УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2020, Т. 162, кн. 2 ISSN 2541-7746 (Print)
С. 111–119 ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 514.763 doi: 10.26907/2541-7746.2020.2.111-119

О СВОЙСТВАХ ПРОЕКТИВНЫХ АЛГЕБР ЛИ ЖЕСТКИХ h-ПРОСТРАНСТВ H_{32} ТИПА {32}

А.В. Аминова, Д.Р. Хакимов

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

Исследованы пятимерные псевдоримановы пространства, допускающие инфинитезимальные проективные преобразования. Найдено общее решение уравнения Эйзенхарта в h-пространстве H_{32} непостоянной кривизны. Установлены необходимые и достаточные условия существования негомотетического проективного движения в h-пространстве H_{32} непостоянной кривизны и описана структура негомотетической проективной алгебры Ли в этом пространстве.

Ключевые слова: пятимерное псевдориманово многообразие, жесткое h-пространство типа {32}, уравнение Эйзенхарта, проективная алгебра Ли

Введение

Векторное поле X на n-мерном псевдоримановом многообразии (M^n, g) с проективной структурой Π и связностью ∇ называется *инфинитезимальным проективным преобразованием*, или *проективным движением*, если порождаемая этим полем в окрестности каждой точки $p \in M^n$ локальная 1-параметрическая группа состоит из (локальных) проективных преобразований, то есть автоморфизмов проективной структуры. Необходимое и достаточное условие этого состоит в выполнении уравнения Эйзенхарта

$$\nabla h(Y, Z, W) = 2g(Y, Z)W\varphi + g(Y, W)Z\varphi + g(Z, W)Y\varphi, \tag{1}$$

равносильного после замены $h = a + 2\varphi g$ уравнению

$$\nabla a(Y, Z, W) = g(Y, W)Z\varphi + g(Z, W)Y\varphi, \tag{2}$$

и обобщенному уравнению Киллинга

$$L_X g = h,$$

где $Y, Z, W \in TM^n$, L_X – производная Ли вдоль X, $\varphi = (1/(n+1))\mathrm{div}X$ – определяющая функция проективного движения X [1]. Если $\varphi = \mathrm{const}$, то есть $\mathrm{div}\, X = \mathrm{const}$, то проективное движение является аффинным.

В косонормальном репере [1, с. 97] уравнение (2) принимает вид

$$d\bar{a}_{pq} + \sum_{h=1}^{n} e_h(\bar{a}_{hq}\omega_{p\tilde{h}} + \bar{a}_{ph}\omega_{q\tilde{h}}) = (Y_q\varphi)\theta_p + (Y_p\varphi)\theta_q,$$

где θ_h – каноническая 1-форма, сопряженная с Y_h, $\omega_{pq} = -\omega_{qp}$ есть 1-форма связности, p, q, $r = 1, \ldots, n$.

Классификация псевдоримановых пространств, допускающих негомотетические проективные движения, основана на разбиении их по типам в соответствии с алгебраической структурой производной Ли $L_X g$ метрики g в направлении проективного движения X, определяемой в каждой точке $p \in V \subseteq M$ характеристикой Сегре χ тензора $h = L_X g$. Тип тензора $L_X g$ определяет тип проективного движения X и тип метрики g в области V. Такие метрики называются *h-метриками типа* χ, а соответствующие пространства – *h-пространствами типа* χ [2].

В работе [3] с помощью метода косонормального репера определены пятимерные псевдоримановы h-пространства H_{32} типа $\{32\}$ и найдены необходимые и достаточные условия существования проективного движения типа $\{32\}$. Для нахождения всех проективных движений и вычисления максимальной проективной алгебры Ли в H_{32} нужно найти общее решение h уравнения Эйзенхарта (1) в H_{32}. Решение этой задачи требует обращения к условиям интегрируемости уравнений Эйзенхарта, включающих тензор кривизны. При этом необходимо выделить пространства постоянной кривизны $S^5(K)$, допускающие максимальную 35-мерную проективную группу, строение которой хорошо известно (см., например, [1, гл. 4]). Структура кривизны h-пространства H_{32} определяется в п. 2. В п. 3 находятся необходимые и достаточные условия для того, чтобы H_{32} было пространством постоянной кривизны K (теорема 1). В п. 4 находится общее решение уравнения Эйзенхарта в h-пространстве типа $\{32\}$ непостоянной кривизны (теорема 2), устанавливаются необходимые и достаточные условия существования негомотетического проективного движения общего вида в таком пространстве (теорема 5) и выясняется строение негомотетической проективной алгебры Ли этого пространства (теорема 6).

1. Структура кривизны

В работе [3] показано, что в каноническом косонормальном репере $(Y_h) = \underset{h}{\xi^i}\partial/\partial x^i$, заданном формулами

$$\underset{1}{\xi^1} = \underset{2}{\xi^2} = \frac{1}{f_2 - f_1}, \quad \underset{2}{\xi^1} = \frac{\sigma_1}{2(f_2 - f_1)}, \quad \underset{3}{\xi^1} = \frac{1}{4(f_2 - f_1)}\left(\sigma_2 + \frac{1}{2}\sigma_1^2\right),$$

$$\underset{3}{\xi^2} = \frac{1}{2(f_2 - f_1)}\left(\sigma_1 - \frac{\varepsilon_1 x^1}{A}\right), \quad \underset{3}{\xi^3} = \frac{1}{2(f_2 - f_1)A}, \quad \underset{4}{\xi^4} = \frac{1}{(f_1 - f_2)^{3/2}},$$

$$\underset{5}{\xi^4} = \frac{\sigma_3}{2(f_1 - f_2)^{3/2}}, \quad \underset{5}{\xi^5} = \frac{1}{(f_1 - f_2)^{3/2}B}, \tag{3}$$

где

$$A = \varepsilon_1\left(x^2 + \tau(x^3)\right) + 1 - \varepsilon_1, \quad B = \varepsilon_2\left(x^4 + \mu(x^5)\right) + 1 - \varepsilon_2,$$

$$\sigma_1 \equiv \frac{2}{f_2 - f_1}, \quad \sigma_2 \equiv \frac{2}{(f_2 - f_1)^2}, \quad \sigma_3 \equiv \frac{3}{f_1 - f_2},$$

метрика g h-пространства H_{32} и соответствующая билинейная форма $a = h - 2\varphi g$ определяются каноническими формами

$$\bar{a}_{pq} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e_1 f_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_1 f_1 & e_1 & 0 & 0 \\ e_1 f_1 & e_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 f_2 \\ 0 & 0 & 0 & e_2 f_2 & e_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{g}_{pq} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e_1 & 0 & 0 \\ 0 & e_1 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 0 & e_2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

при этом выполняются уравнения

$$Y_1\varphi = Y_2\varphi = Y_4\varphi = 0, \tag{5}$$

$$df_1 = \frac{2}{3}e_1(Y_3\varphi)\theta_1, \quad df_2 = e_2(Y_5\varphi)\theta_4, \tag{6}$$

$$\begin{gathered}
\omega_{12} = \frac{1}{3}(Y_3\varphi)\theta_1, \quad \omega_{13} = -(Y_3\varphi)\theta_2, \quad \omega_{15} = \frac{Y_5\varphi}{f_2 - f_1}\theta_1, \\
\omega_{25} = \frac{Y_5\varphi}{(f_2-f_1)^2}\theta_1 + \frac{Y_5\varphi}{f_2-f_1}\theta_2, \quad \omega_{32} = (Y_3\varphi)\theta_3, \quad \omega_{34} = \frac{Y_3\varphi}{f_2-f_1}\theta_4, \\
\omega_{35} = \frac{Y_5\varphi}{(f_2-f_1)^3}\theta_1 + \frac{Y_5\varphi}{(f_2-f_1)^2}\theta_2 + \frac{Y_5\varphi}{f_2-f_1}\theta_3 - \frac{Y_3\varphi}{(f_2-f_1)^2}\theta_4 + \frac{Y_3\varphi}{f_2-f_1}\theta_5, \\
\omega_{45} = -(Y_5\varphi)\theta_5.
\end{gathered} \tag{7}$$

где

$$\varphi = \frac{3}{2}f_1 + f_2 \tag{8}$$

есть определяющая функция проективного движения типа $\{32\}$, $\omega_{ij} = \gamma_{jik}\theta^k$ есть 1-форма связности в косонормальном репере (Y_h), $f_1 = \varepsilon_1 x^3 + (1-\varepsilon_1)\kappa_1$, $f_2 = \varepsilon_2 x^5 + (1-\varepsilon_2)\kappa_2$, ε_1 и ε_2 принимают значения 0 и 1, κ_1, κ_2 – постоянные, $e_1, e_2 = \pm 1$ [3].

Используя формулы (7), из первого структурного уравнения Картана

$$d\theta_i = -\sum_{j=1}^{5} e_j\omega_{ij} \wedge \theta_{\bar{j}}$$

найдем

$$\begin{gathered}
d\theta_1 = -\frac{4e_1(Y_3\varphi)}{3}\theta_1\wedge\theta_2 - \frac{e_2(Y_5\varphi)}{f_2-f_1}\theta_1\wedge\theta_4, \\
d\theta_2 = -\frac{2e_1(Y_3\varphi)}{3}\theta_1\wedge\theta_3 - \frac{e_2(Y_5\varphi)}{(f_2-f_1)^2}\theta_1\wedge\theta_4 - \frac{e_2(Y_5\varphi)}{f_2-f_1}\theta_2\wedge\theta_4, \\
d\theta_3 = -\frac{e_2(Y_5\varphi)}{(f_2-f_1)^3}\theta_1\wedge\theta_4 - \frac{e_2(Y_5\varphi)}{(f_2-f_1)^2}\theta_2\wedge\theta_4 - \frac{e_2(Y_5\varphi)}{f_2-f_1}\theta_3\wedge\theta_4, \\
d\theta_4 = -\frac{e_1(Y_3\varphi)}{f_2-f_1}\theta_1\wedge\theta_4 - e_2(Y_5\varphi)\theta_4\wedge\theta_5, \quad d\theta_5 = \frac{e_1(Y_3\varphi)}{(f_2-f_1)^2}\theta_1\wedge\theta_4 - \frac{e_1(Y_3\varphi)}{f_2-f_1}\theta_1\wedge\theta_5.
\end{gathered} \tag{9}$$

Введем обозначения

$$A_1 \equiv Y_3\varphi, \quad A_2 \equiv Y_5\varphi, \quad C_1 \equiv e_1Y_3(Y_3\varphi), \quad C_2 \equiv e_2Y_5(Y_5\varphi).$$

Дифференцируя первое из равенства (6) $df_1 = \frac{2}{3}e_1(Y_3\varphi)\theta_1 \equiv \frac{2}{3}e_1A_1\theta_1$ и принимая во внимание, что

$$dA_1 = \theta^l Y_l Y_3\varphi = \theta^l[Y_l, Y_3] + \theta^l Y_3 Y_l\varphi,$$

с учетом (5) получим

$$dA_1 = C_1\theta_1 - \frac{4e_1A_1^2}{3}\theta_2 - \frac{e_2A_1A_2}{f_2-f_1}\theta_4. \tag{10}$$

Найдем также

$$dA_2 = C_2\theta_4 - e_2A_2^2\theta_5 - \frac{e_1A_1A_2}{f_1-f_2}\theta_1. \tag{11}$$

Дифференцируя (7) и используя (9), (10) и (11), получим формулы

$$d\omega_{12}=0,\quad d\omega_{13}=-C_1\theta_1\wedge\theta_2+\frac{2e_1A_1^2}{3}\theta_1\wedge\theta_3+\frac{e_2A_1A_2}{(f_2-f_1)^2}\theta_1\wedge\theta_4,\quad d\omega_{14}=0,$$

$$d\omega_{15}=-\frac{4e_1A_1A_2}{3(f_2-f_1)}\theta_1\wedge\theta_2-\frac{C_2}{f_2-f_1}\theta_1\wedge\theta_4+\frac{e_2A_2^2}{f_2-f_1}\theta_1\wedge\theta_5,$$

$$d\omega_{23}=-C_1\theta_1\wedge\theta_3+\frac{e_2A_1A_2}{(f_2-f_1)^3}\theta_1\wedge\theta_4+\frac{4e_1A_1^2}{3}\theta_2\wedge\theta_3+\frac{e_2A_1A_2}{(f_2-f_1)^2}\theta_2\wedge\theta_4,$$

$$d\omega_{24}=0,\quad d\omega_{25}=\frac{e_1A_1A_2}{3(f_2-f_1)^2}\theta_1\wedge\theta_2-\frac{2e_1A_1A_2}{3(f_2-f_1)}\theta_1\wedge\theta_3-$$

$$\frac{C_2}{(f_2-f_1)^2}\theta_1\wedge\theta_4+\frac{e_2A_2^2}{(f_2-f_1)^2}\theta_1\wedge\theta_5-\frac{C_2}{f_2-f_1}\theta_2\wedge\theta_4+\frac{e_2A_2^2}{f_2-f_1}\theta_2\wedge\theta_5,$$

$$d\omega_{34}=\left(\frac{C_1}{f_2-f_1}+\frac{e_1A_1^2}{3(f_2-f_1)^2}\right)\theta_1\wedge\theta_4-\frac{4e_1A_1^2}{3(f_2-f_1)}\theta_2\wedge\theta_4-\frac{e_2A_1A_2}{f_2-f_1}\theta_4\wedge\theta_5,$$

$$d\omega_{35}=\frac{e_1A_1A_2}{(f_2-f_1)^3}\theta_1\wedge\theta_2+\frac{e_1A_1A_2}{(f_2-f_1)^2}\theta_1\wedge\theta_3-\left(\frac{C_2}{(f_2-f_1)^3}+\frac{C_1}{(f_2-f_1)^2}\right)\theta_1\wedge\theta_4+$$

$$+\frac{2e_1A_1^2}{3(f_2-f_1)^3}\theta_1\wedge\theta_4+\left(\frac{C_1}{f_2-f_1}+\frac{e_2A_2^2}{(f_2-f_1)^3}-\frac{e_1A_1^2}{3(f_2-f_1)^2}\right)\theta_1\wedge\theta_5-$$

$$-\left(\frac{C_2}{(f_2-f_1)^2}-\frac{4e_1A_1^2}{3(f_2-f_1)^2}\right)\theta_2\wedge\theta_4+\left(\frac{e_2A_2^2}{(f_2-f_1)^2}-\frac{4e_1A_1^2}{3(f_2-f_1)}\right)\theta_2\wedge\theta_5-$$

$$-\frac{C_2}{f_2-f_1}\theta_3\wedge\theta_4+\frac{e_2A_2^2}{f_2-f_1}\theta_3\wedge\theta_5-\frac{e_2A_1A_2}{(f_2-f_1)^2}\theta_4\wedge\theta_5,$$

$$d\omega_{45}=-\frac{e_1A_1A_2}{(f_2-f_1)^2}\theta_1\wedge\theta_4-C_2\theta_4\wedge\theta_5, \tag{12}$$

Применяя второе структурное уравнение Картана

$$\Omega_{ij}=d\omega_{ij}+\sum_{l=1}^{5}e_l\omega_{il}\wedge\omega_{\tilde{l}j}$$

и формулы (7), (12), вычислим компоненты 2-формы кривизны Ω_{ij} h-пространства H_{32} типа $\{32\}$:

$$\Omega_{12}=\frac{e_1A_1^2}{3}\theta_1\wedge\theta_2,\quad \Omega_{13}=-C_1\theta_1\wedge\theta_2+\frac{e_1A_1^2}{3}\theta_1\wedge\theta_3,\quad \Omega_{14}=0,$$

$$\Omega_{15}=-\frac{C_2}{f_2-f_1}\theta_1\wedge\theta_4,\quad \Omega_{23}=-C_1\theta_1\wedge\theta_3+\frac{e_1A_1^2}{3}\theta_2\wedge\theta_3,\quad \Omega_{24}=-\frac{e_1A_1^2}{3(f_2-f_1)}\theta_1\wedge\theta_4,$$

$$\Omega_{25}=-\left(\frac{C_2}{(f_2-f_1)^2}-\frac{e_1A_1^2}{3(f_2-f_1)^2}\right)\theta_1\wedge\theta_4-\frac{e_1A_1^2}{3(f_2-f_1)}\theta_1\wedge\theta_5-\frac{C_2}{f_2-f_1}\theta_2\wedge\theta_4,$$

$$\Omega_{34}=\left(\frac{C_1}{f_2-f_1}+\frac{e_1A_1^2}{3(f_2-f_1)^2}\right)\theta_1\wedge\theta_4-\frac{e_1A_1^2}{3(f_2-f_1)}\theta_2\wedge\theta_4, \tag{13}$$

$$\Omega_{35} = -\left(\frac{C_2}{(f_2-f_1)^3} + \frac{C_1}{(f_2-f_1)^2} - \frac{2e_1A_1^2}{3(f_2-f_1)^3}\right)\theta_1\wedge\theta_4 + \\ + \left(\frac{C_1}{f_2-f_1} - \frac{e_1A_1^2}{3(f_2-f_1)^2}\right)\theta_1\wedge\theta_5 - \left(\frac{C_2}{(f_2-f_1)^2} - \frac{e_1A_1^2}{3(f_2-f_1)^2}\right)\theta_2\wedge\theta_4 - \\ - \frac{e_1A_1^2}{3(f_2-f_1)}\theta_2\wedge\theta_5 - \frac{C_2}{f_2-f_1}\theta_3\wedge\theta_4, \quad \Omega_{45} = -C_2\theta_4\wedge\theta_5.$$

2. Условие постоянство кривизны

Представим 2-форму кривизны в виде $\Omega_{ij} \equiv \sum_{(kl)} K_{ijkl}\theta_k\wedge\theta_l$ $(k,\, l = 1,\dots,5,$ $k<l)$ и положим $K_{ijij}\equiv\rho_{ij}$, тогда можно записать

$$\Omega_{ij} = \rho_{ij}\theta_i\wedge\theta_j + \sum_{(kl)\neq(ij)} K_{ijkl}\theta_k\wedge\theta_l, \quad i,j,k,l = 1,\dots,5, \quad i<j, \quad k<l,$$

где в силу (13)

$$\rho_{12}=\rho_{13}=\rho_{23}=\frac{e_1A_1^2}{3}, \quad \rho_{45}=-C_2, \quad \rho_{14}=\rho_{15}=\rho_{24}=\rho_{25}=\rho_{34}=\rho_{35}=0,$$

а ненулевые коэффициенты K_{ijkl} при $(kl)\neq(ij)$ определяются равенствами

$$K_{1312}=K_{2313}=-C_1, \quad K_{1514}=K_{2524}=K_{3534}=-\frac{C_2}{(f_2-f_1)},$$

$$K_{2414}=K_{2515}=K_{3424}=K_{3525}=-\frac{e_1A_1^2}{3(f_2-f_1)},$$

$$K_{2514}=K_{3524}=-\frac{C_2}{(f_2-f_1)^2}+\frac{e_1A_1^2}{3(f_2-f_1)^2}, \quad K_{3414}=\frac{C_1}{f_2-f_1}+\frac{e_1A_1^2}{3(f_2-f_1)^2},$$

$$K_{3514}=-\frac{C_2}{(f_2-f_1)^3}-\frac{C_1}{(f_2-f_1)^2}+\frac{2e_1A_1^2}{3(f_2-f_1)^3}, \quad K_{3515}=\frac{C_1}{f_2-f_1}-\frac{e_1A_1^2}{3(f_2-f_1)^2}.$$

Справедлива

Теорема 1. *Жесткое h-пространство H_{32} типа $\{32\}$ является пространством постоянной кривизны K: $\Omega_{ij}=K\theta_i\wedge\theta_j$, тогда и только тогда, когда выполняются условия $K_{1514}=K_{2414}=0$, равносильные равенствам*

$$A_1=C_2=0, \tag{14}$$

при этом $K_{ijkl}=0$ для всех $(kl)\neq(ij)$, то есть $\Omega_{ij}=0$ и любое h-пространство H_{32} типа $\{32\}$ постоянной кривизны является плоским.

Доказательство. Из формулы $\Omega_{ij}=K\theta_i\wedge\theta_j$, определяющей пространство постоянной кривизны K, следует, в частности, что $K_{1514}=K_{2414}=0$, то есть (14).

Наоборот, если выполняется (14), то $\rho_{ij}=\rho_{kl}=0$, для всех $i,\, j,\, k,\, l=1,\dots,5$; $i<j$, $k<l$, при этом $C_1\equiv e_1Y_3(A_1)=0$ и, следовательно, $\Omega_{ij}=0$ для всех $i,\, j=1,\dots,5$, поэтому $K=0$ и пространство H_{32} является плоским. □

3. Определяющая функция проективного движения в h-пространстве типа $\{32\}$ непостоянной кривизны

Найдем общее решение уравнения Эйзенхарта в h-пространстве (H_{32},g) непостоянной кривизны.

Теорема 2. *Любое решение* (k, g, ψ) *уравнения Эйзенхарта*

$$\nabla k(Y, Z, W) = 2g(Y, Z)W\psi + g(W, Z)Y\psi + g(Y, W)Z\psi,$$

равносильного после замены $k = b + 2\psi g$ *уравнению*

$$\nabla b(Y, Z, W) = g(W, Z)Y\psi + g(Y, W)Z\psi, \tag{15}$$

в h*-пространстве* (H_{32}, g) *типа* $\{32\}$ *непостоянной кривизны удовлетворяет условию*

$$\psi = c_1 \left(\frac{3}{2}f_1 + f_2\right) + \mathrm{const} = c_1\varphi + \mathrm{const}, \tag{16}$$

где функция φ *определена равенством (8),* c_1 *– произвольная постоянная.*

Доказательство. Учитывая тензорный характер равенства (16), достаточно доказать его в каноническом косорепере (3), где уравнение (15) принимает вид

$$d\bar{b}_{pq} + \sum_{h=1}^{5} e_h \left(\bar{b}_{hq}\omega_{p\tilde{h}} + \bar{b}_{ph}\omega_{q\tilde{h}}\right) = (Y_q\psi)\theta_p + (Y_p\psi)\theta_q. \tag{17}$$

Здесь $\omega_{p\tilde{h}}$ определены формулами (7), а $\bar{b}_{pq}$ – компоненты тензора b в косорепере (3).

Дифференцируя обе части уравнения (17), получим условия интегрируемости этого уравнения

$$\sum_{h=1}^{5} e_h \left(\bar{b}_{p\tilde{h}}\Omega_{hq} + \bar{b}_{\tilde{h}q}\Omega_{hp}\right) = \sum_{h=1}^{5} e_h \left(\psi_{p\tilde{h}}\theta_h \wedge \theta_q + \psi_{\tilde{h}q}\theta_h \wedge \theta_p\right), \tag{18}$$

где $\Omega^h{}_p = e_h\Omega_{\tilde{h}p}$, $\psi_{ph} \equiv -Y_hY_p\psi - \gamma^l{}_{ph}Y_l\psi = \psi_{hp}$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых базисных 2-формах $\theta_k \wedge \theta_l$ слева и справа в (18), при $(pq) = (14)$ и $(kl) = (34)$ получим $\psi_{11} = 0$, затем при $(pq) = (11), (kl) = (13)$ и $(pq) = (15), (kl) = (34)$ найдем $A_1\bar{b}_{11} = C_2\bar{b}_{11} = 0$. Если $\bar{b}_{11} \neq 0$, то отсюда следует (14) и по теореме 1 H_{32} имеет постоянную кривизну, что противоречит предположению. Поэтому $\bar{b}_{11} = \psi_{11} = 0$. Получим также $\bar{b}_{12} = \bar{b}_{44} = \bar{b}_{i_1i_2} = \psi_{12} = \psi_{44} = \psi_{i_1i_2} = 0$, где $i_1 = 1, 2, 3,\ i_2 = 4, 5$.

Из (18) при $(pq) = (33)$, (24), (55) следуют равенства

$$C_1\bar{b}_{33} = 0, \tag{19}$$

$$(e_2\bar{b}_{45} - e_1\bar{b}_{22})\,\frac{A_1}{3(f_2 - f_1)} = e_1\psi_{23}, \tag{20}$$

$$C_2\bar{b}_{55} = \psi_{55}. \tag{21}$$

С учетом полученных выше равенств из уравнения (17), где ω_{hs} определены формулами (7), при $(pq) = (35)$ получим $(Y_5\varphi)\bar{b}_{33} = 0$ и из (19) имеем $C_1\bar{b}_{33} = 0$. Если $\bar{b}_{33} \neq 0$, то $C_1 = (Y_5\varphi) = 0$, отсюда $C_1 \equiv e_1Y_3(A_1) = C_2 \equiv e_2Y_5(Y_5\varphi) = 0$. Дифференцируя равенство $C_1 = 0$ по x^1, найдем $\varepsilon_1 = 0$, отсюда $A_1 = 0$ и, следовательно, H_{32} имеет постоянную кривизну, что противоречит предположению, поэтому $\bar{b}_{33} = 0$.

Из уравнения (17) с учетом равенства $\bar{b}_{33} = 0$ при $(pq) = (23)$ найдем $e_1Y_3\bar{b}_{23} = 0$. Из уравнения (17) при $(pq) = (33)$ также получим

$$e_1\bar{b}_{23}(Y_3\varphi) = Y_3\psi, \tag{22}$$

после этого из (17) при $(pq) = (12), (23)$ и уравнения (22) найдем $Y_1\bar{b}_{23} = Y_2\bar{b}_{23} = 0$. Аналогично из (17) имеем $Y_4\bar{b}_{23} = Y_5\bar{b}_{23} = 0$. В итоге $Y_i\bar{b}_{23} = 0$ для всех $i = 1, \ldots, 5$, отсюда следует $\bar{b}_{23} = \mathrm{const}$. Обозначим $\bar{b}_{23} = e_1 c_1$, $c_1 \equiv \mathrm{const}$.

Из уравнения (17) при $(pq) = (11), (14), (24)$ имеем $Y_1\psi = Y_2\psi = Y_4\psi = 0$, отсюда, используя формулы (3), выведем $\psi = \psi(x^3, x^5)$. Интегрируя уравнения (22), где $\bar{b}_{23} = e_1 c_1$, получим $\psi = \dfrac{3}{2} c_1 f_1 + \gamma(x^5)$. Из уравнения (17) при $(pq) = (25)$ следует $c_1(Y_5\varphi) = Y_5\psi$, отсюда после интеграции имеем $\gamma = c_1 f_2 + \mathrm{const}$. В итоге

$$\psi = c_1\left(\frac{3}{2} f_1 + f_2\right) + \mathrm{const} = c_1\varphi + \mathrm{const},$$

Таким образом, теорема доказана. □

Теорема 3. *Любой ковариантно постоянный симметричный тензор b_{ij} в h-пространстве (H_{32}, g) типа $\{32\}$ непостоянной кривизны пропорционален метрическому тензору*

$$b_{ij} = c_2 g_{ij}, \quad c_2 = \mathrm{const}.$$

Доказательство. В косонормальном репере (3) уравнение $b_{ij,k} = 0$ принимает вид

$$d\bar{b}_{pq} + \sum_{h=1}^{5} e_h\left(\bar{b}_{hq}\omega_{p\tilde{h}} + \bar{b}_{ph}\omega_{q\tilde{h}}\right) = 0. \tag{23}$$

Так как это уравнение получается из уравнения (17) при $\psi = \mathrm{const}$, то с учетом полученных выше равенств ($\bar{b}_{11} = \bar{b}_{12} = \bar{b}_{33} = \bar{b}_{44} = \bar{b}_{i_1 i_2} = 0$ при $i_1 = 1, 2, 3$; $i_2 = 4, 5$) из (23) получим

$$(e_2\bar{b}_{45} - e_1\bar{b}_{13})\,\frac{Y_5\varphi}{f_2 - f_1} = 0, \tag{24}$$

$$(e_2\bar{b}_{45} - e_1\bar{b}_{22})\,\frac{(Y_5\varphi)}{(f_2 - f_1)} = 0, \tag{25}$$

$$(e_2\bar{b}_{45} - e_1\bar{b}_{13})\,\frac{Y_3\varphi}{f_2 - f_1} = 0. \tag{26}$$

Из уравнения (23) при $(pq) = (33), (35)$ найдем $e_1\bar{b}_{23}(Y_3\varphi) = 0$, $e_1\bar{b}_{23}(Y_5\varphi) = 0$. Если $\bar{b}_{23} \neq 0$, то $(Y_3\varphi) = (Y_5\varphi) = 0$, отсюда $A_1 = C_2 = 0$, и по теореме 1 H_{32} имеет постоянную кривизну, что противоречит предположению, поэтому $\bar{b}_{23} = 0$. Затем из (23) при $(pq) = (13), (22)$ получим $Y_i b_{13} = Y_i b_{22} = 0$ для всех $i = 1, \ldots, 5$, отсюда следует, что $\bar{b}_{13}$ и $\bar{b}_{22}$ постоянны. Кроме того, доказывается постоянство компоненты $\bar{b}_{45}$.

Из уравнений (21) ($\psi = \mathrm{const}$) и (23) при $(pq) = (35)$ найдем $C_2\bar{b}_{55} = (Y_3\varphi)\bar{b}_{55} = 0$. Если $\bar{b}_{55} \neq 0$, то $(Y_3\varphi) \equiv A_1 = C_2 = 0$ и по теореме 1 H_{32} имеет постоянную кривизну, поэтому $\bar{b}_{55} = 0$.

Обозначим $\bar{b}_{13} = e_1 c_2 = \mathrm{const}$. Из уравнений (24) и (26) имеем $(e_2\bar{b}_{45} - e_1\bar{b}_{13})Y_5\varphi = 0$, $(e_2\bar{b}_{45} - e_1\bar{b}_{13})Y_3\varphi = 0$. Если $(e_2\bar{b}_{45} - e_1\bar{b}_{13}) \neq 0$, то $(Y_3\varphi) = (Y_5\varphi) = 0$, отсюда $A_1 = C_2 = 0$, и по теореме 1 H_{32} имеет постоянную кривизну, следовательно, $e_2\bar{b}_{45} - e_1\bar{b}_{13} = 0$ и $\bar{b}_{45} = e_1 e_2 \bar{b}_{13} = e_2 c_2$. Из уравнений (20) и (25) найдем также $e_2\bar{b}_{45} - e_1\bar{b}_{22} = 0$, отсюда $\bar{b}_{22} = e_1 c_2$. В итоге имеем $\bar{b}_{pq} = c_2\bar{g}_{pq}$, где матрица $(\bar{g}_{pq})$ определена каноническими формами (4) и множитель c_2 постоянен, что и требовалось доказать. □

Так как векторное поле X является аффинным движением в H_{32}, если и только если $(L_X g)_{,k} = 0$, то из теоремы 3 следует

Теорема 4. *Всякое аффинное движение X в h-пространстве (H_{32}, g) типа $\{32\}$ непостоянной кривизны является инфинитезимальной гомотетией:* $L_X g = c_2 g,\ c_2 = \mathrm{const}$.

Поскольку два решения h_1 и h_2 уравнения Эйзенхарта (1) с одинаковой правой частью могут отличаться лишь на ковариантно постоянный тензор b, из теоремы 2 и линейности уравнения (15) следует, что общее решение уравнения Эйзенхарта в обыкновенном h-пространстве (H_{32}, g) типа $\{32\}$ может быть записано в виде $c_1 h + b$ или в силу теоремы 3 в виде $c_1 h + c_2 g$, где $h = a + 2\varphi g$, φ дается формулой (8), g и a определены в косонормальном репере (3) каноническими формами (4) [3], c_1, c_2 – const. Отсюда следует

Теорема 5. *Векторное поле X является проективным движением в h-пространстве (H_{32}, g) непостоянной кривизны тогда и только тогда, когда*

$$L_X g = c_1 h + c_2 g \equiv c_1(a + 2\varphi g) + c_2 g,$$

где φ – определяющая функция (8) *проективного движения X, g и a определены в косонормальном репере* (3) *каноническими формами* (4)*, c_1, c_2 – произвольные постоянные.*

Пусть $(X_1, \dots, X_r)$ – базис алгебры Ли P_r в H_{32}, тогда $L_{X_s} g = \underset{s}{c}_1 h + \underset{s}{c}_2 g$, $s = 1, \dots, r$, где одна из постоянных $\underset{s}{c}_1$, например $\underset{1}{c}_1$, отлична от нуля, так как в противном случае P_r состоит из гомотетий. В новом базисе $Z_1 = X_1$, $Z_\tau = \underset{1}{c}_1 X_\tau - \underset{\tau}{c}_1 X_1$ имеем $L_{Z_\tau} g = (\underset{1}{c}_1 \underset{\tau}{c}_2 - \underset{1}{c}_2 \underset{\tau}{c}_1) g$, $\tau = 2, \dots, r$, то есть $Z_2, \dots, Z_r$ – инфинитезимальные гомотетии.

Таким образом, доказана

Теорема 6. *Если h-пространство (H_{32}, g) типа $\{32\}$ непостоянной кривизны допускает r-мерную негомотетическую проективную алгебру Ли P_r, то эта алгебра содержит $(r-1)$-мерную гомотетическую подалгебру.*

Литература

1. *Аминова А.В.* Проективные преобразования псевдоримановых многообразий. – М.: Янус-К, 2003. – 619 с.
2. *Аминова А.В.* Алгебры Ли инфинитезимальных проективных преобразований лоренцевых многообразий // Усп. матем. наук. – 1995. – Т. 50, № 1. – С. 69–142.
3. *Аминова А.В., Хакимов Д.Р.* О проективных движениях 5-мерных пространств. I. H-пространства типа $\{32\}$ // Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. – 2018. – Вып. 4. – С. 21–31. – doi: 10.17238/issn2226-8812.2018.4.21-31.

Поступила в редакцию
13.12.2019

Аминова Ася Васильевна, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории относительности и гравитации

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *asya.aminova@kpfu.ru*

Хакимов Джамолиддин Рахмонович, аспирант кафедры геометрии

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: *dzhamoliddink@mail.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA. SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2020, vol. 162, no. 2, pp. 111–119

doi: 10.26907/2541-7746.2020.2.111-119

On the Properties of the Projective Lie Algebras of Rigid h-Spaces H_{32} of the Type $\{32\}$

A.V. Aminova, D.R. Khakimov***

Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia
E-mail: **asya.aminova@kpfu.ru*, ***dzhamoliddink@mail.ru*

Received December 13, 2019

Abstract

The five-dimensional pseudo-Riemannian spaces that admit infinitesimal projective transformations were studied. A general solution of the Eisenhart equation in the h-space H_{32} of non-constant curvature was found. Necessary and sufficient conditions were established for the existence of a non-homothetic projective motion in the h-space H_{32} of non-constant curvature, and, as a consequence, the structure of the non-homothetic projective Lie algebra in this space was determined.

Keywords: five-dimensional pseudo-Riemannian manifold, rigid h-space of type $\{32\}$, Eisenhart equation, projective Lie algebra

References

1. Aminova A.V. *Proektivnye preobrazovaniya psevdorimanovykh mnogoobrazii* [Projective Transformations of Pseudo-Riemannian Manifolds]. Moscow, Yanus-K, 2003. 619 p. (In Russian)
2. Aminova A.V. Lie algebras of infinitesimal projective transformations of Lorentz manifolds. *Russ. Math. Surv.*, 1995, vol. 50, no. 1, pp. 69–143. doi: 10.1070/RM1995v050n01ABEH001691.
3. Aminova A.V., Khakimov D.R. On projective motions of 5-dimensional spaces I. H-spaces of the type $\{32\}$. *Prostranstvo, Vremya, Fundam. Vzaimodeistviya*, 2018, no. 4, pp. 21–31. doi: 10.17238/issn2226-8812.2018.4.21-31. (In Russian)

⟨ ***Для цитирования***: *Аминова А.В., Хакимов Д.Р.* О свойствах проективных алгебр Ли жестких h-пространств H_{32} типа $\{32\}$ // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2020. – Т. 162, кн. 2. – С. 111–119. – doi: 10.26907/2541-7746.2020.2.111-119. ⟩

⟨ ***For citation***: Aminova A.V., Khakimov D.R. On the properties of the projective Lie algebras of rigid h-spaces H_{32} of the type $\{32\}$. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2020, vol. 162, no. 2, pp. 111–119. doi: 10.26907/2541-7746.2020.2.111-119. (In Russian) ⟩