УДК 519.95

О РЕАЛИЗАЦИИ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОБОБЩЕННЫМИ α-ФОРМУЛАМИ

Л.Н. Сысоева

Аннотация

Рассмотрена задача о реализации булевых функций обобщенными α-формулами. Введено понятие обобщенной α-формулы. Определено понятие универсального множества обобщенных α-формул для заданного множества булевых функций. Введено понятие двойственных обобщенных α-формул, сформулирован принцип двойственности. Показано, что для каждого $n \geq 2$ для множеств $T_0(n)$ и $T_1(n)$ всех булевых функций от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, сохраняющих константы 0 и 1 соответственно, существуют универсальные множества.

Ключевые слова: булева функция, формула, реализация функций формулами.

Множество всех функций k-значной логики обозначим через P_k, $k \geq 2$. Следуя [1], определим индуктивно понятие α-формулы над системой $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \subseteq P_k$. Символ переменной является α-формулой над $\mathfrak{A}$; такие формулы называются тривиальными. Выражение вида $u(\Phi)$, где Φ – α-формула над $\mathfrak{A}$, а u – символ одноместной функции из $\mathfrak{A}$, является α-формулой. Выражение вида $g(\Phi, x_{i_2}, \ldots, x_{i_m})$, где Φ – α-формула над $\mathfrak{A}$, а $x_{i_2}, \ldots, x_{i_m}$ – символы переменных, $m \geq 2$, и g – символ m-местной функции из $\mathfrak{A}$, также является α-формулой. Предполагается при этом, что других α-формул над $\mathfrak{A}$ нет. Множество всех функций, реализуемых нетривиальными α-формулами над $\mathfrak{A}$, называется α-пополнением системы $\mathfrak{A}$ и обозначается через $[\mathfrak{A}]_\alpha$. Система $\mathfrak{A} \subseteq P_k$ называется α-полной, если $P_k = [\mathfrak{A}]_\alpha$. Известно, что в P_2 не существует конечных α-полных систем; при этом в P_k при всех $k \geq 3$ конечные α-полные системы существуют [1–3]. В работах [4, 5] свойства α-формул изучены с точки зрения теории сложности.

Введем необходимые определения. Положим $E_2 = \{0, 1\}$. Обозначим через E_2^n множество всех наборов длины n, компоненты которых принадлежат E_2. Наборы $(0, 0, \ldots, 0)$ и $(1, 1, \ldots, 1)$ длины n обозначим через $\widetilde{0}$ и $\widetilde{1}$ соответственно. Пусть $\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma} \in E_2^n$. Будем говорить, что набор $\widetilde{\beta}$ больше или равен набору $\widetilde{\gamma}$ (обозначение $\widetilde{\beta} \geq \widetilde{\gamma}$), если для каждого i такого, что $1 \leq i \leq n$, выполнено неравенство $\beta_i \geq \gamma_i$; набор $\widetilde{\beta}$ строго больше набора $\widetilde{\gamma}$ (обозначение $\widetilde{\beta} > \widetilde{\gamma}$), если $\widetilde{\beta} \geq \widetilde{\gamma}$ и $\widetilde{\beta} \neq = \widetilde{\gamma}$. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in P_2$ называется монотонной, если для любых двух наборов $\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma} \in E_2^n$ таких, что $\widetilde{\beta} \geq \widetilde{\gamma}$, верно неравенство $f(\widetilde{\beta}) \geq f(\widetilde{\gamma})$. Пусть $\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma} \in E_2^n$. Будем говорить, что набор $\widetilde{\beta}$ противоположен набору $\widetilde{\gamma}$, если $\beta_i = \overline{\gamma}_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in P_2$, функция $\overline{f}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$ называется двойственной к функции f (обозначение f^*). Через $T_0(n)$ обозначается множество всех булевых функций, сохраняющих константу 0 и зависящих только от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $n \geq 1$.

Пусть $\mathfrak{D} \subseteq P_2$. Формулу над $\mathfrak{D}$, множество переменных которой совпадает с множеством $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, обозначим через $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Значение формулы Φ на наборе $\widetilde{\beta}$ обозначим через $\Phi(\widetilde{\beta})$. Графическое равенство формул Φ и Ψ

будем обозначать через $\Phi \underset{\Gamma}{=} \Psi$. Пусть Ψ – формула над $\mathfrak{D}$ вида $f^{(n)}(\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n)$, где $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n$ – формулы над $\mathfrak{D}$. Внешним функциональным символом формулы Ψ назовем символ $f^{(n)}$. Пусть функция f двойственна к функции g, тогда соответствующие им функциональные символы назовем двойственными. Обозначим через Φ^* формулу, полученную заменой каждого функционального символа, входящего в формулу Φ, на двойственный ему функциональный символ.

Пусть $V_q = (A, B, Q, F, G, q)$ – конечный инициальный автомат, где A, B и Q – конечные множества входных символов, выходных символов и символов состояний соответственно; F и G – функции выхода и перехода соответственно; q – начальное состояние, $q \in Q$. Пусть f_{V_q} – автоматная функция, вычисляемая конечным инициальным автоматом V_q. Состояниями автоматной функции f_{V_q} называются состояния автомата V_q. Определения автомата, инициального автомата и автоматной функции можно найти в [6, 7]. Далее будут рассматриваться только такие автоматные функции, которые в каждом состоянии реализуют некоторую функцию алгебры логики.

Пусть $\mathfrak{C}$ – некоторое множество булевых функций, а $\mathcal{A}$ – конечное множество автоматных функций, реализующих в каждом состоянии некоторую функцию из множества $\mathfrak{C}$. По аналогии с понятием α-формулы над множеством функций из P_k определяется понятие α-формулы над множеством $\mathcal{A}$. Пусть $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – α-формула над множеством $\mathcal{A}$, а $C = (\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2, \dots, \widetilde{\beta}_{2^n})$ – последовательность всех двоичных наборов длины n, $n \geq 1$. Рассмотрим последовательно значения формулы φ на наборах $\widetilde{\beta}_i$, $i = 1, 2, \dots, 2^n$. Таким образом, зададим последовательность $\varphi(\widetilde{\beta}_1), \varphi(\widetilde{\beta}_2), \dots, \varphi(\widetilde{\beta}_{2^n})$ значений формулы φ на всех двоичных наборах длины n. Формуле φ сопоставим функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ алгебры логики такую, что выполнены равенства $f(\widetilde{\beta}_i) = \varphi(\widetilde{\beta}_i)$ для всех $i = 1, \dots, 2^n$. Обобщенной α-формулой F над множеством $\mathcal{A}$ назовем пару (φ, C), где φ – формула над $\mathcal{A}$, а C – последовательность всех двоичных наборов длины n. Значение формулы F на наборе $\widetilde{\beta}$ обозначается через $F|_{\widetilde{\beta}}$ и определяется равенствами $F|_{\widetilde{\beta}} = \varphi(\widetilde{\beta}) = f(\widetilde{\beta})$, $\widetilde{\beta} \in E_2^n$, где f – функция алгебры логики, реализуемая формулой F. В момент времени t, где $1 \leq t \leq 2^n + 1$, каждая автоматная функция, входящая в формулу φ, находится в состоянии, отвечающем некоторой функции из множества $\mathfrak{C}$. Заменим все символы автоматных функций, входящих в φ, на символы соответствующих функций из множества $\mathfrak{C}$. Получим некоторую α-формулу Φ_t над $\mathfrak{C}$. Таким образом, в каждый момент времени t обобщенной α-формуле F над множеством $\mathcal{A}$ поставлена в соответствие α-формула Φ_t над $\mathfrak{C}$, $1 \leq t \leq 2^n + 1$. Назовем Φ_1 начальной формулой обобщенной α-формулы F.

Пусть $\mathfrak{B}$ – некоторое множество булевых функций. Множество A обобщенных α-формул называется универсальным для $\mathfrak{B}$, если для любой функции f из $\mathfrak{B}$ существует формула F из множества A такая, что F реализует функцию f.

Пусть V_{q_1} – конечный инициальный автомат с двумя входами и одним выходом такой, что $\{q_1, q_2\}$ – множество его состояний, при этом в состоянии q_1 автомат реализуют функцию $x_1 \vee x_2$, в состоянии q_2 – функцию $0(x_1, x_2)$ и в момент времени t автомат переходит из состояния q_i в состояние q_j тогда и только тогда, когда входные символы в этот момент времени совпадают и равны 0, $i \neq j$. Обозначим через $f_{V_{q_1}}$ и $f_{V_{q_2}}$ автоматные функции, реализуемые инициальными автоматами V_{q_1} и V_{q_2} соответственно. Пусть π – фиксированный порядок переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Через φ^π обозначим α-формулу над $\{f_{V_{q_1}}\}$, в которую каждая переменная $x_1, x_2, \dots, x_n$ входит ровно один раз, и вхождения этих переменных соответствуют порядку π. Обозначим через B_n^π множество $\cup\{(\varphi^\pi, C)\}$, где объединение берется по всевозможным последовательностям всех двоичных наборов длины n.

Основным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1. *Для любого $n \geq 2$, для любого порядка π переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ множество обобщенных α-формул B_n^π является универсальным для множества $T_0(n)$.*

Аналогичная теорема для множеств $T_{01}(n)$ булевых функций, сохраняющих константы 0 и 1, где $n \geq 2$, была доказана в работе [8].

Доказательство теоремы 1 опирается на несколько вспомогательных результатов (леммы 1–3).

Лемма 1. *Пусть φ – формула из автоматных функций над $\{f_{V_{q_1}}, f_{V_{q_2}}\}$ с n входами, а $\widetilde{\alpha}$ – двоичный набор длины n. Тогда если на φ подать последовательность $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\alpha})$, то формула φ на наборе $\widetilde{\alpha}$ оба раза примет одинаковые значения.*

Доказательство. Эту лемму нетрудно доказать индукцией по глубине формулы φ.

База индукции. Пусть глубина φ равна единице. Рассмотрим два случая. Первый случай, пусть $\widetilde{\alpha} = (0, 0)$. Тогда в силу выбора функций, реализуемых автоматом V в обоих его состояниях, формула φ на наборе $\widetilde{\alpha}$ оба раза примет значение 0. Второй случай, пусть $\widetilde{\alpha} \in \{(0,1), (1,0), (1,1)\}$. Тогда в силу выбора функции перехода для автомата V верно равенство $\Phi_1 \underset{\Gamma}{=} \Phi_2$, а значит, формула φ на наборе $\widetilde{\alpha}$ оба раза примет одинаковые значения.

Индукционный переход. Пусть утверждение доказано для всевозможных формул φ глубины m. Докажем его для формулы φ глубины $m+1$. На внешний функциональный символ формул Φ_1 и Φ_2 подаются одинаковые наборы в силу предположения индукции. Значит, возможны два случая. Первый случай, когда на внешний функциональный символ формул Φ_1 и Φ_2 подается набор $(0,0)$. Тогда в силу выбора функций, реализуемых автоматом V в обоих его состояниях, формула φ на наборе $\widetilde{\alpha}$ оба раза принимает значение 0. Второй случай, когда на внешний функциональный символ подается набор из множества $\{(0,1), (1,0), (1,1)\}$. Тогда в силу выбора функции перехода для автомата V верно равенство $\Phi_1 \underset{\Gamma}{=} \Phi_2$, а значит, формула φ на наборе $\widetilde{\alpha}$ оба раза примет одинаковые значения. Лемма доказана. □

Везде далее рассматриваются обобщенные α-формулы над множеством $\{f_{V_{q_1}}\}$ с начальными формулами следующего вида: $x_1 \vee (x_2 \vee \ldots (x_{n-2} \vee (x_{n-1} \vee x_n)) \ldots)$.

Лемма 2. *Пусть $F = (\varphi, C)$ – обобщенная α-формула над $\{f_{V_{q_1}}\}$, $C = (\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2, \ldots, \widetilde{\beta}_{2^n})$, существует такое i, $1 \leq i \leq 2^n - 1$, что набор $\widetilde{\beta}_i$ имеет в лексикографическом порядке меньший номер, чем набор $\widetilde{\beta}_{i+1}$, и верно равенство $F|_{\widetilde{\beta}_i} = 1$. Тогда верно равенство $F|_{\widetilde{\beta}_{i+1}} = 1$.*

Доказательство. Эту лемму нетрудно доказать индукцией по глубине формулы φ.

База индукции. Пусть глубина φ равна единице. Пусть верны равенства $\widetilde{\beta}_i = (\beta_1^i, \beta_2^i)$ и $\widetilde{\beta}_{i+1} = (\beta_1^{i+1}, \beta_2^{i+1})$. Поскольку $F|_{\widetilde{\beta}_i} = 1$, то формула Φ_i имеет вид $x_1 \vee x_2$ и верно одно из равенств $\beta_1^i = 1$ или $\beta_2^i = 1$. Значит, в силу правил смены формула Φ_{i+1} имеет вид $x_1 \vee x_2$. Если верно равенство $\beta_1^i = 1$, то $\beta_1^{i+1} = 1$, и, следовательно, верно $F|_{\widetilde{\beta}_{i+1}} = 1$. Если верно $\beta_2^i = 1$, то $\beta_2^{i+1} = 1$, и, следовательно, верно $F|_{\widetilde{\beta}_{i+1}} = 1$.

Индукционный переход. Пусть верны равенства $\widetilde{\beta}_i = (\beta_1^i, \beta_2^i, \ldots, \beta_{2^n}^i)$ и $\widetilde{\beta}_{i+1} = (\beta_1^{i+1}, \beta_2^{i+1}, \ldots, \beta_{2^n}^{i+1})$. Поскольку $F|_{\widetilde{\beta}_i} = 1$, то формула Φ_i имеет вид

$x_1 \vee A_1(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ и верно одно из равенств $\beta_1^i = 1$ или $A_1(\beta_2^i, \beta_3^i, \ldots, \beta_n^i) = 1$. Значит, в силу правил смены формула Φ_{i+1} имеет вид $x_1 \vee B_1(x_2, x_3, \ldots, x_n)$. Если верно равенство $\beta_1^i = 1$, то $\beta_1^{i+1} = 1$, и, следовательно, верно $F|_{\widetilde{\beta}_{i+1}} = 1$. Если верно $A_1(\beta_2^i, \beta_3^i, \ldots, \beta_n^i) = 1$ и $\beta_1^{i+1} = 0$, то доказываемое утверждение следует из индукционного предположения. Лемма доказана. □

Лемма 3. *Пусть $F = (\varphi, C)$ – обобщенная α-формула над $\{f_{V_{q_1}}\}$, $C = (\widetilde{\beta}_1, \widetilde{\beta}_2, \ldots, \widetilde{\beta}_{2^n})$ и существует такое i, $1 \le i \le 2^n - 1$, что набор $\widetilde{\beta}_i$ имеет в лексикографическом порядке больший номер, чем набор $\widetilde{\beta}_{i+1}$, и верно равенство $F|_{\widetilde{\beta}_i} = 0$. Тогда верно равенство $F|_{\widetilde{\beta}_{i+1}} = 0$.*

Доказательство. Поскольку набор $\widetilde{\beta}_i$ имеет в лексикографическом порядке больший номер, чем набор $\widetilde{\beta}_{i+1}$, то верны равенства

$$\widetilde{\beta}_i = (\beta_1^i, \beta_2^i, \ldots, \beta_j^i, 1, \beta_{j+2}^i, \ldots, \beta_{2^n}^i)$$

и

$$\widetilde{\beta}_{i+1} = (\beta_1^i, \beta_2^i, \ldots, \beta_j^i, 0, \beta_{j+2}^{i+1}, \ldots, \beta_{2^n}^{i+1})$$

для некоторого $0 \le j \le 2^n - 1$. То есть первые j символов наборов $\widetilde{\beta}_i$ и $\widetilde{\beta}_{i+1}$ совпадают, $(j+1)$-й символ набора $\widetilde{\beta}_i$ равен 1, а $(j+1)$-й символ набора $\widetilde{\beta}_{i+1}$ равен 0, где $0 \le j \le 2^n - 1$. Рассмотрим формулы Φ_i и Φ_{i+1}. Поскольку $F|_{\widetilde{\beta}_i} = 0$, то $\Phi_i(\widetilde{\beta}_i) = 0$. В силу леммы 1 верно равенство $\Phi_{i+1}(\widetilde{\beta}_i) = 0$. В силу монотонности и симметричности по переменным функций, реализуемых автоматом V в обоих состояниях, и вида наборов $\widetilde{\beta}_i$ и $\widetilde{\beta}_{i+1}$ верно неравенство $0 = \Phi_{i+1}(\widetilde{\beta}_i) \ge \Phi_{i+1}(\widetilde{\beta}_{i+1})$. А значит, $\Phi_{i+1}(\widetilde{\beta}_{i+1}) = 0$. Лемма доказана. □

Докажем теорему 1.

Доказательство. Пусть B_n^π – такое множество обобщенных α-формул, что начальная формула формулы φ^π имеет вид

$$x_1 \vee (x_2 \vee \ldots (x_{n-2} \vee (x_{n-1} \vee x_n)) \ldots).$$

Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – произвольная функция из множества $T_0(n)$, где $n \ge 2$. Опишем процесс построения такой последовательности C всех двоичных наборов длины n, что обобщенная α-формула $F = (\varphi, C)$ над $\{f_{V_{q_1}}\}$ реализует функцию f. В дальнейшем предполагаем, что длина всех двоичных наборов равна n.

Сначала записываем все наборы с первым нулевым разрядом, на которых функция f принимает значение 1, в лексикографическом порядке. Предположим, что число таких наборов равно k_1, $0 \le k_1 \le 2^{n-1} - 1$. На первом наборе обобщенная α-формула F принимает значение 1 в силу того, что начальная формула имеет вид $x_1 \vee (x_2 \vee \ldots (x_{n-2} \vee (x_{n-1} \vee x_n)) \ldots)$, и набор не является нулевым.

На наборах со второго по k_1-й формула F принимает значение 1 в силу леммы 2. При этом на внешний функциональный символ всех формул Φ_i при $1 \le i \le k_1$ будет подаваться набор $(0,1)$, поэтому в силу выбора функции перехода автомата V формула Φ_{k_1+1} будет иметь вид $x_1 \vee B(x_2, x_3, \ldots, x_n)$, где $B(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ – некоторая формула над $\{x \vee y, 0(x,y)\}$.

Затем записываем все наборы с первым единичным разрядом, на которых функция f принимает значение 1, в произвольном порядке. Предположим, что число таких наборов равно k_2, $0 \le k_2 \le 2^{n-1}$. Поскольку формула Φ_{k_1+1} имеет вид $x_1 \vee B(x_2, x_3, \ldots, x_n)$, где $B(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ – некоторая формула над $\{x \vee y, 0(x,y)\}$, то на (k_1+1)-м наборе обобщенная формула F принимает значение 1. При этом на внешний функциональный символ всех формул Φ_i при $k_1+1 \le i \le k_1+k_2$ будет подаваться набор $(1,a)$, где $a \in \{0,1\}$, поэтому в силу выбора функции перехода автомата V все формулы Φ_i при $k_1+2 \le i \le k_1+k_2+1$ будут иметь вид $x_1 \vee B(x_2,x_3,\ldots,x_n)$, где $B(x_2,x_3,\ldots,x_n)$ – некоторая формула над $\{x \vee y, 0(x,y)\}$. Следовательно, на всех наборах с k_1+1 по k_1+k_2 формула F принимает значение 1.

Далее записываем набор $\widetilde{0}$. Поскольку все булевы функции, реализуемые автоматной функцией $f_{V_{q_1}}$ в любом состоянии, принадлежат классу T_0, то на наборе $\widetilde{0}$ формула F принимает значение 0. В силу выбора функции перехода для автомата V формула $\Phi_{k_1+k_2+2}$ имеет вид $0(x_1, B(x_2,x_3,\ldots,x_n))$, где $B(x_2,x_3,\ldots,x_n)$ – некоторая формула над $\{x \vee y, 0(x,y)\}$.

После этого записываем все наборы с первым единичным разрядом, на которых функция f принимает значение 0, в произвольном порядке. Число таких наборов равно $2^{n-1}-k_2$. Поскольку формула $\Phi_{k_1+k_2+2}$ имеет вид $0(x_1, B(x_2,x_3,\ldots,x_n))$, где $B(x_2,x_3,\ldots,x_n)$ – некоторая формула над $\{x \vee y, 0(x,y)\}$, то на первом наборе этого множества обобщенная формула F принимает значение 0. При этом на внешний функциональный символ всех формул Φ_i при $k_1+k_2+2 \le i \le k_1+{}$ $+\,2^{n-1}+1$ будет подаваться набор $(1,a)$, где $a \in \{0,1\}$, поэтому все формулы Φ_i при $k_1+k_2+2 \le i \le k_1+2^{n-1}+2$ будут иметь вид $0(x_1, B(x_2,x_3,\ldots,x_n))$, где $B(x_2,x_3,\ldots,x_n)$ – некоторая формула над $\{x \vee y, 0(x,y)\}$. Следовательно, на всех наборах с k_1+k_2+2 по $k_1+2^{n-1}+1$ формула F принимает значение 0.

Наконец, записываем все наборы с первым нулевым разрядом, на которых функция f принимает значение 0, в обратном лексикографическому порядке. Число таких наборов равно $2^{n-1}-k_1-1$. На первом таком наборе обобщенная α-формула F принимает значение 0 в силу того, что формула $\Phi_{k_1+2^{n-1}+2}$ имеет вид $0(x_1, B(x_2,x_3,\ldots,x_n))$, где $B(x_2,x_3,\ldots,x_n)$ – некоторая формула над $\{x \vee y, 0(x,y)\}$. На остальных наборах формула F принимает значение 0 в силу леммы 3.

Теорема доказана. □

Следует отметить, что если булева функция $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ не принадлежит множеству $T_0(n)$, то ни для какого порядка π переменных $x_1,x_2,\ldots,x_n$ не существует обобщенной α-формулы из множества B_n^{π}, реализующей эту функцию для $n \ge 2$.

Введем теперь понятие двойственных обобщенных α-формул. Пусть f_1, f_2 – булевы функции такие, что $f_1 = f_2^*$. Пусть $\mathcal{F}$ – автоматная функция с множеством состояний $\{s_1,s_2\}$, реализующая в состоянии s_i функцию f_i, такая, что функция перехода удовлетворяет следующему условию: равенство $G(s_i,\widetilde{\beta}) = s_j$ выполнено тогда и только тогда, когда выполнено равенство $G(s_j,\widetilde{\gamma}) = s_i$, где $\widetilde{\gamma}$ – набор, противоположный набору $\widetilde{\beta}$, и $i,j \in \{1,2\}$. Пусть $F^1 = (\varphi, C)$ и $F^2 = (\psi, D)$ – обобщенные α-формулы над $\{\mathcal{F}\}$, где $C = (\widetilde{\beta}_1,\widetilde{\beta}_2,\ldots,\widetilde{\beta}_{2^n})$, $D = (\widetilde{\gamma}_1,\widetilde{\gamma}_2,\ldots,\widetilde{\gamma}_{2^n})$, а Φ_1 и Ψ_1 – начальные формулы обобщенных α-формул F^1 и F^2 соответственно. Формулы $F^1 = (\varphi, C)$ и $F^2 = (\psi, D)$ над $\{\mathcal{F}\}$ будем называть двойственными, если выполнено равенство $\Phi_1 \underset{\Gamma}{=} \Psi_1^*$ и для каждого i, $1 \le i \le 2^n$, набор $\widetilde{\gamma}_i$ противоположен набору $\widetilde{\beta}_i$.

Следующую лемму нетрудно доказать индукцией по глубине начальных формул.

Лемма 4. *Двойственные обобщенные α-формулы реализуют двойственные функции.*

Из леммы 4 следует, что для обобщенных α-формул выполнен принцип двойственности.

Докажем теорему, двойственную к теореме 1.

Пусть W_{q_1} – конечный инициальный автомат с двумя входами и одним выходом такой, что $\{q_1, q_2\}$ – множество его состояний, при этом в состоянии q_1 автомат реализует функцию $x_1 \& x_2$, в состоянии q_2 – функцию $1(x_1, x_2)$, и в момент времени t автомат переходит из состояния q_i в состояние q_j тогда и только тогда, когда входные символы в момент t совпадают и равны 1, $i \neq j$. Обозначим через $f_{W_{q_1}}$ и $f_{W_{q_2}}$ автоматные функции, реализуемые инициальными автоматами W_{q_1} и W_{q_2} соответственно. Пусть π – фиксированный порядок переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Через ψ^π обозначим α-формулу над $\{f_{W_{q_1}}\}$, в которую каждая переменная $x_1, x_2, \ldots, x_n$ входит ровно один раз, и вхождения этих переменных соответствуют порядку π. Обозначим через D_n^π множество $\cup\{(\psi^\pi, C)\}$, где объединение берется по всевозможным последовательностям всех двоичных наборов длины n.

Теорема 2. *Для любого $n \geq 2$, для любого порядка π переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ множество обобщенных α-формул D_n^π является универсальным для множества $T_1(n)$.*

Следует отметить, что если булева функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ не принадлежит множеству $T_1(n)$, то ни для какого порядка π переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ не существует обобщенной α-формулы из множества D_n^π, реализующей эту функцию, $n \geq 2$.

В заключение автор выражает искреннюю признательность А.Б. Угольникову за постановку задачи и О.С. Дудаковой за обсуждение результатов работы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 14-01-00598) и программы фундаментальных исследований ОМН РАН «Алгебраические и комбинаторные методы математической кибернетики и информационные системы нового поколения» (проект «Задачи оптимального синтеза управляющих систем»).

Summary

L.N. Sysoeva. On the Problem of Implementation of Boolean Functions by Generalized α-Formulas.

In this paper, we consider the problem of implementation of Boolean functions by generalized α-formulas. The notion of a generalized α-formula is introduced. For a given set of Boolean functions, we define the notion of a universal set of generalized α-formulas. We also propose the notion of dual generalized α-formulas and formulate the principle of duality for generalized α-formulas. The presence of universal sets of generalized α-formulas is proved for every $n \geq 2$ for the sets $T_0(n)$ and $T_1(n)$ of 0-preserving and 1-preserving Boolean functions of the variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Keywords: Boolean function, formula, implementation of functions by formulas.

Литература

1. *Глухов М.М.* Об α-замкнутых классах и α-полных системах функций k-значной логики // Дискретная матем. – 1989. – Т. 1, № 1. – С. 16–21.
2. *Чернышев А.Л.* Условия α-полноты систем функций многозначной логики // Дискретная матем. – 1992. – Т. 4, № 4. – С. 117–130.
3. *Шабунин А.Л.* Примеры α-полных систем k-значной логики при $k = 3, 4$ // Дискретная матем. – 2006. – Т. 18, № 4. – С. 45–55.

4. *Трущин Д.В.* О глубине α-пополнения систем булевых функций // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механика. – 2009. – № 2. – С. 72–75.

5. *Трущин Д.В.* Об оценках глубины α-пополнений систем функций трехзначной логики // Проблемы теоретической кибернетики: Материалы XVI Междунар. конф. – Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2011. – С. 484–487.

6. *Яблонский С.В.* Введение в дискретную математику. – М.: Высш. шк., 2006. – 384 с.

7. Конспект лекций О.Б. Лупанова по курсу «Введение в математическую логику» // Отв. ред. А.Б. Угольников. – М.: Изд-во ЦПИ при мех.-матем. фак. МГУ имени М.В. Ломоносова, 2007. – 191 с.

8. *Сысоева Л.Н.* О некоторых свойствах обобщенных α-формул // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Механика. – 2013. – № 4. – С. 51–55.

Поступила в редакцию
06.08.14

Сысоева Любовь Николаевна – аспирант кафедры дискретной математики, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, г. Москва, Россия.

E-mail: *s-luba@mail.ru*