (In Russian)

⟨ **Для цитирования:** Вестяк В.А., Тарлаковский Д.В. Двумерные нестационарные волны в электромагнитоупругом шаре // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2017. – Т. 159, кн. 3. – С. 306–317. ⟩

⟨ **For citation:** Vestyak V.A., Tarlakovskii D.V. Two-dimensional unsteady waves in an electromagnetoelastic sphere. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2017, vol. 159, no. 3, pp. 306–317. (In Russian) ⟩