Министерство образования и науки Российской Федерации

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

КАФЕДРА ТЕОРИИ И ТЕХНОЛОГИЙ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Специальность: Математика – 050201.65

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

Методика обучения теме «Многоугольники» в школьном курсе геометрии

Работа завершена:
"___"____________2015 г. _________________________________(И.И. Фаляхов)

Работа допущена к защите:
Научный руководитель
ученая степень, ученое звание,
должность
"___"____________2015 г. _________________________________(Е.Р.Садыкова)

Заведующий кафедрой
Научный руководитель
ученая степень, ученое звание,
должность
"___"____________2015 г. _________________________________(Л.Р. Шакирова)

Казань — 2015

Содержание

Введение

Математическое образование, получаемое в общеобразовательной школе, является важнейшим компонентом общего образования и общей культуры человека. В течение многих столетий математика является неотъемлемым элементом системы общего образования. Объясняется это уникальностью роли учебного предмета «Математика» в формировании личности. Образовательный и развивающий потенциал математики огромен.

В окружающем мире прекрасное сложно и многообразно. Восприятие красоты предполагает знакомство с её простейшими, первичными элементами. Актуальность выбранной темы исследования объясняется тем, что изучение многоугольников в планиметрии позволит ликвидировать кажущийся отрыв математики от реальности, поможет учащимся понять, что законы математики взяты из природы и объясняют природу.

Также можно отметить, что одной из главных целей изучения в школьном курсе геометрии считается развитие у школьников абстрактного мышления. Данной задаче в значительной мере способствует использование наглядных пособий, причем не только в младших классах, но и в старших. Большие возможности для осуществления данной задачи предоставляет тема «Многоугольники», а именно, самостоятельное изготовление учениками наглядных пособий. В результате изготовления моделей многоугольников, помимо теоретических знаний и умений, учащиеся закрепляют сформировавшиеся новые понятия при помощи чертежа и фактического решения задач на построение. При самостоятельном изготовлении моделей образ создается по частям, в силу этого с ними можно производить различные манипуляции. При этом все их свойства и особенности легко познаются и прочно закрепляются в памяти учащихся.

Исходя из вышесказанного проблема исследования состоит в следующем: рассмотрение методики изучения многоугольников в школьном курсе геометрии.

Эта проблема обусловила тему выпускной квалификационной работы: «Методика изучения темы «Многоугольники» в школьном курсе геометрии»

Объект исследования: изучение темы «Многоугольники» в курсе геометрии 7–9 классов.

Предмет исследования: методы и приемы изучения многоугольников в школьном курсе геометрии.

Цель: рассмотреть особенности методики изучения темы «Многоугольники» в курсе геометрии 7–9 классов.

С учетом цели исследования определены задачи:

- определить роль темы «Многоугольники» в школьном курсе математики;
- представить сравнительный анализ содержания темы в учебниках;
- разработать элективный курс по теме «Четырехугольники».

Методы исследования: анализ научно-теоретической литературы по проблеме исследования, сравнительный анализ, синтез результатов исследования.

Структура исследования: работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка литературы и приложений.

Глава 1. Теоретические основы методики изучения темы «Многоугольники» в курсе геометрии

1.1 Роль темы «Многоугольники» в школьном курсе математики

Тема «Многоугольники» занимает значительное место в программе по математике и изучается в течение всего периода основного обучения. Как правило, отдельные вопросы, относящиеся к теме, не выделяются в отдельные блоки, а переплетаются с изучением основного – арифметического материала.

Еще до школы практически все дети знакомятся с такими геометрическими фигурами, как круг, квадрат, треугольник, прямоугольник, овал. С ними же они сталкиваются и на уроках математики. Учителю необходимо использовать каждую ситуацию, когда дети в своей речи используют слова «кружок», «квадратик» и т.п., для замещения этих названий математическими «круг», «квадрат», «треугольник» и т.д.

Традиционно в школе изучение геометрии начинается с измерения геометрических величин. Это соответствует историческому ходу развития геометрии (об этом свидетельствует само название этой науки, которое в переводе с греческого обозначает «измерение земли»). Между тем психологи отмечают, что возраст младшего школьника наиболее благоприятен для развития пространственных представлений и пространственного мышления. Постижение геометрии у детей дошкольного и младшего школьного возраста идет в направлении от «геометрии формы» к «геометрии измерений», то есть от качественных операций по изучению формы предметов, их элементов, взаимного расположения, отношений и так далее к количественным операциям по измерению их характеристик. Уже в 1 – 3 классах учащиеся получают представления о простейших геометрических фигурах. Во втором классе дети считают элементы многоугольников: вершины, стороны, углы, измеряют их стороны. В третьем классе учащиеся разбивают прямоугольник на равные квадраты и используют его для иллюстрации переместительного закона умножения, с помощью задачи на вычисление периметра этого прямоугольника иллюстрируется распределительный закон умножения относительно сложения. В четвертом классе формируются представления о площади фигуры, основное внимание при этом уделяется вычислению площади прямоугольника и квадрата.

Детям указанного возраста интересен объект как таковой, им необходимо выделить отдельный объект из окружающего мира, и осуществляют они это через выделение его контура.

В 5 – 6 классах многоугольник выступает не только как средство изучения арифметики и элементов алгебры, но и как объект изучения. Большое внимание при этом уделяется развитию пространственных представлений учащихся, работе с изображением многоугольника.

В 7 - 9 классах изучают геометрические фигуры на плоскости, выделяется большое внимание многоугольникам, освоению их свойств и признаков, рассмотрению величин.

Этот раздел школьного курса геометрии выполняет определенные функции. В процессе его изучения ученики знакомятся с историей отдельных вопросов, узнают об их роли в жизнедеятельности человека. Еще при познании многоугольников идет формирование знаний, умений и навыков, надобных для освоения смежных предметов таких как физика, черчение, трудовое обучение и др.

Изучение свойств и признаков многоугольников в курсе планиметрии учителя находят широкое использование в курсе стереометрии. Поэтому педагогу надо помнить при организации текущих и итоговых повторений. В разных школьных учебниках геометрии термин многоугольников дается по-разному.

Например, в одних курсах планиметрии многоугольник A_1, ..., A_n трактуется как фигура, состоящая из отрезков A_1 A_2, ..., A_{n-1} A_n любые два из которых, имеющие общий конец, не лежат на одной прямой . Тогда, если рассмотреть площади многоугольников (прямоугольника, параллелограмма, треугольника и др.), тогда под всем из них понимается соответствующий плоский многоугольник.

А в других, элементарный многоугольник (треугольник, четырехугольник и др.), определяется с самого начала как часть плоскости, ограниченной простой замкнутой ломаной.

В учебниках геометрии А.Д.Александрова [1] и Л.С.Атанасяна [2] выделяется широкое применение практического опыта школьников, различные приложения узнаваемой теории этого курса.

1.2 Различные подходы к изучению многоугольников

В учебно-методической литературе отражены различные подходы к изложению теории многоугольников.

I подход. Дается общее понятие многоугольника, затем рассматриваются его частные виды. Введению понятия многоугольника предшествует изучение понятий ломаной, простой ломаной. Обычно реализация этой системы связана с введением понятия области и рассмотрением того факта, что простая замкнутая ломаная разбивает множество не принадлежащих ей точек плоскости на две области - внешнюю и внутреннюю. Многоугольник определяется как объединение простой замкнутой ломаной и ее внутренней области. Такой подход реализуется, в частности, в ранее действовавшем учебном пособии по геометрии А. Н. Колмогорова и др.

Это определение многоугольника, замечает академик А.Д. Александров [1] , сужает его объем. К многоугольникам не относится, например, фигура, изображенная на рисунке 1. Он предлагает рассматривать *многоугольник как замкнутую область конечных размеров, граница которой состоит из конечного числа отрезков.* Многоугольник называется *простым,* если его граница представляет собой одну простую замкнутую линию.

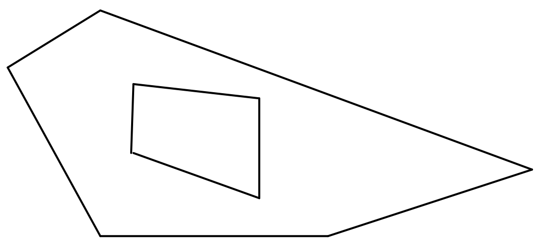


Рисунок 1.

В рамках этого подхода существует и концепция многоугольника как фигуры, образованной замкнутой ломаной линией .

II подход. Рассматриваются частные виды многоугольника - треугольник, четырехугольник, затем вводится понятие многоугольника. Реализация этого подхода связана с различными определениями многоугольника. В учебниках геометрии А. В. Погорелова [8], Л. С. Атанасяна и др. [2] реализуется трактовка многоугольника как фигуры, образованной замкнутой ломаной линией.

Реализация первого подхода сопряжена с большими трудностями, они обусловлены усвоением таких понятий, как область, граница и т.д. К тому же в курсе геометрии 7 класса используется только понятие треугольника. При первом подходе оказывается значительно большим по времени этап, предшествующий изучению теорем.

Изучение многоугольников обычно распределено по всему курсу планиметрии. Последовательность изучения материала в учебниках разных авторов различная (таблица 1).

Таблица 1

Автор учебника	Л.С. Атанасян и др.	А.В. Погорелов	А.Д. Александров и др.
7 класс	Треугольники, равенство треугольников, соотношения между сторонами и углами треугольника, сумма углов треугольника, прямоугольные треугольники.	Треугольники, равенство треугольнков, сумма углов треугольника, прямоугольный треугольник.	Треугольники, прямоугольник, построение прямоугольника.
8 класс	Многоугольники, четырехугольники, площади многоугольников, подобные многоугольники.	Четырехугольники, теорема Пифагора, соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике, неравенство треугольника	Ломаная, простая замкнутая ломаная, многоугольник, выпуклые и невыпуклые многоугольники, многоугольная фигура, четырехугольники, параллелограмм, ромб, трапеция, решение треугольника.
9 класс	Соотношения между сторонами и углами треугольника, вписанные и описанные многоугольники, правильные многоугольники.	Решение треугольников, выпуклые многоугольники, правильные многоугольники, площади некоторых видов многоугольников.	Правильные многоугольники, вписанные и описанные многоугольники.

1.3 Этапы изучения определений геометрических величин в школьном курсе математики

Демонстрация школьникам приложения математики к решению реалистически значительных задач способствует улучшению у них интереса к обучению, подталкивает творческую активность и инициативность в работе. Одним из главных звеньев во время учебы в школе является получение учащимися знаний, умений и навыков в распознавании геометрических величин. В содержимое Стандарта основного общего образования по математике (Приказ "О внесении изменений в федеральный компонент государственных образовательных стандартов начального общего, основного общего и среднего (полного) общего образования, утвержденный приказом Министерства образования Российской Федерации от 5 марта 2004 г. N 1089 ") выделяется время определению геометрических величин. Здесь рассматриваются понятия: длина отрезка, длина ломаной, длина окружности, периметр многоугольника, расстояние от точки до прямой, расстояние между параллельными прямыми; длина дуги, величина угла, градусная мера угла, соответствие между величиной угла и длиной дуги окружности, понятие о площади плоских фигур, площадь параллелограмма, треугольника и трапеции (основные формулы), формула Герона, формулы, выражающие площадь треугольника: через две стороны и угол между ними, через периметр и радиус вписанной окружности, площадь четырехугольника, площадь круга и площадь сектора, связь между площадями подобных фигур, объем тела, формулы объема прямоугольного параллелепипеда, куба, шара, цилиндра и конуса.

Анализ методической литературы современных книг по геометрии позволил определить этапы обучения измерений в школе: пропедевтический курс (1-6 классы), основная школа (7-9 классы), старшая школа (10-11 классы).

На первом этапе, который охватывает начальную школу и младшие классы среднего звена, учащиеся ознакомляются с разными геометрическими фигурами, получают вступительные знания изображения этих фигур при помощи линейки, циркуля, угольника. В ходе измерения учащиеся знакомятся на наглядно-интуитивном уровне. Школьники усваивают опыт непосредственного измерения, определения и сравнения длины отрезка, площадей плоских фигур, а также узнают разнородные единицы измерения и переводом из одних единиц измерения в другие. Здесь же учащиеся рассматривают формулы для косвенного измерения периметра многоугольника, площадей плоских фигур (квадрата, прямоугольника).

На втором этапе изучается больше теоретических фактов, посредством которых ведется косвенное измерение геометрических величин. На этом этапе нужно мотивировать переход от непосредственного к косвенному измерению. Также рассматриваются большинство теорем, способствующих производить косвенные измерения геометрических величин (длин отрезков, углов, площадей).

Глава 2. Сравнительный анализ темы «Многоугольники» в школьных учебниках геометрии

Проведем анализ теоретического, задачного материала по данной теме.

Для исследования были рассмотрены учебники геометрии, рекомендованные Министерством Образования и Науки Российской Федерации к применению в образовательном процессе в общеобразовательных учреждениях. Это учебники Атанасяна Л.С. и др. «Геометрия 7- 9» [2] ; Погорелов А.В. «Геометрия 7 – 9» [8] ; Александров А.Д. и др. «Геометрия 7, 8 – 9» [1] (учебники, впущенные Министерством Образования и Науки РФ Федерации к использованию в образовательном процессе в общеобразовательных учреждениях на 2013/2014 учебный год).

2.1 Учебник геометрии под редакцией Л.С. Атанасяна

Понятие многоугольника вводится в 8 классе в главе V «Четырехугольники». Рассматривается фигура, составленная из отрезков AB, BC, CD, …, EF, FA так, что смежные отрезки (т.е. AB и BC, BC и CD, …, FA и AB) не лежат на одной прямой, а несмежные отрезки не имеют общих точек. Такая фигура называется *многоугольником*. Точки A, B, C, …, E, F называются вершинами, а отрезки AB, BC, CD, …, EF, FA – сторонами многоугольника. Сумма длин всех сторон называется периметром многоугольника.

Многоугольник с n вершинами называется n-угольником, он имеет n сторон. На рисунке 5 приведены примеры многоугольников.

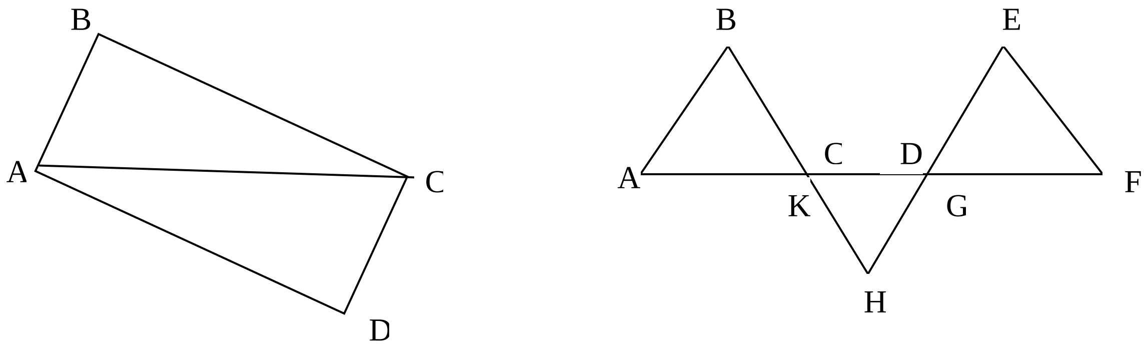


Рисунок 5.

Отрезок, соединяющий любые две не соседние вершины, называется *диагональю многоугольника*.

Любой многоугольник разделяет плоскость на две части, одна из которых называется внутренней, а другая – внешней областью. Фигуру, состоящую из многоугольника и его внутренней области, также называют многоугольником.

Вводится понятие выпуклого многоугольника.

Многоугольник называется выпуклым, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины.

Затем рассматриваются четырехугольники и в частности, параллелограмм и трапеция, а также частные виды параллелограмма: прямоугольник, ромб, квадрат.

Содержимое материала учебника отвечает требованиям стандарта.

В учебнике Л. С. Атанасяна и др. (8 кл.)[2] введению понятия четырехугольника предшествуют понятия многоугольника, его внутренней и внешней области, выпуклого многоугольника, а также теорема о сумме углов выпуклого n-угольника. (В учебнике А. В. Погорелова[8] эти понятия и факты рассматриваются позже).

В учебнике говорится, что каждый четырехугольник имеет четыре вершины, четыре стороны и две диагонали. Две несмежные стороны четырехугольника называются противоположными. Две вершины, не являющиеся соседними, называются также противоположными. Сообщается, что четырехугольники бывают выпуклыми и невыпуклыми.

В учебнике Л. С. Атанасяна и др. [2] четырехугольник вводится как частный случай многоугольника. Такой подход по сравнению с введением четырехугольника в учебниках А. В. Погорелова [8], А. Д. Александрова и др. [1] представляется менее удачным. Дело в том, что общее понятие многоугольника используется только в конце 9 класса, использовать же это понятие для введения четырехугольника вряд ли целесообразно, поскольку понятие четырехугольника проще понятия многоугольника.

В учебной литературе используются различные варианты изложения свойств и признаков параллелограмма. В учебнике Л.С. Атанасяна и др. [2] излагаются свойства параллелограмма, затем его признаки.

Свойства параллелограмма:

1. В параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны.
2. Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.

Признаки параллелограмма:

1. Если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник – параллелограмм.
2. Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то этот четырехугольник – параллелограмм.
3. Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник параллелограмм.

2.2 Учебник геометрии под редакцией А.В.Погорелова

Сначала вводится понятие *ломаной*.

Ломаной $A_1A_2A_3…A_n$ называется фигура, которая состоит из точек A_1, A_2, A_3, …, A_n и соединяющих их отрезков A_1A_2, A_2A_3, …, $A_{n-1}A_n$. Точки A_1, A_2, A_3, …, A_n называются вершинами ломаной, а отрезки A_1A_2, A_2A_3, …, $A_{n-1}A_n$ – звеньями ломаной.

Затем вводится понятие простой ломаной и замкнутой ломаной.

Ломаная называется *простой*, если она не имеет самопересечений. На рисунке 2 а) изображена простая ломаная, а на рисунке 2 б) – ломаная с самопересечением в точке В.

Ломаная называется *замкнутой*, если у нее концы совпадают. После этого вводится понятие многоугольника и его элементов.

Простая замкнутая ломаная называется многоугольником, если ее соседние звенья не лежат на одной прямой (рисунок 3).

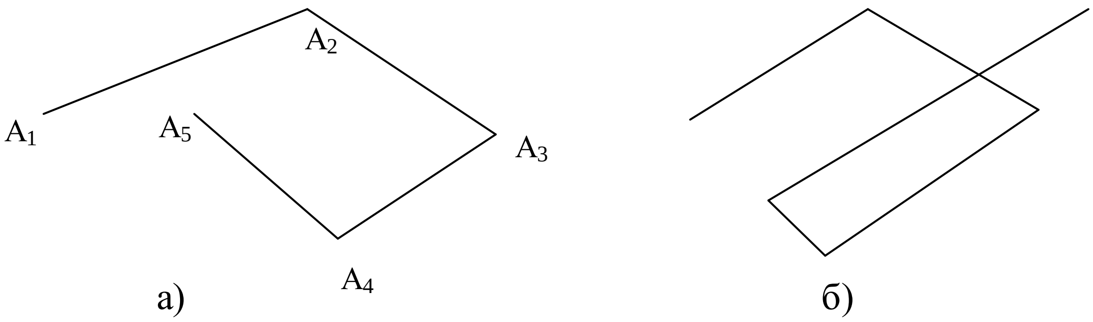


Рисунок 2.

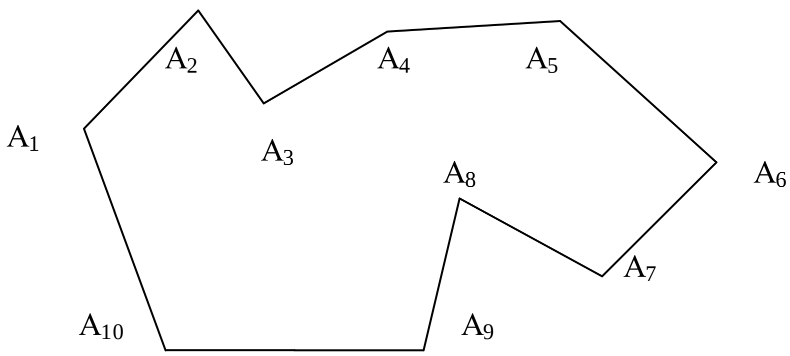


Рисунок 3.

Вершины ломаной называются вершинами многоугольника, а звенья ломаной – сторонами многоугольника.

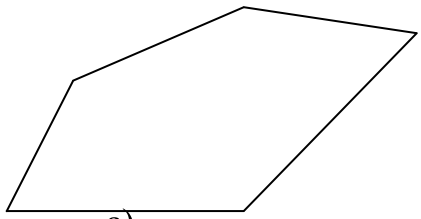
Отрезки, соединяющие не соседние вершины многоугольника, называются *диагоналями*.

Многоугольник с n вершинами и n сторонами называется n-угольником.

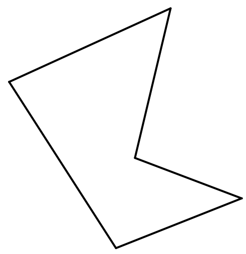
Плоским многоугольником или многоугольной областью называется конечная часть плоскости, ограниченная многоугольником.

Многоугольник называется выпуклым, если он лежит в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону. На рисунке 4 а) изображен выпуклый многоугольник, а на рисунке 4 б) – невыпуклый многоугольник.

Здесь же доказывается теорема: сумма углов выпуклого n-угольника равна 180°(n - 2).



а)



б)

Рисунок 4.

Затем рассматриваются правильные многоугольники.

Выпуклый многоугольник называется правильным, если у него все стороны равны и все углы равны.

Здесь же вводятся понятия вписанного в окружность многоугольника и описанного около окружности. Даются формулы для радиусов окружностей, вписанных и описанных около правильных многоугольников, рассматривается построение некоторых правильных n-угольников ($n = 3$, $n = = 6$, $n = 4$).

В учебнике формулируется также теорема о подобии правильных выпуклых многоугольников.

Объяснение понятия площади ведется аксиоматически, то есть понятие задается через проведение определенных свойств. Метрические свойства окружности традиционно связаны с определением правильных многоугольников, вписанных в окружность или описанных около нее. К использованию измерений в усвоении геометрии снова автор обращается лишь при изучении тем «Соотношение между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике» и «Решение треугольников». Как показало исследование, автор не делает акцент на практической направленности геометрии.

В учебнике А. В. Погорелова (8 кл.) [8] понятие четырехугольника вводится непосредственно через определение.

Определение. Четырехугольником называется фигура, которая состоит из четырех точек и четырех последовательно соединяющих их отрезков. При этом никакие три из данных точек не должны лежать на одной прямой, а соединяющие их отрезки не должны пересекаться.

Данные точки называются вершинами четырехугольника, а соединяющие их отрезки – сторонами четырехугольника.

В учебниках А. В. Погорелова [8] признаки параллелограмма предшествуют изложению его свойствам. Предлагается и вариант, в котором признаки чередуются со свойствами. Свойства параллелограмма могут быть сформулированы самими учащимися в процессе выполнения упражнений. Например, свойство сторон параллелограмма может быть выделено в результате выполнения следующего упражнения: «ABCD - параллелограмм. Докажите, что треугольники ABC и CDA равны». Указанное упражнение способствует усвоению определения параллелограмма (часто подобные упражнения в учебниках отсутствуют, в них обычно приводятся более сложные упражнения, выполнение которых у многих учащихся вызывает трудности). После выполнения приведенного упражнения учащиеся без труда формулируют свойство сторон параллелограмма .

При изучении теоремы, выражающей свойство углов параллелограмма, можно предложить упражнение: *«В параллелограмме ABCD* $\angle A = 60°$*. Вычислите все его углы».* Выполнение этого упражнения основывается на определении параллелограмма и свойстве параллельных прямых. Решив задачу, учащиеся замечают, что противоположные углы параллелограмма равны, а сумма углов, прилежащих к одной стороне параллелограмма, равна 180°. Приведенное упражнение дает способ доказательства теоремы, отличный от способа, используемого в учебнике. В учебнике Л.С. Атанасяна и др., [2] а также и в учебнике А.В. Погорелова [8], доказательство этой теоремы основывается на признаках равенства треугольников. Между тем ее доказательство может быть таким: $\angle A + \angle B = 180°$, $\angle B + \angle C = 180°$ (по свойству внутренних односторонних углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей), отсюда $\angle A = \angle C$. Если изложение теории начинается со свойств параллелограмма, то признаки будут выступать как утверждения, обратные изученным теоремам. При изучении признаков следует обратить внимание на формирование умения видеть ситуации, в которых применима теорема. Обычно в учебниках сразу предлагают упражнения, выполнение которых уже предполагает владение этим умением. Это вызывает трудности у многих учащихся. Поэтому желательно создавать ситуации, в результате которых формируется данное умение.

2.3 Учебник геометрии под редакцией А. Д. Александрова

Данная тема изучается в 8 классе в 1 главе «Площади многоугольных фигур» . Как и у предыдущих учебных изданиях в учебнике А.Д. Александрова [1] тема «Многоугольники» начинается с понятия ломаной.

Ломаной линией, или, короче, *ломаной* называется конечная последовательность отрезков, такая, что один из концов первого отрезка служит концом второго, другой конец второго служит концом третьего и т.д. Так на рисунке 5а) изображена ломаная ABCDEFGH. Концы ломаной могут совпадать, тогда называется *замкнутой.* Рисунок 5б).

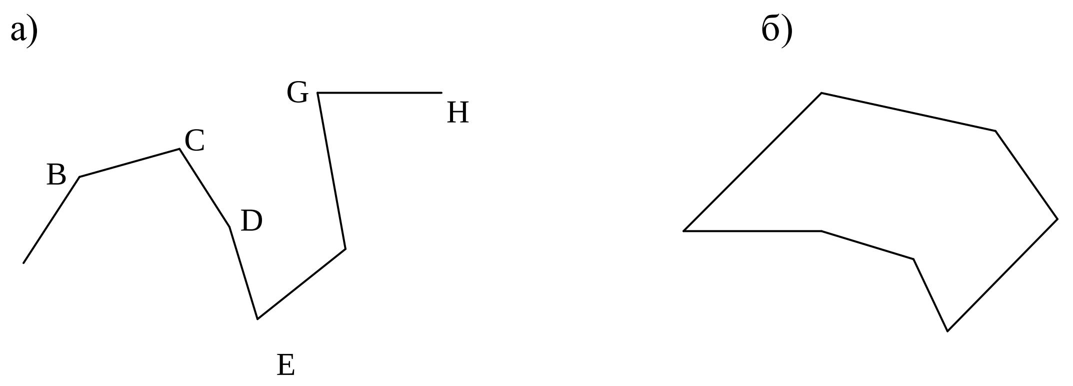


Рисунок 5

Затем вводится понятие многоугольника.

Простая замкнутая ломаная вместе с частью плоскости, ограниченной ею, называется *многоугольником*. Сама ломаная называется *границей* этого многоугольника, составляющие её отрезки – его *сторонами* , а концы этих отрезков – его *вершинами.*

Здесь же рассматривается понятие угла многоугольника и дается теорема с доказательством.

В каждой вершине многоугольника его стороны задают некоторый угол многоугольника. Он может быть как меньше развернутого, так и больше развернутого.

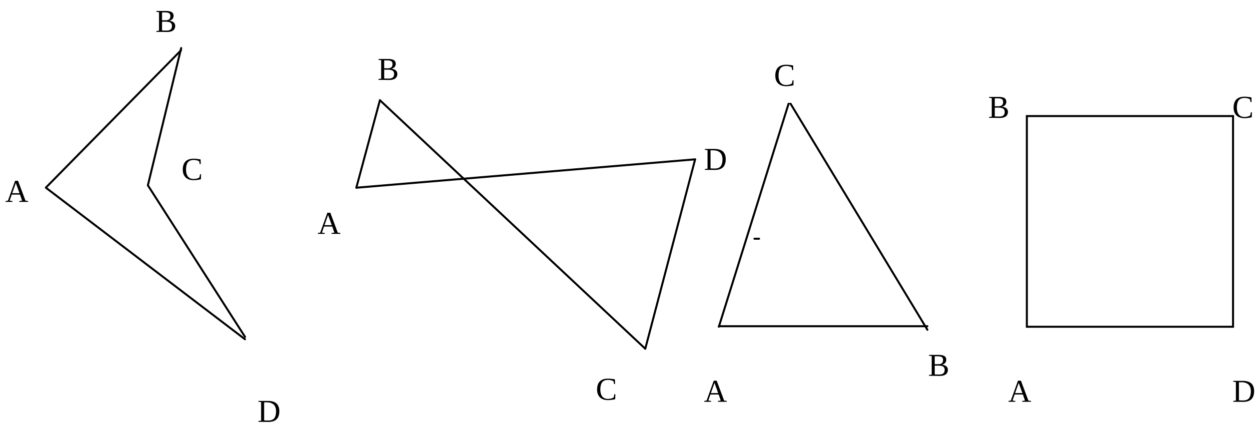
Определение выпуклого многоугольника можно наглядно истолковать так: выпуклый многоугольник можно вырезать из плоскости, разрезая ее по прямым (как из листа бумаги, разрезая его до краев). Многоугольники, которые не являются не выпуклыми, так и называются невыпуклые многоугольники.

Потом дается три свойства выпуклого многоугольника без доказательства. После рассмотрения темы «Четырехугольники» начинается изучение многоугольников. Объяснение понятия площади ведется аналогично, то есть понятие задается через проведение определенных свойств.

Учащиеся уже знакомы с некоторыми видами четырехугольников, поэтому перед тем, как ввести понятие четырехугольника, можно предложить учащимся построить любой четырехугольник. Рассматривая построенные фигуры, учащиеся делают вывод: четырехугольник - фигура, образованная четырьмя точками и четырьмя отрезками, последовательно соединяющими эти точки.

Затем можно предложить упражнения на распознавание четырехугольников. Какие из фигур, изображенных на рисунке 6, являются четырехугольниками?

Фигура, изображенная на рисунке 6 в), образована четырьмя точками и четырьмя отрезками, последовательно соединяющими их, но три точки A, B, C лежат на одной прямой. Фигуру (рис. 6 б) образуют четыре точки A, B, C, D, никакие три из которых не лежат на одной прямой, и четыре отрезка, но отрезки AD и BC пересекаются. Такие фигуры, хотя и образованы четырьмя точками и четырьмя отрезками, последовательно их соединяющими, не относят к четырехугольникам.



а) б) в) г)

Рисунок 6.

Так постепенно уточняется содержание понятия четырехугольника. Затем вводятся понятия соседних и противолежащих вершин, диагоналей четырехугольника, соседних и противолежащих сторон.

Возможен и иной подход к введению понятия четырехугольника: учитель показывает учащимся заранее приготовленный им плакат с рисунками различных фигур, на котором изображены треугольники, четырехугольники, пятиугольники и т. д., и просит выделить фигуры, образованные по одному и тому же признаку. В процессе анализа группы фигур, образованных четырьмя точками и четырьмя отрезками, последовательно соединяющими их, выделяется содержание понятия четырехугольника.

Конкретные подходы могут быть разными, однако для каждого из них характерным является такая организация учебной деятельности школьника, которая позволяет ему принимать активное участие в анализе содержания изучаемого понятия. Указанная методика введения понятия четырехугольника может быть использована и в рамках учебника А. Д. Александрова и др. [1], однако надо иметь в виду, что четырехугольник в данном пособии трактуется как часть плоскости.

Учебное пособие под редакцией Л.С. Атанасяна	Учебное пособие под редакцией А.В. Погорелова	Учебное пособие под редакцией А.Д. Александрова
На изучение темы «Четырехугольники» отводится 14 часов. Вводятся понятия многоугольника (*это фигура, составленная из отрезков так, что смежные отрезки не лежат на одной прямой, а несмежные отрезки не имеют общих точек*), параллелограмма, трапеции, прямоугольника, ромба, квадрата и их свойств. Ряд теоретических положений формулируется и доказывается в ходе решения задач. Понятие многоугольника вводится на основе наглядного представления.	На изучение темы отводится 20 часов. Вводятся понятия параллелограмма, трапеции, прямоугольника, ромба, квадрата и их свойств.	На изучение данной темы отводится 14 часов. Вводятся понятия многоугольника, четырехугольника. Дается понятия параллелограмма, трапеции, прямоугольника, ромба, квадрата и их свойств. Ряд теоретических положений формулируется и доказывается в ходе решения задач.
На изучение темы «Площади фигур» от-	В данном учебном пособии эта тема в 8	В данном учебном пособии темы «Много-

водится 14 часов. В данной теме изучаются следующие понятия: 1. <u>*Площадь многоугольника*</u> . *Это величина той части плоскости, которую занимает многоугольник.* Так же рассматриваются свойства площадей: а) равные многоугольники имеют равные площади б) если многоугольник составлен из нескольких многоугольников, то его площадь равна сумме площадей этих многоугольников в) площадь квадрата равна квадрату его стороны 2. *Площадь прямоугольника* . Площадь прямоугольника равна произведению его смежных сторон. $S = a \cdot b$ <u>Доказательство</u>. Достроим прямоугольник до квадрата со стороной $a + b$. По свойству площадь квадрата равна $(a+b)^2$. с другой стороны, этот квадрат составлен из данного прямоугольника с пло-	классе не изучается.	угольники» и «Площади фигур» изучаются в разных параграфах. В данной теме изучаются следующие понятия: 1. <u>Площадь прямоугольника.</u> Площадь прямоугольника со сторонами a и b вычисляется по формуле $S = ab$ <u>Доказательство.</u> Для этого сначала докажем, что площади двух прямоугольников с равными основаниями относятся как их высоты. Пусть $ABCD$ и AB_1C_1D – два прямоугольника с общим основанием AD (см. Приложение 2а). Пусть S и S_1 – их площади. Докажем, что $\frac{S}{S_1} = \frac{AB}{AB_1}$. Разобьем сторону AB прямоугольника на большое число n равных частей, каждая из них равна $\frac{AB}{n}$. Пусть m – число точек деления, которые лежат на стороне AB_1 . Тогда $(\frac{AB}{n}) \cdot m \le AB_1 \le (\frac{AB}{n}) \cdot (m+1)$ Отсюда, разделив на AB ,получим:

щадью S, из равного ему с площадью S и двух квадратов с площадями a^2 и b^2. По свойству имеем, $(a+b)^2 = S + S + a^2 + b^2$, или $a^2+2ab+b^2 = 2S + a^2 + b^2$. отсюда получаем: $S = ab$. 3. *Площадь параллелограмма.* Площадь параллелограмма равна произведению его основания a на высоту h. $S = ah$ 4. *Площадь треугольника*. Площадь треугольника равна половине произведения основания a на высоту h. 5. *Площадь трапеции*. Площадь трапеции равна произведению полусуммы ее оснований a и b на высоту h. $S = \frac{1}{2}(a+b)\cdot h$ Основная цель – сформировать у учащихся понятие площади многоугольника, развить умение вычислять площади фигур, применяя изученные свойства и формулы.		$\frac{m}{n} \le \frac{AB_1}{AB} \le \frac{m}{n} + \frac{1}{n}$. (1) Проведем через точки деления прямые, параллельные основанию AD. Они разобьют прямоуголь- ник $ABCD$ на n равных прямоугольников. Каждый из них имеет площадь $\frac{S}{n}$. Прямоугольник AB_1C_1D содержит первые m прямоугольников, считая снизу, и содержаться в $m+1$ прямоугольниках. Поэтому $(\frac{S}{n})\cdot m \le S_1 \le (\frac{S}{n})\cdot(m+1)$. Отсюда $\frac{m}{n} \le \frac{S_1}{S} \le \frac{m}{n} + \frac{1}{n}$.(2) Из неравенств (1) и (2) мы видим, что оба числа $\frac{AB_1}{AB}$ и $\frac{S_1}{S}$ заключены между $\frac{m}{n}$ и $\frac{m}{n}+\frac{1}{n}$. Поэтому они отличаются не более чем на $\frac{1}{n}$. А так как n можно взять сколь угодно большим числом, то это может быть только при $\frac{S}{S_1} = \frac{AB}{AB_1}$. Возьмем теперь квадрат, являющийся единицей площади, прямо-

		угольник со сторонами 1, a и прямоугольник со сторонами a , b . Сравнивая их площади, по доказанному будем иметь: $\frac{S'}{1}=\frac{a}{1}$ и $\frac{S}{S'}=\frac{b}{1}$. Перемножая эти неравенства почленно, получим: $S=ab$ Площадь многоугольника. Для многоугольных фигур площадью называется положительная величина. Фигуры, имеющие одну и ту же площадь, называются равновеликими. 1) Площадь треугольника. Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов. 2) Площадь произвольного треугольника. Площадь треугольника равна половине произведения любой из его сторон и проведенной к ней высоты. 4. Площадь трапеции. Площадь трапеции равна произведению полу суммы ее оснований a и b на высоту h : $S=\frac{a+b}{2}\cdot h$ *Площадь параллелограмма .* Площадь параллело-

		грамма равна произведению его стороны a на высоту h, проведенную к этой стороне. $S = ah$ $S = \frac{1}{2}ah$
В данном учебном пособии к 9 классу эта тема уже полностью изучена.	В данном учебном пособии темы «Многоугольники» и «Площади фигур» изучаются в разных параграфах. На изучение темы «Многоугольники» отводится 12 часов. Определение вводится на основе термина «ломаная». Многоугольник – *это простая замкнутая ломаная.* Данная тема, помимо изучения многоугольников и их свойств, включает в себя ряд параграфов, не относящихся к теме «Многоугольники». На изучение темы «Площади фигур» отводится 12 часов. Изучаемые понятия: ***1.*** *Площадь многоугольника . Это положительная величина, численное значение которой обладает свойствами* (они указаны ранее в рассмотрении учебника под ред. Атанасяна)	В данном учебном пособии к 9 классу эта тема уже полностью изучена.

	2. *Площадь прямоугольника.* Площадь прямоугольника со сторонами a *и* b вычисляется по формуле $S = ab$. Доказательство. ○Для этого сначала докажем, что площади двух прямоугольников с равными основаниями относятся как их высоты. Пусть $ABCD$ и AB_1C_1D – два прямоугольника с общим основанием AD (см. Приложение 2а). Пусть S и S_1 – их площади. Докажем, что $\frac{S}{S_1} = \frac{AB}{AB_1}$.Разобьем сторону AB прямоугольника на большое число n равных частей, каждая из них равна $\frac{AB}{n}$. Пусть m – число точек деления, которые лежат на стороне AB_1. Тогда $(\frac{AB}{n}) \cdot m \le AB_1 \le (\frac{AB}{n}) \cdot (m+1)$. Отсюда, разделив на AB, получим: $\frac{m}{n} \le \frac{AB_1}{AB} \le \frac{m}{n} + \frac{1}{n}$. (1) Проведем через точки деления прямые,	

	параллельные основанию AD. Они разобьют прямоугольник $ABCD$ на n равных прямоугольников. Каждый из них имеет площадь $\frac{S}{n}$. Прямоугольник AB_1C_1D содержит первые m прямоугольников, считая снизу, и содержаться в $m+1$ прямоугольниках. Поэтому $(\frac{S}{n})\cdot m \le S_1 \le (\frac{S}{n})\cdot(m+1)$. Отсюда $\frac{m}{n} \le \frac{S_1}{S} \le \frac{m}{n}+\frac{1}{n}$. (2) Из неравенств (1) и (2) мы видим, что оба числа $\frac{AB_1}{AB}$ и $\frac{S_1}{S}$ заключены между $\frac{m}{n}$ и $\frac{m}{n}+\frac{1}{n}$. Поэтому они отличаются не более чем на $\frac{1}{n}$. А так как n можно взять сколь угодно большим числом, то это может быть только при $\frac{S}{S_1}=\frac{AB}{AB_1}$. Возьмем теперь квадрат, являющийся единицей площади, прямоугольник со сторонами 1, a и прямо-	

	угольник со сторонами a, b. Сравнивая их площади, по доказанному будем иметь: $\frac{S'}{1}=\frac{a}{1}$ и $\frac{S}{S'}=\frac{b}{1}$. Перемножая эти неравенства почленно, получим: $S=ab$ ***3.*** *Площадь параллелограмма.* Площадь параллелограмма равна произведению его стороны a на высоту h, проведенную к этой стороне. $S=ah$ ***4.*** *Площадь треугольника.* Площадь треугольника равна половине произведения его стороны a на проведенную к ней высоту h. $S=\frac{1}{2}ah$ ***5.*** *Площадь трапеции.* Площадь трапеции равна произведению полу суммы ее оснований a и b на высоту h: $S=\frac{a+b}{2}\cdot h$ Основная цель аналогична той, которая ставится в учебном пособии под редакцией Атанасяна.	

Доказательства теорем в данных учебниках приводятся в готовом виде.

Данные учебники имеют значительные различия. В учебнике под редакцией А.В. Погорелова [8] на изучение в 8 классе темы «Четырехугольники» отводится 20 часов, и понятие многоугольника не рассматривается. В учебнике Л.С. Атанасяна [2] на изучение в 8 классе этой темы отводится всего 14 часов, причем понятие многоугольников изучается в этом параграфе. В учебнике Александрова [1] также отводится как у Л.С.Атанасяна [2] 14 часов.

Изучение темы «Площади многоугольников» данные учебники изучают в разное время: в учебниках Л.С. Атанасяна [2] и А.Д.Александрова [1] данная тема изучается в 8 классе, и на нее отводится 14 часов, а в учебнике А.В. Погорелова [8] тема изучается в 9 классе, и на нее отводится 12 часов. Так же в этом параграфе дети знакомятся с понятием многоугольника.

Практические задания темы «Площади многоугольников», предлагаемые в учебнике Л.С. Атанасяна [2], в отличие от учебниках под редакцией А.В. Погорелова [8] и А.Д.Александрова [1], дифференцированы, т.е. в конце каждого пункта следует перечень практических задач по изученному материалу. В конце главы «Площади многоугольников» имеется список заданий, предлагаемых с целью обобщения темы. Он включает задания повышенной сложности, а также интересные задания для детей, интересующихся математикой. В учебниках под редакцией А.В. Погорелова [8] и А.Д. Александрова [1] сначала изучается весь теоретический материал по теме «Площади многоугольников», и только в конце главы представлен список практических заданий по изученной теме.

Еще одним различием учебников является наличие заданий, проверяющих не только знание формул, но также знание основных определений и свойств по теме «Площади многоугольников». В учебнике, предложенном А.Д. Александровым [1], количество таких заданий не превышает и четверти от общего объема практического материала. В основном, все задачи направлены на проверку знания учениками формул вычисления площадей фигур. Задания повышенной сложности также представлены в небольшом количестве. В учебнике, предлагаемом Л.С. Атанасяном [2], такого рода заданиям уделяется большее количество внимания. Это способствует развитию у детей логического мышления, смекалки и интереса к предмету.

Что касается оформления, то учебник под редакцией Л.С. Атанасяна [2] отличается достаточной красочностью и количеством наглядностей. Однако, сравнивая с учебником А.В. Погорелова [8], наглядности в учебнике Л.С. Атанасяна [2] меньшего масштаба, что порой доставляет неудобства.

Проанализировав методики подачи материала в учебниках, можно сделать вывод, что учебники под редакцией А.В. Погорелова [8] и А.Д. Александрова [1] изучает рассматриваемые темы более глубоко, однако многие из них написаны непонятным языком, что вызывает затруднения при их изучении. Более легкая трактовка определений и доказательств теорем представлена в учебнике под редакцией Л.С. Атанасяна [2]. Материал усваивается легче, несмотря на то, что объем часов, отведенных на изучение данных тем, меньше, чем в учебнике А.В. Погорелова [8].

Глава 3. Элективный курс по теме «Четырехугольники»

Данная программа элективного курса «Четырехугольники» предназначена для учащихся 8-х классов, изучающих геометрию в физико-математическом профилях. При разработке элективного курса использовались учебники геометрии Л.С. Атанасяна, А.В. Погорелова, А.Д. Александрова, Г.В. Апостолова.

3.1 Цели и задачи элективного курса

Цели курса:

1. Развитие интереса учащихся к изучению геометрии.
2. Формирование умения применять полученные знания при решении «нетипичных», нестандартных задач.

Задачи курса:

- дополнить знания учащихся теоремами прикладного характера, областью применения которых являются задачи;
- расширить и углубить представления учащихся о приемах и методах решения планиметрических задач;
- помочь овладеть рядом технических и интеллектуальных умений на уровне свободного их использования;
- развить интерес и положительную мотивацию изучения геометрии.

Общая характеристика предмета:

Данный элективный курс «Четырехугольники» разработан в рамках реализации концепции профильного обучения на старшей ступени общего образования и соответствует Государственному стандарту среднего образования по математике. При разработке данной программы учитывалось то, что элективный курс как компонент образования должен быть направлен на удовлетворение познавательных потребностей и интересов учащихся , на формирование у них новых видов познавательной и практической деятельности, которые не характерны для традиционных учебных курсов.

С давних времен геометрия служила источником развития не только математики, но и других наук. Законы математического мышления формировались с помощью геометрии. Многие геометрические задачи содействовали появлению новых научных направлений, и наоборот, решение многих научных проблем было получено с использованием геометрических методов. Современная наука и ее приложения немыслимы без геометрии и ее новейших разделов: топологии, дифференциальной геометрии, теории графов, компьютерной геометрии и др. Огромна роль геометрии в математическом образовании учащихся. Известен вклад, который она вносит в развитие логического мышления и пространственного воображения учеников. Курс геометрии обладает также чрезвычайно важным нравственным моментом, поскольку именно геометрия дает представление о строго установленной истине, воспитывает потребность доказывать то, что утверждается в качестве истины. Таким образом, геометрическое образование является важнейшим элементом общей культуры.

Научиться решать задачи по геометрии значительно сложнее, чем по алгебре. Это связано с обилием различных типов геометрических задач и с многообразием приемов и методов их решения.

Основная трудность при решении этих задач обычно возникает по следующим, причинам:

- планиметрический материал либо был плохо усвоен в основной школе, либо плохо сохранился в памяти;

- для решения задачи нужно знать некоторые методы и приемы решения, которые либо не рассматриваются при изучении планиметрии, либо не отрабатываются;

- в «нетипичных» задачах, в которых представлены не самые знакомые конфигурации, надо уметь применять известные факты и решать базисные задачи, которые входят как составной элемент во многие задачи.

По данным статистической обработки результатов ОГЭ, а также ЕГЭ планиметрические задачи вызывают трудности не только у слабых, но и у более подготовленных учащихся. Как правило, это задачи, при решении которых нужно применить небольшое число геометрических фактов из школьного курса в измененной ситуации, а вычисления не содержат длинных выкладок. Решая такую задачу, ученик должен в первую очередь проанализировать предложенную в задаче конфигурацию и увидеть те свойства, которые необходимы при решении.

Выходом из создавшегося положения может служить рассмотрение в рамках соответствующего элективного курса некоторых вопросов, которые достаточно часто встречаются в заданиях на экзаменах и которые вызывают затруднения. Предлагаемый курс «Четырехугольники» является практико-ориентированным и предназначен для учащихся 8 классов. Количество учебных часов - 16.

Основное содержание курса соответствует современным тенденциям развития школьного курса геометрии, идеям дифференциации, углубления и расширения знаний учащихся. Данный курс дает учащимся возможность познакомиться с нестандартными способами решения планиметрических задач, способствует формированию и развитию таких качеств, как интеллектуальная восприимчивость и способность к усвоению новой информации, гибкость и независимость логического мышления.

Структура курса представляет собой пять логически законченных и содержательно взаимосвязанных тем, изучение которых обеспечит системность и практическую направленность знаний и умений учеников. Разнообразный дидактический материал дает возможность отбирать дополнительные задания для учащихся различной степени подготовки. Все занятия направлены на расширение и углубление базового курса.

Основной тип занятий - практикум. Для наиболее успешного усвоения материала планируются различные формы работы с учащимися: *лекционно-семинарские занятия, групповые, индивидуальные формы работы.* Для текущего контроля на каждом занятии учащимся рекомендуется серия заданий, часть которых выполняется в классе, а часть - дома самостоятельно. Изучение данного курса заканчивается проведением итоговой контрольной работы.

	Тема курса	Кол-во часов
	Дополнительные сведения из геометрии четырехугольника	3
	Вписанные и описанные четырехугольники	3
	Теорема Птолемея	3
	Теорема Вариньона	3
	Решение задач по всему курсу	3
	Контрольная работа	1

СОДЕРЖАНИЕ ПРОГРАММЫ КУРСА

Тема 1. Общее понятие о четырехугольнике (3 **часа).** Метрические соотношения в четырехугольниках. Свойства произвольного четырехугольника. Виды четырехугольников. Равновеликость. Равносоставленность.

Методы обучения: лекция, объяснение, выполнение тренировочных упражнений.

Форма контроля: проверка задач для самостоятельного решения.

Тема 2. Вписанные и описанные четырехугольники (3 часа). Понятия вписанного и описанного четырехугольника. Свойства четырехугольников вписанного и описанного около окружностей.

Методы обучения; лекция, объяснение, выполнение тренировочных упражнений.

Формы контроля: проверка задач для самостоятельного решения; самостоятельная работа.

Тема 3. Теорема Птолемея (3 часа). Теорема Птолемея. Различные доказательства теоремы Птолемея.

Методы обучения: лекция, объяснение, выполнение тренировочных упражнений.

Форма контроля: проверка задач для самостоятельного решения.

Тема 4. Теорема Вариньона (3 часа). Бимедианы четырехугольника. Теорема Вариньона. Следствия из теоремы.

Методы обучения: лекция, объяснение, выполнение тренировочных упражнений.

Форма контроля: проверка задач для самостоятельного решения.

Решение задач по всему курсу (3часа).

Итоговый контроль (1 час).

3.2 Теоретический материал элективного курса

Тема 1. Общие сведения о четырехугольнике

Определение.

Четырехугольником называется многоугольник, имеющий четыре вершины (и четыре вершины);

- четырехугольник может быть выпуклым (рис.1) или невыпуклым (рис. 2);
- диагонали четырехугольника – отрезки, соединяющие две несмежные его вершины (на рисунках 1 и 2 – отрезки AC, BD).

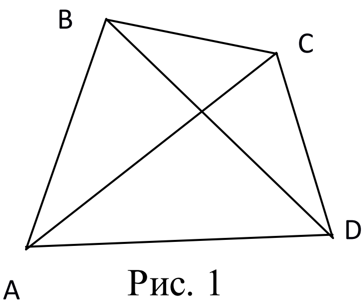


Рис. 1

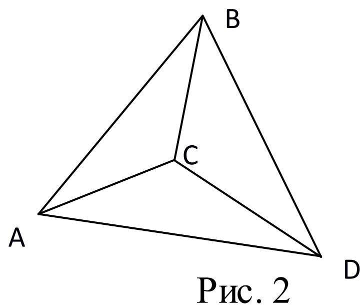


Рис. 2

Пусть F и F1, . . . , F_n — многоугольники, для которых выполняются следующие условия: (1) при каждом i и j ≠ i многоугольники F_i и F_j не имеют общих внутренних точек; (2) $F = \cup^n_{i=1} Fi$. Тогда говорят, что F разрезан на многоугольники F_i.

Пусть F и G — два многоугольника. Если F и G можно так разрезать на многоугольники $F_1, \ldots, F_n$ и $G_1, \ldots, G_n$ соответственно, что при каждом i = 1, . . . , n многоугольники F_i и G_i равны, то F и G называются **равносоставленными**.

Многоугольники F и G называются **равновеликими**, если их площади равны.

Равносоставленные многоугольники равновелики. Вопрос о равновеликости и равносоставленности выражается теоремой Бойяи–Валласа–Гервина.

Теорема. Два многоугольника равновелики в том и только том случае, когда они равносоставлены.

Как уже замечалось, равносоставленные многоугольники являются равновеликими. Еще этим пользовались в древности для доказательства математических утверждений, в том числе и теоремы Пифагора: «В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов: $c^2= a^2 + b^2$». Существует много доказательств теоремы Пифагора, в которых квадраты, построенные на катетах и гипотенузе прямоугольного треугольника, разрезаются так, чтобы каждой из частей квадрата, построенного на гипотенузе, соответствовала часть одного из квадратов, построенных на катетах.

Например , в книге «Венок знаний» индийского математика Бхаскара (1114-1185) приводится доказательство теоремы Пифагора в виде чертежа (рис. А и Б).

Попробуйте восстановить доказательства теоремы Пифагора, предложенные Бхаскара, на этих рисунках 3 и 4.

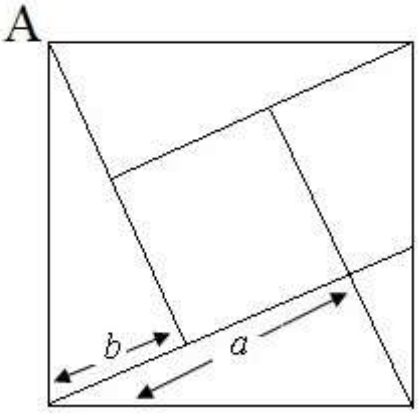


Рис. 3

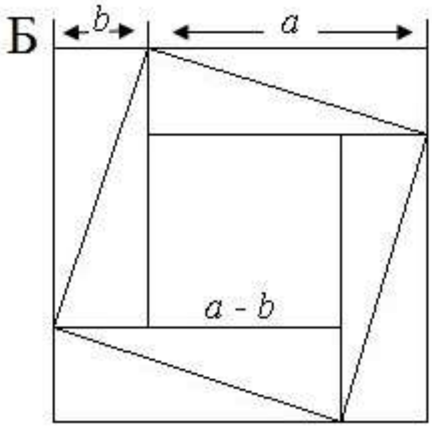


Рис. 4

Следует подчеркнуть, что такие рассуждения нельзя считать доказательством, если мы не докажем равенства во всех парах соответствующих частей. Как правило, в таких задачах это сделать несложно, но при большом количестве разрезаний такое доказательство требует немало времени.

Свойство 1. **Любая из сторон четырехугольника меньше суммы трех его других сторон.**

Правильность этого утверждения следует из свойства многоугольника: любая сторона многоугольника меньше суммы всех его других сторон.

Свойство 2. Теорема. **Сумма внутренних углов четырехугольника равна 360.**

Доказательство

Диагонали четырехугольника делят его на два треугольника. Например, на рисунке 5 диагональ AC делит четырехугольник ABCD на треугольники ABC и ACD. Тогда сумма внутренних углов четырехугольника равна сумме углов этих треугольников, т.е. 180·2=360.

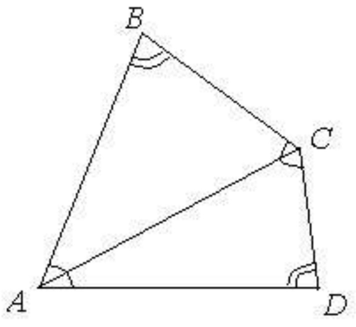


Рис. 5

Следствие 1. **Не существует четырехугольника, у которого все углы острые или все углы тупые.**

Утверждение легко доказывается от противного. 1) Пусть существует четырехугольник, у которого градусная мера каждого из углов больше 90. Тогда сумма всех углов этого четырехугольника больше, чем 90*4, т.е. не равна 360, что противоречит теореме. Следовательно , не существует четырехугольник, у которого все углы тупые. 2) Пусть существует четырехугольник, у которого градусная мера каждого из углов меньше 90. Тогда сумма всех углов этого четырехугольника меньше, чем 90*4, т.е. не равна 360, что противоречит теореме. Следовательно , не существует четырехугольника, у которого все углы острые.

1. В прямоугольнике ABCD точка M – середина стороны BC, точка N – середина стороны CD, P – точка пересечения отрезков DM и BN. Докажите , что углы MAN и BPM равны.

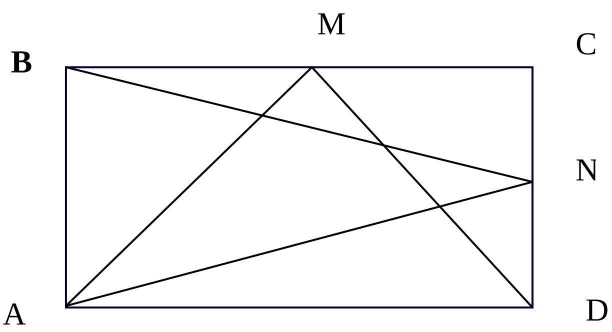


Рис. 6

Решение. Пусть точка *N'* – середина стороны *AB*. Отрезок *DN'* параллелен отрезку *BN*. Поэтому последовательно равны углы

.

А это и требовалось доказать.

Следствие 2. **Сумма внешних углов четырехугольника (по одному при каждой вершине) равна 360.**

Сумма внешних углов четырехугольника – это сумма смежных углов этого четырехугольника.

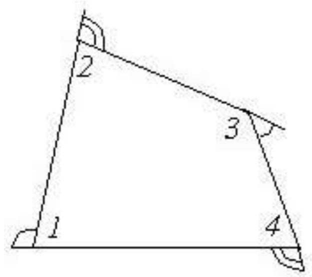


Рис. 7

(180 - ∠ 1) + (180 - 2) + (180 – 3) + (180 – 4) = 180*4 – (1 – 2 + 3 + 4) = 180*4 – 360= 360

Виды четырехугольников

Среди множества выпуклых четырехугольников выделяют такие виды четырехугольников.

Трапеция – четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие не параллельны (рис. 8).

Параллелограмм – четырехугольник, у которого противолежащие стороны попарно параллельны (рис. 9).

Ромб – параллелограмм , у которого все стороны равны (рис. 10).

Прямоугольник – параллелограмм, у которого все углы прямые (рис. 11).

Квадрат – прямоугольник , у которого все стороны равны (рис. 12).

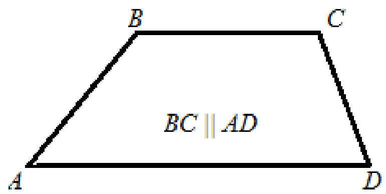


Рис. 8

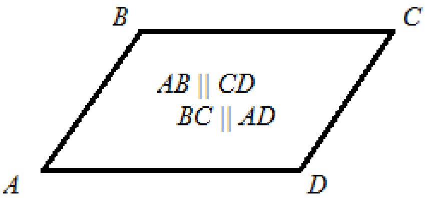


Рис. 9

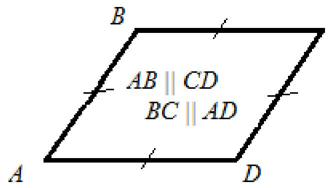


Рис. 10

Рис. 11

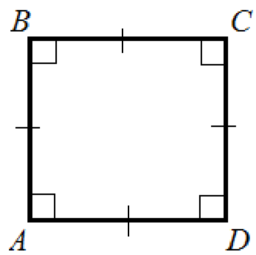


Рис. 12

Задачи .

1. Могут ли биссектрисы двух смежных углов четырехугольника быть параллельными?

2. Докажите, что если биссектрисы двух противолежащих углов четырехугольника параллельны или лежат на одной прямой, то два других угла - равны.

3. Диагонали четырехугольника взаимно перпендикулярны. Докажите, что площадь такого четырехугольника равна половине произведения его диагоналей.

4. Диагональ AC делит вторую диагональ четырехугольника ABCD на две равные части. Докажите: если AB>AD, то BC<DC.

5. Два противолежащих угла выпуклого четырехугольника – тупые. Докажите, что диагональ, соединяющая вершины этих углов, меньше второй диагонали.

6. Постройте четырехугольник по: а) сторонам и одной из диагоналей; б) сторонам и одному из углов.

7. Постройте четырехугольник ABCD по углам A и B, сторонам AB и AD, сумме сторон BC и CD.

Тема 2. Вписанные и описанные четырехугольники

ВПИСАННЫЙ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК

Напомним, четырехугольник называют вписанным в окружность, если все его вершины лежат на окружности . Эту окружность называют описанной вокруг данного четырехугольника. Центр такой окружности – точка пересечения серединных перпендикуляров ко всем сторонам четырехугольника.

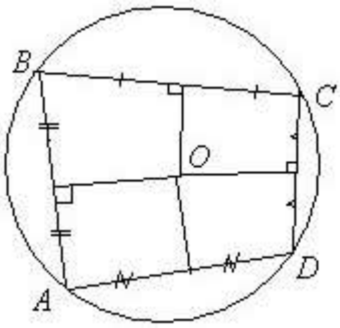


Рис. 13

Правильным будет и обратное утверждение. Если серединные перпендикуляры, проведенные ко всем сторонам четырехугольника, пересекаются в одной точке, то вокруг него можно описать окружность.

Теорема 1. **Сумма противолежащих углов вписанного четырехугольника равна 180°.** Вершины четырехугольника *ABCD* лежат на окружности (рис. 2.39). Докажем, что $\angle A+\angle C=\angle B+\angle D=180^o$.

Доказательство

1. $A=-\angle DCB;\ \angle C=-\angle DAB$ как вписанные.
2. Тогда $\angle A+\angle C=-\ (\angle\ DCB\ +\angle\ DAB)=-360^o=180^o$.
3. Сумма всех внутренних углов четырехугольника равна 360°.

Тогда $\angle B+\angle D=360^o-(\angle A+\angle C)=360^o-180^o=180^o$.

Теорема доказана.

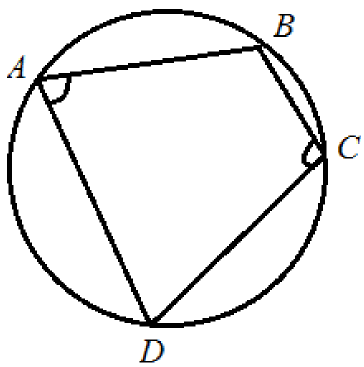


Рис. 14

Теорема 2 (обратная к теореме 1). **Если сумма двух противолежащих углов четырехугольника равна 180º, то вокруг него можно описать окружность.**

Пусть сумма углов A и C четырехугольника $ABCD$ равна 180º. Проведем окружность γ через точки A, B и D. Нужно доказать что вершина C лежит на этой окружности.

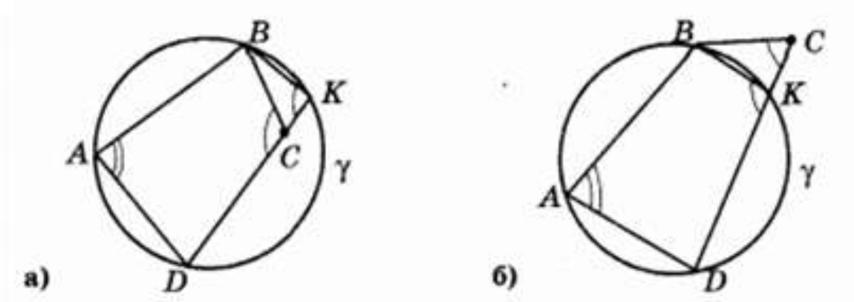


Рис. 15

Доказательство

Проведем от противного. Пусть C γ (рис. 15) и прямая DC пересекает окружность в точке K. По теореме 1 $\angle A+\angle K=180^o = \angle A+\angle C$. Тогда $\angle K+\angle C$. При этом для треугольника ВСК один из этих углов – внутренний, а другой – внешний, т.е. такое равенство невозможно.

Теорема доказана.

Следствие. **Вокруг прямоугольника всегда можно описать окружность.**

ОПИСАННЫЙ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК

Напомним: четырехугольник называют описанным вокруг окружности, если все его стороны касаются окружности. Т.е. окружность вписывают в четырехугольник. Центр такой окружности – точка пересечения биссектрис всех внутренних углов четырехугольника.

Правильным будет и обратное утверждение: если биссектрисы всех углов четырехугольника пересекаются в одной точке, то в него можно вписать окружность.

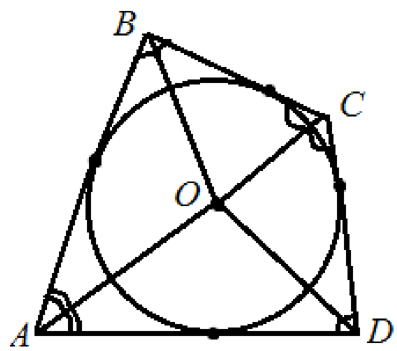
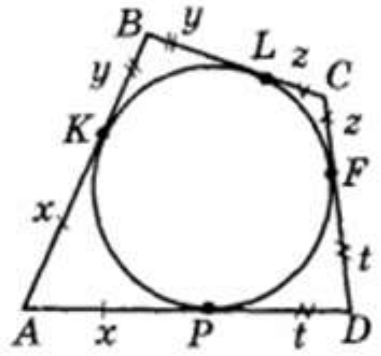


Рис. 16

Теорема 3. **Суммы противолежащих сторон четырехугольника, описанного вокруг окружности, равны.**

Пусть четырехугольник $ABCD$ вписана окружность. Докажем, что $AB+CD=BC+AD$.



Доказательство

Отрезки касательных, проведенных из одной точки к окружности, равны. Обозначим длины соответствующих отрезков как x, y, z и t. Тогда $AB+CD=(x+y)+(z+t)=(x+t)+(y+z)=AD+BC$.

Теорема доказана.

Рис. 17

Теорема 4 (обратная к теореме 3). **Если выпуклом четырехугольник суммы противолежащих сторон равны, то в него можно вписать окружность .**

Пусть для четырехугольника $ABCD$ выполняется соотношение $AB+CD=BC+AD$. Докажем, что в этот четырехугольник можно вписать окружность.

Доказательство

Проведем его от противного. Пусть окружность касается трех сторон данного четырехугольника и не касается его четвертой стороны CD.

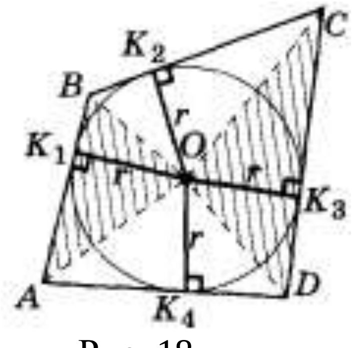
1) Из точки C проведем к этой окружности касательную, которая пересечет прямую AD в точке P. Согласно прямой теореме получим, что $AB+CP=BC+AP$.

2) $AB+CD=BC+AD$и $AB+CP=BC+AP$. Отнимем от первого равенства второе (или наоборот). Тогда $|CD-CP|=|AD-AP|$, т.е. $|CD-CP|=PD$, что противоречит неравенству для сторон треугольника CDP.

Вывод: точки P и D совпадают. Теорема доказана.

Следствие. **В ромб всегда можно вписать окружность.**

Опорная задача .



Площадь описанного четырехугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной в него окружности.

Дано: K_1, K_2, K_3, K_4– точки касания.

Доказать: $S=pr$.

1) $S=S_{\Delta AOB}+S_{\Delta BOC}+S_{\Delta COD}+S_{\Delta DOA}$.

Рис. 18

2) K_1, K_2, K_3, K_4 – точки касания, тогда $OK_1 \perp AB$,
$OK_2 \perp BC$, $OK_3 \perp CD$, $OK_4 \perp AD$ и $OK_1 = OK_2 = OK_3 = OK_4 = r$.

3) $S = - \quad + - \quad + - \quad + - \quad = - \, r\,(a + b + c + d) = pr.$

Тема 3. Теорема Птолемея

Произведение диагоналей вписанного четырехугольника равно сумме произведений противоположных сторон.

Доказательство.
Рассмотрим произвольный четырехугольник ABCD, вписанный в окружность.

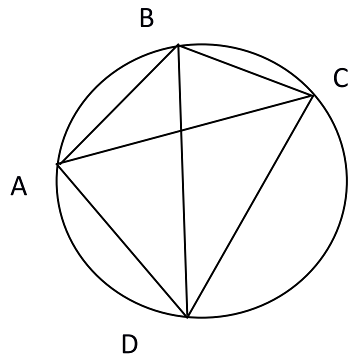


Рис. 19

Докажем, что справедливо равенство: AC·BD = AB·CD + BC·AD.

Для этого выберем на диагонали AC точку E так чтобы угол ABD был равен углу CBE.

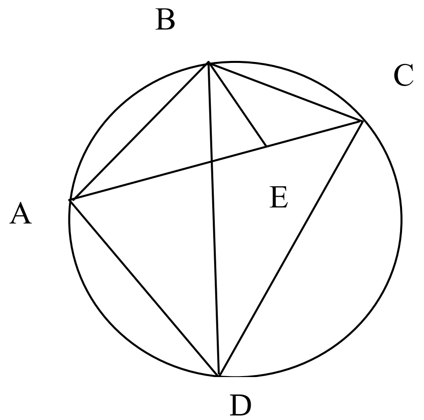


Рис. 20

Заметим, что треугольник ABD подобен треугольнику BCE. Действительно, у этих треугольников 2 равных угла: угол ABD равен углу CBE (по построению точке E), угол ADB равен углу ACB (эти углы являются вписанными углами , опирающимися на одну и ту же дугу). Отсюда справедлива пропорция: — = —; откуда вытекает равенство: BC·AD = EC·BD.

Заметим, что треугольник ABE подобен треугольнику BCD. Действительно, у этих треугольников 2 равных угла: угол ABE равен углу DBC (угол ABD и EBC равны по построению, угол DBE - общий), угол BAC равен углу BDC (эти углы являются вписанными углами , опирающимися на одну и ту же дугу). Отсюда справедлива пропорция: — = —; откуда вытекает равенство: AB·CD = AE·BD.

Складывая 2 равенства, получаем: AB·CD+BC·AD = AE·BD+EC·BD = (AE+EC)·BD=AC·BD.

Доказано .

Приведём ещё одно распространённое в доказательство теоремы с использованием инверсии.

Инверсия – преобразование плоскости, определённое следующим образом .

Пусть задана окружность с центром в точке O и радиусом R. Каждой точке A плоскости, отличной от точки O, поставим в соответствие точку A_1 на луче OA такую, что $OA \cdot OA_1 = R^2$.

Сначала докажем лемму .

Лемма. Пусть A_1 и B_1 – образы точек A и B соответственно при инверсии с центром O и радиусом R. Тогда треугольники OAB и OB_1A_1 подобны и

$$A_1B_1 = AB\frac{R^2}{OA \cdot OB}.$$

Доказательство леммы. По определению инверсии выполняются равенства $OA \cdot OA_1 = R^2$, $OB \cdot OB_1 = R^2$. Следовательно, $OA \cdot OA_1 = OB \cdot OB_1$, и поэтому $\frac{OA_1}{OB} = \frac{OB_1}{OA}$. Треугольники OAB и OA_1B_1 имеют общий угол при вершине O, и их стороны, идущие из этой вершины, пропорциональны. По второму признаку подобия треугольники OAB и OA_1B_1 подобны .

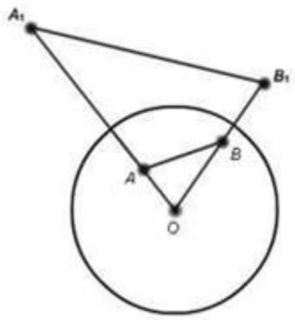


Рис. 21

Отсюда следует, что $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{OA_1}{OB}$. Из этого равенства $A_1B_1 = AB\frac{OA_1}{OB}$.Из определения инверсии $OA_1=\frac{R^2}{OA}$. Подставляя в выражение для A_1B_1 имеем $A_1B_1 = AB\frac{R^2}{OB\cdot OA}$.

Вывод теоремы Птолемея из леммы. Пусть четырехугольник *ABCD* вписан в окружность $\tilde{\omega}$. Рассмотрим инверсию с центром в точке *D*. Образом

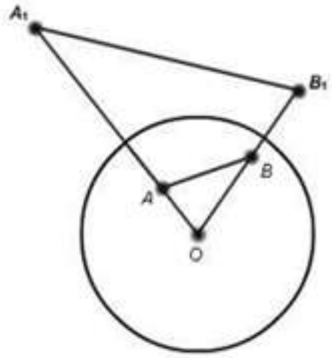


Рис. 22

окружности $\tilde{\omega}$ при этой инверсии (с некоторым радиусом *R*) будет прямая *l*, не содержащая точку *D*. Пусть A_1 образ точки *A* при данной инверсии, B_1 образ точки *B* при данной инверсии, C_1 образ точки *C*. Тогда $A_1C_1 = A_1B_1 + B_1C_1$.
По доказанной выше лемме
$A_1C_1 = AC\frac{R^2}{AD\cdot DC}, A_1B_1 = AB\frac{R^2}{AD\cdot DB}, B_1C_1 = BC\frac{R^2}{DB\cdot DC}$. Подставим эти выражения в равенство и получим

$$AC\frac{R^2}{AD\cdot DC} = AB\frac{R^2}{AD\cdot DB} + BC\frac{R^2}{DB\cdot DC}.$$

Сократив на R^2 и умножив равенство на $AD \cdot BD \cdot DC$, получим

$AC \cdot DB = AB \cdot DC + BC \cdot AD$. Что и требовалось доказать.

Задачи.

1) Каким должен быть четырехугольник, чтобы углы между биссектрисами внутреннего и внешнего его углов с общей вершиной были одинаковыми для всех вершин четырехугольника? Какая градусная мера таких углов?

2) Докажите, биссектрисы углов трапеции при пересечении образуют четырехугольник, вокруг которого можно описать окружность.

3) Докажите, что угол A вписанного четырехугольника ABCD равен его внешнему углу при вершине C.

4) В окружность вписан четырехугольник ABCD. Биссектрисы углов A и C пересекают окружность в точках E и P. Докажите, что прямая EP проходит через центр заданной окружности.

5) Докажите, что биссектриса угла вписанного четырехугольника при определенной вершине пересекает биссектрису внешнего угла при противоположной вершине в точке, лежащей на описанной вокруг этого четырехугольника окружности.

6) В окружность вписан четырехугольник ABCD. Продолжение сторон AB и CD пересекаются в точке M, а сторон AD и BC – в точке P. Докажите, что биссектрисы углов AMD и CPD взаимно перпендикулярны.

7) Диагонали четырехугольника ABCD, вписанного в окружность с центром O, - взаимно перпендикулярны. Через точки A , B , C и D провели касательные к данной окружности. Докажите, что образованный ими четырехугольник тоже является вписанным.

Тема 4. Теорема Вариньона.

Бимедианы четырехугольника — это отрезки, соединяющие середины противоположных сторон .

Одна из основных теорем о бимедианах четырехугольника принадлежит французскому механику и инженеру Пьеру Вариньону (1654 – 1722), написавшему учебник по элементарной геометрии (издан в 1731 г.), в котором эта теорема впервые и появилась.

Теорема Вариньона.

Теорема. Четырехугольник, образованный путем последовательного соединения середин сторон выпуклого четырехугольника, является параллелограмм, и его площадь равна половине площади данного четырехугольника.

Доказательство.

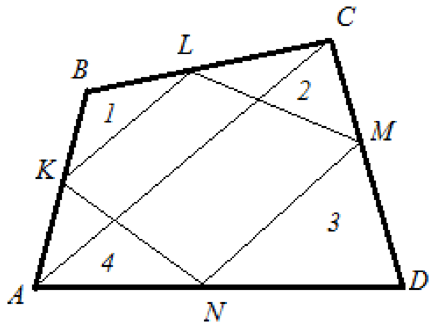


Рис. 23

Рассмотрим рис. 23. Одну из сторон четырехугольника KLMN, например KL. Так как KL является средней линией треугольника ABC, то KL||AC. По тем причинам MN||AC. Следовательно, KL||NM и KL = MN = AC/2. Таким образом, - параллелограмм. Этот параллелограмм называется параллелограммом Вариньона данного четырехугольника.

Средняя линия треугольника отсекает от него треугольник, площадь которого в четыре раза меньше площади исходного треугольника. Поэтому сама сумма площадей первого и третьего треугольников равна четверти площади всего четырехугольника. То же и относительно суммы площадей второго и четвертого треугольников. Поэтому площадь параллелограмма KLMN составляет половину площади четырехугольника ABCD. Теорема доказана.

Следствия из теоремы .

Следствие 1. Параллелограмм Вариньона является ромбом тогда и только тогда, когда в исходном четырехугольнике:

а) диагонали равны (Рис. 24);

б) бимедианы перпендикулярны (Рис. 25).

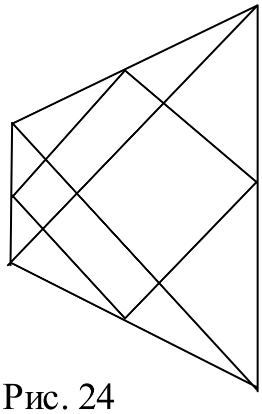


Рис. 24

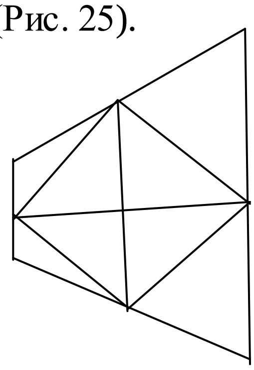


Рис. 25

Доказательство .

а) Так как диагонали исходного четырехугольника равны, то стороны параллелограмма Вариньона будут равны (используя свойство средних линий треугольников, образованных при пересечении диагоналей исходного четырехугольника). Параллелограмм Вариньона является ромбом (признак ромба) .

б) Бимедианы исходного четырехугольника — это диагонали параллелограмма Вариньона. Так как в параллелограмме диагонали перпендикулярны, то этот параллелограмм является ромбом (признак ромба).

Следствие 2. Параллелограмм Вариньона является прямоугольником тогда и только тогда, когда в исходном четырехугольнике:.

а) диагонали перпендикулярны (Рис. 26);

б) бимедианы равны (Рис. 27) .

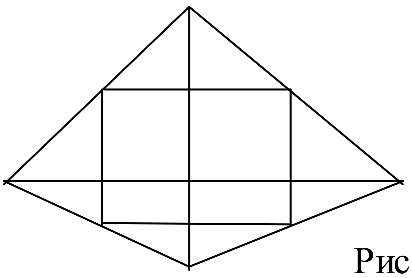


Рис. 26

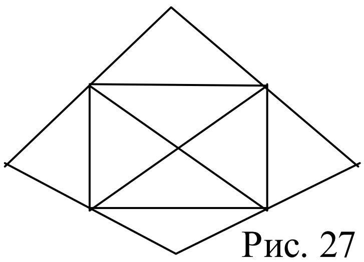


Рис. 27

Доказательство самостоятельно.

Следствие 3. Параллелограмм Вариньона является квадратом тогда и только тогда, когда в исходном четырехугольнике:

а) диагонали равны и перпендикулярны (Рис. 28);

б) бимедианы равны и перпендикулярны (Рис. 29).

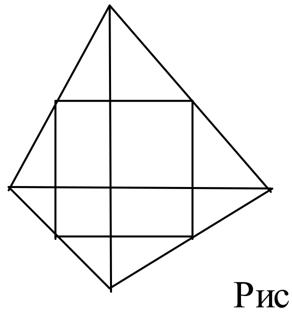


Рис. 28

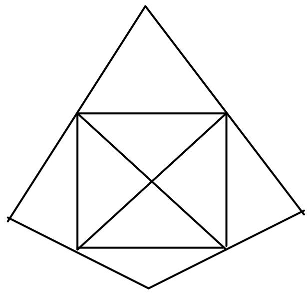


Рис. 29

Доказательство самостоятельно .

Следствие 4. Бимедианы четырехугольника и отрезок, соединяющий середины диагоналей, пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам .

Доказательство .

Пусть KM и LN – бимедианы ABCD, PQ – отрезок, соединяющий середины диагоналей AC и BD.

То, что бимедианы KM и LN точкой пересечения делятся пополам, следует из того что эти отрезки являются диагоналями параллелограмма Вариньона. Поэтому нам достаточно доказать , что отрезки PQ и LN их точкой пересечения делятся пополам.

Используя теорему о средней линии треугольника для соответствующих треугольников, имеем:

$LQ \| CD \| PN$ и $PL \| AB \| NQ$.

Тем самым, PLQN – параллелограмм. По свойству параллелограмма следует, что отрезки PQ и LN их точкой пересечения делятся пополам. Ч.т.д.

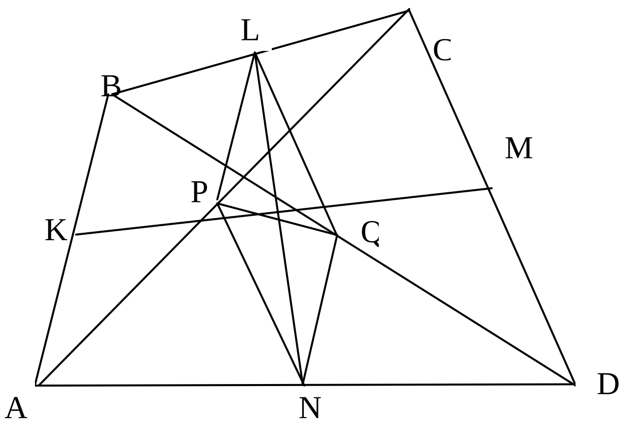


Рис. 29

Следствие 5.(теорема Эйлера).

Для четырехугольника сумма квадратов всех сторон равна сумме квадратов диагоналей плюс учетверенный квадрат отрезка, соединяющего середины диагоналей, то есть $AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2 = AC^2 + BD^2 + 4PQ^2$.

Доказательство .

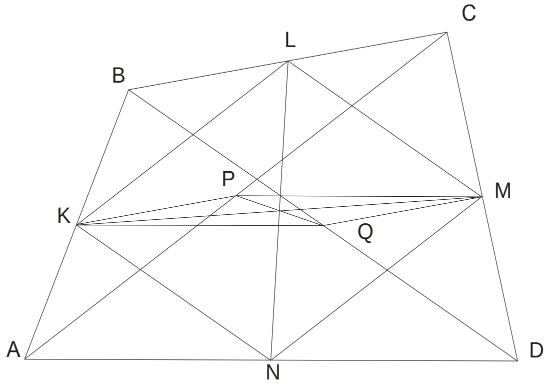


Рис. 30

Уже было отмечено что $LPNQ$ – параллелограмм .

Поэтому

$LN^2 + PQ^2 = 2(LP^2 + LQ^2) =$ ——— ;

В последнем равенстве мы дважды воспользовались теоремой о средней линии треугольника. Аналогично для параллелограмма $KPMQ$ имеем:

$PQ^2 + KM^2 =$ ———.

Кроме того,

$KN^2 + KM^2 =$ ———,

Так как $KLMN$ – параллелограмм Вариньона четырехугольника $ABCD$. Складывая первые два равенства и учитывая последнее, получаем соотношение Эйлера .

Следствие 6.(теорема о бабочках).

Суммы площадей накрест лежащих четырехугольников, образованных пересечением бимедиан LN и KM выпуклого четырехугольника $ABCD$ равны.

Доказательство .

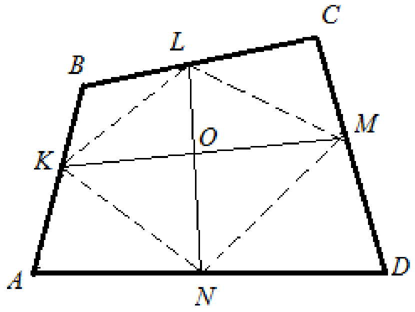


Рис. 31

Воспользуемся теоремой о средней линии треугольника. Получаем:

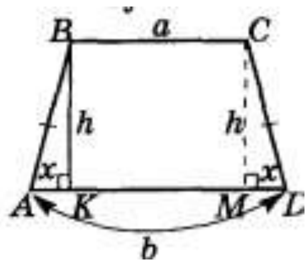
$S_{BKL} + S_{DNM} =$ ———— = ——— ———— $= S_{AKN} + S_{CLM}$.

Что и требовалось доказать .

Тема 5. Разбор задач.

Задача 1.

В равнобокой трапеции высота, проведенная из конца меньшого основания, делит больше основание на отрезки, равные полуразности и полусумме оснований .



Дано*:* *BC*||*AD, BC = a, AD = b, AB = CD, BK* ⊥ *AD.*

Доказать: *AK = (b – a) : 2, KD = (a + b) : 2.*

Проведем: СМ ⊥ *AD.*

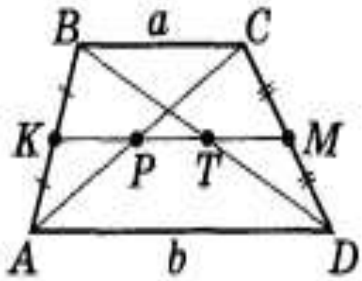
Рис. 32

BK ⊥ *AD, CM* ⊥ *AD*. Тогда *KBCM* – прямоугольник и *KM = BC = a.*

Δ *ABK* = Δ *DCM*(по гипотенузе и катету). Тогда*: AK = MD = (b –a) : 2, KD = KM + MD = a + (b – a) : 2 = (a + b) : 2.* Ч. т. д.

Задача 2.

В трапеции с основаниями *a* и *b (a<b)* диагонали делят среднюю линию на отрезки, равные – ; —— ;– .



Дано: *AK = KB, CM = MD, BC = a, AD = b.*

Доказать: *KP = TM = a : 2 , PT = (b – a) : 2.*

В треугольниках *BAC* и *BDC* отрезки *KP* и *TM* – средние линии. Тогда *KP* = – = *TM.*

KM – средняя линия трапеции. Тогда *KM* = —— *, PT* = —— - *2* · – = —— . Ч. т. д.

Рис. 33

Задача 3.

Биссектриса угла трапеции отсекает от основания трапеции (или ее продолжения) отрезок, равный боковой стороне трапеции, прилежащий к указанному углу.

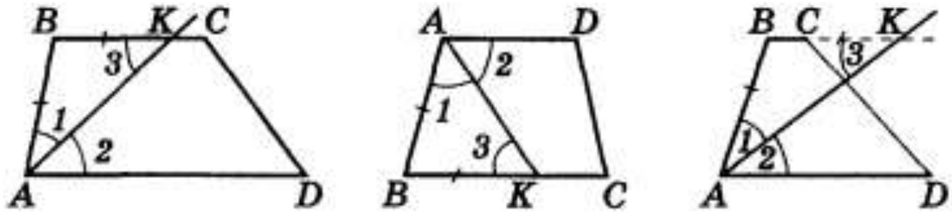


Рис. 34

Дано: $BC \parallel AD$, $\angle 1 = \angle 2$

Доказать: $BK = AB$.

- $BC \parallel AD \rightarrow \angle 2 = \angle 3$ (как внутренние разносторонние при секущей AK);

- $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 \rightarrow AB = BK$.

Ч.т.д.

Задача 4.

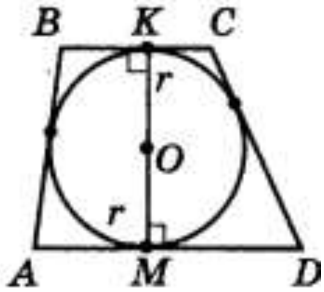


Рис. 35

Высота описанной трапеции равна диаметру вписанной в нее окружности.

Дано: $BC \parallel AD$, $ABCD$ – описанная.

Доказать: $h = 2r$.

M и K – точки касания, O – центр вписанной окружности $\rightarrow OM = r$, $OK = r$, $OM \perp AD$, $OK \perp BC$;

$BC \parallel AD$, $(OK) \perp BC \rightarrow (OK) \perp AD$.

$(OM) \perp AD$и $(OK) \perp AD$. Из одной точки к прямой можно провести только один перпендикуляр. Тогда $(OK) = (OM)$ и $OK + OM = KM = h = 2r$.

Ч.т.д.

Задача 5.

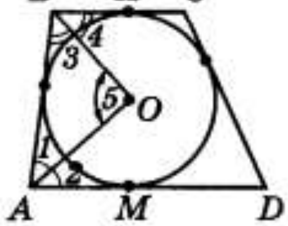


Рис. 36

Из центра вписанной в трапецию окружности боковая сторона видна под прямым углом.

Дано: $BC \parallel AD$, $ABCD$ – описанная.

Доказать: $\angle AOB = 90^o$.

$ABCD$ – описанная $\rightarrow AO = l_A$, $BO = l_B$ и $\angle 1 = \angle 2 = -\angle A$, $\angle 3 = \angle 4 = -\angle B$.

$ABCD$ - трапеция $\rightarrow \angle A + \angle B = 180^o$;

Δ АОИ: $\angle 5 = 180^o - (\angle 1 + \angle 3) = 180^o - -(\angle A + \angle B) = 180^o - 180^o : 2 = 90^o$.

Ч.т.д.

Задачи из школьного курса геометрии.

Рассмотрим задачи на бимедианы четырехугольника и теорему Вариньона, которые встречаются в школьном курсе геометрии.

Задача 6.

Докажите, что а) середины сторон прямоугольника являются вершинами ромба. И наоборот, б) середины сторон ромба являются вершинами прямоугольника .

Доказательство .

а) Диагонали прямоугольника равны, поэтому середины сторон прямоугольника являются вершинами ромба .

Стороны прямоугольника перпендикулярны, поэтому бимедианы перпендикулярны, тогда середины сторон прямоугольника являются вершинами ромба

б) диагонали ромба перпендикулярны, поэтому середины сторон ромба являются вершинами прямоугольника .

Стороны ромба равны, поэтому середины сторон ромба являются вершинами прямоугольника .

Задача 7.

У четырехугольника диагонали равны a и b. Найдите периметр четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон данного четырехугольника .

Решение .

Периметр параллелограмма Вариньона равен $a+b$.

Задача 8.

Докажите, что середины сторон четырехугольника являются вершинами параллелограмма

Решение

См. теорему Вариньона .

Задачи повышенной сложности.

Рассмотрим задачи на бимедианы четырехугольника и теорему Вариньона, которые взяты нами с различных математических конкурсов и олимпиад.

Задача 9.

Докажите, что площадь параллелограмма, образованного прямыми, проходящими через вершины выпуклого четырехугольника и параллельными его диагоналям, в два раза больше площади исходного четырехугольника.

Решение

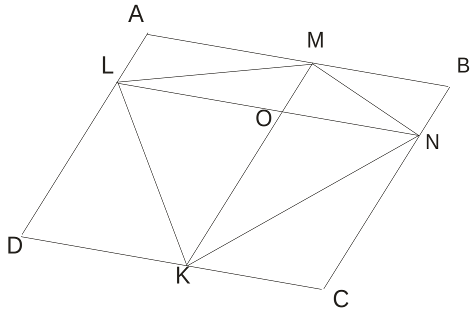


Рис. 37

$S_{ABCD} = S_{LMNK} + S_{LKD} + S_{ALM} + S_{BMN} + S_{KNC}$;

Так как *AMOL, MONB, CKON, DKOL* - параллелограммы, то

$S_{ALM} = S_{MOL}$, $S_{MBN} = S_{MON}$, $S_{NCK} = S_{KON}$, $S_{LKD} = S_{LOK}$.

Отсюда получаем, что $S_{ABCD} = 2S_{KLMN}$, что и требовалось доказать.

Задача 10.

Все стороны выпуклого четырехугольника площади 1 разделены на 2n равных частей, а затем точки деления на противоположных сторонах соединены так, чтобы получилась «косоугольная шахматная доска», состоящая из белых и черных «клеток» (см. рис. при n = 2). Доказать, что сумма площадей всех белых «клеток» равна сумме площадей всех черных «клеток».

Решение.

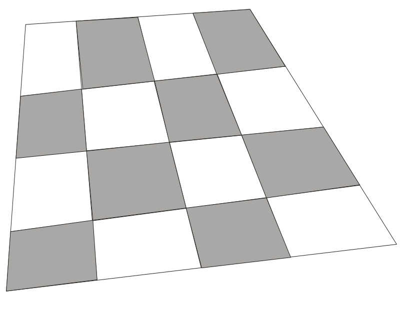


Рис. 38

Из следствия 2 следует, что точки пересечения отрезков на этой доске делят каждый на равные части.

Тогда в любом «маленьком» четырехугольнике (рис.10),куда входят ровно две белые и две черные клетки, выполняются условия теоремы о бабочках. Нужное равенство установлено.

Задача 11.

На продолжениях сторон выпуклого четырехугольника *ABCD* выбраны точки A_1, B_1, C_1, D_1 так, что $AB = AA_1, BC = BB_1$, $CD = CC_1$, $AD = DD_1$, и точка *A* находится между A_1,и *B*, точка *B* – между B_1,и *C*, точка *C* – между C_1,и *D*, точка *D* – между D_1, и *A*. докажите, что $S\ A_1\ B_1\ C_1\ D_1 = 5S_{ABCD}$.

Решение .

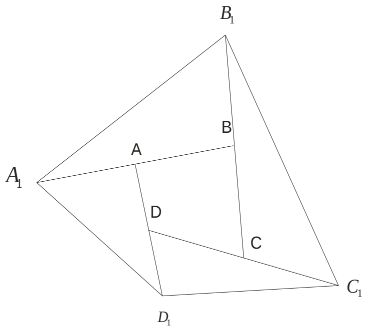


Рис. 39

$S_{ABCD} = S_{ADB} + S_{DBC} = S_{ABC} + S_{ADS}$;

$S\ A_1\ B_1\ C_1\ D_1 = S_{ABCD} + S\ A_1A\ D_1 + S\ BB_1\ C_1 + S\ CB_1C_1 + S\ DD_1\ C_1$;

$S\ A_1A\ D_1 = 2S_{ABD}$;

$S\ BB_1\ C_1 = 2S_{ABC}$;

$S\ CB_1C_1 = 2S_{DBC}$;

$S\ DD_1\ C_1 = 2S_{DBC}$.

Отсюда получаем, что $S\ A_1\ B_1\ C_1\ D_1 = S_{ABCD} + 2(S_{ADB} + S_{DBC}) + 2(S_{ABC} + 2S_{ADC}) = 5S_{ABCD}$

Задача 12.

Противоположные стороны четырехугольника *ABCD* разделены на три равные части и точки деления попарно соединены . Доказать, что одна из площадей получившихся трех четырехугольников равна ——

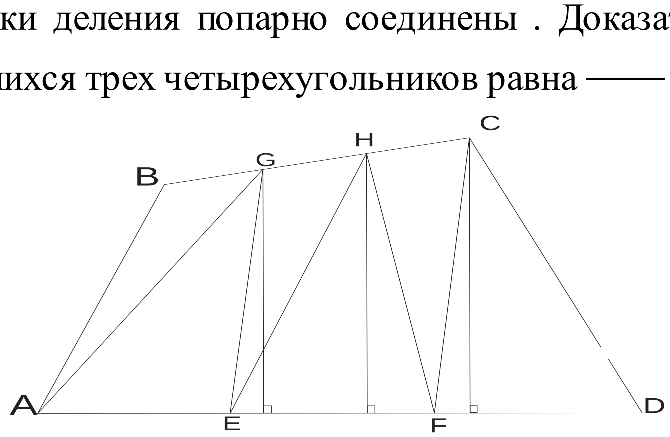


Рис. 40

Решение .

Докажем, что площадь среднего четырехугольника равна трети площади исходного четырехугольника. Другими словами докажем, что

$S_{EGHF} = S_{ABGE} + S_{HCDF}$.

Чтобы в этом убедиться, достаточно проверить, что

$S_{EHF} = S_{AGE} + S_{FCD}$.

А последнее равенство есть следствие того, что основания *AE*, *EF*, *FD* всех трех треугольников в этом равенстве равны, а высота треугольника *EHF* является средней линией трапеции с основаниями, равными высотам треугольников *AGE* и *FCD*.

Задача 13.

Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырехугольника *ABCD*,перпендикулярны. Известно, что $AC = 4$, $\angle CAB + \angle DBA = 75^o$.

Найдите площадь четырехугольника *ABCD* и сравните её с числом .

Решение .

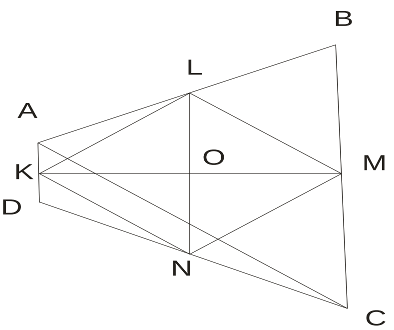


Рис. 41

Так как бимедианы перпендикулярны, то параллелограмм Вариньона является ромбом .

Так как *KN* является средней линией треугольника *ADC* , то по теореме о средней линии треугольника $KN=0{,}5AC=2$;

$\angle KLM=180^o - \angle ALK - \angle BLM =180^o - 75^o = 105^o$;

$S_{KLMN} = 2S_{KLM} = KN^2 \sin KLM = 4 \sin 105^o = 4\sin (60^o + 45^o) = (1 + ;$

$S_{ABCD} = 2S_{KLMN} = 2 (1 + ;$

Площадь *ABCD* меньше, чем 2 .

Задача 14.

Отрезки, соединяющие середины противоположных сторон выпуклого четырехугольника *ABCD*,перпендикулярны (Рис.15) . Известно, что

$S_{ABCD} = 2$, $\angle CAB + \angle DBA = 15^o$.

Найдите квадрат длины отрезка *PR* и сравните его с числом 4 .

Решение .

Пусть *KLMN* – параллелограмм Вариньона четырехугольника *ABCD*.

Так как бимедианы перпендикулярны, то параллелограмм Вариньона является ромбом (см. следствие1,1,б).

$\angle KLM = 180^o - \angle ALK - \angle BLM = 180^o - 15^o = 165^o$;

$S_{ABCD} = 2S_{KLMN} = 2\ KN^2 \sin 165^o =$;

$PR^2 = \quad = \quad = \quad = \quad = 4$

Контрольная работа

Вариант 1

1. Стороны параллелограмма относятся как 1:2, а его периметр равен 30 см. Найдите стороны параллелограмма.
   Ответ: 5 см, 10 см.
2. Три последовательных угла вписанного четырёхугольника относятся как 1:2:3. Найдите все углы четырёхугольника.
   Ответ: 45, 90, 135, 90.
3. Около круга описана трапеция, периметр которой равен 12. Найдите среднюю линию трапеции.
   Ответ: 3.
4. Дан параллелограмм ABCD. Окружность, проходящая через точку A, пересекает отрезки AB, AC и AD в точках P,Q и R соответственно. Докажите, что $AP \cdot AB = AR \cdot AD = AQ \cdot AC$.
5. Дан четырёхугольник, сумма диагоналей которого равна 18. Найдите периметр четырёхугольника с вершинами в серединах сторон данного.
   Ответ: 18.

Вариант 2

1. Меньшая боковая сторона прямоугольной трапеции равна 8 см. Острый угол равен 30°. Найти другую боковую сторону трапеции.
   Ответ: 16 см.
2. Найдите углы четырёхугольника ABCD, вершины которого расположены на окружности, если угол ABD = 74, угол DBC = 38, угол BDC = 65.
   Ответ: $\angle ABC = 112$, $\angle BCD = 77$, $\angle CDA = 68$, $\angle DAB = 103$.
3. Окружность, вписанная в прямоугольную трапецию, делит точкой касания большую боковую сторону на отрезки длиной 4 см и 25 см. Найдите высоту трапеции.
   Ответ: 20 см.
4. Четырехугольник ABCD вписанный. Докажите, что $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$
5. Найдите периметр четырёхугольника с вершинами в серединах сторон прямоугольника с диагональю, равной 8.
   Ответ: 16.

Заключение

Целью данной работы было рассмотрение особенностей методики изучения темы «Многоугольники» в курсе геометрии 7-9 классов. В процессе выполнения работы решены следующие задачи: рассмотрены различные подходы к определениям многоугольника, сделаны выводы о том, какие подходы целесообразнее использовать в школе. Кроме того, рассмотрены особенности изучения темы в учебниках разной направленности: общеобразовательной, гуманитарной, с математическим уклоном. Изучение методических особенностей темы «Многоугольники» позволило определить, что при подготовке к урокам учитель математики должен учитывать следующее:

1) действующие подходы к определению понятия многоугольник, понятие площади многоугольника;
2) анализ темы в действующих школьных учебных пособиях геометрии;
3) задачный материал.

В выпускной квалификационной работе мы рассмотрели главные, общие моменты изучения многоугольников в школьном курсе геометрии.

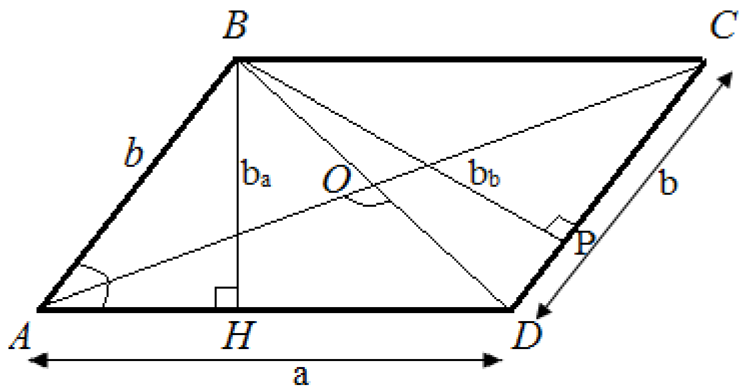
Список использованной литературы

1. Александров, А.Д. Геометрия: учеб. для 7-9 кл. общеобразоват. учреждений / А.Д.Александров, А.Л.Вернер, В.И.Рыжик, Т.Г. Ходот. изд. – М.: Просвещение, 2013. – 176 с.
2. Атанасян, Л.С. Геометрия [Изучение геометрии в 7-9 классах]: учеб. для 7-9 кл. общеобразоват. учреждений / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев [и др.]. – 13-е изд. – М.: Просвещение, 2009. – 255 с.
3. Атанасян, Л.С. Курс элементарной геометрии : Учебное пособие для пед. ун-тов и ин-тов и шк. с углубл. изучением математики : В 2 ч. / Л. С. Атанасян, Н. С. Денисова, Е. В. Силаев . – Москва : Сантакс-Пресс, 1997
4. Апостолова Г.В. Геометрия: 8 класс: двухуровн. учеб. для общеобразоват. учебн. завед. /Пер. с укр. Г.В. Апостолова. –К.: Генеза, 2008.-272 с.
5. Ефимов Н. В. Высшая геометрия. — 7-е изд. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 584 с.
6. Капкаева, Л.С. Лекции по теории и методике обучения математике : частная методика : учеб.пособие для студентов мат. спец. пед. вузов : в 2 ч. Ч. 1 / Л.С. Капкаева ; Мордов. гос. пед. ин-т. – Саранск, 2009. – 262 с.
7. Киселев, А.П. Элементарная геометрия : книга для учителя / А.П. Киселев. – М. : Просвещение, 1996. – 287 с.
8. Погорелов, А.В. Геометрия: 7 – 9 классы: учеб. для общеобразоват. организаций / А.В. Погорелов. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 2014. – 240 с.
9. Погорелов А.В. Геометрия: Учеб.пособие для 6 – 10 кл., М., Просвещение, 1998г.
10. Погорелов А.В., Геометрия: Учеб. для 7—11 кл. общеобразоват. учреждений.— 5-е изд.— М.: Просвещение, 1995.— 383 с
11. Погорелов, А.В. Геометрия: Учебник для 7 – 9 кл. сред.шк. / А.В. Погорелов. – М.: Просвещение, 2014 г.
12. Программа по математике 5-11 классы, М., Дрофа, 2004г.
13. Саранцев, Г.И. Методика обучения геометрии : учеб.пособие для студентов вузов по направлению «Педагогическое образование» / Г.И. Саранцев. – Казань: Центр инновационных технологий, 2011. – 228 с.
14. Саранцев, Г.И. Общая методика преподавания математики : учеб.пособие для студентов мат. спец. пед. вузов и ун-ов / Г.И. Саранцев. – М. : Просвещение, 2002. – 208 с.
15. Саранцев, Г.И. Упражнения в обучении математике / Г.И. Саранцев. – М. : Просвещение, 2005. – 255 с.
16. Совайленко В.К., «Система обучения математике», М., Просвещение, 2005 г.

Приложение 1. Основные свойства четырехугольников

1)Площади четырехугольников

Площадь параллелограмма



$1)S = a \cdot h_a = b \cdot h_b$

произведение основания на высоту

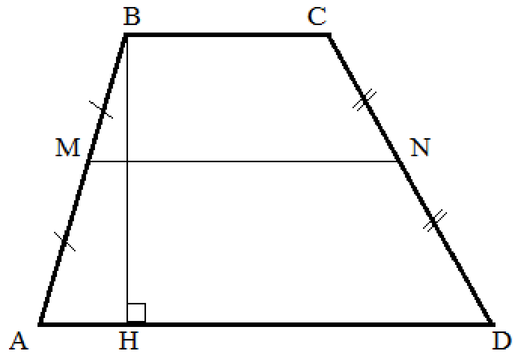
$2)S = a \cdot b \cdot Sin\angle A$

произведение сторон на синус угла между ними

$3)S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot Sin\angle COD$

полупроизведение диагоналей на синус угла между ними

Площадь трапеции



$1)S = \frac{BC + AD}{2} \cdot BH$

произведение полусуммы оснований на высоту

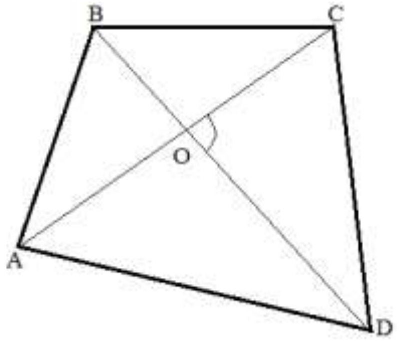
$2) S = MN \cdot BH$

произведение средней линии на высоту

$3) S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot Sin\angle COD$

полупроизведение диагоналей на синус угла между ними

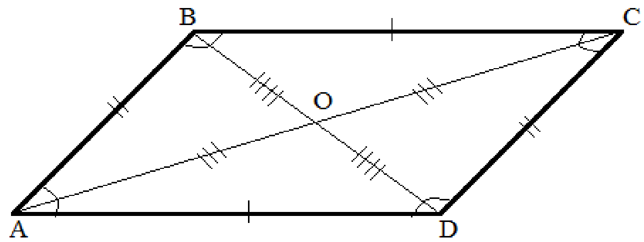
Площадь произвольного четырехугольника



$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot Sin\angle COD$

Площадь произвольного четырехугольника равна полупроизведению его диагоналей на синус угла между ними

2) Свойства параллелограмма



В параллелограмме:

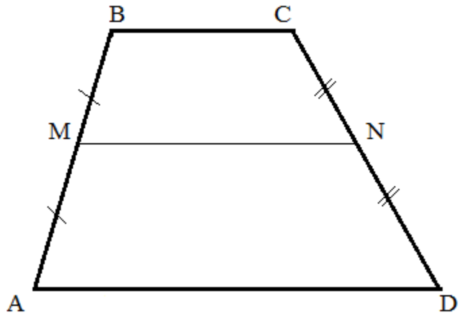
1) противолежащие стороны и углы равны

2) диагонали пересекаются и в точке пересечения делятся пополам

сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон, то есть

$AC^2 + BD^2 = 2AB^2 + 2BC^2$

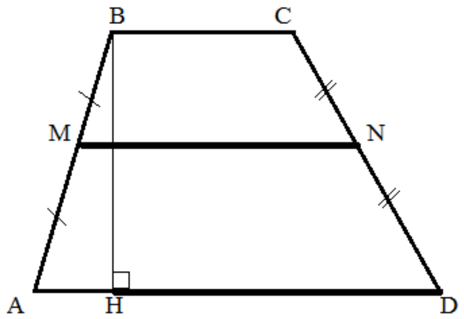
3)Средняя линия в трапеции



Теорема о средней линии: Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

То есть $MN = \frac{BC + AD}{2}$ и $MN||BC||AD$

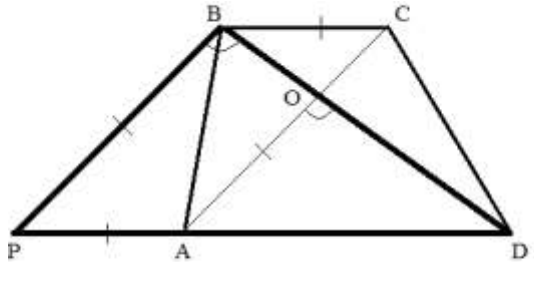
4)Средняя линия в равнобедренной трапеции



Средняя линия в равнобедренной трапеции равна отрезку нижнего основания, соединяющему вершину основания с снованием проведенной к ней высоты.

То есть $MN = HD$

5) Теорема с сдвиге диагонали в трапеции



Теорема: Если в трапеции через вершину B, как показано на рисунке слева , провести отрезок параллельный одной из диагоналей, то окажутся верными следующие факты:

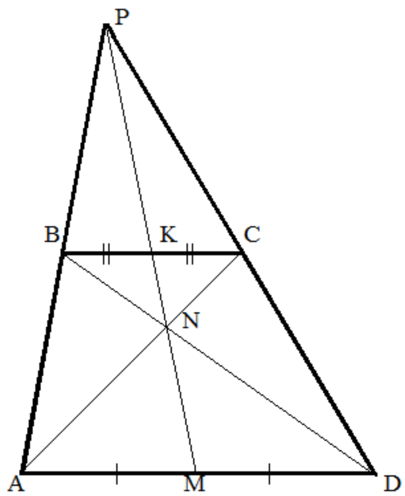
1)$S_{ABCD} = S_{PBD}$

2) трапеция $ABCD$ — равнобедренная $\Longleftrightarrow \triangle\ PBD$ равнобедренный

3)$\angle PBD = \angle AOD$

4)$BC = PA$

6) Четыре замечательные точки в трапеции



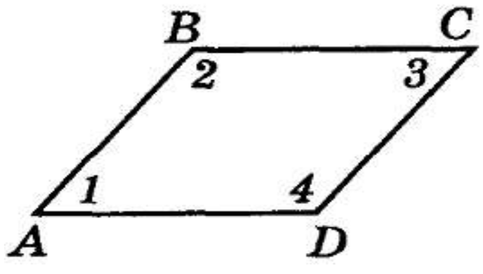
Теорема: В любой трапеции точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжений боковых сторон и середины оснований лежат на одной прямой.

То есть точки M, N, K и P лежат на одной прямой.

Знаний этих свойств по четырехугольникам вполне достаточно для решения задачи С4 на ЕГЭ, то есть ничего сверх этих фактов по четырехугольникам учащийся знать не обязаны. Однако сильным ученикам для решения сложных задач части С или олимпиадных геометрических задач, а также для качественной подготовки к экзамену необходимо расширить список.

Приложение 2.
Виды параллелограммов и их свойства
Свойство параллелограмма

Теорема. **В любом параллелограмме противолежащие углы равны, а сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна 180.**



Докажем, что у параллелограмма *ABCD* $\angle 1 = \angle 3;\ \angle 2 = \angle 4;\ \angle 1 + \angle 2 = \angle 2 + \angle 3 = \angle 3 + \angle 4 = \angle 4 + \angle 1 = 180^0$.

Доказательство

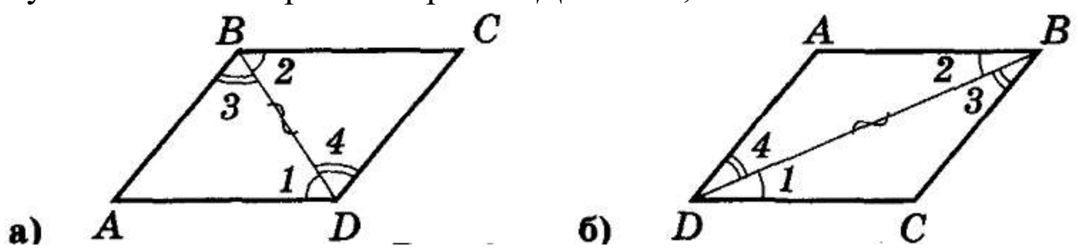
1) *BC* || *AD*, *AB* и *CD* – секущие, тогда $\angle 1 + \angle 2 = 180^0$ и $\angle 3 + \angle 4 = 180^0$ (как внутренние односторонние).

2) *AB* || *CD*, *AD* и *BC* –секущие, тогда $\angle 2 + \angle 3 = 180^0$ и $\angle 4 + \angle 1 = 180^0$ (как внутренние односторонние).

3) $\angle 1 + \angle 2 = 180^0 = \angle 2 + \angle 3$ и $\angle 2 + \angle 3 = 180^0 = \angle 3 + \angle 4$, тогда $\angle 1 = \angle 3$ и $\angle 2 = \angle 4$. Ч.т.д.

Теорема. **Диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника.**

Пусть ABCD – параллелограмм . Докажем, что ΔABD = ΔCDB.



Доказательство.

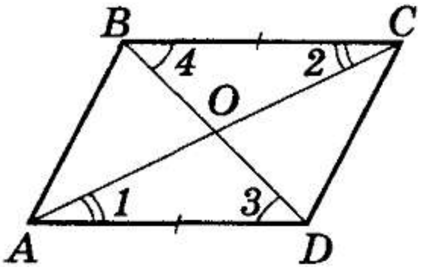
3) Углы 1 = 2 как внутренние разносторонние при AD||BC и секущей BD.

4) Углы 3 = 4 как внутренние разносторонние при AB||DC и секущей BD.

5) BD – общая сторона треугольников ABD и CDB. Тогда эти треугольники равны (по второму признаку равенства). Ч. т. д.

Следствие. **Противолежащие стороны параллелограмма равны.**

Теорема. **Диагонали параллелограмма делятся точкой их пересечения пополам.**



Диагонали параллелограмма ABCD пересекаются в точке O. Докажем, что BO=OD и AO=OC.

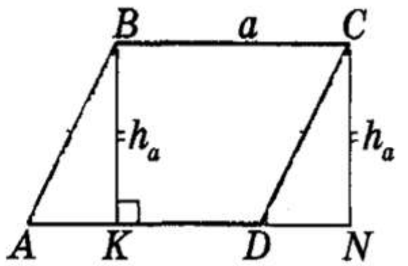
Доказательство.

1) углы 1=2 как внутренние разносторонние при AD||BC и секущей AC.

2) углы 3=4 как внутренние разносторонние при BC||AD и секущей BD.

AD=BC как противолежащие стороны параллелограмма. Тогда, по второму признаку равенства треугольников, ΔAOD = ΔCOB. А в разных треугольниках, против равных углов лежат равные стороны: AO=OC, BO=OD. Теорема доказана.

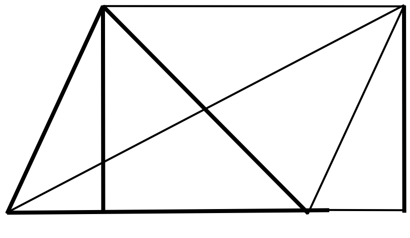
Теорема. **Площадь параллелограмма равна $S=ah_a$,где a длина его стороны, h_a – длина высоты, проведенной к этой стороне.**



Доказательство.

В параллелограмме ABCD : AB=DC - как противолежащие стороны, BK=C – расстояние между параллельными прямыми. Тогда прямоугольные треугольники ABK и DCN равны (по гипотенузе и катету), и площадь параллелограмма ABCD равна площади прямоугольника KBCN:S = BC*BK = $= ah_a$.

Следствие. Из последней теоремы и свойства следует уже известная вам формула для площади треугольника: $S = -ah_a$, где a – длина стороны треугольника, h_a – длина его высоты, проведенный к этой стороне.



Достроим треугольник ABC до параллелограмма ABCD. Диагональ параллелограмма делит его на два равных треугольника (свойство 2). Тогда $S_{ABC} = S_{ABCD} : 2 = (ah_a) : 2$. Отметим, что в случае, когда высота h_a расположена вне треугольника (DK для ΔBCD), доказательство будет аналогичным (рассматриваем параллелограмм CBAD : $\Delta BCD = \Delta DAB$).

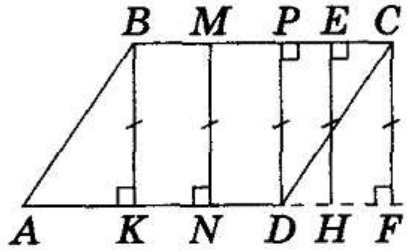
Признаки параллелограмма.

Теорема 1. Если противолежащие стороны четырехугольника попарно равны, то такой четырехугольник – параллелограмм.

Теорема 2. Если две противолежащие стороны четырехугольника равны и параллельны, то такой четырехугольник – параллелограмм.

Теорема 3. Если диагонали четырехугольника точкой их пересечения делятся пополам, то такой четырехугольник – параллелограмм.

Напомни, что параллелограмм – это четырехугольник, у которого противолежащие стороны параллельны. Высотой параллелограмма называется перпендикуляр, проведенный к стороне параллелограмма (или ее продолжению) из точки, лежащей на противоположной его стороне. На рисунке – это отрезки BK, MN, PD, EH и CF. Длина отрезка – расстояние между параллельными сторонами параллелограмма.



Особые виды параллелограммов – прямоугольник, ромб, квадрат.

СВОЙСТВА ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Прямоугольник имеет все свойства параллелограмма, т.е. у него:

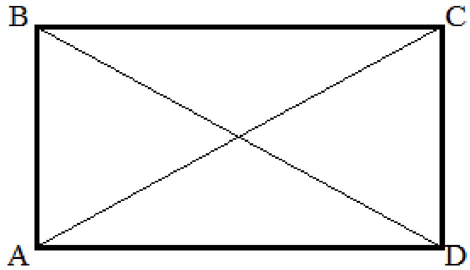
3) противолежащие стороны равны;

4) диагонали в точке пересечения делятся пополам;

5) диагональ прямоугольника делит его на два равных треугольника.

Добавим к этому перечню еще одно, уже известное вам, утверждение. Площадь прямоугольника равна произведению длин двух его неравных сторон.

Докажем еще два свойства прямоугольника.



Теорема 1. Диагонали прямоугольника равны.

На рисунке AC и BD –диагонали прямоугольника $ABCD$. Докажем, что $AC=BD$.

Доказательство.

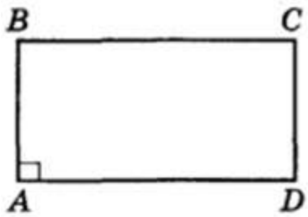
В прямоугольник треугольниках ABD и DCA катет AD – общий, а катеты AB и CD – равны. Тогда $\Delta ABD=\Delta DCA$ и $AC=BD$.

Теорема доказана.

Следствие. Диагонали прямоугольника делят его на четыре равнобедренных треугольника.

Теорема 2. Вокруг любого прямоугольника можно описать окружность, центром этой окружности будет точка пересечения диагоналей прямоугольника.

ПРИЗНАКИ ПРЯМОУГОЛЬНИКА.



Теорема 3. Параллелограмм, у которого один угол прямой, - прямоугольник.

На рисунке у параллелограмма $\angle A=90^o$. Докажем, что $ABCD$ – прямоугольник.

Доказательство.

$ABCD$ – параллелограмм, тогда $\angle C=\angle A=90^o$.

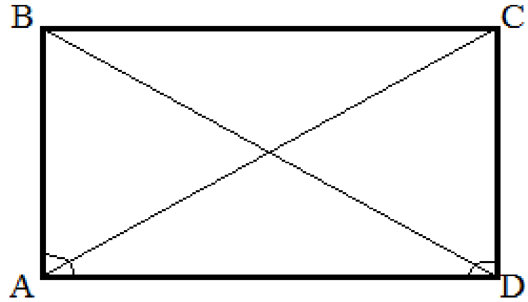
$\angle B=180^o - \angle A= 180^o - 90^o = 90^o$. $\angle D=\angle B=90^o$ и

$ABCD$ – прямоугольник.

Теорема доказана.

Теорема 4. Параллелограмм, диагонали которого равны, - прямоугольник.

Пусть ABCD – параллелограмм, у которого AC=BD . Докажем, что ABCD – прямоугольник.



Доказательство.

1. AC=BD по условию, AB=CD по свойству параллелограмма, AD – общая. Тогда $\Delta ABD = \Delta DCA$ и $\angle A=\angle D$.

2. По свойству параллелограмма $\angle A+\angle D = 180^o$. Тогда $\angle A = \angle D = 180^o : 2 = 90^\circ$ (по предыдущей теореме) и *ABCD* – прямоугольник.

Теорема доказана.

Теорема 5. Параллелограмм, вокруг которого можно описать окружность, - прямоугольник.

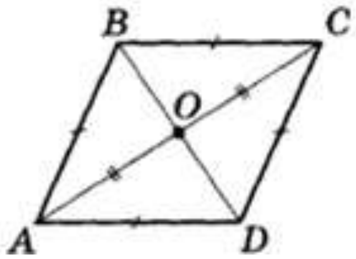
СВОЙСТВА РОМБА.

Ромб имеет все свойства параллелограмма, т.е. у него:

6) противолежащие углы равны;
7) сумма углов, прилежащих к одной стороне, равна 180º;
8) диагонали в точке пересечения делятся пополам;
9) площадь равна произведению длин стороны и высоты.

Докажем еще два свойства ромба.

Теорема 6. Диагонали ромба пересекаются под прямым углом и являются биссектрисами углов этого ромба.



ABCD – ромб . Докажем, что: $BD \perp AC$, $AC=l_A$; $AC=l_c$; $DB=l_B$; $DB=l_D$.

Доказательство.

ABCD – ромб, тогда AB=BC, AO=OC. В равнобедренном треугольнике ABC медиана BO является высотой и биссектрисой. Тогда $BD \perp AC$ и $DB=l_B$.

Аналогично получим $AC=l_A$; $AC=l_c$; $DB=l_D$.

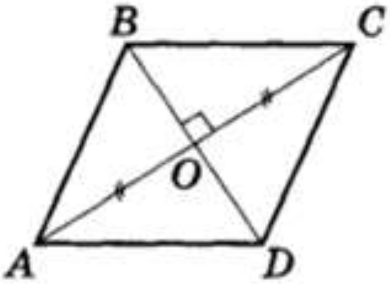
Теорема доказана.

Теорема 7. В любой ромб можно вписать окружность, диаметр которой равен высоте ромба.

ПРИЗНАКИ РОМБА

Теорема 8. Параллелограмм, у которого две соседние стороны равны, - ромб.

Теорема 9. Параллелограмм, у которого диагонали пересекаются под прямым углом, - ромб.



Пусть у параллелограмма $ABCD$. $AC \perp BD$. Докажем, что $ABCD$ – ромб.

Доказательство.

$AO=OC$ (по свойству параллелограмма) и $BO \perp AC$ (по условию). Тогда треугольник ABC – равнобедренный, т.е. $AB=BC$ и по предыдущему признаку $ABCD$ – ромб.

Теорема доказана.

Теорема 10. Параллелограмм, диагональ которого является биссектрисой его угла, - ромб. Доказательство, аналогичное доказательство у теоремы 6.

Теорема 11. Параллелограмм, в которой можно вписать окружность, - ромб.

СВОЙСТВА КВАДРАТА

Квадрат является одновременно и прямоугольником, и ромбом. Поэтому он имеет все свойства и прямоугольника, и ромба:

1) диагонали в точке пересечения делятся пополам;
2) диагонали пересекаются под прямым углом;
3) диагонали являются биссектрисами углов квадрата;
4) площадь равна произведению длин двух сторон;
5) вокруг квадрата всегда можно описать окружность.

ПРИЗНАКИ КВАДРАТА

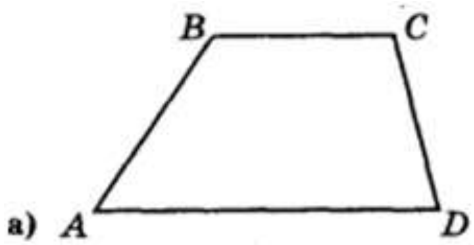
Легко доказать, что квадратом является:

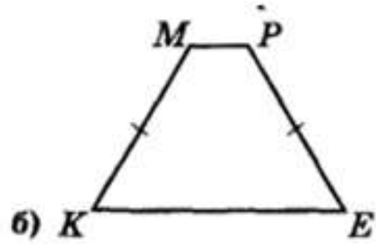
1) прямоугольник, диагонали которого пересекаются под прямым углом;

2) прямоугольник, диагональ которого является биссектрисой его угла;
3) ромб, один угол которого прямой;
4) ромб, диагонали которого равны.

Тема 4. Трапеция

Две стороны трапеции параллельны по определению. Эти стороны называют основаниям трапеции, а две остальные - боковыми сторонами трапеции. Например, на рисунке а у трапеции *ABCDBC* || *AD*, т.е *BC* и *AD* – ее основания, а *AB* и *CD*– боковые стороны.





Равнобокий или равнобедренной называют трапецию, у которой боковые стороны равны (рис б).

Прямоугольной называют трапецию, один из углов которой прямой.

Высотой трапеции называют перпендикуляр, проведенный к ее основанию из точки другого основания. Длина высоты трапеции – расстояние между ее параллельными сторонами.

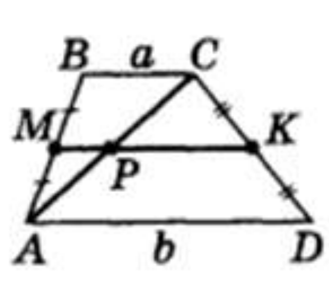
Средней линией трапеции называют отрезок, соединяющий середины ее боковых сторон.

СВОЙСТВА ТРАПЕЦИИ

Сумма углов трапеции, прилежащих к одной ее боковой стороне, равна 180.

Справедливость этого утверждения следует непосредственно из свойства параллельных прямых.

Теорема. Средняя линия трапеции параллельна ее основаниям, равна полусумме этих оснований и делит диагонали трапеции пополам.



На рисунке отрезок *MK* – средняя линия трапеции *ABCD*, основания *BC* и *AD* которой обозначены как *a* и *b*соответственно. Докажем, что: *(1) MK||a, MK||b, (2) MK=(a + b) : 2 ; (3) AP=PC.*

Доказательство.

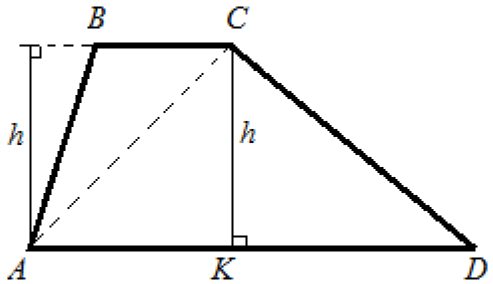
На сторонах угла, образованного прямыми *AB и CD*, отложены отрезки $AM = MB$ и $DK = KC$. Тогда (по обратной теореме Фалеса) $a||MK||b$ и (1) доказано.

Рассмотрим $\angle ACD$; $MK||b$, $DK=KC$. Тогда (по теореме Фалеса) $AP=PC$, т.е. средняя линия делит диагональ трапеции пополам – (3) доказано.

M, P и *K* – середины отрезков *AB, AC* и *CD,* т.е. *MP* и *PK* – средние линии треугольников *BAC* и *ACD*. Тогда $MK = MP = - \;\; +- \;\; = - (a + b)$ и (2) доказано.

Теорема доказана.

Теорема. Площадь трапеции равна произведению и средней линии трапеции.



Обозначим расстояние между обоснованиями *AD* и *BC* трапеции *ABCD* как h . Докажем, что площадь трапеции S равна ———.

Доказательство

Диагональ *AC* делит трапецию на два треугольника *ABC* и *ACD*, будет расстояние между параллельными прямыми *BC* и *AD*. Тогда: $S = - h \cdot BC + - h \cdot AD = - h\ (AD + BC) = h \cdot$ ———.

Теорема доказана.

СВОЙСТВА РАВНОБОКОЙ ТРАПЕЦИИ

Теорема. В равнобокой трапеции:

(1) углы, прилежащие к одному основанию, равны;

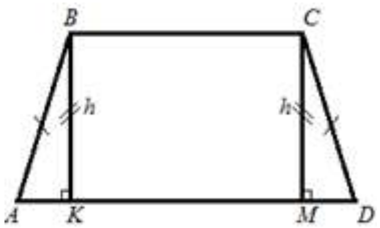
(2) сумма противолежащих углов 180;

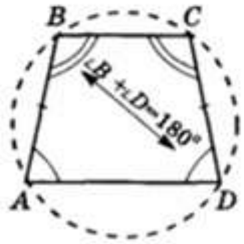
(3) диагонали равны;

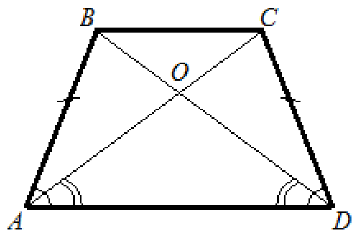
(4) отрезки диагоналей, соединяющие точку их пересечения с концами одного основания, равны;

(5) вокруг равнобокой трапеции всегда можно описать окружность.

У равнобокой трапеции *ABCD: AD* и *BC* – основания, *AB=CD*. Докажем для нее утверждения (1) – (5).







Доказательство

Из вершин B и C трапеции проведем высоты BK и CM.

1) $ABK = DCM$ (по катету и гипотенузе). Тогда $\angle A = \angle D$. Учитывая свойство углов трапеции, $\angle B = 180^{\circ} - \angle A = 180^{\circ} - \angle D = \angle C$ $\angle B = 180^{\circ}$ и (1) доказано.

2) По свойству трапеции $\angle A + \angle B = 180^{\circ}$, по доказанному $\angle A = \angle D$. Тогда $\angle D + \angle B = 180^{\circ}$ и (2) доказано.

3) По доказательству $\angle D + \angle B = 180^{\circ}$, тогда четырехугольник $ABCD$ – вписанный и (5) доказано.

4) Проведем диагонали AC и BD трапеции $ABCD$. По первому признаку $\Delta ABD = \Delta DCA$($\angle A = \angle D$, $AB=CD$, AD – общая). Тогда $AC = BD$ и утверждение (3) доказано.

5) $\Delta ABD = DCA$, тогда $\angle BDA = \angle CAD$и треугольник AOD – равнобедренный, т.е. $AO = OD$; учитывая (3), получим: $OC = AC - AO = BD - OD = OB$. Утверждение (4) доказано.

Теорема доказана.

ПРИЗНАКИ РАВНОБОКОЙ ТРАПЕЦИИ

Теорема. Если для трапеции выполняется какое-то из утверждений:

1) углы, прилежащие к одному основанию, равны;

2) сумма противолежащих углов 180°;

3) диагонали равны;

4) отрезки диагоналей, соединяющие точку их пересечения с концами одного основания, равны;

5) трапеция – вписана в окружность, то такая трапеция равнобокая.

Задачи на применение свойств четырехугольников.

1) Боковая сторона равнобокой трапеции, описанной вокруг окружности, равна 2 см. найдите периметр трапеции.

2) В трапеции ABCD AM = MB = CN = ND и BK и AD взаимно перпендикулярны , AK = 3 см, DA = 7 см. Найдите MN.

3) Средняя линия описанной трапеции делится ее диагоналями на три равные отрезка длиной 1,5 см каждый. Найдите основания и периметр трапеции.

4) Равнобокой трапеции ABCD провели диагонали AC и BD. Докажите , что углы ABD и ACD равны.

5) Диагонали равнобокой трапеции делят ее на четыре треугольника. Докажите, что треугольники , прилегающие к боковым сторонам трапеции, равны.

6) Средняя линия MN трапеции ABCD пересекает диагональ AC в точке P, а диагональ BD – в точке Q. Докажите, что MP = NQ.

7) Точка пересечения диагоналей четырехугольника равноудалена от всех его сторон. Определите вид четырехугольника.

8) Докажите, что биссектрисы двух противоположных углов параллелограмма параллельны или лежат на одной прямой.
9) Докажите, что биссектрисы двух углов параллелограмма, прилежащих к одной стороне, взаимно перпендикулярны.
10) Докажите, что биссектрисы внутренних углов параллелограмма при пересечении образует прямоугольник, диагонали которого параллельны сторонам параллелограмма и равны разности двух его неравных сторон.
11) Биссектрисы углов B и C параллелограмма ABCD пересекаются в точке E. угол между EC и BD равен 80, а угол BDC=60. Найдите углы параллелограмма.
12) Две высоты параллелограмма пересекает его диагональ под углами 57^0 и 72^0. Найдите углы параллелограмма.
13) На диагонали AC параллелограмма ABCD отметили соответственно точки K и M так, что углы AKB и CMD равны. Докажите , что четырехугольник KBMD – параллелограмм.
14) В каждой из двух концентрических окружностей провели диаметры AC и BD соответственно. Докажите, что ABCD – параллелограмм.