Известия вузов. Математика
2014, № 5, с. 12–27

http://old.kpfu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

И.В. МЕЛЬНИКОВА, О.С. СТАРКОВА

СВЯЗЬ МЕЖДУ СЛАБЫМИ И ОБОБЩЕННЫМИ РЕШЕНИЯМИ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Аннотация. В гильбертовых пространствах и пространствах распределений исследована стохастическая задача Коши для уравнения первого порядка с сингулярным белым шумом и оператором, порождающим некоторую регуляризованную полугруппу (интегрированную, конволюционную) в гильбертовом пространстве. В зависимости от свойств генератора полугруппы построены слабые решения задачи в форме Ито и обобщенные решения "дифференциальной" задачи в пространствах абстрактных распределений. Исследована связь между этими решениями.

Ключевые слова: распределение, полугруппа операторов, белый шум, винеровский процесс, обобщенное решение, слабое решение, регуляризованное решение.

УДК: 517.983 : 517.982 : 519.21

Работа посвящена конструкции и сравнению различных решений некорректной задачи Коши для абстрактного стохастического уравнения

$$X'(t) = AX(t) + B\mathbb{W}(t), \quad t \geq 0, \quad X(0) = \xi, \tag{1}$$

где A — генератор некоторой регуляризованной (интегрированной, K-конволюционной) полугруппы операторов в гильбертовом пространстве H, B — линейный оператор, действующий из гильбертова пространства U в H, и $\{\mathbb{W}(t),\ t \geq 0\}$ — U-значный стохастический процесс типа белого шума.

Некорректность рассматриваемой задачи связана с двумя причинами: во-первых, со свойствами оператора A, в общем случае не являющегося генератором полугруппы класса C_0 и, следовательно, не порождающего семейство ограниченных операторов решения соответствующей однородной задачи Коши, во-вторых, — с сингулярными свойствами процесса белого шума (белый шум неформально определяемый как процесс с независимыми случайными величинами $\mathbb{W}(t_1)$, $\mathbb{W}(t_2)$ при $t_1 \neq t_2$, с нулевым математическим ожиданием и бесконечной вариацией, не является даже непрерывным (по t) процессом).

Среди подходов к решению стохастических задач, в том числе абстрактных (т. е. рассматриваемых в бесконечномерных пространствах), известным является переход к интегральной задаче с интегралом Ито по некоторому винеровскому процессу — "первообразной" от процесса белого шума (см., например, [1]–[4]). Для задачи (1) — это интегральная задача Коши

Поступила 16.11.2012

Работа выполнена при финансовой поддержке программы Рособразования 2.1.1/14118 и Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 13-01-00090, и программы поддержки ведущих университетов РФ (соглашение 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

с абстрактным интегралом Ито по U-значному винеровскому процессу $\{W(t),\, t \geq 0\}$:

$$X(t) = \xi + \int_0^t AX(s)ds + \int_0^t BdW(t), \quad t \geq 0, \tag{2}$$

записываемая обычно, как и в случае векторно-значных винеровских процессов, в форме дифференциалов

$$dX(t) = AX(t)dt + BdW(t), \quad t \geq 0, \quad X(0) = \xi. \tag{3}$$

Другой подход к решению задачи — это решение задачи в пространствах (абстрактных) распределений, только в пространствах распределений удается и корректно определить процесс белого шума $\{\mathbb{W}(t), t \geq 0\}$ (или Q-белого шума), и построить решение задачи с генератором регуляризованной полугруппы, в общем случае не являющейся полугруппой класса C_0.

В данной работе для интегральной задачи Коши (3) с U-значным винеровским процессом $\{W(t),\, t \geq 0\}$ в абстрактном интеграле Ито строим H-значное слабое решение в случае полугруппы класса C_0, слабое n-интегральное — в случае n раз интегрированных полугрупп и слабое K-конволюционное — в случае K-конволюционных полугрупп. Для "дифференциальной" задачи (1) в случае генератора полугруппы класса C_0 и n раз интегрированных полугрупп строится обобщенный белый шум $\mathbb{W}$ в пространстве абстрактных (U-значных) распределений Шварца и обобщенное решение в пространстве H-значных распределений Шварца; в случае генератора K-конволюционных полугрупп решение строится в пространстве H-значных ультра-распределений.

Работа является продолжением и развитием результатов работы [5] в части решений, обобщенных по временной переменной и регуляризованных по "пространственной" переменной (переменной оператора A). В доказательствах теорем существования и единственности этих решений, проведенных под углом исследования связей между решениями, по-новому написаны тонкие моменты, касающиеся обоснования смены порядка интегрирования в интеграле Ито и применения абстрактной формулы Ито. На базе этого проведено исследование связи между полученными решениями.

При исследовании связей между слабыми и обобщенными решениями получились новые и несколько неожиданные результаты о совпадении, в случае генератора полугруппы класса C_0, обобщенного решения задачи (1) со слабым решением, без дополнительных условий на начальные данные, и на фоне этих результатов уже более ожидаемые — о совпадении обобщенного решения с распределением, полученным действием оператора дифференцирования n-го порядка на слабое n-интегральное решение, и полученным действием некоторого ультра-дифференциального оператора на слабое K-конволюционное решение.

Важно отметить, что в конструкции всех рассматриваемых в работе решений происходит регуляризация решений, понимаемая в широком смысле (в отличие от регуляризации в теории некорректных задач, где строятся регуляризованные решения, являющиеся приближенными к некоторому точному решению) [6]. Все построенные в работе решения, включая обобщенные, являются регуляризованными. Регуляризация решений происходит за счет разных "основных" функций по разным переменным: в случае обобщенных решений — по временной переменной t, в случае слабых решений — по временной переменной и переменной оператора A. Регуляризация по переменной t позволяет строить обобщенный процесс белого шума как производную от Q-винеровского процесса и обобщенное решение задачи, регуляризованное за счет основных функций из пространств Шварца, а регуляризация слабых решений по переменной оператора A (с помощью основных функций из $\operatorname{dom} A^*$ и интегрирования по t) позволяет не требовать дополнительной гладкости от решений и начальных данных.

1. Необходимые определения: регуляризованные полугруппы, гильбертово-значный Q-винеровский процесс

Определение 1 (см., например, [7], [8])**.** Пусть A — замкнутый линейный, плотно определенный оператор в банаховом пространстве H; $R(t)$, $t \geq 0$, — ограниченные операторы в банаховом пространстве H. Сильно непрерывное по $t \geq 0$ семейство линейных ограниченных операторов $S = \{S(t), t \geq 0\}$ называется R-регуляризованной полугруппой с генератором A, если

$$S(t)A\xi = AS(t)\xi, \quad \xi \in \operatorname{dom} A, \quad S(t)\xi = A\int_0^t S(s)\xi\, ds + R(t)\xi, \quad \xi \in H. \tag{4}$$

Если $R(t) = I\int\limits_0^t K(s)\, ds$, где $K(t)$, $t \geq 0$, — непрерывная (или дифференцируемая необходимое число раз) $\mathbb{R}$-значная функция, то S называется *K-конволюционной полугруппой.* Если $K(t) = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$, то K-конволюционная полугруппа является *n раз интегрированной полугруппой.* Если $R(t) \equiv I$, то R-регуляризованная полугруппа является полугруппой класса C_0.

Полугруппа класса C_0 традиционно (эквивалентно) определяется как сильно непрерывное по $t \geq 0$ семейство ограниченных операторов $S_0(t)$, $t \geq 0$, удовлетворяющих полугрупповому отношению $S_0(t)S_0(s) = S_0(t+s)$, $t, s \geq 0$; $S_0(0) = I$. Соответствующее полугрупповое отношение для K-конволюционной полугруппы представляется в виде

$$S_K(t)S_K(s) = \int_s^{t+s} K(t+s-r)S_K(r)\, dr - \int_0^t K(t+s-r)S_K(r)\, dr.$$

В частности, в случае n-раз интегрированной полугруппы

$$S_n(t)S_n(s) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t ((t-r)^{n-1}S_n(s+r) - (t+s-r)^{n-1}S_n(r))\, dr.$$

Примеры различных полугрупп и их генераторов представлены, например, в [6], [8].

Пусть теперь H и U — сепарабельные гильбертовы пространства, $Q : U \to U$ — симметричный неотрицательный оператор следа, т. е. выполняется условие $\operatorname{Tr} Q < +\infty$. Тогда, как известно, в пространстве U существует полная ортонормированная система $\{e_k\}$, состоящая из собственных векторов оператора Q: $Qe_k = \lambda_k e_k$, $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_k \geq 0$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k < \infty$.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство с нормальной фильтрацией $\{\mathcal{F}_t,\ t \geq 0\}$, определяемой Q-винеровским процессом W.

Определение 2 (см., например, [1], [3])**.** Q-винеровским процессом называется U-значный случайный процесс $W = \{W(t),\ t \geq 0\}$, где $W(t) = W(t, \omega)$, $\omega \in \Omega$, такой, что

1) $W(0) = 0$,
2) W имеет непрерывные траектории,
3) W имеет независимые приращения на непересекающихся отрезках с гауссовым распределением $\mathcal{N}(0, (t-s)Q)$, $\quad t \geq s \geq 0$.

Q-винеровский процесс обладает следующими свойствами [1]:

- $E(W(t)) = 0$,
- $\operatorname{Cov}(W(t)) = tQ$, где $\operatorname{Cov}(w) = E((w - Ew) \otimes (w - Ew))$, $w \in U$. (Напомним, что ограниченный оператор $u \otimes v$, в общем случае действующий в паре гильбертовых пространств U_1, U_2, определяется как $(u \otimes v)(w) := u\langle v, w\rangle_{U_1}$, $v, w \in U_1$, $u \in U_2$.)

- для любого t процесс $W(t)$ можно разложить в ряд Фурье по системе $\{e_i\}$: $W(t) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i}\beta_i(t)e_i$, где $\beta_i(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}\langle W(t), e_i\rangle_U$ — независимые броуновские движения.

В конструкции абстрактного стохастического интеграла важную роль играет пространство L_2^0 операторов Гильберта–Шмидта Φ, действующих из пространства U_0 в H, где $U_0 := Q^{1/2}(U)$ является гильбертовым пространством со скалярным произведением $\langle u, v\rangle_0 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}\langle u, e_k\rangle\langle v, e_k\rangle = \langle Q^{-1/2}u, Q^{-1/2}v\rangle$. Абстрактный стохастический интеграл Ито определяется следующим образом:

$$\int_s^t \Phi(\tau)dW(\tau) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \Phi(\tau_i)[W(\tau_{i+1}) - W(\tau_i)], \quad \tau_i \in [s, t],$$

где сходимость понимается в среднем квадратичном по $\omega \in \Omega$. Если подинтегральная функция является предсказуемым случайным процессом и удовлетворяет условию

$$E\int_0^t \|\Phi(s)\|^2_{L_2^0}\, ds < \infty, \quad \|\Phi\|^2_{L_2^0} := \sum_{i,k=1}^{\infty} \lambda_i |\langle \Phi e_i, f_k\rangle|^2 = \|\Phi Q^{\frac{1}{2}}\|^2 = \mathrm{Tr}[\Phi Q \Phi^*], \tag{5}$$

где $\{f_k\}$ — базис в H, в частности, если $\Phi \in \mathcal{L}(U, H)$, то стохастический интеграл определен и является интегрируемым H-значным мартингалом [1].

2. Слабые решения задачи Коши в смысле Ито. Существование и единственность

Будем рассматривать абстрактную стохастическую задачу Коши (3)

$$dX(t) = AX(t)\, dt + B\, dW(t), \quad t \geq 0, \quad X(0) = \xi,$$

где ξ — $\mathcal{F}_0$-измеримая H-значная случайная величина, оператор $A : \mathrm{dom}\, A \subset H \to H$ порождает некоторую полугруппу операторов решения однородной задачи, $B : U \to H$ — линейный оператор, $W(t)$, $t \geq 0$, — U-значный Q-винеровский процесс.

Определение 3. H-значный процесс $X = \{X(t),\ t \geq 0\}$ называется слабым решением задачи Коши (3), если $\int\limits_0^t \|X(s)\|_H\, ds < \infty$ почти наверное и для любого $y \in \mathrm{dom}\, A^*$

$$\langle X(t), y\rangle = \langle \xi, y\rangle + \int_0^t \langle X(s), A^*y\rangle\, ds + \langle BW(t), y\rangle.$$

Процесс X назовем слабым K-конволюционным решением, если

$$\langle X(t), y\rangle = \Big\langle \int_0^t K(s)\xi\, ds, y\Big\rangle + \Big\langle \int_0^t X(s)\, ds, A^*y\Big\rangle + \Big\langle \int_0^t \int_0^s K(s-r)\, BdW(r)\, ds, y\Big\rangle. \tag{6}$$

(Формально, слабое решение получается из слабого K-конволюционного при K равной δ-функции.) К последнему интегралу в равенстве (6) применим формулу интегрирования по частям дважды: сначала во внутреннем интеграле Ито

$$\int_0^s K(s-r)\, BdW(r) = K(0)\, BW(s) + \int_0^s K'(s-r)\, BW(r)\, dr,$$

а затем, после замены порядка интегрирования

$$\int_0^t K(0)BW(s)ds + \int_0^t ds \int_0^s K'(s-r)BW(r)\,dr =$$
$$= \int_0^t K(0)\,BW(s)\,ds + \int_0^t BW(r)dr \int_r^t K'(s-r)ds =$$
$$= \int_0^t K(0)\,BW(s)\,ds + \int_0^t [K(t-r) - K(0)]\,BW(r)\,dr.$$

После проведенных преобразований равенство (6) принимает вид

$$\langle X(t), y\rangle = \Big\langle \int_0^t K(s)\xi\,ds, y\Big\rangle + \Big\langle \int_0^t X(s)\,ds, A^*y\Big\rangle + \Big\langle \int_0^t K(t-s)\,BW(s)\,ds,\, y\Big\rangle.$$

В частности, X является слабым n-интегральным решением, если

$$\langle X(t),\, y\rangle = \Big\langle \frac{t^n}{n!}\xi,\, y\Big\rangle + \int_0^t \langle X(s), A^*y\rangle\,ds + \Big\langle \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} BW(s)\,ds,\, y\Big\rangle.$$

Стохастическая задача, записываемая интегральным уравнением

$$X(t) = \int_0^t K(s)\xi\,ds + A\int_0^t X(s)\,ds + \int_0^t K(t-s)\,BW(s)\,ds, \quad t \geq 0,$$

по отношению к исходной интегральной задаче (2) называется (интегральной) K-конволюционной. Таким образом, слабое K-конволюционное решение задачи (3) — это слабое решение K-конволюционной задачи.

Для доказательства существования и единственности слабых решений задачи Коши с генератором полугруппы $\{S(t)\}$ класса C_0 (интегрированной, K-конволюционной) необходимо показать, что стохастическая свертка $\mathbb{W}_A = \Big\{\mathbb{W}_A(t) = \int\limits_0^t S(t-s)B\,dW(s),\ t\geq 0\Big\}$ — важная составляющая всех решений, корректно определена.

Лемма. *Пусть* $\{S(t)B,\ t\geq 0\}$ *является семейством ограниченных операторов, тогда процесс* $\mathbb{W}_A$ *корректно определен.*

Доказательство. Покажем, что для интеграла, определяющего стохастическую свертку, выполняется условие (5). Имеем

$$E\int_0^t \|S(t-s)B\|^2_{L_2^0}\,ds = \int_0^t \|S(t-s)B\|^2_{L_2^0}\,ds = \int_0^t \|S(r)B\|^2_{L_2^0}\,dr =$$
$$= \int_0^t \mathrm{Tr}[S(r)BQB^*S^*(r)]\,dr < \infty.$$

Последнее равенство выполняется в силу того, что Q — оператор следа и $S(t)B$, $t\geq 0$ — ограниченные операторы. Следовательно, интеграл, определяющий стохастическую свертку, существует. □

Теперь в условиях существования стохастической свертки покажем существование и единственность слабых решений задачи Коши (3). Сначала доказательство существования и единственности слабого решения проведем для полугруппы класса C_0. Сделаем это, во-первых, потому, что полугруппа класса C_0, вообще говоря, не является частным случаем K-конволюционной полугруппы, во-вторых, потому, что доказательство в этом случае более отчетливо демонстрирует смысл происходящего. Затем приведем доказательство для случая K-конволюционных полугрупп, для которых интегрированные полугруппы уже являются частным случаем.

Теорема 1. *Пусть A — генератор полугруппы S_0 класса C_0, $B \in \mathcal{L}(U,H)$ и $\{W(t),\, t \geq 0\}$ — Q-винеровский процесс. Тогда процесс*

$$X(t) = S_0(t)\xi + \int_0^t S_0(t-s)B\,dW(s), \quad t \geq 0, \tag{7}$$

является единственным слабым решением задачи (3).

Доказательство. Первое слагаемое в формуле (7) является единственным решением задачи Коши для однородного уравнения, соответствующего задаче (3). Поэтому, без ограничения общности предположим, что $\xi = 0$. Для любого $y \in \operatorname{dom} A^*$ отметим равенство

$$\int_0^t \langle \mathbb{W}_A(s), A^*y\rangle\,ds = \int_0^t \Big\langle \int_0^s \chi_{[0,s]} S_0(s-r)B\,dW(r), A^*y\Big\rangle\,ds.$$

Отсюда, применяя стохастическую теорему Фубини к оператор-функции $\chi_{[0,s]}S_0(s-r)B$, удовлетворяющей ее условиям [1], получим

$$\int_0^t \langle \mathbb{W}_A(s), A^*y\rangle\,ds = \Big\langle \int_0^t \mathbb{W}_A(s)\,ds, A^*y\Big\rangle = \Big\langle \int_0^t ds \int_0^s \chi_{[0,s]}S_0(s-r)BdW(r), A^*y\Big\rangle =$$
$$= \Big\langle \int_0^t \Big(\int_r^t \chi_{[0,s]}S_0(s-r)\,ds\Big)BdW(r), A^*y\Big\rangle = \int_0^t \Big\langle \int_0^{t-r} S_0(\tau)d\tau\, BdW(r), A^*y\Big\rangle.$$

Отсюда в силу свойств полугруппы (4), где $R(t) = I$ для полугрупп класса C_0, имеем

$$\int_0^t \Big\langle \int_0^{t-r} S_0(\tau)d\tau\, BdW(r), A^*y\Big\rangle = \int_0^t \Big\langle A\int_0^{t-r} S_0(\tau)d\tau\, BdW(r), y\Big\rangle =$$
$$= \int_0^t \langle S_0(t-r)BdW(r), y\rangle - \langle BW(t), y\rangle = \langle \mathbb{W}_A(t), y\rangle - \langle BW(t), y\rangle.$$

Следовательно, процесс $\mathbb{W}_A$ является слабым решением задачи (3) с начальным условием $\xi = 0$. В общем случае при $\xi \neq 0$ слабым решением является $X = S_0\xi + \mathbb{W}_A$.

Для доказательства единственности нам потребуется следующее утверждение.

Пусть X — слабое решение задачи Коши (3) *с нулевым начальным условием. Тогда для любой функции $y(\cdot) \in C^1([0,\tau]; \operatorname{dom} A^*)$, $\tau \in [0,\infty)$, имеет место равенство*

$$\langle X(t), y(t)\rangle = \int_0^t \langle X(s), y'(s) + A^*y(s)\rangle\,ds + \int_0^t \langle B\,dW(s), y(s)\rangle. \tag{8}$$

Для проверки равенства (8) сначала рассмотрим функции вида $y = y_0\varphi(s)$, $s \in [0,t]$, где $\varphi \in C^1([0,t])$, $y_0 \in \operatorname{dom} A^*$, и следуя [1], определим процесс $F_{y_0}(t) := \int\limits_0^t \langle X(s), A^*y_0\rangle\,ds + \langle BW(t), y_0\rangle$. Применяя формулу Ито к процессу $dF_{y_0}(s)\varphi(s)$ в равенстве

$$d[F_{y_0}\varphi(s)] = \varphi(s)\,dF_{y_0}(s) + \varphi'(s)F_{y_0}(s)\,ds$$

и интегрируя его, получим

$$F_{y_0}\varphi(t) = \int_0^t \langle B\,dW(s), y(s)\rangle + \int_0^t \big(\varphi(s)\langle X(s), A^*y_0\rangle + \varphi'(s)\langle X(s), y_0\rangle\big)\,ds.$$

В силу равенства $F_{y_0}(\cdot) = \langle X(\cdot), y_0\rangle$ для почти всех ω, утверждение доказано для функций вида $y(t) = y_0\varphi(t)$. Равенство (8) в общем случае следует из того, что линейные комбинации функций $y(t)$ плотны в пространстве $C^1([0,\tau]; \operatorname{dom} A^*)$.

Пусть теперь X — слабое решение и $y_0 \in \operatorname{dom} A^*$. Применяя равенство (8) к функции $y(s) = S^*(t-s)y_0$, получим $\langle X(t),\, y_0\rangle = \Big\langle \int\limits_0^t S(t-s)B\,dW(s),\, y_0\Big\rangle$. Отсюда в силу плотности множества $\operatorname{dom} A^*$ в H и невырожденности полугруппы получаем $X = \mathbb{W}_A$. □

Теорема 2. *Пусть A — плотно определенный генератор K-конволюционной полугруппы $\{S_K,\, t \geq 0\}$ в H, $B \in \mathcal{L}(U,H)$ и $\{W(t),\, t \geq 0\}$ — Q-винеровский процесс. Тогда случайный процесс*

$$X(t) = S_K(t)\xi + \int_0^t S_K(t-s)B\,dW(s), \quad t \geq 0, \tag{9}$$

является слабым K-конволюционным решением задачи (3).

Доказательство. Покажем, что каждое из слагаемых в равенстве (9) является слабым K-конволюционным решением при $B = 0$ и $\xi = 0$ соответственно.

Сначала докажем, что процесс $\{S_K(t)\xi\}$ является слабым K-конволюционным решением однородной задачи (3) при $B = 0$. Интегрируемость траекторий следует из определения K-конволюционной полугруппы. Зафиксируем $y \in \operatorname{dom} A^*$:

$$\int_0^t \langle S_K(s)\xi, A^*y\rangle\,ds = \Big\langle \int_0^t S_K(s)\xi\,ds, A^*y\Big\rangle = \Big\langle A\int_0^t S_K(s)\xi\,ds, y\Big\rangle =$$
$$= \Big\langle S_K(t)\xi - \int_0^t K(s)\xi\,ds, y\Big\rangle = \langle S_K(t)\xi, y\rangle - \Big\langle \int_0^t K(s)\xi\,ds, y\Big\rangle.$$

Отсюда $\langle S_K(t)\xi, y\rangle = \Big\langle \int\limits_0^t S_K(s)\xi\,ds, A^*y\Big\rangle + \Big\langle \int\limits_0^t K(s)\xi\,ds, y\Big\rangle$. Таким образом, процесс $S_K\xi$ является слабым K-конволюционным решением задачи (3) при $B = 0$.

Теперь рассмотрим K-конволюционную стохастическую свертку $\mathbb{W}_A$. Траектории интегрируемы. Действительно, из условия существования интеграла Ито следует, что $\int\limits_0^t \|S_K(t-s)B\|^2_{L_2^0}\,ds$ непрерывен как интеграл с переменным верхним пределом, а значит, интегрируем на любом промежутке $[0,\tau)$, $\tau \geq 0$:

$$\int_0^\tau \int_0^t \|S_K(t-s)B\|^2_{L_2^0}\,ds\,dt = \int_0^\tau E\int_0^t \|S_K(t-s)B\|^2_{L_2^0}\,ds\,dt =$$
$$= \int_0^\tau E\|\mathbb{W}_A(t)\|^2_H\,dt = E\int_0^\tau \|\mathbb{W}_A(t)\|^2_H\,dt < \infty,$$

откуда следует $\int\limits_0^\tau \|\mathbb{W}_A(t)\|^2_H\,dt < \infty$.

Пусть $y \in \operatorname{dom} A^*$, $t \geq 0$, тогда, используя обоснования, проведенные для случая полугрупп класса C_0, имеем

$$\int_0^t \langle \mathbb{W}_A(s), A^*y\rangle\,ds = \Big\langle \int_0^t \mathbb{W}_A(s)\,ds, A^*y\Big\rangle = \Big\langle \int_0^t ds\int_0^s \chi_{[0,s]}S_K(s-r)BdW(r), A^*y\Big\rangle =$$
$$= \Big\langle \int_0^t \Big(\int_r^t \chi_{[0,s]}S_K(s-r)\,ds\Big)BdW(r), A^*y\Big\rangle = \int_0^t \Big\langle \int_0^{t-r} S_K(\tau)d\tau\,BdW(r), A^*y\Big\rangle.$$

Отсюда в силу равенств (4) с $R(t) = I\int_0^t K(s)ds$ для K-конволюционных полугрупп получаем

$$\int_0^t \Big\langle \int_0^{t-r} S_K(\tau)d\tau\, BdW(r), A^*y\Big\rangle = \int_0^t \Big\langle A\int_0^{t-r} S_K(\tau)d\tau\, BdW(r), y\Big\rangle =$$
$$= \int_0^t \langle S_K(t-r)BdW(r), y\rangle - \Big\langle \int_0^t \int_0^{t-r} K(\tau)d\tau BdW(r), y\Big\rangle =$$
$$= \langle \mathbb{W}_A(t), y\rangle - \Big\langle \int_0^t \int_0^s K(s-r)BdW(r)ds, y\Big\rangle.$$

Таким образом, $X(t) = \mathbb{W}_A(t) = \int\limits_0^t S_K(t-s)BdW(s)$, $t \geq 0$, удовлетворяет уравнению (6) с $\xi = 0$. Следовательно, процесс $\Big\{\mathbb{W}_A(t) = \int\limits_0^t S_K(t-s)BdW(s)\Big\}$ является слабым K-конволюционным решением задачи (3) с начальным условием $\xi = 0$. В общем случае при $\xi \neq 0$ слабым K-конволюционным решением является $X = S_K\xi + \mathbb{W}_A$. □

Теорема 3. *Пусть A — плотно определенный генератор K-конволюционной полугруппы $\{S_K,\ t \geq 0\}$ в H, $B \in \mathcal{L}(U,H)$, $\{W(t), t \geq 0\}$ — Q-винеровский процесс и $\overline{\operatorname{dom} A^*} = H^*$. Тогда существует только один предсказуемый процесс, являющийся слабым K-конволюционным решением задачи* (3).

Доказательство. Процесс $X = \{X(t) = S_K(t)\xi + \mathbb{W}_A(t),\ t \geq 0\}$ является слабым K-конволюционным решением задачи (3) и при этом предсказуем. Действительно, предсказуемость K-конволюционной свертки имеет место. Величина $S_K(t)\xi$ является $\mathcal{F}_t$-измеримой как композиция непрерывной по переменной h детерминированной функции $S_K(t)h$ и $\mathcal{F}_0$-измеримой случайной величины ξ. Траектории процесса $S_K(t)\xi$, почти наверное, непрерывны при $t \geq 0$ в силу сильной непрерывности семейства S_K. Таким образом, процесс $S_K(t)\xi$ является предсказуемым.

Теперь достаточно доказать единственность слабого K-конволюционного решения задачи (3) с начальным условием $\xi = 0$. Покажем, что любое такое решение X представимо в виде K-конволюционной свертки.

Рассмотрим функцию $y(s) = S_K^*(t-s)y_0$, где $y_0 \in \operatorname{dom} A^*$. Так как семейство $S_K^*(t)$ образует K-конволюционную полугруппу, то для всех $t \geq 0$ функция $y(s)$ непрерывно дифференцируема и принимает значения в $\operatorname{dom} A^*$.

Аналогом равенства (8) в случае (предсказуемого) слабого K-конволюционного решения, отвечающего начальному условию $\xi = 0$, является соотношение

$$\langle X(t), y(t)\rangle = \int_0^t \langle X(s), y'(s) + A^*y(s)\, ds\rangle + \int_0^t \Big\langle \int_0^s K(s-r)B\, dW(r), y(s)\Big\rangle\, ds. \qquad (10)$$

Для S_K^*, сопряженной к K-конволюционной полугруппе (напомним, K — действительнозначная функция), имеет место равенство

$$\frac{dS_K^*(t-s)y_0}{ds} = -A^*S_K^*(t-s)y_0 - K(t-s)y_0, \quad 0 \leq s \leq t.$$

Отсюда для скалярного произведения процесса $\{X(s),\, s \ge 0\}$ с функцией $y(s) = S_K^*(t-s)y_0$, $y_0 \in \operatorname{dom} A^*$, получаем

$$\langle X(t), S_K^*(t-t)y_0\rangle = \int_0^t \langle X(s), -A^*S_K^*(t-s)y_0 - K(t-s)y_0 + A^*S_K^*(t-s)y_0\rangle\, ds +$$
$$+ \int_0^t \Big\langle \int_0^s K(s-r)B\, dW(r), S_K^*(t-s)y_0 \Big\rangle\, ds,$$

откуда для любого $y_0 \in \operatorname{dom} A^*$ следует

$$\int_0^t \Big\langle K(t-s)X(s)ds - \int_0^s K(s-r)S_K(t-s)B\, dW(r), y_0 \Big\rangle\, ds = 0.$$

Далее, из непрерывности скалярного произведения получаем

$$\Big\langle \int_0^t K(t-s)X(s)ds - \int_0^t \int_0^s K(s-r)S_K(t-s)B\, dW(r)\, ds, y_0 \Big\rangle = 0.$$

Отсюда в силу плотности области определения оператора A^* вытекает равенство

$$\int_0^t K(t-s)X(s)\, ds = \int_0^t \int_0^s K(s-r)S_K(t-s)B\, dW(r)\, ds, \tag{11}$$

которое, как и (10), имеет место для любого предсказуемого слабого K-конволюционного решения. Следовательно, для $X(s)$ равного $\mathbb{W}_A(s) = \int\limits_0^s S_K(s-r)B\, dW(r)$

$$\int_0^t K(t-s)ds \int_0^s S_K(s-r)B\, dW(r)\, ds = \int_0^t S_K(t-s)ds \int_0^s K(s-r)B\, dW(r). \tag{12}$$

Из равенств (11) и (12) для любого решения X с указанными свойствами получаем

$$\int_0^t K(t-s)\Big[X(s) - \int_0^s S_K(s-r)B\, dW(r)\Big]\, ds.$$

Без потери общности, выбирая функцию K, для которой свертка обратима [7], получаем, что любое предсказуемое слабое K-конволюционное решение задачи (3) с нулевым начальным условием совпадает с (K-конволюционной) стохастической сверткой: $X(s) = \int\limits_0^s S_K(s-r)B\, dW(r)$, $s \ge 0$. Отсюда следует единственность предсказуемого слабого K-конволюционного решения задачи (3). □

В случае интегрированных полугрупп имеет место

Теорема 4. *Пусть A — плотно определенный генератор n раз интегрированной полугруппы S_n в H, $B \in \mathcal{L}(U,H)$, $\{W(t),\, t \ge 0\}$ — Q-винеровский процесс и $\overline{\operatorname{dom} A^*} = H^*$. Тогда случайный процесс $X(t) = S_n(t)\xi + \int\limits_0^t S_n(t)B\, dW(s)$, $t \ge 0$, является единственным слабым n-интегральным решением задачи* (3).

Доказательство следует из доказательства теорем 2–3 в случае, когда оператор A является генератором n раз интегрированной полугруппы.

3. Постановка и решение обобщенной задачи Коши

Пусть $\mathcal{X}$ — некоторое банахово пространство. Через $\mathcal{D}'(\mathcal{X})$ обозначим пространство $\mathcal{X}$-значных распределений (обобщенных функций) над пространством основных функций $\mathcal{D}$. Через $\mathcal{D}'_0(\mathcal{X})$ обозначим пространство $\mathcal{X}$-значных распределений с носителем в $[0,\infty)$.

3.1. Обобщенные решения задачи Коши в случае полугрупп класса C_0 и n раз интегрированных полугрупп. В пространстве распределений $\mathcal{D}'(U)$ для почти всех $\omega\in\Omega$ можно корректно определить Q-белый шум как производную (по t) от Q-винеровского процесса, которая не существует в классическом смысле.

Определение 4. Q-белый шум $\mathbb{W}$ в пространстве абстрактных распределений — это обобщенный случайный процесс $\{\langle\varphi,\mathbb{W}\rangle,\ \varphi\in\mathcal{D}\}$, который соответствует производной Q-винеровского процесса и рассматривается как элемент пространства $\mathcal{D}'(L_2(\Omega,U))$:

$$\langle\varphi,\mathbb{W}\rangle := -\int_0^\infty W(t)\varphi'(t)\,dt,\quad \varphi\in\mathcal{D}.$$

Здесь интеграл понимается как интеграл Бохнера от функции со значениями в пространстве $L_2(\Omega,U)$. В дальнейшем важную роль будет играть равенство

$$-\int_0^\infty W(t)\varphi'(t)\,dt=\int_0^\infty \varphi(t)\,dW(t),\quad \varphi\in\mathcal{D}, \tag{13}$$

которое является обобщением формулы интегрирования по частям [9] для абстрактного интеграла Ито.

Задачу Коши (1), следуя [10], запишем в виде

$$P*X=\delta\otimes\xi+B\mathbb{W}, \tag{14}$$

где $P:=\delta'\otimes I-\delta\otimes A\in\mathcal{D}'_0(\mathcal{L}([\operatorname{dom}A],H))$ и $[\operatorname{dom}A]$ — область определения оператора A с граф-нормой $\|x\|_{[\operatorname{dom}A]}=\|x\|+\|Ax\|$. Уравнение (14) может быть записано и в более привычной форме

$$\langle\varphi,X'\rangle=A\langle\varphi,X\rangle+\langle\varphi,\delta\rangle\xi+\langle\varphi,B\mathbb{W}\rangle,\quad\varphi\in\mathcal{D}. \tag{15}$$

Равенство (15) получается, если сначала формально, считая X и $\mathbb{W}$ функциями, умножить уравнение (1) на $\varphi\in\mathcal{D}$ и проинтегрировать от нуля до бесконечности:

$$\int_0^t X'(t)\varphi(t)\,dt=-\varphi(0)\xi-\int_0^t X(t)\varphi'(t)\,dt=\int_0^t AX(t)\varphi(t)\,dt+\int_0^t B\mathbb{W}(t)\varphi(t)\,dt,$$

а затем, как это обычно делается в теории обобщенных функций, записать его в форме равенства для функционалов. Учитывая равенства для функционалов $\langle\varphi,X'\rangle:=-\langle\varphi',X\rangle$ и $\langle\varphi,\delta\rangle\xi=\varphi(0)\xi$, получаем (15).

Распределение $G\in\mathcal{D}'_0(\mathcal{L}(H,[\operatorname{dom}A]))$ называется *обратным относительно свертки* к $P\in\mathcal{D}'_0(\mathcal{L}([\operatorname{dom}A],H))$, если

$$G*P=\delta\otimes I_{[\operatorname{dom}A]},\quad P*G=\delta\otimes I_H,$$

где $I_{[\operatorname{dom}A]}$ и I_H — единичные операторы в $[\operatorname{dom}A]$ и H, соответственно. В силу свойств распределения обратного относительно свертки, в [10] доказано, что единственное решение задачи Коши $P*X=\delta\otimes\xi+F$, где $F\in\mathcal{D}'_0(H)$, имеет вид $X=G*\delta\xi+G*F$. Отсюда следует

$$X=G*\delta\xi+G*B\mathbb{W},\quad X\in\mathcal{D}'_0([\operatorname{dom}A])\cap\mathcal{D}'_0(L_2(\Omega,[\operatorname{dom}A])), \tag{16}$$

является единственным решением уравнения (14). Здесь снова присутствует стохастическая свертка $G*B\mathbb{W}$, но теперь в обобщенном смысле.

Исследуем, как в рассматриваемых случаях генераторов регуляризованных полугрупп и неоднородности $B\mathbb{W} \in \mathcal{D}'_0(L_2(\Omega, H))$ строится оператор, обратный к P, и как при этом строится решение X в соответствующих пространствах распределений $\mathcal{D}'_0(L_2(\Omega, [\mathrm{dom}\, A]))$ (и ультра-распределений $\mathcal{D}'_{\{M_n\},0}(L_2(\Omega, [\mathrm{dom}\, A]))$ в следующем разделе).

Теорема 5. *Пусть A — генератор полугруппы класса C_0 или n раз интегрированной полугруппы в гильбертовом пространстве H и пусть $\mathbb{W}$ — U-значный Q-белый шум. Тогда существует единственное обобщенное решение $X \in \mathcal{D}'_0(L_2(\Omega, [\mathrm{dom}\, A]))$ задачи Коши* (14).

Доказательство. В первую очередь рассмотрим вид распределения G, обратного к P относительно операции свертки.

1. Если A является генератором полугруппы $\{S_0(t), t \geq 0\}$ класса C_0, операторно-значное распределение G определяется следующим образом: $\langle \varphi, G\rangle = \int\limits_0^\infty \varphi(t) S_0(t)\, dt$. Для доказательства этого факта проверим, что (регулярное) распределение $\mathbf{S}_0(\cdot)$, определенное как полугруппа $S_0(t)$, $t \geq 0$, продолженная нулем при $t < 0$, является обратным распределением к P относительно свертки и, следовательно, $X = \mathbf{S}_0\xi$ является решением задачи (14) при $B = 0$.

По определению полугруппы класса C_0, операторы $S_0(t)$, $t \geq 0$, являются ограниченными операторами решения однородной задачи Коши $u'(t) = Au(t)$ с начальным условием $u(0) = \xi \in \mathrm{dom}\, A$: $u(t) = S_0(t)\xi$. Из ограниченности операторов решения следует, что для любого $\xi \in H$ имеет место равенство

$$\langle \varphi, \mathbf{S}_0\xi\rangle = \int_0^\infty \varphi(t) S_0(t)\xi\, dt, \quad \varphi \in \mathcal{D},$$

а из замкнутости генератора полугруппы вытекает $\langle \varphi, \mathbf{S}_0\xi\rangle \in \mathrm{dom}\, A$ для любого $\xi \in \mathrm{dom}\, A$ и

$$A\langle \varphi, \mathbf{S}_0\xi\rangle = -\varphi(0)\xi - \int_0^\infty \varphi'(t) S_0(t)\xi\, dt. \tag{17}$$

Покажем, что из свойства замкнутости и плотности области определения генератора полугруппы следует выполнение этого равенство для $\xi \in H$. Рассмотрим последовательность $\{\xi_n\} \subset \mathrm{dom}\, A$. Для всех ξ_n справедливо равенство (17). Пусть $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n$, $\xi \in H$. Воспользуемся свойством полугруппы $\lim\limits_{n\to\infty} S_0(t)\xi_n = S_0(t)\xi$ и замкнутостью оператора A: если $z_n \to z$ и $Az_n \to f$, то $z \in \mathrm{dom}\, A$ и $Az = f$. Переходя к пределу при $\xi_n \to \xi$ в равенстве (17), записанном для ξ_n, получаем $\langle \varphi, \mathbf{S}_0\xi\rangle \in \mathrm{dom}\, A$ для любого $\xi \in H$.

Таким образом, $\langle \varphi, \mathbf{S}_0\xi\rangle$ принадлежит $\mathrm{dom}\, A$, следовательно, к распределению $\mathbf{S}_0\xi$ можно применить оператор P. Покажем, что $\mathbf{S}_0\xi$ является решением однородной задачи Коши, соответствующей задаче (14). Используя определение свертки и равенство (17), получаем

$$\begin{aligned}\langle \varphi, P * \mathbf{S}_0\xi\rangle &= \langle\langle \varphi(t+s), P(t)\rangle, \mathbf{S}_0(s)\xi\rangle = -\langle \varphi'(s), \mathbf{S}_0(s)\xi\rangle - A\langle \varphi(s), \mathbf{S}_0(s)\xi\rangle = \\ &= -\int_0^\infty \varphi'(s) S_0(s)\xi\, ds + \varphi(0)\xi + \int_0^\infty \varphi'(s) S_0(s)\xi\, ds = \varphi(0)\xi = \langle \varphi, \delta \otimes \xi\rangle,\end{aligned}$$

т. е. $\langle \varphi, P * \mathbf{S}_0\xi\rangle = \langle \varphi, \delta \otimes \xi\rangle$, и, значит, $\mathbf{S}_0(\cdot)$ является распределением обратным к P относительно свертки. В этом случае равенство (16) для решения задачи (1) принимает вид

$$\langle \varphi, X\rangle = \int_0^\infty \varphi(t) S_0(t)\xi\, dt - \int_0^\infty \varphi'(t) \int_0^t S_0(t-s) BW(s)\, ds\, dt, \quad \varphi \in \mathcal{D}, \tag{18}$$

где W — Q-винеровский процесс, являющийся регулярным распределением, принадлежащим $\mathcal{D}'_0(U) \cap \mathcal{D}'_0(L_2(\Omega, U))$, и $X \in \mathcal{D}'_0([\mathrm{dom}\, A]) \cap \mathcal{D}'_0(L_2(\Omega, [\mathrm{dom}\, A]))$.

2. Если A является генератором экспоненциально ограниченной n раз интегрированной полугруппы $\{S_n(t),\, t \geq 0\}$, то операторно-значное распределение G, заданное как

$$\langle \varphi, Gx \rangle = (-1)^n \int_0^\infty \varphi^{(n)}(t) S_n(t) x\, dt, \quad \varphi \in \mathcal{D}, \quad x \in H,$$

является обратным распределением к P относительно свертки, и решение $X \in \mathcal{D}_0'([\mathrm{dom}\, A]) \cap \mathcal{D}_0'(L_2(\Omega, [\mathrm{dom}\, A]))$ представляется в виде

$$\langle \varphi, X \rangle = (-1)^n \left[\int_0^\infty \varphi^{(n)}(t) S_n(t) \xi\, dt - \int_0^\infty \varphi^{(n+1)}(t)\, dt \int_0^t S_n(t-s) BW(s) ds \right]. \qquad (19)$$

3.2. Обобщенные решения задачи Коши в случае K-конволюционной полугруппы. Для решения задачи Коши с генератором K-конволюционной полугруппы, в связи с необходимостью нахождения оператора, обратного к свертке с функцией $K(t)$, $t \geq 0$, в данном случае дифференциального бесконечного порядка, в отличие от дифференциального n-го порядка в случае n раз интегрированных полугрупп, требуется более широкий класс распределений и, как следствие, более узкий класс основных функций. В теории ультра-распределений пространство основных функций является пространством бесконечно дифференцируемых функций, определяемых через оценки для производных, зависящие от последовательности положительных чисел M_n такой, что

1) $M_n^2 \leq M_{n-1} M_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$;
2) $M_n \leq ab^n \min\limits_{0 \leq p \leq n} M_n M_{n-p}$, $n \in \mathbb{N}$, $a > 0$, $b > 0$;
3) $\sum\limits_{p=n+1}^{\infty} \frac{M_{p-1}}{M_p} \leq nc \frac{M_n}{Mn+1}$, $n \in \mathbb{N}$, $c > 0$.

Определение 5. Пространством ультра-дифференцируемых функций класса M_n является пространство

$$\mathcal{D}_{\{M_n\}} = \mathrm{ind} \lim_{\Upsilon \in \mathbb{R}} \mathrm{proj} \lim_{h \to 0} \mathcal{D}_{\{M_n\}, h, \Upsilon},$$

где $\mathcal{D}_{\{M_n\}, h, \Upsilon}$ — нормированное пространство функций $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ с компактными носителями в Υ, удовлетворяющих неравенству $\|\varphi^{(n)}\|_{C(\Upsilon)} \leq CM_n h^n$, с нормой $\|\varphi\|_{\{M_n\}, h, \Upsilon} = \sup\limits_n \big(\frac{\|\varphi^{(n)}\|_{C(\Upsilon)}}{M_n H^n}\big)$, а соответствующее пространство абстрактных ультра-распределений

$$\mathcal{D}'_{\{M_n\}}(H) := \mathcal{L}(\mathcal{D}_{\{M_n\}}, H).$$

Рассмотрим задачу Коши в пространстве абстрактных ультра-распределений с оператором A, порождающим K-конволюционную полугруппу $S_K = \{S_K(t),\, t \geq 0\}$. В этом случае уравнение (15) будем рассматривать на функциях $\varphi \in \mathcal{D}_{\{M_n\}}$.

Теорема 6. *Пусть A — генератор K-конволюционной полугруппы S_K в пространстве H. Пусть $\mathbb{W}$ — U-значный Q-белый шум в пространстве $\mathcal{D}'_{\{M_n\}}(U)$ и $B \in \mathcal{L}(U, H)$. Тогда обобщенная стохастическая задача Коши* (14) *имеет единственное решение $X \in \mathcal{D}'_{\{M_n\},0}(L_2(\Omega, [\mathrm{dom}\, A]))$, которое удовлетворяет уравнению* (15) *при $\varphi \in \mathcal{D}_{\{M_n\}}$.*

Доказательство. В рассматриваемом случае единственное решение $G\xi$ однородной задачи Коши $\langle \varphi, P * G\xi \rangle = \langle \varphi, \delta \otimes \xi \rangle$, $\varphi \in \mathcal{D}_{\{M_n\}}$, соответствующей (14), задается равенством

$$\langle \varphi, G\xi \rangle = \left\langle \varphi, P_{\mathrm{ult}}\left(\frac{d}{dt}\right) \mathbf{S}_K \xi \right\rangle = \left\langle P^*_{\mathrm{ult}}\left(\frac{d}{dt}\right) \varphi, \mathbf{S}_K \xi \right\rangle, \quad \varphi \in \mathcal{D}_{\{M_n\}},$$

где $\mathbf{S}_K$ — регулярное ультра-распределение в пространстве $\mathcal{D}'_{\{M_n\},0}(\mathcal{L}(H, [\mathrm{dom}\, A]))$, определенное как полугруппа S_K, продолженная нулем при $t < 0$, а ультра-дифференциальный оператор $P_{\rm ult}\big(\frac{d}{dt}\big) = \sum\limits_{i=1}^{\infty}\alpha_i\frac{d^i}{dt^i}$ определяется как обратный к оператору свертки с функцией K [7]:

$$\langle\varphi, P_{\rm ult}(\delta)*K\rangle = \Big\langle\varphi, \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\delta^{(i)}*K\Big\rangle = \langle\varphi,\delta\rangle, \quad \varphi\in\mathcal{D}_{\{M_n\}}. \tag{20}$$

Распределение G лежит в пространстве $\mathcal{D}'_{\{M_n\},0}(\mathcal{L}(H,[\operatorname{dom}A]))$. В этом случае стохастическая свертка — это обобщенная свертка $G*B\mathbb{W}$:

$$\langle\varphi, G*B\mathbb{W}\rangle := -\int_0^{\infty} S(t)\Big\langle P^*_{\rm ult}\Big(\frac{d}{dt}\Big)\varphi'(t+\cdot), BW(\cdot)\Big\rangle\,dt, \quad \varphi\in\mathcal{D}_{\{M_n\}}.$$

Поскольку $G\in\mathcal{D}'_{\{M_n\},0}(\mathcal{L}(H,[\operatorname{dom}A])$ и $B\mathbb{W}\in\mathcal{D}'_{\{M_n\},0}(L_2(\Omega,H))$, стохастическая свертка определена и принадлежит пространству $\mathcal{D}'_{\{M_n\},0}(L_2(\Omega,[\operatorname{dom}A]))$. Таким образом, из свойств ультра-распределения G и свойств стохастической свертки следует, что ультрараспределение $X = G\xi + G*B\mathbb{W}$:

$$\begin{aligned}\langle\varphi, X\rangle &= \Big\langle P^*_{\rm ult}\Big(\frac{d}{dt}\Big)\varphi, \mathbf{S}_K\xi\Big\rangle - \int_0^{\infty}\mathbf{S}_K(t)\Big\langle P^*_{\rm ult}\Big(\frac{d}{dt}\Big)\varphi'(t+s), BW(s)\Big\rangle\,dt = \\ &= \int_0^{\infty} P^*_{\rm ult}\Big(\frac{d}{dt}\Big)\varphi(t)S_K(t)\xi\,dt + \int_0^{\infty}P^*_{\rm ult}\Big(\frac{d}{dt}\Big)\varphi(t)\,dt\int_0^t S_K(t-s)B\,dW(s)\end{aligned} \tag{21}$$

является единственным решением задачи (14).

4. Связь между слабыми и обобщенными решениями

В заключительном разделе приведем результаты сравнения решений обобщенной задачи Коши (14) со слабыми решениями задачи Коши (3) в случае полугрупп класса C_0, n раз интегрированных и K-конволюционных полугрупп.

Теорема 7. *Пусть оператор A — генератор полугруппы S_0 класса C_0. Тогда слабое решение* (7) *является решением обобщенной задачи Коши* (14)*, где Q-белый шум $\mathbb{W}$ является обобщенной производной Q-винеровского процесса W. Обратно, обобщенное решение, определенное равенством* (18)*, является слабым решением задачи Коши* (3).

Доказательство. Проверим, что слабое решение (7) задачи Коши в смысле Ито, определяемое процессом $\Big\{X(t) = S_0(t)\xi + \int\limits_0^t S_0(t-s)B\,dW(s),\ t\ge 0\Big\}$ и продолженное нулем при $t<0$, удовлетворяет уравнению (14) для любой H-значной $\mathcal{F}_0$-измеримой случайной величины ξ. Для этого домножим X на функцию $\varphi\in\mathcal{D}$ и проинтегрируем по t от нуля до бесконечности. Из равенства интегралов (13) следует, что для слабого решения (для почти всех ω) имеют место равенства

$$\begin{aligned}\langle\varphi, X\rangle &= \int_0^{\infty}\varphi(t)S_0(t)\xi\,dt + \int_0^{\infty}\varphi(t)\int_0^t S_0(t-s)B\,dW(s)\,dt = \\ &= \langle\varphi, S_0\xi\rangle - \Big\langle\varphi', \int_0^t S_0(t-s)B\,W(s)ds\Big\rangle.\end{aligned} \tag{22}$$

Они могут быть записаны следующим образом:

$$\langle\varphi, X\rangle = \langle\varphi, S_0\xi\rangle - \langle\varphi', \mathbf{S}_0 * B\,\mathbb{W}\rangle = \langle\varphi, \mathbf{S}_0\xi\rangle - \langle\varphi, \mathbf{S}_0 * B\,\mathbb{W}\rangle, \tag{23}$$

где (регулярное) распределение $\mathbf{S}_0 \in \mathcal{D}'(\mathcal{L}(H, [\operatorname{dom} A]))$ — это продолженные нулем при $t < 0$ операторы полугруппы S_0, заданной в пространстве H. Равенство (23) означает, что продолженный нулем при $t < 0$ процесс $\left\{X(t) = S_0(t)\xi + \int\limits_0^t S_0(t-s)B\,dW(s),\, t \geq 0\right\}$, дающий слабое решение задачи Коши в смысле Ито (14), совпадает с обобщенным решением задачи (14), определяемым равенством (18).

Обратно, если идти снизу вверх из равенств (23)–(22) следует, что обобщенное решение $\mathbf{S}_0 * B\,\mathbb{W}$ задачи (14) в случае генератора полугруппы класса C_0 совпадает со слабым решением $X(t) = S_0(t)\xi + \int\limits_0^t S_0(t-s)B\,dW(s)$, $t \geq 0$, задачи (3).

Анализируя конструкцию построенных решений и проведенное исследование связи между обобщенным и слабым решениями, видим, что в случае генератора полугруппы операторов $\{S_0(t), t \geq 0\}$ класса C_0, образующих операторы решения соответствующей однородной задачи, сумма двух слагаемых $S_0(t)\xi + \mathbb{W}_A(t)$, $t \geq 0$, является слабым решением для любой H-значной $\mathcal{F}_0$-измеримой случайной величины ξ за счет того, что не требуется применять оператор A ни к $S_0(t)\xi$, ни к $\mathbb{W}_A(t)$, вместо этого оператор A^* применяется к элементам $y \in \operatorname{dom} A^*$. Обобщенным решением эта же сумма является за счет равенства (17), из которого следует, что действие оператора A “смягчается” действием основных функций φ. Более конкретно, в силу свойств операторов полугруппы $\{S_0(t), t \geq 0\}$ действие оператора A переходит в операцию дифференцирования по t, которая по свойствам обобщенного дифференцирования перебрасывается на основную (бесконечно дифференцируемую) функцию φ. $\square$

Для случая n раз интегрированных и K-конволюционных полугрупп покажем, что обобщенное решение совпадает, соответственно, с n-й производной от n раз интегрального решения и некоторой ультра-дифференциальной производной от K-конволюционного решения (при тех же условиях на ξ и W).

Теорема 8. *Пусть оператор A — генератор n раз интегрированной полугруппы S_n. Тогда n-я обобщенная производная слабого n интегрального решения $X(t) = S_n(t)\xi + \int\limits_0^t S_n(t-s)B\,dW(s)$ является решением обобщенной задачи Коши* (14). *Обратно, решение обобщенной задачи* (14) *является n-й производной слабого n интегрального решения.*

Доказательство. Пусть $X(t) = S_n(t)\xi + \int\limits_0^t S_n(t-s)B\,dW(s)$, $t \geq 0$, — слабое n интегральное решение, продолженное нулем при $t < 0$. Тогда

$$\langle \varphi, X^{(n)} \rangle = (-1)^n \left[\int_0^\infty \varphi^{(n)}(s) S_n(s)\xi\,ds + \int_0^\infty \varphi^{(n)}(t)\,dt \int_0^t S_n(t-s)B\,dW(s) \right] =$$
$$= (-1)^n \left[\int_0^\infty \varphi^{(n)}(t) S_n(t)\xi\,dt - \int_0^\infty \varphi^{(n+1)}(t)\,dt \int_0^t S_n(t-s)BW(s)ds \right].$$

Следовательно, в силу равенств (13) и (19) распределение $X^{(n)}$ является обобщенным решением задачи (14) (для почти всех ω). Из полученного равенства и свойств свертки следует и обратное утверждение. $\square$

Теорема 9. *Пусть оператор A — генератор K-конволюционной полугруппы S_K. Тогда процесс $P_{\mathrm{ult}}\left(\frac{d}{dt}\right) X(t), t \geq 0$, где X — слабое K-конволюционное решение* (9), *является* *решением обобщенной задачи Коши (14). Обратно, обобщенное решение задачи (14) является результатом действия оператора ультра-дифференцирования $P_{\text{ult}}\left(\frac{d}{dt}\right)$ на слабое K-конволюционное решение.*

Доказательство. Пусть $X(t) = S_K(t)\xi + \int\limits_0^t S_K(t-s)B\,dW(s)$, $t \geq 0$, — слабое K-конволюционное решение. Применим к процессу X, продолженному нулем при $T < 0$, оператор ультрадифференцирования $P_{\text{ult}}\left(\frac{d}{dt}\right)$, определяемый равенством (20). Получим

$$\left\langle \varphi, P_{\text{ult}}\left(\frac{d}{dt}\right)X \right\rangle = \left\langle P^*_{\text{ult}}\left(\frac{d}{dt}\right)\varphi(t), X(t) \right\rangle = \int_0^t P^*_{\text{ult}}\left(\frac{d}{dt}\right)\varphi(t) S_K(t)\xi\,dt + \\ + \int_0^t P^*_{\text{ult}}\left(\frac{d}{dt}\right)\varphi(t)\,dt \int_0^t S_K(t-s)B\,dW(s). \quad (24)$$

Таким образом, получили равенство (21) для $P_{\text{ult}}\left(\frac{d}{dt}\right)X$. Следовательно, $P_{\text{ult}}\left(\frac{d}{dt}\right)X$ является обобщенным решением задачи (14). Из равенств (21), (24) следует и обратное утверждение. □

Литература

[1] Da Prato G., Zabczyk J. *Stochastic equations in infinite dimensions* (Cambridge Univ. Press, 1992).

[2] Da Prato G. *Kolmogorov equations for stochastic PDEs* (Birkhäuser Verlag, Basel, 2004).

[3] Melnikova I.V., Filinkov A.I., Anufrieva U.A. *Abstract stochastic equations.* I. *Classical and distributional solutions*, J. Math. Sci. (New York) **111** (2), 3430–3475 (2002).

[4] Melnikova I.V. and Filinkov A.I. *Abstract stochastic problems with generators of regularized semigroups*, J. Commun. Appl. Anal. **13** (2), 195–212 (2009).

[5] Альшанский М.А., Мельникова И.В. *Регуляризованные и обобщенные решения бесконечномерных стохастических задач*, Матем. сб. **202** (11), 3–30 (2011).

[6] Anufrieva U.A. and Melnikova I.V. *Pecularities and regularization of ill-posed Cauchy problems with differential operators*, J. Math. Sci. (New York) **148** (4), 481-632 (2008).

[7] Chioranescu I. *Local convoluted semigroups*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **168**, 107–122 (1995).

[8] Melnikova I.V. and Filinkov A. *Abstract Cauchy problems*: *three approaches*, Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics **120** (Chapman & Hall/CRC, Boca Roton, FL, 2001).

[9] Оксендаль Б. *Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения* (Мир, М., 2003).

[10] Fattorini H.O. *The Cauchy problem* (Addison–Wesley, Reading, Mass., 1983).

И.В. Мельникова

профессор, кафедра математического анализа и теории функций,
Уральский федеральный университет,
пр. Ленина, д. 51, г. Екатеринбург, 620083, Россия,

`e-mail:` Irina.Melnikova@urfu.ru

О.С. Старкова

младший научный сотрудник, проблемно-научная лаборатория прикладного анализа,
Уральский федеральный университет,
пр. Ленина, д. 51, г. Екатеринбург, 620083, Россия,

`e-mail:` olga-n4@yandex.ru

I.V. Mel'nikova and O.S. Starkova

Connection between weak and generalized solutions of infinite-dimensional stochastic problems

Abstract. We investigate the stochastic Cauchy problem for the first order equation with singular white noise and generators of regularized (integrated, convoluted) semigroups in Hilbert spaces and abstract distribution spaces. Weak solutions for the problem in the Ito form and generalized solutions for the "differential" problem in abstract distribution spaces are constructed in dependence on properties of the generator. Connections between these solutions are shown.

Keywords: distribution, semigroup of operators, white noise, Wiener process, generalized solution, weak solution, regularized solution.

I.V. Mel'nikova

Professor, Chair of Mathematical Analysis and Function Theory,
Ural Federal University,
51 Lenin Ave., Ekaterinburg, 620083 Russia,

`e-mail:` Irina.Melnikova@urfu.ru

O.S. Starkova

Junior Scientific Researcher of Problem-Scientific Laboratory of Applied Analysis,
Ural Federal University,
51 Lenin Ave., Ekaterinburg, 620083 Russia,

`e-mail:` olga-n4@yandex.ru