УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 151, кн. 3 Физико-математические науки *2009*

УДК 539.3

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КОНЕЧНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ГИПЕРУПРУГИХ ТЕЛ. III. ПОСТАНОВКИ ЗАДАЧИ И АЛГОРИТМЫ РЕШЕНИЯ

А.И. Голованов, Ю.Г. Коноплев, Л.У. Султанов

Аннотация

Настоящая статья является третьей частью цикла работ «Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел» и посвящена изложению алгоритмов расчета трехмерных тел из гиперупругих материалов на базе метода последовательных нагружений. Рассмотрены различные варианты постановки задачи. Приведен алгоритм исследования деформирования гиперупругих слабосжимаемых материалов.

Ключевые слова: конечные деформации, гиперупругость, потенциал упругой энергии деформаций, постановка задачи, алгоритм.

Введение

Первая часть цикла статей [1] посвящена общим вопросам нелинейной механики деформируемых сред, в ней приведены основные положения кинематики конечных деформаций, изложены основные виды вариационных уравнений и тензоры напряжений. Во второй части [2] рассмотрены теоретические аспекты построения определяющих соотношений для гиперупругих тел. Настоящая статья является продолжением работ [1, 2], в которой описываются алгоритмы решения нелинейных задач при различных постановках. Используются введенные в статье [1] обозначения для основных тензоров, описывающих напряженно-деформированное состояние. В отличие от указанных работ [1, 2] большая часть соотношений приведена в компонентной форме в разложении по базисным векторам декартовой системы координат, относительно которой рассматривается процесс деформирования исследуемой конструкции.

Затронутые в статье вопросы частично излагаются в монографиях [3–6] и этот материал активно используется. Среди журнальных публикаций можно отметить статьи [7–11], которые посвящены гиперупугим и термогиперупругим материалам. Имеется большое число работ, посвященных методикам расчета упругопластических, вязкоупругих и вязкоупругопластических тел, в которых упругая составляющая в суммарных деформациях описывается по методике, излагаемой в настоящем цикле статей.

В первом разделе описаны постановки задачи (совокупности разрешающих уравнений) исследования гиперупругих материалов при использовании различных пар тензоров напряжений и мер деформаций. В частности, рассматриваются следующие варианты: второй тензор напряжений Пиолы – Кирхгофа и мера деформации Коши – Грина, тензор напряжений Коши – Эйлера и мера деформации Фингера при задании потенциала упругих деформаций в виде функции от инвариантов мер деформации Фингера и в виде функции от главных значений тензора искажения.

Второй раздел посвящен построению разрешающего вариационного уравнения одного варианта метода последовательных нагружений для решения статических задач нелинейной механики деформируемых сред. В качестве отсчетной используется текущая конфигурация, относительно которой проводится линеаризация вариационного уравнения принципа виртуальных мощностей.

В третьем разделе рассматриваются два варианта возможных алгоритмов реализации метода последовательных нагружений, изложенного во втором разделе. Первый предполагает использование модифицированных мер деформации Фингера с исключенными объемными деформациями. Потенциал упругих деформаций определяется в виде двух слагаемых: первое зависит от изменения объема, второе – от деформаций, не сопровождающихся имением объема. Второй вариант возможного алгоритма расчета основан на введении потенциала упругих деформаций как функции от главных значений левого тензора искажения.

1. Различные постановки задачи

В работе [1] даны различные формы разрешающего вариационного уравнения, основанные на принципе либо виртуальных перемещений, либо виртуальных мощностей, как для исходной конфигурации, так и для деформированного состояния. В работе [2] представлены различные формы определяющих соотношений, связывающих тензоры деформаций с тензорами мер деформаций и искажений. Рассмотрим различные варианты формулировки задачи.

Вариант 1. Пусть базовым является уравнение принципа виртуальных перемещений в исходной конфигурации. Распишем все необходимые соотношения в компонентной форме.

Компоненты тензора меры деформации Коши – Грина будут иметь вид

$$C_{ij} = \frac{\partial y_m}{\partial x_i}\frac{\partial y_m}{\partial x_j}. \tag{1}$$

Вариация меры деформации Коши – Грина есть

$$\delta C_{ij} = \frac{\partial \delta y_m}{\partial x_i}\frac{\partial y_m}{\partial x_j} + \frac{\partial y_m}{\partial x_i}\frac{\partial \delta y_m}{\partial x_j}. \tag{2}$$

Для определяющих соотношений, приведенных в работе [2], получим

$$S_{ij} = 2\left[\varphi_1\delta_{ij} + \varphi_2 C_{ij} + \psi_3 C_{ik}C_{kj}\right] = \\ = 2\left[\varphi_1\delta_{ij} + \varphi_2\frac{\partial y_m}{\partial x_i}\frac{\partial y_m}{\partial x_j} + \psi_3\frac{\partial y_m}{\partial x_i}\frac{\partial y_m}{\partial x_k}\frac{\partial y_n}{\partial x_k}\frac{\partial y_n}{\partial x_j}\right]. \tag{3}$$

Для определяющих соотношений (3) разрешающее вариационное уравнение примет вид

$$\frac{1}{2}\int\limits_{V_0} S_{ij}\delta C_{ij}\,dV_0 + \int\limits_{V_0}\rho_0\ddot{y}_i\delta y_i\,dV_0 = \int\limits_{V_0}\rho_0 f_{0i}\delta y_i\,dV_0 + \int\limits_{S_0^\sigma} t^*_{0ni}\delta y_i\,dS_0.$$

Кинематические граничные условия на части границы S_0^u имеют вид $y_m = y_m^*$.

Отметим, что полученные уравнения являются в высшей степени нелинейными относительно неизвестных функций y_m. Действительно, вариация меры деформации (2) содержит их в первой степени, выражение компонент второго тензора напряжений Пиолы – Кирхгофа явно зависит от y_m в четвертой степени, однако функции φ_1, φ_2, ψ_3 , в свою очередь, являются функциями от инвариантов меры деформации (1), степень сложности которых зависит от вида потенциала упругих деформаций $W = W(I_{1C}, I_{2C}, I_{3C})$. Исходя из этого, можно утверждать, что прямое применение той или иной схемы дискретизации, то есть сведение вариационной задачи к алгебраической, в общем случае приведет к практически нерешаемой системе уравнений. Исключения составляют простейшие материалы, для которых $\varphi_1 = \mathrm{const}$, $\varphi_2 = \mathrm{const}$, $\psi_3 = 0$, но и в этом случае получим систему нелинейных алгебраических уравнений третьей степени.

Вариант 2. В качестве базового примем уравнение принципа виртуальных перемещений, но в текущей конфигурации [1]. Распишем все необходимые соотношения в компонентной форме и для этого варианта.

Запишем компоненты тензора меры деформации Фингера:

$$B_{ij} = \frac{\partial y_i}{\partial x_m}\frac{\partial y_j}{\partial x_m}. \tag{4}$$

Обозначим через $|F|$ матрицу, состоящую из компонент градиента деформаций:

$$|F| = \left|\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right|. \tag{5}$$

Определитель этой матрицы задает относительное изменение объема

$$J = \det|F|.$$

С помощью матрицы, обратной к (5), вычисляются производные

$$\left\{\frac{\partial}{\partial y_i}\right\} = \left|F^{-1}\right|\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\},$$

при чем

$$\left|F^{-1}\right| = \left|\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right|. \tag{6}$$

Компоненты вариации тензора (δd_R) вычисляются следующим образом:

$$\delta d_{Rij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta y_i}{\partial y_j} + \frac{\partial \delta y_j}{\partial y_i}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta y_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial y_j} + \frac{\partial \delta y_j}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial y_i}\right),$$

где производные $\dfrac{\partial x_i}{\partial y_j}$ вычисляются по (6).

В соответствии с выражением для тензора напряжений Коши – Эйлера [2] соотношения упругости будут иметь вид

$$\sigma_{ij} = \frac{2}{J}\left[\psi_3 I_{3B}\delta_{ij} + (\psi_1 + \psi_2 I_{1B})B_{ij} - \psi_2 B_{ik}B_{kj}\right] =$$
$$= \frac{2}{J}\left[\psi_3 I_{3B}\delta_{ij} + (\psi_1 + \psi_2 I_{1B})\frac{\partial y_i}{\partial x_m}\frac{\partial y_j}{\partial x_m} - \psi_2\frac{\partial y_i}{\partial x_m}\frac{\partial y_k}{\partial x_m}\frac{\partial y_k}{\partial x_m}\frac{\partial y_j}{\partial x_m}\right], \tag{7}$$

а разрешающее вариационное уравнение в компонентной форме примет вид

$$\frac{1}{2}\int\limits_V \sigma_{ij}\left(\frac{\partial \delta y_i}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial y_j} + \frac{\partial \delta y_j}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial y_i}\right)dV + \int\limits_V \rho\ddot{y}_i\delta y_i\,dV = \int\limits_V \rho f_i\delta y_i\,dV + \int\limits_{S^\sigma} t^*_{ni}\delta y_i\,dS.$$

Аналогично первому варианту ставятся кинематические граничные условия.

Отметим, что сформулировать вариационную задачу в виде системы уравнений относительно неизвестных величин y_m здесь проблематично, так как текущая конфигурация неизвестна. Выходом является переход к интегрированию по исходному объему с помощью известного соотношения

$$dV = JdV_0$$

и по исходной поверхности с помощью соотношения Нансона:

$$\int\limits_{S^\sigma} t^*_{ni}\delta y_i \, dS = \int\limits_{S^\sigma_0} t^*_{nk} F^{-1}_{ki} \delta y_i J \, dS_0.$$

По сравнению с вариантом 1 степень нелинейности в этом варианте еще более высокая, и говорить о непосредственной дискретизации этих уравнений не приходится. Однако современные методы пошагового интегрирования позволяют на базе этого уравнения строить эффективные численные схемы решения широкого круга задач.

Вариант 3. Теперь рассмотрим пример применения вариационного уравнения принципа виртуальных мощностей в базовой форме (см. работу [1]). Упругий потенциал примем в виде функции от главных значений тензора искажения, то есть в виде функции от кратностей удлинений $W = W(V_1, V_2, V_3)$. Последовательность вычислений в этом случае может быть следующей.

Для меры деформаций Фингера (4) определяются главные значения B_1, B_2, B_3 из решения характеристического уравнения

$$\det |B_{ij} - \delta_{ij} B_k| = 0. \tag{8}$$

Для каждого главного значения находятся главные направления в виде единичных ортов $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$, которые представляются в виде проекций на орты основного базиса:

$$\mathbf{b}_k = b_{ki}\mathbf{e}_i, \tag{9}$$

путем решений вырожденных однородных систем уравнений

$$(B_{ij} - \delta_{ij} B_k) b_{kj} = 0. \tag{10}$$

Тензор напряжений Коши – Эйлера представляется в виде

$$(\Sigma) = \sum_k \sigma_k (\mathbf{b}_k \mathbf{b}_k) = \sum_k \sigma_k b_{ki} b_{kj} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j),$$

то есть

$$\sigma_{ij} = \sum_k \sigma_k b_{ki} b_{kj}.$$

Для главных значений тензора напряжений Коши – Эйлера [2] имеем выражение

$$\sigma_i = \frac{V_i}{J} \frac{\partial W}{\partial V_i},$$

где $V_i = B_i^{1/2}$.

Из принципа виртуальных скоростей (мощностей) получаем следующее вариационное уравнение:

$$\frac{1}{2} \int\limits_V \sigma_{ij} \left(\frac{\partial \delta \upsilon_i}{\partial y_j} + \frac{\partial \delta \upsilon_j}{\partial y_i} \right) dV + \int\limits_V \rho \dot{\upsilon}_i \delta \upsilon_i \, dV = \int\limits_V \rho f_i \delta \upsilon_i \, dV + \int\limits_{S^\sigma} t^*_{ni} \delta \upsilon_i \, dS.$$

Отметим, что глобальными неизвестными здесь могут быть компоненты радиус-вектора материальных точек в актуальном состоянии, то есть y_m (с учетом того, что $\upsilon_m = \dot{y}_m$), но чаще в численных алгоритмах неизвестными являются компоненты вектора скорости υ_m. Если сформулировать для этого варианта систему вариационных уравнений, то она получится высоко нелинейной и решить ее будет практически невозможно. Поэтому решение задачи ищется в виде некого алгоритма последовательный вычислений.

2. Метод последовательных нагружений

Среди различных методов решения нелинейных задач механики деформируемого твердого тела, включая и гиперупругие материалы, наиболее популярными в настоящее время являются методы последовательных нагружений (для статических задач) и методы пошагового интегрирования уравнений динамики. В настоящей работе будем рассматривать задачи статики, в которых силами инерции можно пренебречь.

Существуют многочисленные варианты метода последовательных нагружений, которые различаются по следующим признакам: виду базовой конфигурации, используемой в качестве отсчетной (начальная или текущая), и характеру разрешающих уравнений (либо уравнения принципа виртуальных перемещений, либо уравнения принципа виртуальных мощностей). В литературе имеются примеры, иллюстрирующие принципиальную возможность использования того или иного подхода для решения нелинейных задач механики гиперупругих материалов.

Сначала рассмотрим вариант, в котором базовой является текущая конфигурация и используется вариационное уравнение принципа виртуальных мощностей [2], в котором отсутствуют силы инерции, то есть уравнение вида

$$\int\limits_V (\Sigma)\cdot\cdot(\delta d)\,dV = \int\limits_V \mathbf{f}^*\cdot\delta\boldsymbol{\upsilon}\,dV + \int\limits_{S^\sigma} \mathbf{t}_n^*\cdot\delta\boldsymbol{\upsilon}\,dS. \tag{11}$$

Здесь введены в рассмотрение объемные силы $\mathbf{f}^* = \rho\mathbf{f}$.

Процесс деформирования представляется в виде последовательности равновесных состояний, когда переход из текущего положения в последующее определяется приращением нагрузки. При этом принципиальным является то, что этот переход должен описываться линейными уравнениями относительно приращений вектора перемещений $\mathbf{u}$ или вектора конфигурации $\mathbf{R}$.

Будем считать, что в k-м состоянии известными являются все параметры процесса, включая конфигурацию и напряженное состояние, то есть ${}^k\mathbf{R}$ и $({}^k\Sigma)$. Для определения $(k+1)$-го состояния используются так называемые уравнения в скоростях напряжений. Эти уравнения получаются из (11) путем их дифференцирования по времени. В результате имеем линейные уравнения для скоростей ${}^k\boldsymbol{\upsilon}$. Последующая конфигурация определяется в виде известного соотношения

$${}^{k+1}\mathbf{R} = {}^k\mathbf{R} + {}^k\boldsymbol{\upsilon}\Delta t. \tag{12}$$

Поскольку задача статическая, понятие времени весьма условно, поэтому приращение Δt можно принять равным единице времени, то есть $\Delta t = 1$.

Запишем (11) в виде операторного уравнения $F = 0$. На k-м временном слое должно выполняться уравнение ${}^kF = 0$. Аналогичное уравнение на следующем временном слое можно представить в виде ${}^{k+1}F = {}^kF + {}^k\dot{F}\Delta t = 0$. Если для k-го состояния строго выполняются уравнения равновесия, то последнее уравнение сводится к простейшей форме ${}^k\dot{F} = 0$. Однако такое упрощение дает схему последовательных нагружений, имеющую тенденцию к накоплению ошибок, так как уравнения равновесия строго не выполняются ни на одном временном слое. Поэтому более правильным является использование уравнения равновесия для $(k+1)$-го слоя в виде ${}^kF + {}^k\dot{F}\Delta t = 0$ в качестве базового.

Применительно к (11) соответствующее разрешающее уравнение следует принять в виде

$$\left\{\int\limits_{V_k} ({}^k\Sigma)\cdot\cdot(\delta^k d)\,dV_k - \int\limits_{V_k} {}^k\rho^k\mathbf{f}\cdot\delta\upsilon\,dV_k - \int\limits_{S_k^\sigma} {}^k\mathbf{t}_n^*\cdot\delta\upsilon\,dS_k\right\} +$$

$$+\frac{d}{dt}\left\{\int\limits_{V_k} ({}^k\Sigma)\cdot\cdot(\delta^k d)\,dV_k - \int\limits_{V_k} {}^k\rho^k\mathbf{f}\cdot\delta\upsilon\,dV_k - \int\limits_{S_k^\sigma} {}^k\mathbf{t}_n^*\cdot\delta\upsilon\,dS_k\right\}\Delta t = 0. \quad (13)$$

При этом необходимо учесть, что переменными являются все величины кроме вариации скорости.

Рассмотрим подробно процесс вычисления материальных производных от всех интегралов в уравнении виртуальных мощностей. Для краткости номер шага опустим. Во-первых,

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V (\Sigma)\cdot\cdot(\delta d)\,dV = \frac{d}{dt}\int\limits_{V_0} (\Sigma)\cdot\cdot(\delta d)J\,dV_0 =$$

$$= \int\limits_{V_0}\left[(\dot{\Sigma})\cdot\cdot(\delta d)J + (\Sigma)\cdot\cdot(\delta\dot{d})J + (\Sigma)\cdot\cdot(\delta d)\dot{J}\right]dV_0 =$$

$$= \int\limits_V\left[(\dot{\Sigma})\cdot\cdot(\delta d) + (\Sigma)\cdot\cdot(\delta\dot{d}) + \frac{\dot{J}}{J}(\Sigma)\cdot\cdot(\delta d)\right]dV. \quad (14)$$

В последнем уравнении фигурирует вариация $(\delta\dot{d})$, выражение для которой имеет вид

$$(\delta d) = \frac{1}{2}\left[(\delta\dot{F})\cdot(F^{-1}) + (F^{-1})^T\cdot(\delta\dot{F})^T\right], \quad (15)$$

и, как следствие,

$$(\delta\dot{d}) = \frac{1}{2}\left[(\delta\dot{F})\cdot(\dot{F}^{-1}) + (\dot{F}^{-1})^T\cdot(\delta\dot{F})^T\right]. \quad (16)$$

Введем вспомогательные соотношения. Дифференцирование тождества

$$(F)\cdot(F^{-1}) = (I)$$

дает:

$$(\dot{F})\cdot(F^{-1}) + (F)\cdot(\dot{F}^{-1}) = 0,$$

откуда получаем, что

$$(\dot{F}^{-1}) = -(F^{-1})\cdot(\dot{F})\cdot(F^{-1}) = -(F^{-1})\cdot(h), \quad (17)$$

$$(\dot{F}^{-1})^T = -(h)^T\cdot(F^{-1})^T.$$

Подставляя в (16) выражения (17), получаем:

$$(\delta \dot{d}) = -\frac{1}{2}\left[(\delta \dot{F})\cdot(F^{-1})\cdot(h) + (h)^T\cdot(F^{-1})^T\cdot(\delta\dot{F})^T\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[(\delta h)\cdot(h) + (h)^T\cdot(\delta h)^T\right] = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \delta\upsilon_i}{\partial y_m}\frac{\partial \upsilon_m}{\partial y_j} + \frac{\partial \upsilon_m}{\partial y_i}\frac{\partial\delta\upsilon_j}{\partial y_m}\right)(\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j). \quad (18)$$

Производная от вариации мощности объемных сил вычисляется следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \mathbf{f}^*\cdot\delta\upsilon\, dV = \frac{d}{dt}\int\limits_{V_0}\mathbf{f}^*\cdot\delta\upsilon J\, dV_0 = \int\limits_V\left[\dot{\mathbf{f}}^*\cdot\delta\upsilon + \frac{\dot{J}}{J}\mathbf{f}^*\cdot\delta\upsilon\right] dV. \quad (19)$$

Последнее слагаемое в правой части (19), определяющее скорость изменения вариации поверхностных сил, вычисляется при помощи следующих преобразований

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{S^\sigma}\mathbf{t}_n^*\cdot\delta\upsilon\, dS = \frac{d}{dt}\int\limits_{S^\sigma}\mathbf{n}\cdot(\Sigma^*)\cdot\delta\upsilon\, dS = \frac{d}{dt}\int\limits_{S_0^\sigma} dS_0\mathbf{n}_0\cdot(F^{-1})\cdot(\Sigma^*)\cdot\delta\upsilon J =$$

$$= \int\limits_{S_0^\sigma} dS_0 J\mathbf{n}_0\Big[-(F^{-1})\cdot(h)\cdot(\Sigma^*) + (F^{-1})\cdot(\dot{\Sigma}^*) + \frac{\dot{J}}{J}(F^{-1})\cdot(\Sigma^*)\Big]\cdot\delta\upsilon =$$

$$= \int\limits_{S^\sigma}\mathbf{n}\cdot\left[(\dot{\Sigma}^*) - (h)\cdot(\Sigma^*) + \frac{\dot{J}}{J}(\Sigma^*)\right]\cdot\delta\upsilon\, dS = \int\limits_{S^\sigma}\left[\dot{\mathbf{t}}_n^* - \mathbf{t}_n^*\cdot(h)^T + \frac{\dot{J}}{J}\mathbf{t}_n^*\right]\cdot\delta\upsilon dS. \quad (20)$$

В приведенных соотношениях относительная скорость изменения объема определяется выражением

$$\frac{\dot{J}}{J} = I_{1d} = \mathrm{tr}\,(d) = \frac{\partial\upsilon_m}{\partial y_m} = \vec{\nabla}_y\cdot\upsilon = \mathrm{div}\,\upsilon. \quad (21)$$

Подставляя соотношения (14)–(21) в базовое уравнение (13), получим:

$$\int\limits_{V_k}\Big\{({}^k\dot{\Sigma})\cdot\cdot(\delta^k d) + \Big[{}^k\vec{\nabla}_y\cdot{}^k\upsilon\Big]({}^k\Sigma)\cdot\cdot(\delta^k d) -$$

$$-\frac{1}{2}({}^k\Sigma)\cdot\cdot\left[(\delta^k h)\cdot({}^k h) + ({}^k h)^T\cdot(\delta^k h)^T\right] - \Big[{}^k\vec{\nabla}_y\cdot{}^k\upsilon\Big]\,{}^k\mathbf{f}^*\cdot\delta\upsilon\Big\}\, dV_k +$$

$$+\int\limits_{S_k^\sigma}\Big\{{}^k\mathbf{t}_n^*\cdot({}^k h)^T - \Big[{}^k\vec{\nabla}_y\cdot{}^k\upsilon\Big]\,{}^k\mathbf{t}_n^*\Big\}\cdot\delta\upsilon\, dS_k = \int\limits_{V_k}{}^k\dot{\mathbf{f}}^*\cdot\delta\upsilon\, dV_k + \int\limits_{S_k^\sigma}{}^k\dot{\mathbf{t}}_n^*\cdot\delta\upsilon\, dS_k -$$

$$-\frac{1}{\Delta t}\left\{\int\limits_{V_k}({}^k\Sigma)\cdot\cdot(\delta^k d)\, dV_k - \int\limits_{V_k}{}^k\mathbf{f}^*\cdot\delta\upsilon\, dV_k - \int\limits_{S_k^\sigma}{}^k\mathbf{t}_n^*\cdot\delta\upsilon\, dS_k\right\}. \quad (22)$$

В левой части уравнения (20) собраны слагаемые, в которых присутствует неизвестный вектор скорости ${}^k\upsilon$. В правой части присутствуют слагаемые, вычисляемые в текущей конфигурации.

Отметим, что полученное уравнение (20) линейно относительно ${}^k\upsilon$, поэтому после дискретизации оно приводится к системе линейных алгебраических уравнений. Решение этой системы определяет поле скоростей ${}^k\upsilon$, по которому с учетом соотношения (12) находится следующая конфигурация. Затем вычисляются необходимые меры деформации, по которым в соответствии с заданной (выбранной) физической моделью вычисляются необходимые тензоры напряжений. Далее процесс повторяется для следующего шага нагружения.

Помимо вышеприведенной схемы, использующей базовое выражение вариации мощности внутренних сил как один из возможных вариантов [2], можно использовать любой другой вариант. Например, для исходной конфигурации часто встречаются два варианта. Первый предполагает вместо тензора напряжений Коши – Эйлера (Σ) использовать тензор напряжений Кирхгофа (τ). В этом случае уравнение (22) имеет более простой вид

$$\int\limits_{V_{0k}} \left\{ ({}^k\dot{\tau}) \cdot\cdot (\delta^k d) - \frac{1}{2}({}^k\tau) \cdot\cdot \left[(\delta^k h) \cdot ({}^k h) + ({}^k h)^T \cdot (\delta^k h)^T \right] \right\} dV_{0k} =$$

$$= \int\limits_{V_{0k}} {}^k\dot{\mathbf{f}}_0^* \cdot \delta\upsilon \, dV_{0k} + \int\limits_{S_{0k}^\sigma} {}^k\dot{\mathbf{t}}_{0n}^* \cdot \delta\upsilon \, dS_{0k} -$$

$$- \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int\limits_{V_{0k}} ({}^k\tau) \cdot\cdot (\delta^k d) \, dV_{0k} - \int\limits_{V_{0k}} {}^k\mathbf{f}_0^* \cdot \delta\upsilon \, dV_{0k} - \int\limits_{S_{0k}^\sigma} {}^k\mathbf{t}_{0n}^* \cdot \delta\upsilon \, dS_{0k} \right\}. \quad (23)$$

Второй вариант предполагает использование второго тензора напряжений Пиолы – Кирхгофа (S) и меры деформации Коши – Грина (C). В таком случае разрешающее вариационное уравнение запишется в виде

$$\int\limits_{V_{0k}} \left\{ ({}^k\dot{S}) \cdot\cdot (\delta^k C) - ({}^k S) \cdot\cdot [(\dot{F})^T \cdot (\delta\dot{F}) + (\delta\dot{F})^T \cdot (\dot{F})] \right\} dV_{0k} =$$

$$= \int\limits_{V_{0k}} {}^k\dot{\mathbf{f}}_0^* \cdot \delta\upsilon \, dV_{0k} + \int\limits_{S_{0k}^\sigma} {}^k\dot{\mathbf{t}}_{0n}^* \cdot \delta\upsilon \, dS_{0k} -$$

$$- \frac{1}{\Delta t} \left\{ \int\limits_{V_{0k}} ({}^k S) \cdot\cdot (\delta^k C) \, dV_{0k} - \int\limits_{V_{0k}} {}^k\mathbf{f}_0^* \cdot \delta\upsilon \, dV_{0k} - \int\limits_{S_{0k}^\sigma} {}^k\mathbf{t}_{0n}^* \cdot \delta\upsilon \, dS_{0k} \right\}. \quad (24)$$

Теоретически можно записать аналогичные уравнения и для других выражений вариации мощности внутренних сил, но они используются сравнительно редко.

3. Алгоритмы расчетных методик

Рассмотрим вариант расчетной методики исследования слабосжимаемых тел, в котором на шаге нагружения используется вариационное уравнение (22). При этом используются определяющие уравнения, описанные в работе [2]. Изложим последовательность вычислений на шаге нагружения, опуская для простоты номер шага.

Вычисляются:
– градиент деформаций и относительное изменение объема;
– мера деформации Фингера;
– модифицированная мера деформации Фингера, ее девиатор и инварианты

$$\widehat{B}_{ij} = J^{-2/3} B_{ij},$$

$$I_{1\widehat{B}} = \widehat{B}_{ii}, \quad I_{2\widehat{B}} = \frac{1}{2}\left\{\left[\widehat{B}_{ii}\right]^2 - \left[\widehat{B}_{ij}\widehat{B}_{ji}\right]\right\},$$

$$\widehat{B}'_{ij} = \widehat{B}_{ij} - \frac{1}{3} I_{1\widehat{B}}\delta_{ij};$$

– скалярные функции

$$\widehat{\psi}_0 = \frac{\partial W_0}{\partial J}, \quad \widehat{\psi}_1 = \frac{\partial W}{\partial I_{1\widehat{B}}}, \quad \widehat{\psi}_2 = \frac{\partial W}{\partial I_{2\widehat{B}}}; \tag{25}$$

– тензор $(\widehat{G})$ и его девиатор $(\widehat{G}')$ в виде

$$\widehat{G}'_{ij} = \left[\widehat{\psi}_1 + I_{1\widehat{B}}\widehat{\psi}_2\right]\widehat{B}_{ij} - \widehat{\psi}_2\widehat{B}_{im}\widehat{B}_{mj} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\left\{[\widehat{\psi}_1 + I_{1\widehat{B}}\widehat{\psi}_2]\widehat{B}_{mm} - \widehat{\psi}_2\widehat{B}_{nm}\widehat{B}_{mn}\right\} =$$
$$= \left[\widehat{\psi}_1 + I_{1\widehat{B}}\widehat{\psi}_2\right]\widehat{B}_{ij} - \widehat{\psi}_2\widehat{B}_{im}\widehat{B}_{mj} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\left\{\widehat{\psi}_1 I_{\widehat{B}} - 2\widehat{\psi}_2\left[I_{2\widehat{B}} - I^2_{1\widehat{B}}\right]\right\}$$

либо

$$\widehat{G}'_{ij} = \frac{2}{3}\left[I_{2\widehat{B}} - \frac{1}{3}I^2_{1\widehat{B}}\right]\widehat{\psi}_2\delta_{ij} + \left[\widehat{\psi}_1 + \frac{1}{3}I_{1\widehat{B}}\widehat{\psi}_2\right]\widehat{B}'_{ij} - \widehat{\psi}_2\widehat{B}'_{im}\widehat{B}'_{mj};$$

– тензор напряжений Коши – Эйлера

$$\Sigma_{ij} = \widehat{\psi}_0\delta_{ij} + 2\widehat{G}'_{ij};$$

– производные от инвариантов

$$\frac{\partial I_{1\widehat{B}}}{\partial \widehat{B}_{mn}} = \delta_{mn}, \quad \frac{\partial I_{2\widehat{B}}}{\partial \widehat{B}_{mn}} = I_{1\widehat{B}}\delta_{mn} - \widehat{B}_{mn};$$

– производные от скалярных функций (25)

$$\frac{\partial \widehat{\psi}_k}{\partial \widehat{B}_{mn}} = \frac{\partial \widehat{\psi}_k}{\partial I_{1\widehat{B}}}\delta_{mn} + \frac{\partial \widehat{\psi}_k}{\partial I_{2\widehat{B}}}\left[I_{1\widehat{B}}\delta_{mn} - \widehat{B}_{mn}\right] =$$
$$= \left[\frac{\partial^2 W}{\partial I_{k\widehat{B}}\partial I_{1\widehat{B}}} + \frac{\partial^2 W}{\partial I_{k\widehat{B}}\partial I_{2\widehat{B}}} I_{1\widehat{B}}\right]\delta_{mn} - \left[\frac{\partial^2 W}{\partial I_{k\widehat{B}}\partial I_{2\widehat{B}}}\right]\widehat{B}_{mn}; \tag{26}$$

– производные $\dfrac{\partial \widehat{G}'_{ij}}{\partial \widehat{B}_{mn}}$

$$\frac{\partial \widehat{G}'_{ij}}{\partial \widehat{B}_{mn}} = \left[\frac{\partial \widehat{\psi}_1}{\partial \widehat{B}_{mn}} + I_{1\widehat{B}}\frac{\partial \widehat{\psi}_2}{\partial \widehat{B}_{mn}} + \widehat{\psi}_2\delta_{mn}\right]\widehat{B}_{ij} - \frac{\partial \widehat{\psi}_2}{\partial \widehat{B}_{mn}}\widehat{B}_{ik}\widehat{B}_{kj} - \widehat{\psi}_2\left[\widehat{B}_{im}\delta_{jn} + \widehat{B}_{ji}\delta_{in}\delta_{jm}\right] -$$
$$- \frac{1}{3}\delta_{ij}\left\{\frac{\partial \widehat{\psi}_1}{\partial \widehat{B}_{mn}} I_{1\widehat{B}} + \widehat{\psi}_1\delta_{mn} - 2\frac{\partial \widehat{\psi}_2}{\partial \widehat{B}_{mn}}\left[I_{2\widehat{B}} - I^2_{1\widehat{B}}\right] - 2\widehat{\psi}_2\left[\frac{\partial I_{2\widehat{B}}}{\partial \widehat{B}_{mn}} - 2I_{1\widehat{B}}\delta_{mn}\right]\right\};$$

– слагаемые в подынтегральном выражении в левой части уравнения (22) последовательно:

- первое слагаемое

$$(\dot{\Sigma}) \cdot \cdot (\delta d) = \left\{ \frac{1}{2} \delta_{ij} \frac{\partial^2 W_0}{\partial J^2} J \frac{\partial \upsilon_k}{\partial y_k} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial \widehat{G}'_{ij}}{\partial \widehat{B}_{mn}} \left[\frac{\partial \upsilon_m}{\partial y_k} \widehat{B}_{kn} + \widehat{B}_{mk} \frac{\partial \upsilon_n}{\partial y_k} - \frac{2}{3} \widehat{B}_{mn} \frac{\partial \upsilon_k}{\partial y_k} \right] \right\} \left(\frac{\partial \delta \upsilon_i}{\partial y_j} + \frac{\partial \delta \upsilon_j}{\partial y_i} \right);$$

- второе слагаемое

$$\left[\vec{\nabla}_y \cdot \boldsymbol{\upsilon} \right] (\Sigma) \cdot \cdot (\delta d) = \frac{1}{2} \frac{\partial \upsilon_k}{\partial y_k} \sigma_{ij} \left(\frac{\partial \delta \upsilon_i}{\partial y_j} + \frac{\partial \delta \upsilon_j}{\partial y_i} \right);$$

- третье слагаемое

$$\frac{1}{2} (\Sigma) \cdot \cdot [(\delta h) \cdot (h) + (h)^T \cdot (\delta h)^T] = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \left(\frac{\partial \delta \upsilon_i}{\partial y_m} \frac{\partial \upsilon_m}{\partial y_j} + \frac{\partial \upsilon_m}{\partial y_i} \frac{\partial \delta \upsilon_j}{\partial y_m} \right); \qquad (27)$$

- четвертое слагаемое

$$\left[\vec{\nabla}_y \cdot \boldsymbol{\upsilon} \right] \mathbf{f}^* \cdot \delta \boldsymbol{\upsilon} = \frac{\partial \upsilon_k}{\partial y_k} f_i \delta \upsilon_i;$$

- слагаемое в поверхностном интеграле

$$\left\{ \mathbf{t}_n^* \cdot (h)^T - \left[\vec{\nabla}_y \cdot \boldsymbol{\upsilon} \right] \mathbf{t}_n^* \right\} \cdot \delta \boldsymbol{\upsilon} = \left[t_{nj}^* \frac{\partial \upsilon_i}{\partial y_j} - \frac{\partial \upsilon_k}{\partial y_k} t_n i^* \right] \delta \upsilon_i.$$

Приведенные соотношения являются линейными функциями относительно градиентов от скоростей $\dfrac{\partial \upsilon_i}{\partial y_j}$, то есть определяют линейный оператор. После дискретизации по пространственным координатам получается система линейных алгебраических уравнений, в результате решения которой строится поле скоростей ${}^k\boldsymbol{\upsilon}$, с помощью которого определяется следующая конфигурация по соотношению (12). Описанная методика может быть реализована в рамках соответствующего программного обеспечения и эффективно использоваться при решении конкретных задач.

Рассмотрим теперь вариант, в котором используется тензор напряжений Кирхгофа (τ), а потенциал упругих деформаций определяется в виде функции от главных значений тензора искажения $W = W(V_1, V_2, V_3)$. В этом случае на шаге нагружения используется вариационное уравнение (23).

Запишем алгоритм построения линеаризированного оператора, также опуская номер шага. Вычисляется мера деформации Фингера. Затем решается задача на собственные значения (8) и находятся главные значения

$$V_i = B_i^{1/2},$$

и путем решения (10) определяются орты главных направлений (9).

Из результатов [1] следует, что

$$\frac{\dot{V}_i}{V_i} = \mathbf{b}_i \cdot (d) \cdot \mathbf{b}_i = b_{im} d_{mn} b_{in},$$

$$\Omega_{ik}^U = 2 \left[\frac{V_k}{V_i} - \frac{V_i}{V_k} \right]^{-1} \mathbf{b}_i \cdot (d) \cdot \mathbf{b}_k = \frac{2 V_i V_k}{V_k^2 - V_i^2} b_{im} d_{mn} b_{kn} \text{ при } i \neq k,$$

$$\Omega_{ik}^{V} = \mathbf{b}_i \cdot (\omega) \cdot \mathbf{b}_k - 2\left[\frac{V_k}{V_i} + \frac{V_i}{V_k}\right]^{-1},$$

$$\Omega_{ik}^{U} = b_{im}\omega_{mn}b_{kn} + \frac{V_k^2 + V_i^2}{V_k^2 - V_i^2} b_{im}d_{mn}b_{kn} = \frac{b_{im}b_{kn}}{V_k^2 - V_i^2}\left[V_k^2 \frac{\partial \upsilon_m}{\partial y_n} + V_i^2 \frac{\partial \upsilon_n}{\partial y_m}\right] \text{ при } i \neq k.$$

Напомним, что тензоры (Ω_U), (Ω_V) являются кососимметричными, то есть $\Omega_{ii}^V = \Omega_{ii}^U = 0$.

Далее на основе результатов [2] получаем:

$$\tau_{ij}^{\nabla} = \sum_k \dot{\tau}_k b_{ki} b_{kj} = \sum_{k,l}\left[V_k V_l \frac{\partial^2 W}{\partial V_k \partial V_l} + \delta_{kl} V_l \frac{\partial W}{\partial V_k}\right]\frac{\dot{V}_l}{V_l} b_{ki} b_{kj} =$$

$$= \sum_{k,l}\left[V_k V_l \frac{\partial^2 W}{\partial V_k \partial V_l} + \delta_{kl} V_l \frac{\partial W}{\partial V_k}\right] b_{lm} b_{ln} b_{ki} b_{kj} d_{mn}, \quad (28)$$

$$(\Omega_V)\cdot(\tau) - (\tau)\cdot(\Omega_V) = \sum_{k,m,n,i\neq k} \frac{b_{im}b_{kn}}{V_i^2 - V_k^2}\left[V_i^2 \frac{\partial \upsilon_m}{\partial y_n} + V_k^2 \frac{\partial \upsilon_n}{\partial y_m}\right]\tau_{kj} +$$

$$+ \sum_{k,m,n,j\neq k} \frac{b_{km}b_{jn}}{V_j^2 - V_k^2}\left[V_k^2 \frac{\partial \upsilon_m}{\partial y_n} + V_j^2 \frac{\partial \upsilon_n}{\partial y_m}\right]\tau_{ik}. \quad (29)$$

Из (28) и (29) находим определяющие соотношения в виде

$$\dot{\tau}_{ij} = G_{ijmn}\frac{\partial \upsilon_m}{\partial y_n} + R_{ijmn}\frac{\partial \upsilon_n}{\partial y_m},$$

где

$$G_{ijmn} = \frac{1}{2}\sum_{k,l}\left[V_k V_l \frac{\partial^2 W}{\partial V_k \partial V_l} + \delta_{kl} V_l \frac{\partial W}{\partial V_k}\right] b_{lm} b_{ln} b_{ki} b_{kj} +$$

$$+ \sum_{k,i\neq k} \frac{b_{im}b_{kn}}{V_k^2 - V_i^2} V_i^2 \tau_{kj} + \sum_{k,j\neq k} \frac{b_{km}b_{jn}}{V_j^2 - V_k^2} V_k^2 \tau_{ik},$$

$$R_{ijmn} = \frac{1}{2}\sum_{k,l}\left[V_k V_l \frac{\partial^2 W}{\partial V_k \partial V_l} + \delta_{kl} V_l \frac{\partial W}{\partial V_k}\right] b_{lm} b_{ln} b_{ki} b_{kj} +$$

$$+ \sum_{k,i\neq k} \frac{b_{im}b_{kn}}{V_k^2 - V_i^2} V_i^2 \tau_{kj} + \sum_{k,j\neq k} \frac{b_{km}b_{jn}}{V_k^2 - V_i^2} V_i^2 \tau_{ik}.$$

Теперь можно выписать первое слагаемое в подынтегральном выражении левой части уравнения (23):

$$(\dot{\tau}) \cdot\cdot (\delta^k d) = \frac{1}{2}\left[G_{ijmn}\frac{\partial \upsilon_m}{\partial y_n} + R_{ijmn}\frac{\partial \upsilon_n}{\partial y_m}\right]\left(\frac{\partial \delta \upsilon_i}{\partial y_j} + \frac{\partial \delta \upsilon_j}{\partial y_i}\right).$$

Второе слагаемое имеет вид, аналогичный (27).

Заключение

Полученные в настоящей статье результаты являются основой численных алгоритмов, которые допускают программную реализацию в рамках дискретизации вариационной задачи методом конечных элементов. При решении конкретной задачи необходимо задаться его физическими свойствами, что сводится к определению конкретной формы упругого потенциала.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 08-01-00546а).

Summary

A.I. Golovanov, Yu.G. Konoplev, L.U. Sultanov. Numerical Investigation of Large Deformations of Hyperelastic Solids. III. Statements of Problem and Solution Algorithms.

The current article is the third part of a research work cycle "Numerical investigation of large deformations of hyperelastic solids". The article describes the design algorithms for 3D-solids of hyperelastic materials on the basis of consecutive stress method. Different variants of problem statement are regarded.An algorithm is presented for investigating the deformation of hyperelastic low-compressible materials.

Key words: large deformations, hyperelasticity, strain energy potential, statement of problem, algorithm.

Литература

1. *Голованов А.И., Коноплев Ю.Г., Султанов Л.У.* Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел. I. Кинематика и вариационные уравнения // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2008. – Т. 150, кн. 1. – С. 29–37.
2. *Голованов А.И., Коноплев Ю.Г., Султанов Л.У.* Численное исследование конечных деформаций гиперупругих тел. II. Физические соотношения // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2008. – Т. 150, кн. 3. – С. 122–132.
3. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
4. *Грин А., Адкинс Д.* Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. – М.: Мир, 1965. – 455 с.
5. *Коробейников С.Н.* Нелинейное деформирование твердых тел. – Новосибирск, 2000. – 262 с.
6. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. – М.: Наука, 1980. – 512 с.
7. *Оден Д.* Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – М.: Мир, 1976. – 464 с.
8. *Конюхов А.В, Коноплев Ю.Г.* Модель термогиперупругости и ее применение к исследованию потери устойчивости раздуваемых пластин. Часть II. // Изв. вузов. Авиац. техника. – 2006. – № 4. – С. 7–13.
9. *Maniatty A.M., Liu Y., Klaas O., Shephard M.* Higher order stabilized finite element method for hyperelastic finite dtformation // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 2002. – V. 191. – P. 1491–1503.
10. *Vujosevic L., Lubarda V.A.* Finite strain thermoelasticity based on multiplicative decomposition of deformation gradient // Theor. Appl. Mech. – 2002. – V. 28–29. – P. 379–399.
11. *Miehe C.* Entropic thermoelasticity at finite strain. Aspects of the formulation and numerical implementation // Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. – 1995. – V. 120. – P. 243–269.

12. *Liu C.H., Wong J.Y., Mang H.A.* Large strain finite element analysis of sand: model, algorithm and application to numerical simulation of tire-sand interaction // Comput. Struct. – 2000. – V. 74. – P. 253–265.

Поступила в редакцию
23.12.08

Голованов Александр Иванович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической механики Казанского государственного университета.

E-mail: *Alexandr.Golovanov@ksu.ru*

Коноплев Юрий Геннадьевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теоретической механики Казанского государственного университета.

Султанов Ленар Усманович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник НИИММ им. Н.Г. Чеботарева Казанского государственного университета.

E-mail: *Lenar.Sultanov@ksu.ru*